Buku 1 ini yang berjudul FISIKA MATEMATIKA terdiri dari delapan bab meliputi materi – materi : (1) *Deret* materi deret ini mencakup antara deret hitung (deret arimatika, geometri, dan harmonik) dan deret pangkat (deret maclaurine dan taylor) dengan masing-masing deret pangkat meliputi deret eksponensial, sinus, cosinus, logaritma, dan bilangan berpangkat, (2) *Bila-ngan Kompleks* meliputi materi bilangan real dan imajiner pada fungsi-fungsi trigonometri, logaritma, dan bilangan-bilangan berpangkat, (3) *Matriks dan Determinan* meliputi materi penggolongan matriks beserta inversnya baik matriks secara real atau imajiner dalam operator integral dan differensial, (4) *Diferensial Parsial* meliputi materi operator fungsi bila-ngan aljabar dan trigonometri dalam masalah fisis yang ada dalam kehidupan sehari-hari, (5) *Integral Lipat* meliputi operator integral secara bertingkat pada fungsi bilangan aljabar dan trigonometri beserta pene-rapannya pada masalah fisis, (6) *Analisis Vektor* meliputi materi operator vektor yang menempati bidan dan ruang beserta penerapannya dalam kehidupan sehari-hari, (7) *Deret Fourier* meliputi materi perubahan bentuk fungsi bilagan aljabar bertingkat dan trigonometri dalam penyelesaian masalah fisis, (8) *Persamaan Diferensial Biasa* merupakan materi yang didasarkan pada koordinat dan tipikal penyelesaian masalah fisis. Analisis dalam buku 1 ini pada setiap bab senantiasa diliputi masalah – masalah analisis matematis dengan materi fisis yang meliputi materi pada bidang *gerak, gelombang, listrik, panas, bahkan fisika modern* dan diakhir setiap bab diberikan soal – soal latihan agar dapat membantu mahasiswa dalam memahami materi yang telah dipelajari.

Anggota IKAPI No. 127/JTI/2011

ISBN: 978-602-9030-20-4

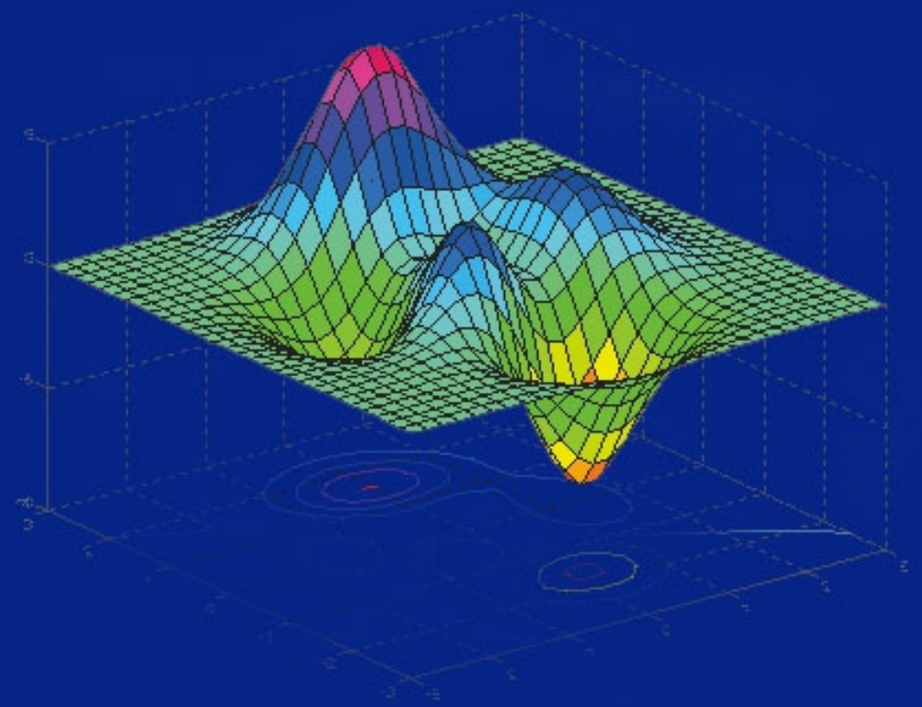
Jember University Press
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121
Telp. 0331-330224, psw. 319, 320
***E-mail*: upt-penerbitan@unej.ac.id**

FISIKA MATEMATIKA Buku 1

Buku 1

FISIKA MATEMATIKA

Meliputi Materi:
Deret, Bilangan Kompleks, Matrik dan Determinan, Diferensial Parsial, Integral Lipat, Analisis Vektor, Deret Fourier, Persamaan Diferensial Biasa



SRI ASTUTIK

Membangun Generasi Menuju Insan Berprestasi

FISIKA MATEMATIKA

(Buku 1)

Meliputi Materi:
Deret, Bilangan Kompleks, Matrik dan Determinan, Diferensial Parsial, Integral Lipat, Analisis Vektor, Deret Fourier, Persamaan Diferensial Biasa

Oleh:

SRI ASTUTIK

FISIKA MATEMATIKA (Buku 1)

Meliputi Materi: Deret, Bilangan Kompleks, Matrik dan Determinan, Diferensial Parsial, Integral Lipat, Analisis Vektor, Deret Fourier, Persamaan Diferensial Biasa

Diterbitkan oleh
UPT Penerbitan UNEJ
Jl. Kalimantan 37 Jember 68121
Telp. 0331-330224, Psw. 319, Fax. 0331-339029
E-mail: upt-penerbitan@unej.ac.id

Cover/layout: Noerkoentjoro W.D.

Perpustakaan Nasional RI – Katalog Dalam Terbitan

530.1
AST ASTUTIK, Sri
f Fisika Matematika: Deret, Bilangan Kompleks, Matrik dan Determinan, Diferensial Parsial, Integral Lipat, Analisis Vektor, Deret Fourier, Persamaan Diferensial Biasa/oleh Sri Astutik.--
Jember: Jember University Press, 2012
x, 208 hlm. ; 23 cm.

ISBN: 978-602-9030-20-4

1. TEORI FISIKA MATEMATIS
I. Judul

PRAKATA

Puji syukur kehadirat Tuhan Yang Maha Esa atas segala rahmat serta hidayah-Nya sehingga penulisan buku ajar materi kuliah FISIKA MATEMATIKA (Buku 1) ini dapat terselesaikan. Buku ajar ini tersusun secara sistematis baik digunakan oleh mahasiswa Program Studi Pendidikan Fisika dan mahasiswa Jurusan Fisika. Buku ajar ini dibuat bertujuan sebagai referensi serta jendela pengetahuan bagi mahasiswa dalam memahami konsep – konsep fisis maupun matematis secara sistematis.

Isi dari buku ajar ini disusun berdasarkan materi perkuliahan selama satu semester dengan nilai bobot 4 Sistem Kredit Semester (SKS). Buku ajar ini terdiri dari delapan bab meliputi materi – materi : (1) Deret, (2) Bilangan Kompleks, (3) Matriks dan Determinan, (4) Diferensial Parsial, (5) Integral Lipat, (6) Analisis Vektor, (7) Deret Fourier, (8) Persamaan Diferensial Biasa. Analisis dalam buku ajar ini pada setiap bab senantiasa diliputi masalah – masalah analisis matematis dengan materi fisis yang meliputi materi gerak, gelombang, listrik, panas, bahkan fisika modern dan diakhir setiap bab diberikan soal – soal latihan agar dapat membantu mahasiswa dalam memahami materi yang telah dipelajari.

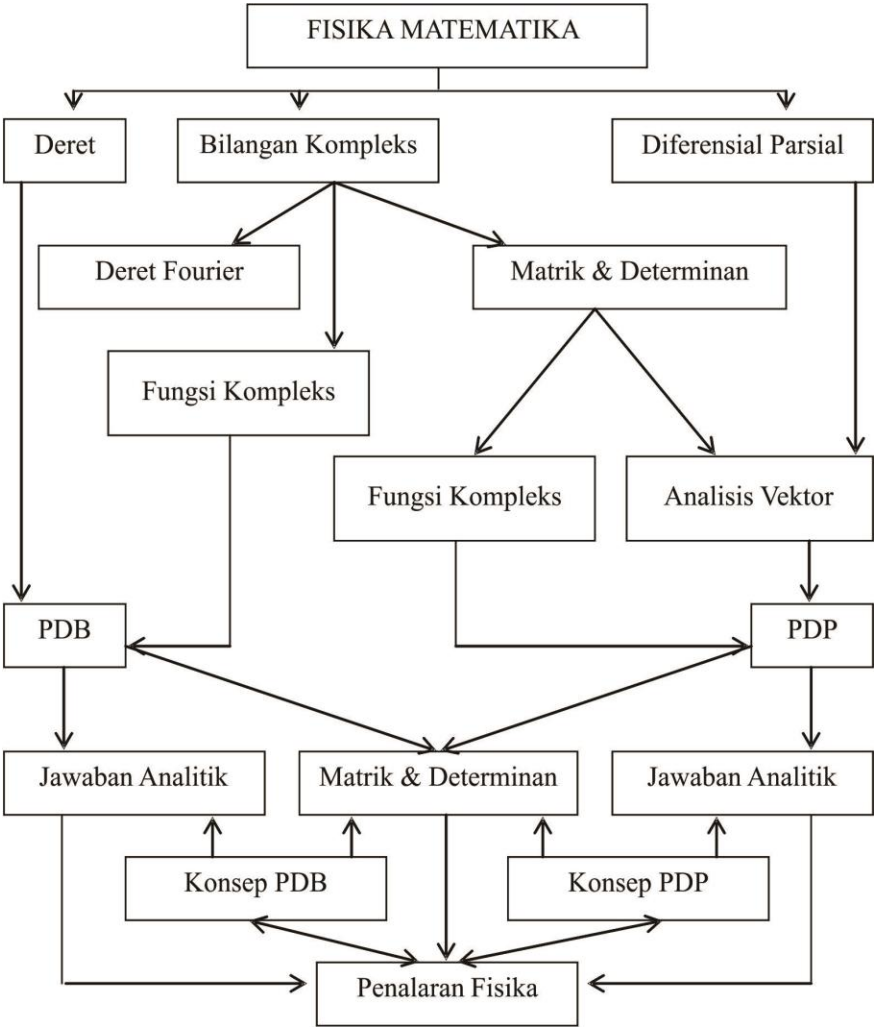
Penulis mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu sehingga dapat terselesaikan buku ajar FISIKA MATEMATIKA (Buku 1) ini, baik dukungan dari keluarga, mahasiswa – mahasiswa yang membantu penyusunan materi – materi buku ajar ini, dan terutama pada reviewer buku ini yaitu bapak Prof. Drs. I Made Tirta, M.Sc, Ph.D yang berkenan memberikan gambaran pemikiran demi terselesainya buku ajar ini. Saran dan kritik senantiasa diberikan kepada penulis demi kesempurnaan isi dari buku ajar ini.

Penulis mengharapkan buku ajar FISIKA MATEMATIKA (buku 1) ini dapat menjadi kontribusi secara baik yaitu sebagai pembuka cakrawala untuk memahami materi dari fisika klasik maupun materi fisika lanjut baik secara kontekstual maupun matematis.

Jember, April 2012

Dra. Sri Astutik, M.Si

PETA KONSEP MATERI FISIKA MATEMATIKA



DAFTAR ISI

Halaman

DAFTAR GAMBAR

Halaman

DAFTAR TABEL

Halaman

BAB I
DERET

Kompetensi Dasar :

Mahasiswa mampu menggunakan deret infinitif untuk menyelesaikan permasalahan fisika.

Indikator Kompetensi :

1. Mahasiswa dapat mendefiniskan notasi deret.
2. Mahasiswa dapat menentukan sifat deret secara konvergen dan divergen.
3. Mahasiswa dapat menguji deret dengan uji tertentu.
4. Mahasiswa dapat menggunakan deret kuasa (pangkat) dalam menyelesaikan masalah fisika
5. Mahasiswa dapat menentukan daerah konvergensi dari deret kuasa (pangkat)
6. Mahasiswa dapat menyelesaikan masalah fisika dengan menggunakan pendekatan deret kuasa (pangkat)

1.1 Pendahuluan

Deret merupakan sebuah pola hitung matematis yang senantiasa digunakan dalam kehidupan masyarakat. Utamanya deret merupakan jembatan awal untuk menentukan sebuah pola tertentu dari sebuah bilangan matematis. Di dalam gejala fisika senantiasa pola deret digunakan sebagai jalan untuk perhitungan secara rumit baik hal itu diterapkan dalam perhitungan perhitungan limit, diferensial, integral bahkan sampai perhitungan numerik secara komputasi. Di dalam bab pertama ini akan senantiasa membahas secara sistematis penerapan deret dari yang sederhana hingga ke deret yang berbentuk kompleks.

1.2 Barisan

Tanpa disadari di alam raya ini semua aturan yang tertata secara menyeluruh dapat dinyatakkan dengan sebuah urutan tertentu dan pola tertentu juga. Seperti halnya sebuah urutan nomor absen pekerjaan, urutan halaman buku, urutan NIM (Nomor induk Mahasiswa) dan NIS (Nomor Induk Siswa) ini adalah sebuah barisan juga.

Dapat ditarik kesimpulan *Barisan* merupakan suatu urutan himpunan besaran $a_1, a_2, a_3, \cdots$ yang disusun dalam urutan tertentu dan suku - sukunya juga dibentuk menurut pola tertentu.

Contoh 1.1 :

a. $1, 3, 5, 7$ .....
b. $2, 6, 18, 54$ .....
c. $1^2, -2^2, 3^2, -4^2,$ .....

Dari contoh barisan (a), (b), dan (c) secara langsung dapat ditentukan pola barisannya. Berbeda lagi dengan urutan bilangan yang berbentuk :

$$1, -5, -38, 10 \qquad (1.1)$$

Pada persamaan (1.1) juga sebuah barisan, tetapi polanya tidak begitu jelas dan untuk suku – suku berikutnya sangat sulit untuk didapatkan. Berdasarkan banyaknya suku – suku suatu bilangan, maka barisan dapat dibagi menjadi 2 yaitu barisan berhingga dan barisan tak berhingga.

1.1.1 Barisan Berhingga

Adalah suatu barisan yang memiliki batasannya antar suku – suku secara berhingga atau terbatas. Dapat dituliskan dalam bentuk: $(a_1, a_2, a_3, \cdots\ a_n)$.

Contoh 1.2 :

a. NIM (Nomor Induk Mahasiswa)
b. NIS (Nomor Induk Siswa)
c. Halaman dari isi buku.
d. Nomor urut rumah.

1.1.2 Barisan Tak Berhingga

Adalah suatu barisan yang memiliki banyak suku- suku yang memiliki batas tak berhingga nilainya. Dan dapat dituliskan dalam bentuk: $(a_1, a_2, a_3, \cdots\ a_n, a_{n-1}, \cdots)$.

Contoh 1.3 :

a. Semua bilangan asli (1, 2 3, …) apabila dilanjutkan tidak terdapat batasnya.

b. Banyaknya hamparan pasir ditengah gurun Sahara yang memiliki jumlah yang sangat banyak dan tak terhingga.
c. Banyaknya benda – benda dilangit yang jumlahnya sangatlah banyak dan tak terhingga jumlahnya.

1.3 Definisi Dan Notasi Deret

Sebagaimana telah ditentukan diawal berdasarkan suku – sukunya terbagi atas dua bagian pada suatu deret yaitu deret berhingga dan deret tak berhingga.

Contoh 1.4 :

a. $1, 3, 5, 7$…… (Barisan)
b. $1 + 3 + 5 + 7$…… (Deret)

Suku-suku dari sebuah deret dinyatakan dalam bentuk :

Deret Berhingga

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots a_n = \sum_{n=1}^{n} a_n \qquad (1.2)$$

Deret Tak Berhingga

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots a_n + a_{n-1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (1.3)$$

Jumlah suku - suku dari deret dinyatakan sebagai berikut

$S_1 = a_1 \qquad S_2 = a_1 + a_2 \quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

Deret Berhingga

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots a_n \qquad (1.4)$$

Deret Tak Berhingga

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots a_n + a_{n+1} + \cdots \qquad (1.5)$$

Keterangan : S_n merupakan jumlah n suku yang pertama.

Uji Kepahaman Anda

1. Tentukanlah bentuk umum suku ke – n dari suku berikut :

$$\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^3}{6!}+\cdots\cdots\cdots\cdots+a_n+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

2. Uraikanlah deret – deret berikut dibawah ini :

a. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{\sqrt{2n}}$

b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2}\left(\frac{x}{4}\right)^n$

1.3.1 Deret Positif

Merupakan deret yang suku – sukunya selalu bernilai positif, atau selalu bernilai negatif. Jika terdapat suku – sukunya berselang seling maka bukan merupakan sebuah deret positif. Di bawah ini yang termasuk dari deret positif :

a. Deret Hitung (Aritmatika)

Dapat dituliskan : $a_1+(a_1+b)+(a_1+2b)+\cdots+\{a_1+(n-1)b\}$. Suku ke - n dituliskan lagi menjadi :

$$a_n=a_1+(n-1)b \qquad (1.6)$$

Jumlah n suku pertama dapat dinyatakan menjadi :

$$S_n=a_1+(a_1+b)+(a_1+2b)+\cdots+\{a_1+(n-1)b\}$$

$$S_n=\frac{n}{2}\{2a_1+(n-1)b\} \qquad (1.7)$$

Dengan kata lain : a_1 suku pertama dan $b=a_n-a_{n-1}$

b. Deret Ukur (Geometri)

Dapat dituliskan : $a+ar+ar^2+\cdots+ar^{n-1}$. Suku ke - n dituliskan lagi menjadi :

$$a_n=ar^{n-1} \qquad (1.8)$$

Jumlah n suku pertama dapat dinyatakan menjadi :

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$$

$$S_n = a\,\frac{(1-r^n)}{(1-r)} \qquad (1.9)$$

Dengan kata lain : a suku pertama dan r sebagai pembanding

c. Deret Harmonik

Mempunyai bentuk :

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad ; \; p > 0 \qquad (1.10)$$

Uji Kepahaman Anda

1. Termasuk deret apakah deret berikut ini :

   a. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{n} + \cdots\cdots\cdots$

   b. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\cdots\cdots$

   c. $2 + 5 + 8 + 11 + \cdots\cdots + \{2 + (n-1)3\} + \cdots\cdots$

2. Termasuk deret apakah deret berikut ini dan tentukan pula S_n :

   a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \cdots\cdots\cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\cdots\cdots$

   b. $2 + 5 + 8 + 11 + \cdots\cdots + \{2 + (n-1)3\} + \cdots\cdots$

1.3.2 Uji Konvergensi Deret Positif

Ada Beberapa cara untuk menguji deret, hal ini tergantung bentuk deret yang akan di uji :

1. Deret Konvergen → deret yang jumlah n sukunya menuju (mengumpul) ke subuah harga tertentu, jika $n \to \infty$
2. Deret Divergen → deret yang jumlah n sukunya tidak menuju (menyebar) ke sebuah harga tertentu.

Cara - Cara Untuk Menguji Konvergensi Suatu Deret Positif

Ada berbagai metode untuk menguji konvergensi dari sebuah deret positif dalam hal ini dapat dapat disebutkan yaitu uji limit, uji integral, uji perbandingan, uji rasio/nisbah, dan uji banding limit. Dibawah ini akan diuraikan pada masing – masing dari berbagai metode pengujian konvergensi suatu deret positif.

1. **Uji Limit (Uji Ke – 1)**

   Konvergensi suatu deret dapat diketahui jika memenuhi teorema dibawah ini :

   a. Apabila terdapat ketentuan :

   $$\lim_{n\to\infty} S_n = S \qquad (1.11)$$

   Terdapat sebuah nilai ataupun fungsi maka deret tersebut merupakan deret konvergen. Apabila terdapat ketentuan :

   $$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty \qquad (1.12)$$

   Tidak terdapat sebuah nilai ataupun fungsi maka deret tersebut merupakan deret divergen

   b. Apabila terdapat ketentuan :

   $$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \qquad (1.13)$$

   Hasilnya tidak sama dengan nol atau lebih maupun kurang dari nol maka deret tersebut adalah deret divergen. Apabila terdapat ketentuan :

   $$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (1.14)$$

   deretnya mungkin konvergen atau divergen, perlu di uji dengan cara lain untuk memastikan jenis derert tersebut.

Contoh 1.5 :

Tentukanlah konvergensi dari deret berikut ini :

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\cdots\cdots\cdots$$

Jawab :

$$\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{7}{8}+\frac{15}{16}+\cdots\cdots\cdots+\frac{2^n-1}{2^n}+\cdots\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-1}{2^n}$$

Dengan menggunakan teorema (b) sehingga :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2^n-1}{2^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$
$$= \left(1-\frac{1}{2^\infty}\right)$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Jadi dapat disimpulkan bahwasannya deret ini merupakan deret divergen.

Uji Kepahaman Anda

1. Buktikan persamaan (1.9) untuk $r = 1$ adalah deret Divergen
2. Buktikan pada konvergensi :

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\cdots\cdots\cdots$$

Adalah Divergen

2. Uji Integral (Uji Ke - 2)

Misal $f(n)$ menunjukan suku umum a_n deret $\sum_{n-1}^{\infty} a_n$, dengan suku-suku positif. Jika $f(x) > 0$ dan tidak pernah bertambah pada selang $x > N$ dengan nilai N bilangan positif, maka

a. $\sum_{n-1}^{\infty} a_n \rightarrow$ konvergen, jika : $\int_N^\infty f(x)dx =$ berhingga (1.15)

b. $\sum_{n-1}^{\infty} a_n \rightarrow$ divergen, jika : $\int_N^\infty f(x)dx =$ tak berhingga (1.16)

Contoh 1.6 :

Tentukanlah konvergensi dari deret berikut ini :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots\cdots$$

Jawab :

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

Dengan menggunakan teorema (b) sehingga :

$$f(x)=\frac{1}{2^x}$$

$$\int_1^{\infty} f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{2^x}dx$$

$$=\int_1^{\infty}\frac{1}{2^x}\frac{d(2^x)}{2^x\ln 2}$$

$$=\frac{1}{\ln 2}\int_1^{\infty}\frac{d(2^x)}{(2^x)^2}$$

$$=-\frac{1}{\ln 2}[2^x]_1^{\infty}$$

$$=-\frac{1}{\ln 2}(1-2)$$

$$\int_1^{\infty} f(x)dx=\frac{1}{\ln 2}$$

Jadi dapat disimpulkan bahwasannya deret ini merupakan deret konvergen.

Contoh 1.7 :

Tentukanlah konvergensi dari deret berikut ini :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\cdots\cdots\cdots$$

Jawab :

$$\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}}+\frac{1}{\sqrt{9}}+\cdots\cdots\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n+1}}+\cdots\cdots\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

Dengan menggunakan teorema (b) sehingga :

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2x+1}}$$

$$\int_1^\infty f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$$
$$= \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2x+1}}\frac{d(2x+1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^\infty \frac{d(2x+1)}{\sqrt{2x+1}}$$
$$= \left[\sqrt{2x+1}\right]_1^\infty$$
$$= \left(1-\sqrt{3}\right)$$
$$\int_1^\infty f(x)dx = -0{,}73$$

Jadi dapat disimpulkan bahwasannya deret ini merupakan deret konvergen.

Uji Kepahaman Anda

Ujilah deret berikut ini :

a. $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{3}{7}+\frac{4}{9}+\cdots$

b. $\sin\pi+\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{9}\sin\frac{\pi}{3}+\frac{1}{16}\sin\frac{\pi}{4}+\cdot\cdots$

3. Uji Perbandingan (Uji Ke - 3)

Suatu deret dengan suku – suku positif merupakan konvergen, apabila suku – sukunya lebih kecil dari pada suku – suku seletak deret positif lainnya. Begitu pula sebaliknya deret menjadi divergen apabila memiliki suku – suku lebih besar dari pada suku seletak deret lain yang telah diketahui. Secara matematis dapat dituliskan dalam bentuk persamaan deret :

$$\sum_{n-1}^{\infty} b_n = \text{ deret positif konvergen} \qquad (1.17)$$

maka deret tersebut menjadi :

$$\sum_{n-1}^{\infty} a_n = \text{ deret positif konvergen} \qquad (1.18)$$

dimana asalkan $a_n \leq b_n$. Untuk n yang cukup besar . Jika $a_n \geq b_n$ maka tidak dapat diperoleh kesimpulan sehingga perlu di uji kembali dengan cara lain.

$$\sum_{n-1}^{\infty} d_n = \text{ deret positif divergen} \qquad (1.19)$$

maka tersebut menjadi :

$$\sum_{n-1}^{\infty} a_n = \text{deret positif divergen} \qquad (1.20)$$

dimana asalkan $a_n \geq d_n$. Jika $a_n \leq d_n$ maka tidak peroleh kesimpulan sehingga perlu di uji kembali dengan cara lain.

Uji Kepahaman Anda

Ujilah deret berikut ini :

$$1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots$$

4. Uji Rasio/ Nisbah (Uji Ke - 4)

Misal $+a_2 + a_3 + \cdots\ a_n \cdots \rightarrow$ deret positif. Cari pernyataan untuk a_n dan a_{n+1} yaitu suku ke n dan ke $(n+1)$, kemudian bentuklah pembagian $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ dan setelah itu tentukanlah harga limit pembagian ini untuk $n \rightarrow \infty$

Jika :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \text{deretnya konvergen} \qquad (1.21)$$

Jika :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{deretnya divergen} \tag{1.22}$$

Jika :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \tag{1.23}$$

Apabila dilakukan uji nisbah/rasio masih belum terdapat hasil yang sesuai maka perlu dilakukan dengan uji lain agar diperoleh hasil yang sesuai dengan ketentuan - ketentuan yang sesuai dengan prasyarat tiap masing – masing uji konvergensi.

Uji Kepahaman Anda

Ujilah deret berikut ini :

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \cdots\cdots\cdots$$

5. Uji Banding Limit (Uji Ke – 5)

Pada uji banding limit memiliki ketentuan persyaratan bawasannya :

1. Jika ada ketentuan sumasi deret :

$$\sum_{n-1}^{\infty} b_n \tag{1.24}$$

adalah konvergen dan jika memiliki syarat :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} \tag{1.25}$$

adalah berhingga (tak perlu nol) maka

$$\sum_{n-1}^{\infty} a_n \text{ adalah konvergen} \tag{1.26}$$

2. Jika ada ketentuan sumasi deret :

$$\sum_{n-1}^{\infty} d_n \tag{1.27}$$

adalah divergen dan jika memiliki syarat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} > 0 \tag{1.28}$$

adalah berhingga, maka

$$\sum_{n-1}^{\infty} d_n \text{ adalah divergen} \tag{1.29}$$

Contoh 1.8 :

Ujilah dengan menggunakan teorema uji banding limit deret berikut ini :

$$1 + \frac{7}{9} + \frac{10}{16} + \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Jawab :

$$1 + \frac{7}{9} + \frac{10}{16} + \cdots\cdots\cdots\cdots + \frac{3n+1}{(n+1)^2} + \cdots\cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+1}{(n+1)^2}$$

Dengan menggunakan deret uji divergen $d_n = 1/\sqrt{2n+1}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{(n+1)^2} \cdot \frac{\sqrt{2n+1}}{1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(3n+1)\sqrt{2n+1}}{n^2+2n+1} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)\frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}}{\frac{n^2}{n^2} + 2\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right)\frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}}{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} = \infty$$

Jadi dapat disimpulkan bahwasannya deret ini merupakan deret divergen

Uji Kepahaman Anda

1. Selidikilah konvergensi dari deret berikut dengan uji rasio :

$$\frac{1}{3}+\frac{2!}{3^2}+\frac{3!}{3^3}+\frac{4!}{3^4}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

2. Ujilah deret berikut dengan uji banding limit :

$$\frac{11}{4}+\frac{12}{11}+\frac{13}{30}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

3. Konvergensikan deret berikut ini :

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n^2-4}$$

4. Selidikilah konvergensi dari deret berikut ini :

$$\frac{11}{4}+\frac{12}{11}+\frac{13}{30}+\cdots\cdots\cdots\cdots$$

1.4 Deret Bolak-Balik

Deret ini disebut pula dengan deret tukar. Dimana deret ini mempunyai bentuk :

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,a_n \qquad (1.30)$$

dengan $a_n > 0$.

1.4.1 Uji Konvergensi Deret Bolak-Balik

Deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,a_n$ disebut deret konvergen jika :

a. $|a_{n+1}| \leq a_n$
b. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Jika kedua syarat diatas tak terpenuhi, maka deret tersebut divergen.

1.4.2 Deret Konvergen Bersyarat

Deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\, a_n$ konvergen bersyarat jika $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \rightarrow$ divergen

Catatan :

a. Jika :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1.31}$$

Merupakan deret konvergen mutlak,

Maka :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ deret konvergen} \tag{1.32}$$

b. Jika

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ deret divergen} \tag{1.33}$$

Maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{1.34}$$

deret divergen dan tidak untuk sebaliknya.

1.4.3 Konvergen Mutlak

Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, a_n \tag{1.35}$$

konvergen mutlak jika

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergen} \tag{1.36}$$

1.5 Deret Pangkat/ Deret Kuasa

Dari ketentuan deret pangkat dan deret kuasa adalah konvergensi dari deret- deret berhingga sampai tak berhingga, deret Taylor dan deret Maclaurine.

1.5.1 Deret Pangkat/Kuasa mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, x^n \qquad (1.37)$$

$$a_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, (x-a)^n \qquad (1.38)$$

Suku pertama deret pangkat diatas dipilih notasi $C_0 \rightarrow$ suku ke nol. Sama halnya dengan dengan deret pangkat konvergen mutlak dan bersyarat (konvergen) dan (divergen)

1.5.2 Selang Konvergensi Deret Pangkat

Pada umumnya sebuah deret pangkat konvergen untuk : $|x| < r$, atau $-r < x < r$ dan divergen untuk $|x| > r$, dimana konstanta r disebut jari-jari konvergen dari deret tersebut. Sedangkan untuk $r = |x|$, deret tersebut dapat konvergen ataupun tidak. $|x| = r$ atau $-r < x < r$ disebut selang. Untuk menentukan selang besarnya digunakan uji nisbah.

Kasus khusus : $r = 0$

Deret tersebut konvergen hanya untuk $x = 0$, jika $r = \infty$, maka deret tersebut konvergen untuk semua $x(-\infty < x < \infty)$

Contoh 1.9 :

Tentukan selang konvergensi dari deret berikut ini :

$$1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \cdots\cdots\cdots + \frac{(-x)^n}{2^n} + \cdots\cdots\cdots$$

Jawab :

Dengan menggunakan uji nisbah bahwasannya , kita ambil ketentuan nilai dari a_n

$$a_n = \frac{(-x)^n}{2^n}$$
$$a_{n+1} = \frac{(-x)^{n+1}}{2^{n+1}}$$

Dengan mengambil nilai limit perbandingan dari suku – suku diatas :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-x)^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(-x)^n} \right|$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{2} \right|$$

Sesuai dengan teorema uji konvergensi dengan menggunakan uji nisbah, agar deret diatas tergolong deret konvergen, maka harus memenuhi syarat:

$$\left|\frac{x}{2}\right| < 1 \text{ atau } -1 < \left|\frac{x}{2}\right| < 1$$

Atau dapat dituliskan lagi dalam bentuk:

$$-2 < x < 2$$

1.5.3 Konvergensi Seragam (*Uniform*)

Dalam artian deret fungsi seperti deret pangkat bila konvergen, maka perlu diselidiki labih lanjut apakah deret tersebut juga konvergen seragam. Artinya apakah deret tersebut tetap yang diperoleh dari mensubtitusikan nilai x dalam selang konvergensinya S_x. Dengan syarat bahwasannya :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \lim_{n\to 0} S_n(x) = S_x \tag{1.39}$$

Selanjutnya berlaku :

$$|S_n(x) - S_x| < \varepsilon \text{ untuk semua } n > N \tag{1.40}$$

Dengan kata lain N bergantung pada ε dan tidak bergantung pada, maka definisi tersebut dinamakan konvergen seragam dalam selang konvergensi. Kita tahu bahwasannya $S_x - S_n(x) = R_n(x)$ yang nilai sisanya adalah n suku , maka secara ekuivalen bahwa $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)$ konvergen bersama dalam selang konvergensinya.

Uji Kepahaman Anda

1. Ujilah konvergensi dari deret pangkat berikut ini

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

2. Ujilah apakah deret berikut konvergen Mutlak/bersyarat :

$$2 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

1.6 Menguraikan Fungsi dengan Uraian Taylor

Secara umum uraian tersebut ditulis :

$$f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-2)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n + \cdots \quad (1.41)$$

Dimana a adalah konstanta yang dapat bernilai nol, maka selanjutnya dapat ditentukan :

- Nilai-nilai koefesien C_n sebagai fungsi dari n, sehingga penulisan fungsi diatas berupa suatu identitas (berlaku untuk semua x).
- Selang konvergensi deret pangkatnya dimana identitas a berlaku. Dengan menerapkan diferensiasi , maka :

$$f(a) = C_0 + C_1(0) + C_2(0)^2 + \cdots + C_n(0)^n + \cdots = C_0$$
$$f'(a) = 0 + C_1 + 2C_2(x-a)|_{x=a} + \cdots + n\,C_n(n-a)^{n-1} + \cdots = C_1$$
$$f''(a) = 0 + 0 + 2C_2 + \cdots + n\,(n-1)C_n\,(0)^{n-2} + \cdots = 2!\,C_2$$

Sehingga :

$$C_n = \frac{1}{n!} f'^n(a) \quad (1.42)$$

Persamaannya dapat dituliskan:

$$f(x)|_{x=a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f'^n(a)(x-a)^n \quad (1.43)$$

Persamaan 1.43 merupakan persamaan Fungsi Tyalor $f(x)$ jika $a = 0$ maka deret taylornya berubah menjadi :

$$f(x)|_{a=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f'^{n}(0)(x)^{n} \tag{1.44}$$

Persamaan (1.44) merupakan persamaan deret Maclaurine $f(x)$ disekitar $= 0$.

Deret Taylor dan deret Maclaurine dapat diterapkan pada fungsi eksponensial, logaritmik, Sinus dan Cosinus.

1.6.1 Deret Eksponensial

Jika kita cari deret Taylor fungsi eksponensial $f(x) = e^{x}$ disekitar $x = 0$, maka persoalan ini dapat diselesaikan dengan langkah – langkah sebagai berikut ini :

Langkah pertama uraikan uraian taylor disekitar $x = 0$ maka deret tersebut disebut deret Maclaurine seperti pada persamaan (1.44) dan menguraikan semua orde fungsi, terhadap , sehingga diperoleh hasil :

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{x} \\ f'(x) &= e^{x} \\ f''(x) &= e^{x} \\ f'^{(n)}(x) &= e^{x} \end{aligned} \tag{1.45}$$

Disekitar $x = 0$, diperoleh hasil :

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= 1 \\ f'^{(n)}(0) &= 1 \end{aligned} \tag{1.46}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (1.46) pada persamaan (1.44) akan diperoleh uraian deret Taylor disekitar $= 0$, fungsi $f(x) = e^{x}$ yaitu :

$$f(x) = e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^{2}}{2!} + \cdots\cdots\cdots + \frac{x^{n}}{n!} + \cdots\cdots\cdots \tag{1.47}$$

Dengan menggunakan uji nisbah kita dapat menentukan selang konvergensinya :

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_{n}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| \left| \frac{n!}{x^{n}} \right| \end{aligned}$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(n+1)!}\right|$$

$r = |x|$, dimana nilai dari $x < 1$

Sehingga selang konvergensinya adalah $-\infty < x < \infty$

1.6.2 Deret Logaritma

Jika kita cari deret Taylor fungsi eksponensial $f(x) = \ln(1+x)$ disekitar $x = 0$, maka persoalan ini dapat diselesaikan dengan langkah – langkah sebagai berikut ini :

Langkah pertama uraikan uraian taylor disekitar $x = 0$ maka deret tersebut disebut deret Maclaurine seperti pada persamaan (1.44) dan menguraikan semua orde fungsi, terhadap , sehingga diperoleh hasil :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(1+x) \\ f'(x) &= \frac{1}{(1+x)} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ f'^{(n)}(x) &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{(1+x)^m} \end{aligned} \tag{1.48}$$

Disekitar $x = 0$, diperoleh hasil :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= -1 \\ f'^{(n)}(0) &= (-1)^{n+1}(n+1) \end{aligned} \tag{1.49}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (1.49) pada persamaan (1.44) akan diperoleh uraian deret Taylor disekitar $x = 0$, fungsi $f(x) = \ln(1+x)$ yaitu :

$$f(x) = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n} + \cdots \tag{1.50}$$

Dengan menggunakan uji nisbah kita dapat menentukan selang konvergensinya :

$$r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|\left|\frac{n!}{x^n}\right|$$
$$= |x| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)!}\right|$$
$$r = |x| \text{ , dimana nilai dari } x = 1$$

Sehingga selang konvergensinya adalah $-1 < x < 1$

1.6.3 Deret Binomial Newton

Jika kita cari deret Taylor fungsi eksponensial $f(x) = (1+x)^p$ disekitar $x = 0$, maka persoalan ini dapat diselesaikan dengan langkah – langkah sebagai berikut ini :

Langkah pertama uraikan uraian taylor disekitar $x = 0$ maka deret tersebut disebut deret Maclaurine seperti pada persamaan (1.44) dan menguraikan semua orde fungsi, terhadap , sehingga diperoleh hasil :

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^p \\ f'(x) &= p(1+x)^{p-1} \\ f''(x) &= p(p-1)(1+x)^{p-2} \\ f'^{(n)}(x) &= p(p-1)\cdots\cdots(p-n+1)(1+x)^{p-n} \end{aligned} \tag{1.51}$$

Disekitar $x = 0$, diperoleh hasil :

$$\begin{aligned} f(0) &= 1 \\ f'(0) &= p \\ f''(0) &= p(p-1) \\ f'^{(n)}(0) &= p(p-1)(p-2)\cdots\cdots(p-n+1) \end{aligned} \tag{1.52}$$

Dengan mensubtitusikan persamaan (1.52) pada persamaan (1.44) akan diperoleh uraian deret Taylor disekitar $= 0$, fungsi $f(x) = \ln(1+x)$ yaitu :

$$f(x) = (1+x)^p = 1 + p\frac{x}{1!} + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots\cdots \tag{1.53}$$

Dengan menggunakan uji nisbah kita dapat menentukan selang konvergensinya :

$$r = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{p(p-1)\cdots\cdots(p-n+1)(p-n)}{p(p-1)\cdots\cdots(p-n+1)} \right| \left| \frac{n!}{(n+1)!} \frac{x^{n+1}}{x^n} \right|$$

$$= |x| \lim_{n\to\infty} \left| \frac{p-n}{n+1} \right|$$

$r = |x|$, dimana nilai dari $x = 1$

Sehingga selang konvergensinya adalah $-1 < x < 1$

Uji Kepahaman Anda

Untuk Fungsi Trigonometri $\sin x$ dan $\cos x$ dapat diuraikan sendiri sesuai dengan aturan deret Maclaurine dan Tyalor.

Contoh 1.10 :

Tunjukkan bahwa jika n kecil, maka :

$$\tan^{-1}(x+n) = \tan^{-1}x + \frac{n}{1+x^2} - \frac{2xn^2}{(1+x^2)^2}$$

Jawab :

Untuk membuktikan hubungan diatas, kita tuliskan $f(x) = \tan^{-1}x$ dan $x_0 = h$,
maka :

$$f'(x) = \frac{n}{1+x^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

Dengan memasukkan harga ini kedalam uraian Taylor, maka diperoleh hasil:

$$\tan^{-1}(x+n) = \tan^{-1}x + \frac{n}{1+x^2} - \frac{2xn^2}{(1+x^2)^2} + \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dengan meringkas hasil baik fungsi eksponensial, logaritmik, trigonometri, bahkan sampai pada deret binomial newton hingga mendapatkan tabel :

Tabe1.1 Deret Fungsi Maclaurine

No	Deret Fungsi Maclaurine	Selang Konvergensi
1	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots\cdots$	$-\infty < x < \infty$
2	$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\cdots\cdots\cdots$	$-\infty < x < \infty$
3	$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\cdots\cdots\cdots$	$-\infty < x < \infty$
4	$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots\cdots\cdots$	$-< x < 1$
5	$(1 + x)^p = 1 + px - \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \cdots$	$-1 < x < 1$

Banyak sekali ketentuan soal – soal atau masalah yang menyangkut hubungan tentang deret maclaurine ini. Yang menjadi ketentuan untuk tabel adalah keadaan dasar fungsi, jadi apabila terdapat variabel atau konstanta yang memiliki batas hingga tak menggunakan dasar maka dapat menggunakan acuan deret Maclaurine dalam menyelesaikan setiap kasus secara analitik.

Rangkuman Materi Deret

Barisan merupakan suatu urutan himpunan besaran $a_1, a_2, a_3, \cdots$ yang disusun dalam urutan tertentu dan suku - sukunya juga dibentuk menurut pola tertentu.

Barisan Berhingga merupakan barisan yang banyak sukunya berhingga dan dituliskan dalam bentuk $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$

Barisan Tak Berhingga merupakan barisan yang banyak sukunya tak berhingga dan ditulis dalam bentuk $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, a_{n+1} \ldots$

Deret Hitung (Deret Aritmatika) merupakan deret jumlah yang memiliki bentuk dari suku ke – n adalah $a_n = a_1 + (n-1)b$ dan jumlah dari suku ke – n adalah :

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)b]$$

Deret Ukur (Deret Geometri) merupakan deret jumlah yang memiliki bentuk dari suku ke $-n$ adalah $a_n = ar^{n-1}$ dan jumlah dari suku ke $-n$ adalah :

$$S_n = a\frac{(1-r^n)}{(1-r)}$$

Deret Harmonik memiliki bentuk umum :

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots\cdots\cdots$$

Dengan jumlah suku ke - n dari bentuk deret harmonik :

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

Cara-Cara Untuk Menguji Konvergensi Suatu Deret Positif

untuk menguji konvergensi dari sebuah deret positif dalam hal ini dapat disebutkan yaitu uji limit, uji integral , uji perbandingan, uji rasio/nisbah, dan uji banding limit. Dibawah ini akan diuraikan pada masing – masing konvergensi suatu deret positif.

1. Uji Limit (Uji - Ke 1)

   Konvergensi suatu deret dapat diketahui jika memenuhi teorema dibawah ini

   a. Apabila terdapat ketentuan :

      $$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

      Terdapat sebuah nilai ataupun fungsi maka deret tersebut merupakan deret konvergen.

   b. Apabila terdapat ketentuan :

      $$\lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

      Tidak terdapat sebuah nilai ataupun fungsi maka deret tersebut merupakan deret divergen.

   c. Apabila terdapat ketentuan :

      $$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$$

Hasilnya tidak sama dengan nol atau lebih maupun kurang dari nol maka deret tersebut adalah deret divergen.

d. Apabila terdapat ketentuan :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

deretnya mungkin konvergen atau divergen, perlu di uji dengan cara lain untuk memastikan jenis deret tersebut.

2. Uji Integral (Uji Ke - 2)

Misal $f(n)$ menunjukan suku umum a_n deret $\sum_{n-1}^{\infty} a_n$, dengan suku-suku positif. Jika $f(x) > 0$ dan tidak pernah bertambah pada selang $x > N$ dengan nilai N bilangan positif, maka

a. $\sum_{n-1}^{\infty} a_n \rightarrow$ konvergen, jika : $\int_N^{\infty} f(x)dx =$ berhingga

b. $\sum_{n-1}^{\infty} a_n \rightarrow$ divergen, jika : $\int_N^{\infty} f(x)dx =$ tak berhingga

3. Uji Perbandingan (Uji Ke - 3)

Suatu deret dengan suku – suku positif merupakan konvergen, apabila suku – sukunya lebih kecil dari pada suku – suku seletak deret positif lainnya. Begitu pula sebaliknya deret menjadi divergen apabila memiliki suku – suku lebih besar dari pada suku seletak deret lain yang telah diketahui. Secara matematis dapat dituliskan dalam bentuk persamaan deret :

$$\sum_{n-1}^{\infty} b_n = \text{ deret positif konvergen}$$

maka deret tersebut menjadi :

$$\sum_{n-1}^{\infty} a_n = \text{ deret positif konvergen}$$

dimana asalkan $a_n \leq b_n$. Untuk n yang cukup besar . Jika $a_n \geq b_n$ maka tidak dapat diperoleh kesimpulan sehingga perlu di uji kembali dengan cara lain

$$\sum_{n-1}^{\infty} d_n = \text{ deret positif divergen}$$

maka tersebut menjadi :

$$\sum_{n-1}^{\infty} a_n = \text{deret positif divergen}$$

dimana asalkan $a_n \geq d_n$. Jika $a_n \leq d_n$ maka tidak peroleh kesimpulan sehingga perlu di uji kembali dengan cara lain.

4. Uji Rasio/ Nisbah (Uji Ke - 4)

   Misal $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n \cdots \rightarrow$ deret positif. Cari pernyataan untuk a_n dan a_{n+1} yaitu suku ke n dan ke $(n+1)$, kemudian bentuklah pembagian $r = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ dan setelah itu tentukanlah harga limit pembagian ini untuk $n \rightarrow \infty$

   Jika :

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \quad \text{deretnya konvergen}$$

   Jika :

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \text{deretnya divergen}$$

   Jika :

   $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

5. Uji Banding Limit

   Pada uji banding limit memiliki ketentuan persyaratan bawasannya :

   1. Jika ada ketentuan sumasi deret :

      $$\sum_{n-1}^{\infty} b_n$$

      adalah konvergen dan jika memiliki syarat :

      $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

      adalah berhingga (tak perlu nol) maka

      $$\sum_{n-1}^{\infty} a_n \text{ adalah konvergen}$$

   2. Jika ada ketentuan sumasi deret :

      $$\sum_{n-1}^{\infty} d_n$$

      adalah divergen dan jika memiliki syarat:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{d_n} > 0$$

adalah berhingga, maka

$$\sum_{n-1}^{\infty} d_n \text{ adalah divergen}$$

Deret Bolak-Balik

Deret ini disebut pula dengan deret tukar. Dimana deret ini mempunyai bentuk :

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, a_n$$

dengan $a_n > 0$.

1. Uji Konvergensi Deret Bolak-Balik
   Deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\, a_n$ disebut deret konvergen jika :
   a. $|a_{n+1}| \leq a_n$
   b. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
   Jika kedua syarat diatas tak terpenuhi, maka deret tersebut divergen.
2. Deret Konvergen Bersyarat
   Deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\, a_n$ konvergen bersyarat jika $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n| \to$ divergen
   Catatan :
   a. Jika :
   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$
   Merupakan deret konvergen mutlak, maka :
   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ deret konvergen}$$
   b. Jika
   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ deret divergen}$$
   maka
   $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$
   deret divergen dan tidak untuk sebaliknya.

3. Konvergen Mutlak

Deret

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, a_n$$

konvergen mutlak jika

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \text{ konvergen}$$

Deret Pangkat/Kuasa

mempunyai bentuk sebagai yang tertera berikut ini :

$$a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, x^n$$

$$a_n = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, (x-a)^n$$

1. Selang Konvergensi Deret Pangkat
   Pada umumnya sebuah deret pangkat konvergen untuk : $|x| < r$, atau $-r < x < r$ dan divergen untuk $|x| > r$, dimana konstanta r disebut jari-jari konvergen dari deret tersebut.
2. Selang Konvergensi Deret Pangkat
   Deret pangkat konvergen untuk : $|x| < r$, atau $-r < x < r$ dan divergen untuk $|x| > r$, dimana konstanta r disebut jari-jari konvergen dari deret tersebut. Sedangkan untuk $r = |x|$, deret tersebut dapat konvergen ataupun tidak. $|x| = r$ atau $-r < x < r$ disebut selang. Untuk menentukan selang besarnya digunakan uji nisbah.
3. Menguraikan Fungsi dengan Uraian Taylor
   Secara umum uraian tersebut ditulis :
   $f(x) = C_0 + C_1(x-a) + C_2(x-2)^2 + \cdots + C_n(x-a)^n + \cdots$

Dimana a adalah konstanta yang dapat bernilai nol, maka selanjutnya dapat ditentukan :

- Nilai-nilai koefesien C_n sebagai fungsi dari n, sehingga penulisan fungsi diatas berupa suatu identitas (berlaku untuk semua x).
- Selang konvergensi deret pangkatnya dimana identitas a berlaku. Dengan menerapkan diferensiasi , maka :
  $f(a) = C_0 + C_1(0) + C_2(0)^2 + \cdots + C_n(0)^n + \cdots = C_0$
  $f'(a) = 0 + C_1 + 2C_2(x-a)|_{x=a} + \cdots + n\, C_n(n-a)^{n-1} + \cdots$
  $= C_1$

$$f''(a) = 0 + 0 + 2C_2 + \cdots + n\,(n-1)\,C_n\,(0)^{n-2} + \cdots = 2!\,C_2$$

Sehingga :

$$C_n = \frac{1}{n!} f'^{n}(a)$$

Persamaannya dapat dituliskan:

$$f(x)|_{x=a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f'^{n}(a)(x-a)^{n}$$

Persamaan 1.43 merupakan persamaan fungsi Tyalor $f(x)$ jika $a = 0$ maka deret Taylornya berubah menjadi :

$$f(x)|_{a=0} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f'^{n}(0)(x)^{n}$$

merupakan persamaan deret Maclaurine $f(x)$ disekitar $x = 0$.

LATIHAN SOAl

1. Selidikilah konvergensi deret – deret tak tetap positif berikut. Dan sebutkan jenis – jenisnya :
   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{10^n}$
   b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\ln n}}$
2. Uraikan fungsi $f(x) = (1 + x^2)\cos x$ ke dalam deret pangkat disekitar $x = 0$.
3. Deretkanlah fungsi $f(x) = (1 + x)^{-\frac{3}{2}}$ ke dalam deret Maclaurine.
4. Deretkan dan tentukanlah selang konvergensi dari :
   a. $\ln(1 + x^2)$ disekitar $x = 0$
   b. $f(x) = x^{-2}$ disekitar $x = 1$
5. Uraikan fungsi $f(x) = \cos x$ disekitar $x = \pi/6$
6. Uraikan fungsi $f(x) = \sin x$ disekitar $x = \pi/3$
7. Dapatkan untuk jumlah S_n suatu deret ukur
   $$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}.$$
8. Carilah bagian desimal yang berulang dari :
   a. 0,694444 ...
   b. 0,243243 ...
9. Uraikan fungsi $f(x) = (1 + x^2)\sin x$ ke dalam deret pangkat disekitar $x = 0$.
10. Uraikan fungsi $f(x) = (1 + x^2)\tan x$ ke dalam deret pangkat disekitar $x = 0$.
11. Uraikan fungsi $f(x) = e^{\cos x}$ ke dalam deret pangkat disekitar $x = 0$.
12. Uraikan fungsi $f(x) = e^{-\sin x}$ ke dalam deret pangkat disekitar $x = 0$.
13. Uraikan fungsi $f(x) = e^{\tan^2 x}$ ke dalam deret pangkat disekitar $x = 0$.
14. Di dalam proses penyaringan air, pertama adalah membersihkan kotoran merupakan langkah awal. Tunjukkan bahwa jika $= 2$, air dapat dibuat menjadi murni, tetapi jika $n = 3$, kurang dari setengahnya adalah kotoran yang tersisa.
15. Selesaikanlah permasalahan deret dibawah ini :
    a. Deret tak hingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

b. Deret tak hingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

16. Tentukanlah sumasi dari deret berikut ini :

$$\frac{\ln 2}{2} - \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} - \frac{\ln 5}{5}$$

17. Dengan menggunakan uraian deret Maclaurine, uraikanlah deret berikut ini :

a. $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

b. $\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}$

c. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

d. $\sin\left[\ln\left(1+\sqrt{x}\right)\right]$

e. $\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

f. $\arcsin x = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

g. $\displaystyle\int_0^x \frac{\sin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$

18. Dengan menggunakan uraian deret Maclaurine. Uraikanlah deret berikut ini dengan salah satu titik diketahui :

a. $\dfrac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$, $x = -1$

b. $\dfrac{1}{\cos^2\sqrt{x}}$, $x = -3$

c. $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x = -2$

19. Dengan menggunakan uraian deret Maclaurine. Uraikanlah deret berikut ini dengan menggunakan teorema limit:

    a. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$
    b. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{\cos x}{\sin^2 x} \right)$
    c. $\lim_{x \to \pi} \frac{x \sin x}{x - \pi}$

20. Pada materi umum Fisiska Modern. Energy sebuah electron dengan kecepatan relaiv v adalah $m_0 c^2 (1 - v^2/c^2)^{-\frac{1}{2}}$ diamana m_0 adalah massa electron dan c adalah kecepatan cahaya . untuk faktor $m_0 c^2$ adalah energy awal electron. Tentukanlah :
    a. Uraikanlah dengan deret maclaurine bentuk dari energy relative pada sebuah electron tersebut.
    b. Waktu yang diperlukan dari electron tersebut untuk bergerak.
    c. Buktikan bentuk umum dari energy relative mekanik dari electron tersebut adalah :

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{K}{m_0 c^2}$$

21. Pada materi Fisika Dasar. Pada sebuah bandul yang digantungkan secara vertical membentuk sudut θ dengan searah sumbu x mempunyai gaya sebesar F dan searah sumbu y mempunyai gaya sebesar w. Dalam hal ini masing – masing komponen F dan w memiliki nilai $T \sin \theta$ dan $\cos \theta$. Tentukanlah :
    a. Dengan deret Maclaurine perbandingan dari komponen F dan .
    b. Persamaan gerak dari bandul tersebut secara klasik
    c. Solusi dari persamaan gerak bandul tersebut.
22. Bandingkan hasil perhitungan limit berikut jika menggunakan pendekatan metode deret Maclaurine dan aturan Hopital :

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{x^2}{\ln \cos x} \right)$$

23. Buktikanlah dengan menggunakan uraikan deret fungsi dasar bahwasannya :

a. $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots\cdots\cdots\cdots = \frac{\pi}{4}$

b. $\frac{\pi^2}{3!} - \frac{\pi^4}{5!} + \frac{\pi^6}{7!} - \cdots\cdots\cdots\cdots = 1$

c. $\ln 3 + \frac{(\ln 3)^2}{2!} + \frac{(\ln 3)^3}{3!} - \cdots\cdots\cdots\cdots = 2$

24. Gunakan uraikan fungsi Malacurine dasar untuk menyelesaikan permasalahan deret fungsi dasar berikut ini :

a. $\frac{d^4}{dx^4}\ln(1 + x^3)_{x=0,5}$

b. $\frac{d^5}{dx^5}\ln(x^3 - 3x + 5)_{x=0,1}$

c. $\frac{d^6}{dx^6}(x^4 e^{-x})_{x=0,1}$

a. $\frac{d^3}{dx^3}(x^2 \sin 2x)$

b. $\frac{d^2}{dx^2}\ln(x \sec x)_{x=0,1}$

c. $\frac{d}{dx}(x^4 \cot x)_{x=0,2}$

BAB II
BILANGAN KOMPLEKS

Kompetensi Dasar :

Menggunakan operasi bilangan kompleks untuk menyelesaikan permasalahan fisika

Indikator Kompetensi

1. Mahasiswa dapat mendefinisikan bilangan kompleks.
2. Mahasiswa dapat menentukan bilangan di dalam bidang kompleks.
3. Mahasiswa dapat menentukan perhitungan di dalam aljabar kompleks.
4. Mahasiswa dapat menentukan deret kompleks dalam berbagai persoalan matematis dan fisis.
5. Mahasiswa dapat mengubah fungsi – fungsi secara trigonometri menjadi deret eksponensial dalam bentuk formula Euler
6. Mahasiswa dapat menyelesaikan permasalahan matematis dan fisis dengan membentuk fungsi kompleks.

2.1 Pendahuluan

Di dalam pembahasan kali ini senantiasa kita akan mengkaji dari hal yang real menjadi hal yang kompleks (imajiner). Dimana secara tidak langsung ketentuan yang mengikat adanya masalah yang khayal. Untuk kajian yang sangat mendasar ketika kita mengoperasikan bilangan bulat, maka bilangan negatif itulah yang menjadi cikal bakal penemuan adanya bilangan kompleks yang diterapkan sebagai kajian teori maupun aplikatif baik di dalam bidang matematika, fisika, maupun teknik. Didalam buku ajar ini akan senantiasa dibahas adanya notasi bilangan kompleks, aljabar kompleks, persoalan yang melibatkan matematis dan fisis, formula euler. Serta deret kompleks yang diuraikan seperti pada bilangan real.

2.2 Notasi Dari Bilangan Kompleks

Secara definisi bilangan kompleks dinotasikan dengan z dengan pasangan x sebagai bilangan realnya sedangkan y sebagai bilangan kompleksnya atau imajinernya. Dengan ketentuan utama bilangan realnya lebih kecil dari pada bilangan kompleksnya. Bilangan kompleks dituliskan dalam bentuk umum :

$$z = a + ib \tag{2.1}$$

Dimana :

$$\mathrm{Re}(-z) = a \tag{2.2}$$
$$\mathrm{Im}(-z) = b \tag{2.3}$$

Contoh 2.1 :

Terdapat fungsi bilangan kompleks $z = 1 + \sqrt{3}$. Tentukanlah komponen – komponennya dan tentukan pula sudutnya.

Jawab :

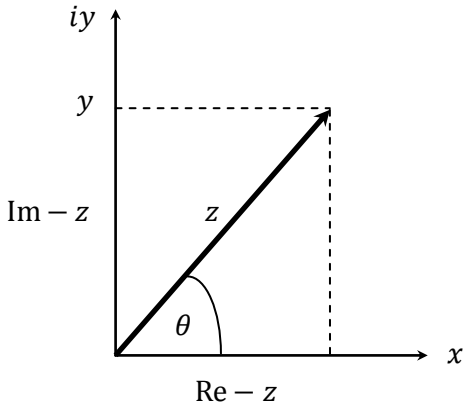
$$z = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\mathrm{Re}(z) = 1 \quad ; \quad \mathrm{Im}(z) = \sqrt{3}$$

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{3}}{1} \quad ; \quad \theta = \tan^{-1}\left(\sqrt{3}\right) = 60^0$$

2.3 Bidang Kompleks

Pada Bidang kompleks terdiri dari 2 sumbu yaitu sumbu x dan y dimana sumbu x sebagai acuan bilangan real sedangkan y digunakan sebagai acuan bilangan imajiner. dengan mengubahnya dari diagram kartesian menjadi diagram polar dimana pergerakannya dipengaruhi oleh sudut. Dengan mengkompilasi diagram kartesian dan polar yang dinamakan diagram Argan maka dapat diperoleh hasil seperti gambar (2.1) dan (2.2) :



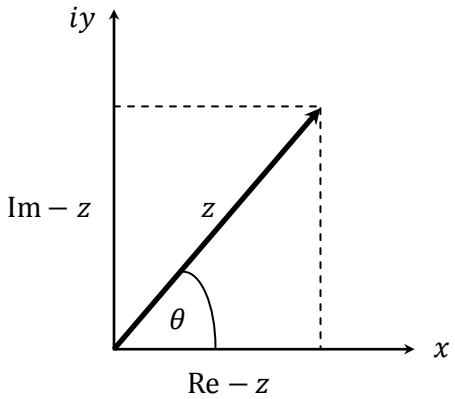
Gambar 2.1 Bidang Kompleks Dalam Koordinat Kartesian

$$z = x + iy \;\rightarrow\; \text{Kartesian 2D} \tag{2.4}$$

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta \;\rightarrow\; \text{polar} \tag{2.5}$$

$$z = r\,e^{i\theta} \tag{2.6}$$

Untuk persamaan (2.4), (2.5) merupakan operasi yang diterapkan pada persamaan Euler untuk membentuk persamaan eksponensial secara imajiner seperti yang tertera pada persamaan (2.6).



Gambar 2.2 Bidang Komples Dalam Koordinat Polar

Dengan menggunakan aturan phytagoras dan persamaan lingkaran dari gambar (2.2) maka di dapatkan ketentuan umum bahwasannya :

$$|z| = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \; z = (x, y) \tag{2.7}$$

$$\theta = \text{arc tg}\,\theta = \text{arc}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right) \tag{2.8}$$

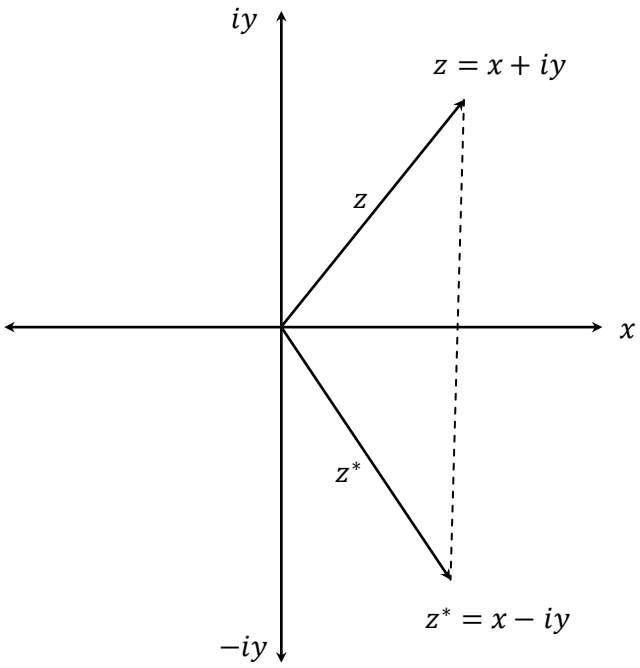
$$|z|^2 = |\mathrm{Re} - z|^2 + |\mathrm{Im} - z|^2 \;\rightarrow\; \text{Modulus } z \tag{2.9}$$

$$\theta \rightarrow \text{Argumen } z \tag{2.10}$$

2.4 Kompleks Sekawan (*Conjugate Complex*)

Kompleks Sekawan merupakan lawan dari fungsi bilangan kompleks tersebut dapat dilihat dari diagram dibawah bahwasannya. Jika $z = x + iy$, maka : *conjugate complex* :

$$z^* = x - iy \tag{2.11}$$



Gambar 2.3 Kompleks Sekawan Dari Bilangan Kompleks

Uji Kepahaman Anda

1. Hitunglah $(1-i)^6$:
   a. Dengan mengubahnya dalam bentuk eksponensial
   b. Sudut dari fungsi bilangan kompleks diatas.

2. Dengan acuan $z^c = \left(e^{\ln z}\right)^c = e^{c \ln z}$
   Ubahlah bentuk $(i)^{2i}$ kedalam bentuk eksponensial

2.5 Aljabar Kompleks

Berkaitan dengan *conjugate complex*, dapat dituliskan operasi matematis dalam menentukan hasil perhitungan secara analitik pada penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian:

1. $(z_1 + z_2)^* = {z_1}^* + {z_2}^*$ (2.12)
2. $z \cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = |z|^2$ (2.13)
3. $(z_1 \cdot z_2)^* = {z_1}^* \cdot {z_2}^*$ (2.14)
4. $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{{z_1}^*}{{z_2}^*}$ (2.15)

Contoh 2.2 :

Buktikan bahwasannya operasi perkalian bilangan kompleks adalah $z_1 z_2 = z_2 z_1$

Jawab :

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= z_2 z_1 \\ &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) \\ &= (x_2 x_1 - y_2 y_1)(x_1 y_2 + x_2 y_1)i \\ &= (x_2 x_1 - y_2 y_1)(x_2 y_1 - x_1 y_2)i \\ &= (x_2 - y_2 i)(x_1 - y_1)i \end{aligned}$$

$z_1 z_2 = z_2 z_1$ (terbukti)

2.6 Aturan Dalam Bilangan Kompleks

Didalam ketentuan - ketentuan bilangan kompleks kita tidak akan pernah meninggalkan operasi – operasi dari materi matematika dasar yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Berikut ini adalah operasi – operasi mendasar dari bilangan kompleks :

1. Penjumlahan

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + i\,b_1) + (a_2 + i\,b_2)$$

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \qquad (2.16)$$

2. Pengurangan

$$Z_1 - Z_2 = (a_1 + i\,b_1) - (a_2 + i\,b_2)$$

$$Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \qquad (2.17)$$

3. Perkalian

$$Z_1 \times Z_2 = (a_1 + i\,b_1) \times (a_2 + i\,b_2)$$

$$= a_1 \cdot a_2 + a_1 \cdot i\,b_2 + a_2 \cdot\ i\,b_1 - b_1 \cdot b_2$$

$$Z_1 \times Z_2 = a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \qquad (2.18)$$

4. Pembagian ($Z_1 \neq 0$)

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(a_1 + i\,b_1)}{(a_2 + i\,b_2)} \cdot \frac{(a_2 - i\,b_2)}{(a_2 - i\,b_2)}$$

$$= \frac{(a_1 \cdot a_2) - (a_1 \cdot i\,b_2) + (a_2 \cdot\ i\,b_1) + (b_1 \cdot b_2)}{{a_2}^2 - (a_2 \cdot\ i\,b_2) + (a_2 \cdot\ i\,b_2) + {b_2}^2}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot i\,b_2 + a_2 \cdot\ i\,b_1 + b_1 \cdot b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} \qquad (2.19)$$

2.7 Hukum - Hukum Dalam Bilangan Kompleks

Didalam ketentuan - ketentuan bilangan kompleks kita akan menggunakan hukum – hukum yang umum digunakan dalam operasi matematika dasar, berikut ini kita dapat melihat hukum – hukum dari operasi bilangan kompleks sebagai berikut :

1. Hukum Assosiatif (Penjumlahan)

$$Z_1 + (Z_2 + Z_3) = (Z_1 + Z_2) + Z_3 \qquad (2.20)$$

2. Hukum Komutatif (Perkalian)

$$Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1 \qquad (2.21)$$

3. Hukum Assosiatif (Perkalian)

$$Z_1 \cdot (Z_2 \cdot Z_3) = (Z_1 \cdot Z_2) \cdot Z_3 \qquad (2.22)$$

4. Hukum Distributif

$$Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3) = (Z_1 \cdot Z_2) + (Z_1 \cdot Z_3) \qquad (2.23)$$

Tabel 2.1 Ketentuan Dari Nilai Bilangan Imajiner

Ketentuan Umum Pada Bilangan Imajiner		
$i^2 = -1$	$\sqrt{-1} = i$	$\frac{1}{i} = -1$

Uji Kepahaman Anda

1. Tentukan harga dari bilangan kompleks berikut :

   a. $\sqrt[3]{-8i}$ b. $\sqrt[3]{1}$ c. $\sqrt[5]{-1-i}$ d. $(-i)^3$

2. Tentukan harga z dari bilangan kompleks berikut ini :

   a. $(1+2i)^3$ b. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)$ c. $\frac{3i}{1+\sqrt{3}}$

2.8 Fungsi Kompleks Elementer

Akar puncak dari pembahasan bilangan kompleks terletak pada fungsi kompleks pada bilangan elementer yaitu meliputi akar dan pangkat, fungsi trigonomteri dan inversnya, fungsi logaritma dan eksponensial, seta kombinasi dari fungsi – fungsi lainnya. Fungsi – fungsi hanya dapat di pergunakan dengan menggunakan kalkulator.

2.8.1 Fungsi Akar dan Pangkat Bilangan Kompleks

Secara matematis dapat diuraikan :

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2m\pi}{n}\right)} \tag{2.24}$$

Untuk $r = 1$ ungkapan diatas menghasilkan :

$$z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = \left(e^{i\theta}\right)^n$$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \qquad (2.25)$$

Persamaan (2.25) dapat dikenal sebagai persamaan rumus **de Moivre** yang sangat bermanfaat dalam penentuan fungsi trigonometri secara kelipatan pada setiap atau masing – masing sudut.

Kita ambil definisi $e^{2m\pi i} = 1$ untuk sembarang nilai m, maka argument θ dengan mengambil variasi ketentuan variabel kompleks z dapat ditulis sebagai berikut :

$$z = re^{i(\theta+2m\pi)} \qquad (2.26)$$

Dengan persamaan (2.26), kita dapat peroleh :

$$z^{\frac{1}{n}} = \left(r^{\frac{1}{n}}\right) = re^{i\left(\theta+\frac{2m\pi}{n}\right)} \;;\; m = 0, \pm1, \pm2, \pm3 \qquad (2.27)$$

Untuk $= 1$, diperoleh hasil :

$$z^{\frac{1}{n}} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)\right] \qquad (2.28)$$

Dari persamaan (2.27) dapat diturunkan rumus perkalian dan pembagian dari bilangan kompleks dalam penyataan eksponensial. Jika : $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ dan $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$.

$$z_1 \cdot z_2 = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)\left(r_2 e^{i\theta_2}\right) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)} \qquad (2.29)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)} \quad , \text{ jika } r \neq 0 \qquad (2.30)$$

2.8.2 Fungsi Logaritmik Kompleks

Secara matematis dapat diuraikan :

$$z = e^w$$

$$w = \ln z \qquad (2.31)$$

Dengan $z_1 \cdot z_2 = e^{w_1} \cdot e^{w_2}$, diperoleh :

$$\ln(z_1 + z_2) = w_1 + w_2 \tag{2.32}$$

Catatan : untuk fungsi logaritma real kita ketahui bahwa $\ln(-1)$ tak terdefinisikan.

2.8.3 Fungsi Trigonometri Kompleks

Pernyataan fungsi eksponensial kompleks ke dalam fungsi trigonometri kompleks diperlukan sekali, karena membantu dapat memudahkan melakukan perhitungan nilai dari fungsi eksponensial kompleks secara langsung dengan menggunakan deret pangkat.

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x \tag{2.33}$$
$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x \tag{2.34}$$

Dengan menggunakan aturan operasi penjumlahan dan pengurangan pada pesamaan (2.33) dan (2.34) kita dapat peroleh hasil fungsi trigonometri dengan ketentuan mengaitkan fungsi eksponensial dan trigonometri. Secara matematis dapat diuraikan dari persamaan Euler dalam hubungan langsung

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{2.35}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{2.36}$$

Sama seperti halnya fungsi trigonometri diatas dapat kita peroleh hubungan pada fungsi trigonometri dan eksponensial secara hiperbolik.

$$e^{x} = \cosh x + \sinh x \tag{2.37}$$
$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x \tag{2.38}$$

secara matematis dapat diuraikan dari persamaan Euler dalam hiperbolik :

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} \tag{2.39}$$
$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} \tag{2.40}$$

fungsi – fungsi hiperbolik yang lainnya sama halnya seperti fungsi – fungsi trigonometri yang lainnya. Misalkan :

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \quad , \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} \quad , \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\sinh x}$$

Bentuk – bentuk identitas yang melibatkan fungsi hiperbolik sinus dan cosines dapat diturunkan secara langsung dari identitas – identitas trigonometri :

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1 \tag{2.40}$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x \tag{2.41}$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x \tag{2.42}$$

Rangkuman Materi Bilangan Kompleks

Dengan diagram kartesian dan polar yang dinamakan diagram Argan maka dapat diperoleh hasil pada bidang kompleks :

$z = x + iy \;\rightarrow\;$ Kartesian 2D
$z = r\cos\theta + ir\sin\theta \;\rightarrow\;$ polar
$z = r\,e^{i\theta}$

maka di dapatkan ketentuan umum bahwasannya :

$|z| = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad ; \; z = (x, y)$
$\theta = \operatorname{arc\,tg}\theta = \operatorname{arc}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$
$|z|^2 = |\mathrm{Re} - z|^2 + |\mathrm{Im} - z|^2 \;\rightarrow\;$ Modulus z
$\theta \rightarrow$ Argumen z

Kompleks Sekawan (Conjugate Complex)

Kompleks Sekawan merupakan lawan dari fungsi bilangan kompleks tersebut dapat dilihat. Jika $= x + iy$, maka : *conjugate complex* :

$$z^* = x - iy$$

Aljabar Kompleks

Secara analitik pada penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian pada bilangan kompleks :

1. $(z_1 + z_2)^* = {z_1}^* + {z_2}^*$

2. $z \cdot z^* = (x + iy)(x - iy) = |z|^2$
3. $(z_1 \cdot z_2)^* = {z_1}^* \cdot {z_2}^*$
4. $\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{{z_1}^*}{{z_2}^*}$

Aturan Dalam Bilangan Kompleks

Secara analitik terdapat aturan pada penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian pada bilangan kompleks :

1. Penjumlahan
   $Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$
2. Pengurangan
   $Z_1 - Z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)$
3. Perkalian
   $Z_1 \times Z_2 = a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$
4. Pembagian ($Z_1 \neq 0$)
   $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot i\, b_2 + a_2 \cdot\ i\, b_1 + b_1 \cdot b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2}$

Hukum - Hukum Dalam Bilangan Kompleks

Secara analitik terdapat hukum – hukum yang terkait pada operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian pada bilangan kompleks :

1. Hukum Assosiatif (Penjumlahan)
   $Z_1 + (Z_2 + Z_3) = (Z_1 + Z_2) + Z_3$
2. Hukum Komutatif (Perkalian)
   $Z_1 \cdot Z_2 = Z_2 \cdot Z_1$
3. Hukum Assosiatif (Perkalian)
   $Z_1 \cdot (Z_2 \cdot Z_3) = (Z_1 \cdot Z_2) \cdot Z_3$
4. Hukum Distributif
   $Z_1 \cdot (Z_2 + Z_3) = (Z_1 \cdot Z_2) + (Z_1 \cdot Z_3)$

Ketentuan Umum Pada Bilangan Imajiner		
$i^2 = -1$	$\sqrt{-1} = i$	$\frac{1}{i} = -1$

Fungsi Kompleks Elementer

Akar puncak dari pembahasan bilangan kompleks terletak pada fungsi kompleks elementer meliputi akar dan pangkat, fungsi trigonomteri dan inversnya, fungssi logaritma dan eksponensial, seta kombinasi dari fungsi – fungsi lainnya. Fungsi – fungsi hanya dapat di pergunakan dengan menggunakan kalkulator.

Fungsi Akar Dan Pangkat Bilangan Kompleks

Secara matematis dapat diuraikan :

$$z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2m\pi}{n}\right)}$$

Dengan persamaan diatas, kita dapat peroleh :

$$z^{\frac{1}{n}} = \left(r^{\frac{1}{n}}\right) = re^{i\left(\theta+\frac{2m\pi}{n}\right)} \ ; \ m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$$

Untuk $= 1$, diperoleh hasil :

$$z^{\frac{1}{n}} = \left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2m\pi}{n}\right)\right]$$

Fungsi Logaritmik Kompleks

Secara matematis dapat diuraikan :

$$z = e^{w}$$

$$w = \ln z$$

Dengan $z_1 \cdot z_2 = e^{w_1} \cdot e^{w_2}$, diperoleh :

$$\ln(z_1 + z_2) = w_1 + w_2$$

Fungsi Trigonometri Kompleks

nilai dari fungsi eksponensial kompleks secara langsung dengan menggunakan deret pangkat.

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$
$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

Secara matematis dapat diuraikan dari persamaan Euler dalam hubungan:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

Sama seperti halnya fungsi trigonometri diatas dapat kita peroleh hubungan pada fungsi trigonometri dan eksponensial secara hiperbolik.

$$e^{x} = \cosh x + \sinh x$$
$$e^{-x} = \cosh x - \sinh x$$

secara matematis dapat diuraikan dari persamaan Euler dalam hiperbolik :

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$
$$\sinh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

Bentuk – bentuk identitas yang melibatkan fungsi hiperbolik sinus dan cosines dapat diturunkan secara langsung dari identitas – identitas trigonometri :

$$\cosh^2 x + \sinh^2 x = 1$$
$$\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$$
$$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$$

LATIHAN SOAL

1. Tentukanlah bilangan kompleks berikut ini dalam koordinat kartesian :
   a. $e^{\left(i\frac{\pi}{2}\right)+\ln 5}$ b. $e^{\left(i\frac{\pi}{4}+\ln 2\right)}$
   c. $\sin i$ d. $\cos \pi i$
   e. $\sin(\pi - i\ln 3)$ f. $\cos(\pi - 2i\ln 3)$
2. Dengan menggunakan identitas secara eksponensial dari bentuk $\sin x$ dan $\cos x$. Buktikanlah hasil dari bentuk integral berikut ini :
   a. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 3x\, dx = 0$
   b. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin 3x\, dx = 0$
   c. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \cos 3x\, dx = 0$
   d. $\int_{-2\pi}^{\pi} \cos^2 3x\, dx = \pi$
   e. $\int_{0}^{\pi} \sin^2 4x\, dx = \pi$
   f. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin 3x \cos 4x\, dx = 0$
3. Buktikanlah persamaan - persamaan berikut dibawah ini baik secara langsung atau menggunakan bentuk eksponensial :
   a. $\cosh 2z = \cosh^2 z + \sinh^2 z$
   b. $\frac{d}{dz}(\tan z) = \sec^2 z$
   c. $\frac{d}{dz}(\cos z) = -\sin z$
   d. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$
   e. $\cosh^4 z + \sinh^4 z = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2z$
   f. $\cos 3z = 4\cos^3 z - 3\cos z$
4. Tentukanlah bentuk dari bilangan kompleks fungsi berikut ini menjadi bentuk $x + iy$:
   a. $\arcsin i^2$

b. $\arctan 2i$
c. $\cosh 2\pi i$
d. $\cosh\left(\frac{i\pi}{2} - \ln 3\right)$
e. $\tanh \frac{3\pi i}{4}$
f. $\sinh\left(\ln 2 + \frac{i\pi}{3}\right)$
g. $\arctan(5/4)$
h. $\arctan(-i)$
i. $\arcsin\left[\left(\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}\right)^{12}\right]$
j. $\cos\left[2i\ln\left(\frac{1-i}{1+i}\right)\right]$

5. Nyatakan $\cosh(i+2) - \sinh(i+2)$ dengan $i = \sqrt{-1}$ dalam bentuk $+iy$.
6. Hitunglah nilai dari $\cosh(i+2)$ dengan $i = \sqrt{-1}$ dalam bentuk $x + iy$
7. Nyatakan $\tanh^{-1}(i\sqrt{3})$ dalam bentuk $+iy$.
8. Nyatakan $\coth^{-1}(i\sqrt{3})$ dalam bentuk $+iy$.
9. Didalam dinamika mekanika klasik. Tentukanlah fungsi kecepatan $v(t)$ dan percepatan $a(t)$. Jika suatu benda memiliki fungsi posisi $z(t)$ yang bergantung pada fungsi waktu sebagai berikut :
   a. $z(t) = \cos^2 2t + i\sin^2 2t$
   b. $z(t) = (1+i)e^{-i5t}$
   c. $z(t) = 5e^{i\omega t} + 7e^{-i\omega t}$
10. Hitunglah integral dari kombinasi antara fungsi exponensial dan sinusoidal sinus .
$$\int e^{ax} \sin bx\, dx$$
11. Hitunglah integral dari kombinasi antara fungsi exponensial dan sinusoidal cosinus.
$$\int e^{ax} \cos bx\, dx$$
12. Didalam materi listrik magnet diketahui bahwasannya hambatan suat bahan dilambangkan dengan huruf R dan induktor dilambangkan dengan huruf L dihubungkan secara seri, kemudian dihubungkan secara parallel dengan kapasitor yang dilambangkan dengan huruf C.
   a. Hitunglah impedansi rangkaian Z
   b. Rangkaian dikatakan beresonansi, jika z real. Tentukan ω pada saat beresonansi.

13. Didalam materi gelombang optik terdapat sebuah 2 pegas yang disusun secara seri dengan konstanta pegas serba sama yaitu . jika pada setiap pegas mengalami simpangan sejauh x_1 dan x_2 . Tentukanlah :
    a. Tetapan konstanta k secara total.
    b. Periode getar dari pegas tersebut.

14. Buktikan bahwa :
    a. $\cos\theta + \cos 3\theta + \cos 5\theta + \cos 7\theta + \cdots + \cos(2n-1)\theta = \dfrac{\sin 2n\theta}{2\sin\theta}$
    b. $\sin\theta + \sin 3\theta + \sin 5\theta + \sin 7\theta + \cdots\cdots + \sin(2n-1)\theta = \dfrac{\sin^2 n\theta}{\sin\theta}$
15. Buktikan identitas berikut bahwasannya :
    a. $\tan z = \tan(x+iy) = \dfrac{\tan x + i\tanh y}{1 - i\tan x\tanh y}$
    b. $\tan u = \tan(x-iy) = \dfrac{\tan x - i\tanh y}{1 + i\tan x\tanh y}$
16. Buktikan identitas berikut bahwasannya :
    a. $\tanh z = \tanh(x+iy) = \dfrac{\tanh x + i\tan y}{1 + i\tanh x\tan y}$
    b. $\tanh u = \tanh(x-iy) = \dfrac{\tanh x + i\tanh y}{1 + i\tan x\tanh y}$
17. Pada materi pembelajaran Gelombang Optik. Seberkas sinar monokromatis jatuh diatas kisi dan sinar didispersikan sehingga pada layar akan terbentuk spectrum. Tentukanlah hubungan antara amplitudo A gelombang superposisi cahaya dan jarak dari pusat sumbu cahaya.
18. Buktikan kebenaran bentuk trigonometri :
    a. $\sin^{-1} z = -i\ln\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right)$
    b. $\cos^{-1} z = i\ln\left(iz \pm \sqrt{z^2-1}\right)$
19. Jika diketahui bahwasannya :
    $$z = \frac{a}{b} \quad \text{dan} \quad \frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$
    Tentukanlah nilai dari fungsi z dari soal diatas.
20. Dengan diketahui sumasi sebuah deret tak berhingga, dengan menggunakan deret Maclaurine. Tunjukkan bahwasannya deret tersebut adalah :
    $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1+i\pi)^n}{n!} = -e$$

BAB III
MATRIKS DAN DETERMINAN

Kompetensi Dasar :

Menggunakan operasi matriks dengan benar untuk menyelesaikan persoalan fisika

Indikator Kompetensi :

1. Mahasiswa dapat menggunakan matriks dan determinan untuk memecahkan persamaan linier simultan
2. Mahasiswa dapat membentuk rotasi di dalam berbagai koordinat .

3.1 Pendahuluan

Matriks merupakan jalan dari sebuah alur ketentuan perhitungan numeriks baik itu dilakukan oleh program matlab, fluent , ataupun program – program yang yang lain – lain. Matriks memiliki arti sebagai pemisahan variabel dari sebuah lajur kanan dan kiri. Sebab antara setiap lajur adalah berbeda- beda baik penentuan nilai – nilai variabelnya, determinan, ataupun nilai eigen valuenya. Dengan kata lain kita harus paham antara operasi yang melibatkan satu ketentuan yang real dalam menentuan bilangan - bilangan atau variable - variabel pada matriks.

3.2 Definisi Matriks

Matriks adalah susunan bilangan atau barisan yang berupa baris dan kolom yang memiliki jumlah baris dan kolom masing – masing tertentu. Misalkan : jumlah baris m dan jumlah kolom n, sehingga dapat dituliskan :

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{n} \\ a_{21} & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}, m = \text{baris dan } n = \text{kolom} \qquad (3.1)$$

Untuk $m = 2$ dan $n = 3$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad (3.2)$$

3.3 Operasi Komponen – Komponen Pada Matriks

3.3.1 Operasi Penjumlah Matriks :

$$A + B = C$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Komponen – komponennya :

$A_{mn} + B_{mn} = C_{mn}$

3.3.2 Operasi Pengurangan Matriks :

$A - B = C$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Komponen – komponennya :

$A_{mn} - B_{mn} = C_{mn}$

3.3.3 Operasi Perkalian Matriks :

$AB = C$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Komponen – komponennya :

$$C_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$$

3.3.4 Operasi Perkalian Lagsung Matriks :

$A \text{ x } B = C$

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11}b & a_{12}b \\ a_{21}b & a_{22}b \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Masing – masing komponen menjadi 4 komponen .
Jika matriks c terdiri dari 4 x 4 $= 16$ komponen.

3.4 Ketentuan Matriks – Matriks Lain

3.4.1 Matriks satuan / identitas dapat dituliskan :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Perkalian matriks dengan matriks I memunyai hasil yaitu matriks itu sendiri.

$$A\mathrm{I} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$AI = A \tag{3.8}$$

3.4.2 Matriks yang komponennya tidak sama dengan 0 hanya pada diagonalnya disebut *Matriks Diagonal*

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

3.4.3 Matriks Invers

Bila perkalian 2 matriks A dan B hasilnya matriks identitas $(AB = \mathrm{I})$
Maka matriks b disebut matriks invers dari A. Dituliskan dengan *Metode Langsung* :
$(AA^{-} = \mathrm{I} \quad ; \quad B = A)$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \tag{3.10}$$

Apabila diuraikan satu persatu dari persamaan (3.10) :

$$a_{11} \cdot \acute{a}_{11} + a_{12} \cdot \acute{a}_{21} = 1$$

$$a_{11} \cdot \acute{a}_{12} + a_{12} \cdot \acute{a}_{22} = 0$$

$$a_{21} \cdot \acute{a}_{11} + a_{22} \cdot \acute{a}_{21} = 0$$

$$a_{21} \cdot \acute{a}_{12} + a_{22} \cdot \acute{a}_{22} = 1$$

Dari persamaan ini komponen
matriks invers (A^{-}) dapat
diturunkan dengan cara eliminasi

3.5 Matriks Gauss Jordan

Metode matriks Dengan cara Gauss Jordan merupakan salah satu metode yang mendasar untuk memperoleh variable dari operasi suatu matriks. Dalam hal ini dapat dilihat pada persamaan (3.11) .

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3.11)$$

Dengan cara menjumlah, membagi pada suku matriks kiri dan kanan dibuat matriks kiri menjadi matriks I, matriks kanan akan menjadi matriks invers. matriks simetri dan matriks antri simetri

Apabila $A_{ij} = A_{ji}$, maka matriks disebut *matriks simetri*

Apabila $A_{ij} = -A_{ji}$, maka matriks disebut *matriks anti simetri*

Matriks Simetri	Matriks Anti Simetri
$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Penyelesaian persamaan dengan teori matriks. Misal persamaan dengan parameter x, y, z :

$$A_1x + B_1y + C_1z = d_1$$

$$A_2x + B_2y + C_2z = d_2$$

$$A_3x + B_3y + C_3z = d_3$$

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

Matriks

Nilai x, y, z dapat diturunkan secara biasa (*Conventional*) yaitu dengan cara eliminasi satu persatu dari , y, z :

Contoh 3.1 :

Selesikan persamaan berikut dengan cara eliminasi :

$$2x + z = 7$$
$$y + 5z = 4$$
$$4x + 6y - 5z = 1$$

Jawab :

Pada persamaan 1 dan 2 :

$$\begin{array}{r} 10x + 5z = 35 \\ y + 5z = 4 \\ \hline 10x - y = 31 \end{array} -$$

Pada persamaan 2 dan 3:

$$\begin{array}{r} y + 5z = 4 \\ 4x + 6y - 5z = 1 \\ \hline 4x + 7y = 5 \end{array} +$$

Pada persamaan 1 dan 3 :

$$\begin{array}{r} 4x + 2z = 14 \\ 4x + 6y - 5z = 1 \\ \hline -6y + 7z = 13 \end{array} -$$

Dari hasil eliminasi persamaan 1 dan 2 serta 2 dan 3, dapat dituliskan :

$$\begin{array}{r} 70x - 7y = 217 \\ 4x + 7y = 5 \\ \hline 74x = 222 \\ x = 3 \end{array} +$$

Nilai x dapat disubtitusikan ke persamaan hasil eliminasi persamaan 1 dan 2

$$\begin{aligned} 10(3) - y &= 31 \\ 30 - y &= 31 \\ y &= -1 \\ z &= 1 \end{aligned}$$

3.6 Determinan dan Penerapan Nilai Eigen

Determinan mempunyai arti fisis jika diterapkan pada sebuah fungsi maka dapat diartikan sebagai nilai penunjang/ pokok sebelum pengoperasian pada setiap element – element (anggota – anggota) dari fungsi tersebut.

Misalkan nilai sebuah matriks bujur sangkar. Misalkan ada matriks A dan :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{dicari determinannya}$$

Cara mencari nilai sebuah determinan adalah sebagai berikut :

3.6.1 Cara Perkalian Diagonal.

Hanya dapat digunakan untuk matriks yang berordo 2 atau 3 saja.
Matriks ordo 2 x 2 :

$$\det A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc \qquad (3.12)$$

$$\det B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$\det B = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi) \qquad (3.13)$$

Atau

$$\det B = a \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} \qquad (3.14)$$

3.6.2 Cara Minor Determinan.

Cara minor determinan merupakan cara yang merupakan kelanjutan dari cara perkalian diagonal matriks karena hal ini yang lebih ditekankan pada tiap – tiap element – element matriks.

Misalkan :

$$\det A = \sum a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} \qquad (3.15)$$

Tinjau :

$$\det A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad (3.16)$$

1. Determinan ordo n berasal dari matriks ordo n $\det A = |A| = |a_{ij}|$ dengan $i = j = n$
2. Setiap element memiliki tanda $(-1)^{i+j}$
3. Untuk mencari determinan minor dan o_{ij} yaitu dengan menarik garis horizontal dan vertikaldari elemen a_{ij} semua elemen yang tidak terletak pada kedua garis tersebut merupakan elemen dari determinan minor M_{ij} .

Untuk mencari determinan minor elemen a_{22}

$$M_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Contoh 3.2 :

Carilah harga determinan $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Jawab :
Misalkan elemen yang akan kita ambil adalah yang terletak pada kolom 2, maka det$A$ dapat dituliskan :

$$\begin{aligned} \det A &= A_{12}(-1)^{1+2}M_{12} + A_{22}(-1)^{2+2}M_{22} + A_{32}(-1)^{3+2}M_{32} \\ &= -2\begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \\ &= -2(36-42) - 5(9-21) - 8(6-12) \\ &= -2(6) - 5(-12) - 8(-6) \\ &= -12 + 60 + 48 \\ \det A &= 96 \end{aligned}$$

Contoh 3.3 :

Carilah nilai eigen dari matriks $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Jawab :
Misalkan elemen yang akan kita ambil adalah yang terletak pada kolom 2, maka det$A$ dapat dituliskan :

$$|A - \gamma I| = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1-\gamma & -1 & 0 \\ 0 & 1-\gamma & 1 \\ 0 & 0 & -1-\gamma \end{pmatrix} = 0$$

$$(1-\gamma)^2(-1-\gamma) = 0$$

$$\gamma_1 = 1 \ , \quad \gamma_2 = 1 \ , \quad \gamma_2 = -1$$

Uji Kepahaman Anda

1. Tentukan nilai dan vector eigen dari matriks berikut ini:
   a. $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
   c. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$
   d. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Rangkuman Materi Matriks dan Determinan

Matriks merupakan jalan dari sebuah alur ketentuan perhitungan numeriks baik itu dilakukan oleh program matlab, fluent , ataupun program – program yang yang lain – lain. Matriks memiliki arti sebagai pemisahan variabel dari sebuah lajur kanan dan kiri.

Definisi Matriks :

Matriks adalah susunan bilangan atau barisan yang berupa baris dan kolom yang memiliki jumlah baris dan kolom masing – masing tertentu. Misalkan : jumlah baris m dan jumlah kolom n, sehingga dapat dituliskan :

$$A_{mn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_n \\ a_{21} & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{pmatrix}, m = \text{baris dan } n = \text{kolom}$$

Untuk $m = 2$ dan $n = 3$

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

Operasi Komponen – Komponen Pada Matriks :

1. Operasi Penjumlah Matriks :
   $A + B = C$
   $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$
   Komponen – komponennya :
   $A_{mn} + B_{mn} = C_{mn}$
2. Operasi Pengurangan Matriks :
   $A - B = C$
   $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} \end{pmatrix}$
   Komponen – komponennya :
   $A_{mn} - B_{mn} = C_{mn}$

3. Operasi Perkalian Matriks :
   $AB = C$
   $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} =$
   $\begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} \end{pmatrix}$
   Komponen – komponennya :
   $C_{ij} = \sum_{k} A_{ik} B_{kj}$
4. Operasi Perkalian Lagsung Matriks :
   $A \text{ x } B = C$
   $C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11}b & a_{12}b \\ a_{21}b & a_{22}b \end{pmatrix}$
   Masing – masing komponen menjadi 4 komponen. matriks C terdiri dari 4 x 4 = 16 komponen.

Ketentuan Matriks – Matriks Lain

1. Matriks satuan / identitas dapat dituliskan :
   $\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   $A\mathrm{I} = A$
2. Matriks yang komponennya tidak sama dengan 0 hanya pada diagonalnya disebut *Matriks Diagonal*

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & 0 \\ 0 & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{pmatrix}$$

3. Matriks Invers :
   Bila perkalian 2 matriks A dan B hasilnya matriks identitas ($AB = \mathrm{I}$) Maka matriks b disebut matriks invers dari A. Dituliskan dengan *Metode Langsung* :
   $(AA^{-} = \mathrm{I} \quad ; \quad B = A)$
   $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}^{-} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

Matriks Gauss Jordan

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dengan cara menjumlah, membagi pada suku matriks kiri dan kanan dibuat matriks kiri menjadi matriks I, matriks kanan akan menjadi matriks invers. *Matriks simetri dan antri simetri*

Apabila $A_{ij} = A_{ji}$, maka matriks disebut *matriks simetri*

Apabila $A_{ij} = -A_{ji}$, maka matriks disebut *matriks anti simetri*

Penyelesaian persamaan dengan teori matriks. Misal persamaan dengan parameter $x.v.z$:

$$A_1x + B_1y + C_1z = d_1$$

$$A_2x + B_2y + C_2z = d_2 \quad \text{Matriks} \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$$

$$A_3x + B_3y + C_3z = d_3$$

Nilai x, y, z dapat diturunkan secara biasa (*Conventional*) yaitu dengan cara eliminasi satu persatu dari $, y, z$.

Determinan dan Penerapan Nilai Eigen

Kita ambil sebuah nilai sebuah matriks bujur sangkar. Misalkan ada matriks A dan :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \text{dicari determinannya}$$

Cara mencari nilai sebuah determinan adalah sebagai berikut :

i. Cara Perkalian Diagonal.
Hanya dapat digunakan untuk matriks yang berordo 2 atau 3 saja. Untuk Matriks ordo 2 x 2 didapatkan ketentuan :

$$\det A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

$$\det B = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$$

Atau

$$\det B = a\begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b\begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix}$$

ii. Cara Minor Determinan.
Misalkan :

$$\det A = \sum a_{ij}(-1)^{i+j} M_{ij}$$

Tinjaulah :

$$\det A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

1. Determinan ordo n berasal dari matriks ordo n $\det A = |A| = |a_{ij}|$ dengan $i = j = n$
2. Setiap element memiliki tanda $(-1)^{i+j}$
3. Untuk mencari determinan minor dan o_{ij} yaitu dengan menarik garis horizontal dan vertikaldari elemen a_{ij} semua elemen yang tidak terletak pada kedua garis tersebut merupakan elemen dari determinan minor M_{ij} .

Untuk mencari determinan minor elemen a_{22}

$$M_2 = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{pmatrix}$$

LATIHAN SOAL

1. Diketahui 2 matriks A dan B :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Tentukan :
   a. $A + B$
   b. $B - A$
   c. AB
   d. BA
   e. $(A + B)^T$
   f. $(B - A)^T$

2. Tentukan transpose dari matriks di bawah ini :
   a. $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 2 + i & x^2 \\ i & x \end{pmatrix}$

3. Tentukanlah transpose dan stelah itu determinankan matriks - matriks di bawah ini :
   a. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -6 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$

4. Hitunglah invers dari matriks berikut ini :
   a. $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$
   c. $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

5. Hitunglah determinan dari matriks berikut ini dan tentukan pula inversnya:
   a. $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

6. Gunakan metode matriks untuk menyelesaikan operasi persamaan linear berikut ini :
   a. $x_1 + 4x_2 = 3 \quad , \quad x_1 + x_2 = 0$
   b. $15x_1 - 4x_2 = 5 \quad , \quad 8x_1 + x_2 = -4$

7. Diketahui 2 fungsi matriks A dan B terhadap x dan y , yaitu :

$$A = \begin{pmatrix} 3x & 2y^2 \\ 1 & x \end{pmatrix} \qquad \text{dan} \qquad B = \begin{pmatrix} 2y & x^2 \\ x & y \end{pmatrix}$$

   Tetukanlah turunan satu kali dari perkalian antara matriks fungsi A dan B terhadap :
   a. Fungsi x
   b. Fungsi y

8. Tentukanlah nilai dan fungsi eigen dari matriks dibawah ini :
   a. $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
   b. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
   c. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

9. Tentukanlah invers dari fungsi A dari matriks 3 x 3 berikut ini :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

10. Diberikan sebuah matriks 2 macam matriks 3 x 3 sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   Tentukanlah :
   a. Invers dari matriks A atau (A^{-1}) .
   b. Invers dari matrik B atau (B^{-1})

c. Nilai dari matriks $B^{-1}AB$ dan
d. Nilai dari matriks $B^{-1}A^{-1}B$
e. Untuk 2 matriks A dan B saling diinverskan menghasilkan sebuah matriks satuan atau matriks identitas.

11. Pada materi Mekanika Klasik, kita mempunyai persamaan vector satuan pada koordinat polar $\hat{r}$ dan $\hat{\theta}$ jika dituliskan dalam bentuk matriks adalah :

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \end{pmatrix}$$

Atau :

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \end{pmatrix}$$

Dimana : $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Tentukanlah :

a. Nilai dari determinan matriks A
b. Persamaan matriks invers .

12. Sesuai dengan soal pada nomor 11 pada materi Mekanika Klasik, kita mempunyai persamaan vector satuan pada koordinat silinder $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ dan $\hat{k}$ jika dituliskan dalam bentuk matriks adalah :

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

Atau :

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{z} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

Dimana : $B = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tentukanlah :

a. Nilai dari determinan matriks B
b. Persamaan matriks invers .

13. Masih sesuai dengan soal pada nomor 12 pada materi Mekanika Klasik, kita mempunyai persamaan vector satuan pada koordinat bola $\hat{r}$, $\hat{\theta}$ dan $\hat{\varphi}$ jika dituliskan dalam bentuk matriks adalah :

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & \sin\varphi \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

Atau :

$$\begin{pmatrix} \hat{r} \\ \hat{\theta} \\ \hat{\varphi} \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} \hat{\imath} \\ \hat{\jmath} \\ \hat{k} \end{pmatrix}$$

Dimana : $C = \begin{pmatrix} \sin\theta\sin\varphi & -\cos\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\sin\theta\cos\varphi & \cos\theta\cos\varphi & \sin\varphi \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{pmatrix}$

Tentukanlah :

a. Nilai dari determinan matriks C
b. Persamaan matriks invers .

14. Diberikan sebuah matriks 3 x 3 sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5i \\ -2i & 2 & 0 \\ 1 & 1+i & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah :

a. Transpose dari matriks A atau (A^T)
b. Adjoin dari matrik .
c. Invers dari matrik A atau (A^{-1})
d. Compleks conjugate dari matriks A dan
e. Transpose conjugate dari matriks A
f. Buktikanlah identitas dari soal diatas $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}$ dimana I merupakan vector satuan.

15. Diberikan sebuah matriks 3 x 3 sebagai berikut :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 2i & -1 \\ -i & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah :

a. Tentukanlah nilai dari determinan dari matriks P diatas
b. Tentukanlah invers dari matriks P diatas
c. Tunjukkanlah bahwasannya PP^T merupakan matriks yang simetri.

16. Diberikan sebuah matriks 3 macam matriks 2 x 2 sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah :

a. Transpose dari matriks A atau (A^T) .
b. Invers dari matrik A atau (A^{-1})
c. Nilai dari matriks AB
d. Nilai dari matriks $A^T B^T$
e. Nilai dari matriks $B^T A^T$
f. Nilai dari matriks BA^T
g. Nilai dari matriks ABC
h. Nilai dari matriks $AB^T C$
i. Nilai dari matriks $B^T AC$
j. Nilai dari matriks $B^T C$
k. Nilai dari matriks $B^{-1} C$
l. Nilai dari matriks $C^{-1} A$
m. Nilai dari matriks CB^T

17. Diberikan sebuah matriks 3 x 3 sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2i \\ i & -3 & 0 \\ 1 & 0 & i \end{pmatrix}$$

Tentukanlah :

a. Transpose dari matriks A atau (A^T)
b. Adjoin dari matrik .
c. Invers dari matrik A atau (A^{-1})
d. Compleks conjugate dari matriks A dan
e. Transpose conjugate dari matriks A

18. Diberikan sebuah matriks 3 x 3 sebagai berikut :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tentukanlah :

a. Transpose dari matriks A atau (A^T)
b. Adjoin dari matrik .
c. Invers dari matrik A atau (A^{-1})
d. Compleks conjugate dari matriks A dan
e. Transpose conjugate dari matriks A

19. Buktikan bahwa vector – vector berikut saling orthogonal :
    a. $(1, -5,7,2,3)$
    b. $(2,1, -2,7,1)$

20. Tentukan jarak antara titik – titik berikut ini :
    a. $(4, -1,2,7)$ dan $(2,3,1,9)$
    b. $(-1,5, -3,2,7)$ dan $(2,6,2,7,9)$

21. Hitunglah panjang vector dari point berikut ini :
    a. $(2,0,4,6,5)$
    b. $(-5,1,5,3, -2)$

BAB IV
DIFERENSIAL PARSIAL

Kompetensi Dasar

Menggunakan persamaan diferensial untuk menyelesaikan permasalahan fisika

Indikator Kompetensi

1. Mahasiswa dapat menentukan definisi pengertian operasional dari diferensial parsial
2. Mahasiswa dapat menentukan solusi umum dari persamaan diferensial parsial dengan menggunakan prinsip aturan rantai.
3. Mahasiswa dapat menentukan solusi umum dari persamaan diferensial total.
4. Mahasiswa dapat menentukan solusi umum dari persamaan diferensial parsial yang implisit / tergantung selai dari posisi koordinat.
5. Mahasswa dapat menentukan solusi umum dari persamaan diferensial parsial yang berbentuk integral.

4.1 Pendahuluan

Di dalam pembahasan kali ini senantiasa kita akan mengkaji dari hal yang mendasar dari materi kalkulus diferensial (turunan) dari sebuah fungsi, kita tahu bahwasannya turunan fungsi memiliki banyak sekali kegunaan dalam dunia fisika misalnya untuk mencari kecepatan partikel (v) dan percepatan partikel (a) dan menentukan titik maksimum dan minimum dari sebuah kurva dan grafik.

Tetapi yang sering kali kita temukan sebuah fungsi tidak hanya bergantung pada satu variabel saja. Kenyataan inilah yang mendasari kita untuk mengenal fungsi – fungsi yang terdiri dari beberapa variabel dan setelah itu kita dapat menentukan bagaimana cara untuk mencari turunan dari fungsi tersebut.

Mari kita lihat bahwasannya terdapat fungsi $z = f(x, y)$, apabila kita ingin mendapatkan turunan dari fungsi z maka kita hendak senantiasa membuat salah satu variabel yang tetap dan berubah entah itu variabel x atau y . diferensiasi inilah yang menjadi perhatian yang sangat serius dikalangan para *scientist*. Dan keseriusan diferensial/turunan ini dinamakan turunan/diferensial parsial. Dengan ketentuan notasi bukan lagi d melainkan ∂ (∂ dibaca do). Kalau dituliskan dalam bentuk limit :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \tag{4.2}$$

Notasi lain untuk menyatakan $\partial z/\partial x$ ataupun $\partial z/\partial y$ adalah f'_x dan Dz_x atau f'_y dan Dz_y. Dari persamaan (4.1) dan (4.2) inilah sebuah fungsi dengan berbagai banyak variabel dapat diturunkan secara *countinou* dengan nama diferensial parsial.

4.2 Ketentuan – Ketentuan yang Berlaku untuk Diferensial Parsial

Semua aturan yang berlaku dalam turunan biasa juga berlaku untuk turunan parsial. Baik turunan pertama, kedua, ketiga sampai turunan ke – n.

Contoh 4.1 :
Tentukanlah diferensial parsial dari $f(x, y) = 2x^2 - xy^2$

Jawab :

$$f(x, y) = 2x^2 - xy^2$$

Fungsi f memiliki 2 variabel bebas maka diferensial parsial tersebut ada 2 yaitu :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^2 - y^2 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2xy$$

Uji Kepahaman Anda

Sesuai dengan contoh 1, tentukanlah diferensial dari fungsi berikut :

$$u = 2x^2 - \ln y + \sin z^2$$

Turunan parsial pada umumnya juga merupakan fungsi baik dari komponen x, y, dan.

1. $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx}$ (4.3)
2. $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = f_{xyz}$ (4.4)
3. $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = f_{yyy}$ (4.5)
4. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = f_{zzz}$ (4.6)

Catatan : kesamaan turunan campuran untuk fungsi $f(x, y)$ berlaku jika f_{xy} dan f_{yx} countinou pada titik yang ditinjau.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \quad (4.7)$$

Contoh 4.2 :

Tentukanlah diferensial parsial $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$, $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$, dan $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ dari fungsi $f(x, y) = x^2y^2 - \cos(xy)$

Jawab :

$f(x, y) = x^2y^2 - \cos(xy)$

Fungsi f memiliki 2 variabel bebas maka diferensial parsial tersebut ada 2 yaitu :

1. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^2 + y\sin xy) = 2y^2 + y^2\cos xy$
2. $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2x^2y + x\sin xy) = 4xy + xy\cos xy$
3. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2 + y\sin xy) = 4xy + xy\cos xy$
4. $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2x^2y + x\sin xy) = 2x^2 + x^2\cos xy$

Untuk memahami materi turunan kedua,ketiga pada diferensial parsial maka kita dapat memantapkan pada material fisika khususnya materi Thermodinamika seperti yang tertera pada Uji Kepahaman Anda dibawah ini :

Uji Kepahaman Anda

1. Pada persamaan gas ideal terdapat fungsi $f(P,V,T) = 0$ dimana kita mengambil keadaan jumlah mol $= 1$.

$$PV = nRT$$

   a. tentukanlah $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$, $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$, $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V$
   b. Buktikanlah dari hasil poin a bahwasannya : $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -1$

2. Untuk materi yang lebih kompleks lihatlah materi pada pada bab diagram menemonik. Buktikanah :
   a. $c_P = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P$
   b. $c_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$

4.3 Diferensial Parsial Total

Apabila kita memiliki fungsi $f(x,y)$ mempunyai turunan parsial di titik x,y maka pertambahan fungsi $f(x,y)$ jika x bertambah menjadi $x + \Delta x$ dan y menjadi Δy adalah :

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x,y) \tag{4.9}$$

Jika ditambahkan dan dikurangkan $f(x, y + \Delta y)$ diruas kanan diperoleh hasil :

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) + f(x, y + \Delta y) - f(x,y) \tag{4.10}$$

Suku pertama dalam kurung suku pada ruas kanan adalah pertambahan x dalam fungsi $f(x, y + \Delta y)$ dengan mempertahankan $y + \Delta y$ dengan nilai yang tetap. Oleh sebab itu fungsi ini merupakan fungsi satu variabel x dan berlakulah teorema dari nilai rata – rata kalkulus :

Jika $f(x)$ memiliki turunan $f(x)$ pada setiap titik dalam selang $|x-\Delta x, x+\Delta x|$, maka $|f(x+\Delta x)-f(x)| = f(\epsilon)\Delta x$ dengan $\epsilon = x+\theta\Delta x$ $(0<\theta<1)$ sebuah titik dalam selang $|x-\Delta x, x+\Delta x|$. Dengan demikian dapat dituliskan bahwasannya : $|f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y+\Delta y)| = f(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y)\Delta x$ dengan $0 \leq \theta_1 \leq 1$.

Dengan cara yang sama, penerapan teorema nilai rata – rata pada suku kedua dengan x tetap, menghasilkan :

$$|f(x, y+\Delta y)-f(x, y)| = f_y(x, y+\theta_2\Delta y)\Delta y \qquad (4.11)$$

Dengan selang $0 \leq \theta_2 \leq 1$. Jika turunan parsial $f_x(x,y)$ dan $f_y(x,y)$ kontinyu di titik (x,y) , maka :

$$f_x(x+\theta_1\Delta x, y+\Delta y) = f_x(x,y)+\varepsilon_1 \qquad (4.12)$$
$$f_y(x, y+\theta_2\Delta y) = f_x(x,y)+\varepsilon_2 \qquad (4.13)$$

Dengan $\lim \varepsilon_1 = 0$ dan $\lim \varepsilon_2 = 0$ apabila Δx dan Δy menuju nol.

$$\Delta f = f_x(x,y)\Delta x + f_y(x,y)\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y \qquad (4.14)$$

Dengan mengambil $\lim \Delta x \to 0$, $\lim \Delta y \to 0$ diperoleh diferensial total fungsi (x,y) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (4.15)$$

Secara tiga dimensi dapat dituliskan dalam bentuk koordinat kartesian :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz \qquad (4.16)$$

Dari persamaan (4.16) inilah yang disebut dengan *diferensial total* atau *diferensial eksak*.

Contoh 4.3 :

Tentukanlah diferensial total dari fungsi $f(x,y,z) = x^2y^2 - \cos(xy) + z^2$

Jawab :

$$f(x,y,z) = x^2y^2 - \cos(xy) + z^2$$

Fungsi f memiliki 2 variabel bebas maka diferensial parsial tersebut ada 2 yaitu :

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y^2 - \cos(xy) + z^2) = 2xy^2 + y\sin xy$
2. $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x^2y^2 - \cos(xy) + z^2) = 2x^2y + x\sin xy$
3. $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2y^2 - \cos(xy) + z^2) = 2z$

Sehingga dapat dituliskan secara lengkap :

$$df = (2xy^2 + y\sin xy)dx + (2x^2y + x\sin xy)dy + (2z)dz$$

Uji Kepahaman Anda

Sesuai dengan contoh 2, tentukanlah diferensial total dari fungsi berikut :

$$f(x,y,z) = x^2y^2z^2 - \tan(xy) + z^2$$

Dan

$$f(x,y,z,t) = x^2y^2z^2 - \cot(xyzt) + z^2t$$

4.4 Diferensial Parsial Dengan Aturan Rantai

Dengan mengambil contoh untuk fungsi $f(x,y)$ secara ukuran geometri menyatakan persamaan permukaan dalam bidang 2 dimensi. Apabila variabel x dan y berubah secara bentuk kontur C sembarang dengan bentuk persamaan : $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ dengan ketentuan t menyatakan sebuah parameter kurva pada fungsi $f(x,y)$ yang merupakan fungsi dari satu variabel t :

$$z(t) = f[x(t), y(t)] \tag{4.17}$$

Dengan penulisan secara diferensial dalam kontur C berlaku :

$$dx = \frac{dx}{dt}dt\ , \qquad dy = \frac{dy}{dt}dt\ , \qquad dz = \frac{dz}{dt}dt \tag{4.18}$$

Dengan penulisan diferensial total dapaf dituliskan persamaan (4.17) :

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (4.19)$$

Dengan diturunkan terhadap fungsi waktu t dapat dituliskan bahwasannya:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (4.20)$$

Dari persamaan (4.19) dapat diperluas dengan menguraikan komponen – komponen dari variabel – variabel bebasnya $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ sehingga dapat dituliskan dengan bentuk yang sama seperti persamaan (4.18) :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw \qquad (4.21)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw \qquad (4.22)$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw \qquad (4.23)$$

Contoh 4.4 :
Tentukanlah diferensial total $\partial f/\partial u$ dan $\partial f/\partial v$ dari fungsi $f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$ dengan $x = u + v$ dan $y = u - v$

Jawab :

$f(x, y) = x^2 - 2xy - y^2$ dengan $x = u + v$ dan $y = u - v$

Fungsi f memiliki 2 variabel bebas maka diferensial parsial tersebut ada 2 yaitu :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y \ , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 2y$$

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 1 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial u} = 1$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = 1 \quad , \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -1$$

Sehingga dapat dituliskan secara lengkap :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u} &= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\\ &= (2x - 2y)(1) + (-2x - 2y)(1)\\ &= 2x - 2y - 2x - 2y\end{aligned}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$
$$= (2x - 2y)(1) + (-2x - 2y)(-1)$$
$$= 2x - 2y + 2x + 2y$$
$$\frac{\partial f}{\partial v} = 4x$$

Uji Kepahaman Anda

Sesuai dengan contoh 3, tentukanlah diferensial parsial $\partial f/\partial u$ dan $\partial f/\partial v$ dari :
$f = x^2 + 2xy + y \ln z$, dengan $x = u + v^2$, $y = u - v^2$, dan $z = 2u$

4.5 Diferensial Parsial Secara Implisit

Dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi $f(x,y)$ secara ukuran geometri dan penulisan dapat dinyatakan :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy \tag{4.24}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{4.25}$$

Diferensial parsial implisit ini merupakan metode diferensial secara langsung dalam membentuk fungsi turunan dy/dx tanpa memisahkan tiap – tiap variabel baik variabel x atau .

Contoh 4.5 :
Tentukanlah diferensial / turunan dy/dx dari fungsi $4x^2y - 3y = x^3 - 1$ dengan cara diferensial implisit

Jawab :
$$4x^2y - 3y = x^3 - 1$$
$$(4x^2 - 3)y = x^3 - 1$$

$$y = \frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}$$

Fungsi $f(x, y)$ memiliki 2 variabel maka diferensial parsial tersebut adalah :

$$4x^2 \frac{dy}{dx} + 8xy - 3\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx}(4x^2 - 3) = 3x^2 - 8xy$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 - 8xy}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{3x^2 - 8x\left(\frac{x^3 - 1}{4x^2 - 3}\right)}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{3x^2 - \left(\frac{8x^4 - 8x}{4x^2 - 3}\right)}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{\frac{3x^2(4x^2 - 3)}{4x^2 - 3} - \left(\frac{8x^4 - 8x}{4x^2 - 3}\right)}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{\frac{(12x^4 - 9x^2)}{4x^2 - 3} - \left(\frac{8x^4 - 8x}{4x^2 - 3}\right)}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{\frac{12x^4 - 9x^2 - 8x^4 + 8x}{4x^2 - 3}}{4x^2 - 3}$$

$$= \frac{\frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{4x^2 - 3}}{4x^2 - 3}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^4 - 9x^2 + 8x}{(4x^2 - 3)^2}$$

4.6 Diferensial Parsial Secara Eksplisit

Dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi $f(x, y)$ secara ukuran geometri dan penulisan dapat dinyatakan sesuai dengan persamaan (4.23) dan (4.24). Diferensial parsial eksplisit ini merupakan metode diferensial secara langsung dalam membentuk fungsi turunan dy/dx dengan memisahkan tiap – tiap variabel baik variabel x atau . metode inilah yang sangat umum diajarkan dalam tingkat kalkulus dasar.

Contoh 4.6 :
Tentukanlah diferensial / turunan dy/dx dari fungsi $x^2 + 5y^3 = 9 + x$ dengan cara diferensial secara eksplisit

Jawab :

$$x^2 + 5y^3 = 9 + x$$
$$5y^3 = -x^2 + x + 9$$
$$y^3 = -\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{9}{5}$$

Fungsi $f(x, y)$ memiliki 2 variabel maka diferensial parsial tersebut secara eksplisit adalah :

$$3y^2dy = -\frac{2}{5}xdx + \frac{1}{5}dx$$
$$3y^2dy = \left(-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\right)dx$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3y^2}\left(-\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}\right)$$
$$= \frac{1}{15y^2}(1 - 2x)$$
$$= \frac{1 - 2x}{15y^2}$$

$$= \frac{1 - 2x}{15\left(-\frac{1}{5}x^2 + \frac{1}{5}x + \frac{9}{5}\right)^{\frac{2}{3}}}$$
$$= \frac{1 - 2x}{15\left(\frac{9 + x - x^2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}}$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt[3]{25}(1 - 2x)}{15\sqrt[3]{(9 + x - x^2)^2}}$$

Uji Kepahaman Anda

Sesuai dengan contoh 4.5 dan 4.6, tentukanlah diferensial parsial dari fungsi berikut baik menggunakan metode diferensial secara implisit dan eksplisit :

a. $\frac{dy}{dt}$; jika : $t^2 - y^2 e^{-t^2} + 20\cos t^2$
b. $\frac{d^2y}{dx^2}$; jika : $y^2 - xy + 25\cos x^2 y = 15$
c. untuk point c tentukanlah gradient jika meliwati titik $(2,5)$

4.7 Diferensial Parsial Bentuk Integral

Diferensial bentuk integral diartikan secara fisis bahwasannya apabila terdapat fungsi partikel bergerak melintasi koordinat baik kartesian, silinder, maupun bola dapat dapat dihitung jumlah dari partikel tersebut dan setelah dihitung maka dapat ditentukan bentuk sebaran fungsi tersebut baik hal itu secara garis, luasan, bahkan hingga membentuk volume hingga. Persamaan diferensial parsial bentuk integral dapat dibentuk secara matematis seperti berikut :

$$f(x) = \frac{dF}{dx}$$
$$dF(x) = f(x)dx \tag{4.26}$$

Dengan menerapkan batas titik a hingga titik, maka dapat dituliskan bentuk integral tersebut :

$$\int_{x=a}^{x} dF(x) = \int_{x=a}^{x} f(x)dx \tag{4.27}$$

Dengan mengganti variabel $f(x)$ menjadi variabel $f(t)$ agar lebih mudah untuk membedakan variabel – variabel yang bersangkutan. sehingga :

$$\int_{x=a}^{x} f(t)dt = \int_{x=a}^{x} dF(x)$$

$$\int_{x=a}^{x} f(t)dt = F(x) - F(a) \tag{4.28}$$

Dengan mendiferensiasikan terhadap sumbu x maka diperoleh :

$$\frac{d}{dx}\int_{x=a}^{x} f(t)dt = \frac{d}{dx}[F(x) - F(a)] = \frac{dF}{dx} = f(x) \tag{4.29}$$

Sesuai dengan persamaan (4.27) bahwasannya dapat dituliskan kembali :

$$\frac{d}{dx}\int_{x=a}^{x} f(t)dt = f(x) \tag{4.30}$$

Dengan mengubah syarat batas dari yang bawah diletakkan diatas sehingga dapat dituliskan kembali dari persamaan (4.29) bahwasannya :

$$\frac{d}{dx}\int_{x}^{a} f(t)dt = -f(x) \tag{4.31}$$

Dengan memisalkan persamaan (4.29) dan (4.30) dengan variabel x menjadi variabel u dan :

$$\frac{d}{du}\int_{a}^{v} f(t)dt = f(v) \tag{4.32}$$

$$\frac{d}{du}\int_{a}^{b} f(t)dt = -f(u) \tag{4.33}$$

Misalkan kita gunakan aturan rantai untuk menyederhanakan bentuk integral :

$$P = \int_{u}^{v} f(t)dt$$

Untuk mendapatkan turunan P terhadap variabel x maka diperoleh persamaan :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\partial P}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial P}{\partial v}\frac{dv}{dx} \tag{4.34}$$

Kita tahu bahwasannya $\partial P/\partial u = -f(u)$ dan $\partial P/\partial v = f(v)$ sehingga secara lebih umum dapat dituliskan diferensial parsial dalam bentuk :

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = f(v)\frac{dv}{dx} - f(u)\frac{du}{dx} \qquad (4.35)$$

Persamaan (4.34) merupakan persamaan diferensial parsial dalam bentuk integral.

Contoh 4.7 :
Tentukanlah diferensial bentuk integral dari fungsi berikut ini :

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{\sqrt{x}} \cos t^2\, dt$$

Jawab :

$$v = \sqrt{x} \quad ; \quad \frac{dv}{dx} = \frac{\sqrt{x}}{2x} \quad ; \quad f(v) = \cos\left(\sqrt{x}\right)^2 = \cos x$$

$$u = 0 \quad ; \quad \frac{du}{dx} = 0 \quad ; \quad f(u) = \cos(0)^2 = \cos 0 = 1$$

$$\frac{d}{dx}\int_{0}^{\sqrt{x}} \cos t^2\, dt = \cos x\left(\frac{\sqrt{x}}{2x}\right) = \frac{\cos x}{2\sqrt{x}}$$

Contoh 4.8 :
Tentukanlah diferensial bentuk integral dari fungsi berikut ini :

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x} \frac{\sin t}{t}\, dt$$

Jawab :

$$v = \cos x \quad ; \quad \frac{dv}{dx} = -\sin x \quad ; \quad f(v) = \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$$

$$u = \sin x \quad ; \quad \frac{du}{dx} = \cos x \quad ; \quad f(v) = \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x} \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}(-\sin x) - \frac{\sin(\sin x)}{\sin x}(\cos x)$$

$$\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{\sin t}{t}dt = -\sin(\cos x)\tan x - \sin(\sin x)\cot x$$

Uji Kepahaman Anda

Sesuai dengan contoh 4.7 dan 4.8, tentukanlah diferensial parsial dari bentuk integral berikut :

a. $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{\tan t}{t^2}dt$

b. $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{x^3}\frac{\cos 2t^2}{t^2}dt$

c. $\frac{d}{dx}\int_{\sin x}^{\cos x}\frac{\cot t}{t}dt$

meliwati titik $(2,5)$

Ketentuan – Ketentuan yang Berlaku untuk Diferensial Parsial

Semua aturan yang berlaku dalam turunan biasa juga berlaku untuk turunan parsial. Baik turunan pertama, kedua, ketiga sampai turunan ke $-n$. Turunan parsial pada umumnya juga merupakan fungsi baik dari komponen $x, y,$ dan .

1. $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = f_{xxx}$
2. $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = f_{xyz}$
3. $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} = f_{yyy}$
4. $\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} = f_{zzz}$

Catatan : kesamaan turunan campuran untuk fungsi $f(x,y)$ berlaku jika f_{xy} dan f_{yx} countinou pada titik yang ditinjau.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Diferensial Parsial Total

Apabila kita memiliki fungsi $f(x,y)$ mempunyai turunan parsial di titik x,y maka pertambahan fungsi $f(x,y)$ jika x bertambah menjadi $x+\Delta x$ dan y menjadi Δy adalah :
Dengan mengambil $\lim \Delta x \to 0$, $\lim \Delta y \to 0$ diperoleh diferensial total fungsi (x,y) :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

Secara tiga dimensi dapat dituliskan dalam bentuk koordinat kartesian :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Diferensial Parsial Dengan Aturan Rantai

Dengan mengambil contoh untuk fungsi $f(x,y)$ dalam bidang 2 dimensi. Apabila variabel x dan y berubah secara bentuk kontur C sembarang dengan bentuk persamaan : $x = x(t)$ dan $y = y(t)$ dengan ketentuan t menyatakan sebuah parameter kurva pada fungsi $f(x,y)$ yang merupakan fungsi dari satu variabel t :

$$z(t) = f[x(t)\ ,y(t)]$$

Dengan diturunkan terhadap fungsi waktu t dapat dituliskan bahwasannya:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

Dapat diperluas dengan menguraikan komponen – komponen dari variabel – variabel bebasnya $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$ sehingga dapat dituliskan dengan bentuk yang sama seperti persamaan (4.18) :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u}du + \frac{\partial x}{\partial v}dv + \frac{\partial x}{\partial w}dw$$
$$dy = \frac{\partial y}{\partial u}du + \frac{\partial y}{\partial v}dv + \frac{\partial y}{\partial w}dw$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}du + \frac{\partial z}{\partial v}dv + \frac{\partial z}{\partial w}dw$$

Diferensial Parsial Secara Implisit

Dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi $f(x,y)$ secara ukuran geometri dan penulisan dapat dinyatakan :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}}$$

Diferensial parsial implisit ini merupakan metode diferensial secara langsung dalam membentuk fungsi turunan.

Diferensial Parsial Secara Eksplisit

Dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi $f(x,y)$ secara ukuran geometri dan penulisan dapat dinyatakan sesuai dengan persamaan diferensial parsial implisit. Diferensial parsial eksplisit ini merupakan metode diferensial secara langsung dalam membentuk fungsi turunan dy/dx dengan memisahkan tiap – tiap variabel baik variabel x atau . metode inilah yang sangat umum diajarkan dalam tingkat kalkulus dasar.

Diferensial Parsial Bentuk Integral

Diferensial bentuk integral diartikan secara fisis bahwasannya apabila terdapat fungsi partikel bergerak melintasi koordinat baik kartesian, silinder, maupun bola dapat dapat dihitung jumlah dari partikel tersebut dan setelah dihitung maka dapat ditentukan bentuk sebaran fungsi tersebut baik hal itu secara garis, luasan, bahkan hingga membentuk volume hingga. Sehingga secara lebih umum dapat dituliskan diferensial parsial dalam bentuk :

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt = f(v)\frac{dv}{dx} - f(u)\frac{du}{dx}$$

LATIHAN SOAL

1. Diketahui jika $z = x^2 + 2y^2$ dimana $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$. Tentukanlah :
   a. $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_y$
   b. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_r$
   c. $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_y$
   d. $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_r$
   e. $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta$
   f. $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_x$
   g. $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial y}$
   h. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \theta}$
   i. $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial \theta}$
   j. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

2. Turunkan fungsi – fungsi dibawah ini pada setiap masing – masing variabelnya secara satu kali :
   a. $u = \frac{x^2}{x^2+y^2}$
   b. $s = t^u$
   c. $z = \ln(u^2 + v^2 + w^2)^{\frac{1}{2}}$
   d. $w = x^2 - y^3 - 2xy + 6$
   e. $u = e^x \cos y$
   f. $z = x^2 + 2y^2$

3. Diketahui jika $z = r^2 \tan^2\theta$ dimana $x = \cos\theta$, $y = \sin\theta$, $r^2 = x^2 + y^2$. Tentukanlah :
   a. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y$
   b. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_r$
   c. $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_\theta$

d. $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_y$
e. $\left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)_r$
f. $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_\theta$
g. $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_x$
h. $\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)_y$
i. $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial y}$
j. $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \theta}$
k. $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial \theta}$
l. $\frac{\partial^2 z}{\partial r \partial x}$

4. Dalam materi gelombang optik, dari solusi umum persamaan gelombang elektromagnetik 1 dimensi $u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct)$. Buktikanlah persamaan umum gelombang tersebut adalah : $\partial^2 u/\partial t^2 = c^2\, \partial^2 u/\partial x^2$ dimana c merupakan kecepatan cahaya.

5. Hitunglah Diferensial Bentuk Integral berikut ini :
a. $\frac{d}{dx}\int_0^{\sqrt{x}} t^2\, dt$, b. $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2} \frac{\cos^2 \omega t}{t^2} dt$, c. $\frac{d}{dx}\int_{3-x}^{x^2} (x - t)\, dt$

6. Diketahui jika $z = x^2 e^{y^2}$ dimana $x = \cos t$, $y = \sin t$. Tentukanlah dz/dt

7. Diketahui jika $z = x - y$ dimana$x^2 + y^2 = t^2$, $x \sin t = ye^{-y}$. Tentukanlah dz/dt

8. Untuk turunan parsial berikut. Hitunglah nilai dari dx/dy dan d^2x/dy^2 apabila terdapat fungsi $x = yz$ dan $y = 2\cos(x + y + z)$ dimana masing – masing dari nilai variabel x, y, z adalah -1 .

9. Tentukanlah fungsi – fungsi turunan pertama dx/dy dan dy/dx dari $x = yz^2$ dan $= 2\sin^2(y+z)$.

10. Sesuai dengan soal nomer 9. Tentukanlah turunan kedua dari turunan pertama dx/dy dan dy/dx .

11. Dengan menggunakan aturan rantai . tentukanlah furunan fungsi z terhadap fungsi waktu t . (dz/dt) :
    a. $z = 3x^2 + 2xy^3$ dimana $x = \sqrt{t}$ dan $y = t^3$
    b. $z = xe^{-y}$ dimana $x = \sin t$ dan $y = \cos t$

12. Pada materi Listrik Magnet. Jika diketahui $u = f(x, y)$ dan $= r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Buktikanlah persamaan Laplace atau persamaan potensial :
    $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$
    Dan
    $$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

13. Pada materi Termodinamika. Persamaan gas Clausius : $P(V - b) = RT$.
    a. Tentukanlah nilai dari konstanta bulk β dimana $\beta = 1/V\,(\partial V/\partial T)_P$ dengan R adalah tetapan atau konstanta dan pada masing – masing nilai dari P, V, T tersebut adalah .
    b. Sama seperti halnya poin a. Tetapi dalam hal ini, tentukanlah fungsi dari ketermampatan gas k dimana $= -1/V\,(\partial V/\partial P)_T$.

14. Pada materi Termodinamika. Diketahui persamaan gas Van der Walls adalah :
    $$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$
    Apabila , b , dan R merupakan konstanta , dimana P, V, T masing – masing fungsi tekanan, volume, dan suhu. Tentukanlah :
    a. $dP(V, T)$
    b. $d^2P(V, T)$
    c. Buktikanlah bahwasannya : $(\partial V/\partial T)_P(\partial T/\partial P)_V(\partial P/\partial V)_T = -1$

15. Dengan menggunakan aturan rantai . tentukanlah dz/dr dan dz/ds. Jika :
    a. $z = 6xy^2$ dimana $x = r^2 - s^2$ dan $y = 2rs$
    b. $z = \ln(3x^2 + 4y^2)$ dimana $x = r + s$ dan $y = r - s$

16. Tentukanlah nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi f secara 2 dimensi pada koordinat kartesian $f(x, y) = xy^2$ dalam bentuk ellips : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

17. Tentukanlah nilai maksimum dan nilai minimum dari fungsi P secara 2 dimensi pada koordinat kartesian $P(x, y) = x^2y^2$ dalam bentuk parabolik $y = x^2 - 2x + 1$.

18. Hitunglah jarak minimum dari fungsi f secara 3 dimensi pada koordinat kartesian $f(x, y, z) = x^2y^2z^2$ pada sebuah bola dengan persamaan $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

19. Tentukan jarak minimum dari titik $(0,0)$ ke arah garis $ax + by + c = 0$

20. Tentukan jarak minimum dari titik $(0,0)$ ke arah garis $2x + 3y + 6 = 0$.

21. Pada materi Termodinamika. Sebuah plat siku – siku yang dibentuk oleh garis $x = \pm 1$ dan $y = \pm 1$ memilki fungsi suhu :
    $$T(x, y) = 2x^2 - 3y^2 - 2x + 10$$
    Tentukanlah titik terpanas dan terdingin pada plat tersebut.

22. Tentukan jarak terpendek dari titik pusat $(0,0)$ ke arah persamaan lingkaran $x^2 + y^2 = 1$

BAB V
INTEGRAL LIPAT

Kompetensi Dasar :

Menggunakan vektor dalam berbagai operasi untuk menyelesaikan persoalan fisika.

Indikator Kompetensi :

1. Mahasiswa dapat menentukan definisi atau pengertian dari integral lipat
2. Mahasiswa dapat menyelesaikan permasalaham integral lipat dengan cara sederhana.
3. Mahasiswa dapat merubah bentuk variabel dan menggunakan aturan perubahan sebuah fungsi (Jacobian)

5.1 Pendahuluan

Integral lipat mempunyai arti yang sangat besar dalam penyelesaian masalah fisika seperti halnya. Integral memiliki makna fisis sebagai sebuah jumlah atau sumasi dari sebuah fungsi yang secara kontinyu nilainya. Banyak penerapan yang ada di kehidupan masyarakat bahwasannya penerapan sebuah integral tersebut secara fisika teoritik digunakan untuk menentukan banyaknya keadaan utama posisi dan waktu partikel saat bergerak. Secara ilmu terapan integral lipat satu, lipat dua, bahkan untuk lipat tiga digunakan untuk menentukan sebuah perhitungan elemen lapisan sebuah bahan untuk mengetahui panjang sebuah benda, luasan sebuah benda, dan volume dari sebuah benda tersebut. Integral dapat diselesaikan secara analitik maupun komputasi. Hal ini apabila terdapat solusi dari sebuah integral tersebut sulit sekali maka dapat menggunakan operasi integral secara numerik atau komputasi.

5.2 Aplikasi Penggunaan Integral Lipat

5.2.1 Menghitung berbagai besaran fisika suatu benda.

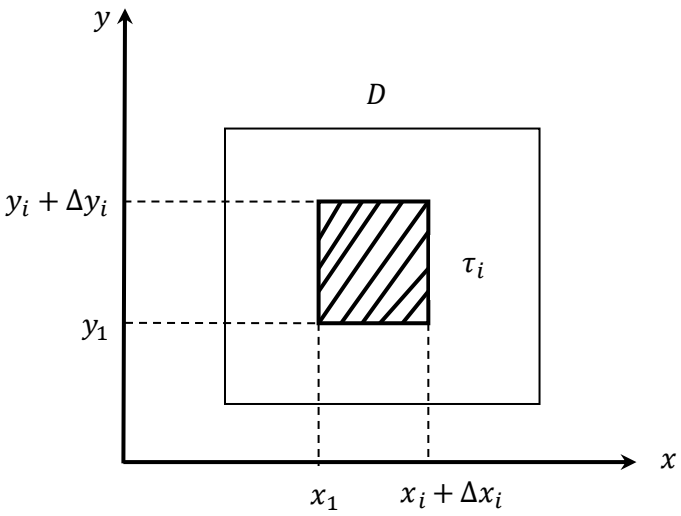
Contoh :

1. Menghitung massa total benda bila rapat massa pada sebuah partikel
2. Menghitung pusat massa benda baik dalam keadaan stasioner hingga bergerak
3. Menghitung momen inersia sebuah benda yang berbentuk tertentu.

4. Menghitung medan listrik dan medan magnit yang ditimbulkan suatu distribusi muatan partikel

5.2.2 Apabila bendanya berdimensi 2 atau 3, maka perhitungannya menggunakan Integral Lipat .

Definisi : *Integral Lipat Dua*
Tinjau persoalaan fisika menghitung massa total M suatu plat datar dalam bidang dengan distribusi massa tidak seragam (*non uniform*). Misalnya : Geometrinya berupa daerah terbatas D dalam bidang kartesian (x, y) dengan rapat massa τ, dimana massa perluasan pada setiap titik (x, y) adalah $D = f(x, y)$ seperti pada gambar dibawah ini :



Gambar 5.1 Penampang Luasan Pada Bidang Segi Empat

Untuk menghitung nilai hamparan bagi massa total M daerah plat D. kita bagi atas n buah elemen daerah kecil $(\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots\ldots, \tau_i)$. Dari gambar (5.1) daerah D pada bidang (x, y) dengan elemen daerah kecil τ_i , selanjutnya dengan memilih titik sebuah titik wakil (x_i, y_i) didalam daerah $\tau_i \rightarrow (i = 1,2,3, \ldots\ldots)$, maka massa setiap elemen daerah didapatkan :

$$\Delta m_i = f(x_i, y_i)(\tau_i) \qquad (5.1)$$

Atau

$$M = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,|\tau_i| \qquad (5.2)$$

Dimana :

$|\tau_i|$ adalah luas daerah τ_i

M adalah massa total plat D

Bila $|\tau_i| \to 0$ dan $n \to \infty$ maka dapat diperoleh hasil secara sumasi :

$$M = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f\,(x_i, y_i)|\Delta x_i, \Delta y_i| \qquad (5.3)$$

Dengan menerapkan nilai dari komponen – komponen pada sumbu x dan y adalah sebagai berikut:

$$(\Delta x_i \to 0\,, \Delta y_i \to 0) \qquad (5.4)$$

limit pada ruas kanan pada persamaan (5.3), jika ada dilambangkan dengan bentuk integral :

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy \qquad (5.5)$$

limit yang disebutkan merupakan integral lipat dua (*double integral*)

Sifat – sifat dari Integral Lipat Dua adalah:

a. Jika $f = f(x,y)$ dan $\mathrm{g} = \mathrm{g}(x,y)$ dan fungsi terdefinisi pada daerah D maka :

$$\iint_D (f \pm \mathrm{g})(x,y)\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dxdy \pm \iint_D \mathrm{g}\,(x,y)\,dxdy$$

b. Jika sebuah konstanta , maka :

$$\iint_D (Cf)(x,y)\,dxdy = C \iint_D f(x,y)\,dxdy \qquad (5.6)$$

c. Jika D merupakan gabungan daerah D_1 dan D_2 atau $D = D_1 \cup D_2$ dengan D sebuah batas , maka :

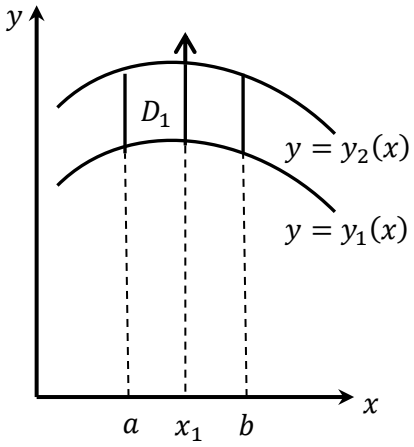
$$\iint_D (Cf)(x,y)\,dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

5.3 Integral Lipat Dua Sebagai Luasan

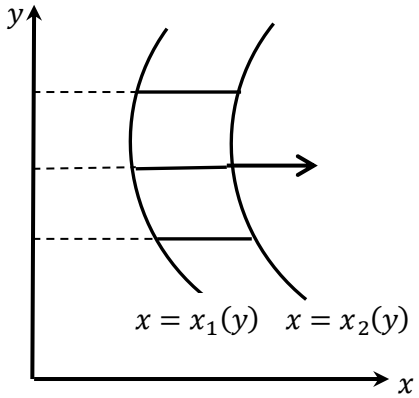
Untuk dapat menghitung integral lipat dua, maka dapat dapat digunakan integral berulang. Dengan menggunakan ketentuan umum bahwasannya :

Suatu daerah D disebut normal terhadap :

a. Sumbu x , jika setiap garis yang tegak lurus terhadap sumbu x hanya memotong dua kurva batas D yang fungsi koordinatnya $y = y_1(x)$ dan $y = y_2(x)$ tidak berubah bentuk.
b. Sumbu y , jika setiap garis yang tegak lurus terhadap sumbu y hanya memotong dua kurva batas D yang fungsi koordinatnya $x = x_1(y)$ dan $x = x_2(y)$ tidak berubah atau tidak beraturan.



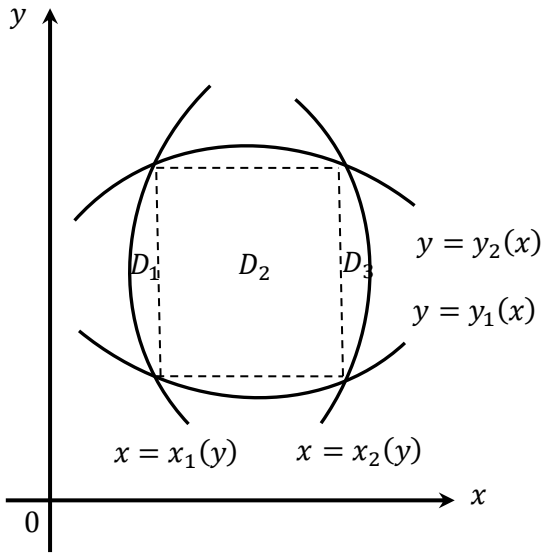
Gambar 5.2.a
Daerah D_1 normal terhadap sumbu x



Gambar 5.2.b
Daerah D_2 normal terhadap sumbu y

Gambar 5.2 Dua Daerah Pada Koordinat Dua Dimensi Yang Terletak Pada Koordinat Kartesian

Suatu daerah b dapat terjadi tidak normal terhadap sumbu x maupun sumbu y. dalam kasus itu daerah D dibagi kedalam beberapa sub daerah normal. Dengan kata lain masing – masing daerah atau luasan dipotong secara kecil – kecil hingga membentuk bentuk yang dapat berupa bidang yang dapat dihitung seperti halnya Contoh dibawah ini sebuah kurva pada koordinat kartesian dua dimensi yang tertera pada gambar (5.3):



Gambar 5.3 Penampang Setiap Daerah Pada Koordinat Kartesian

Daerah D tidak normal terhadap sumbu x dan y, sumbu daerah D_1 , D_2 , D_3 normal terhadap sumbu x.

Selanjutnya tinjaulah sebuah plat D yang normal terhadap sumbu x seperti gambar (5.3) dengan batas ditepi – tepinya, tepi bawah dibatasi oleh kurva $y = y_1(x)$ dan tepi atas yang dibatasi oleh $y = y_2(x)$, sedangkan tepi kiri dan kanannya masing – masing oleh garis tegak $x = a$ dan $x = b$ dimana a dan b adalah bilangan tetap. Secara ringkas dapat dituliskan dengan notasi matematis :

$$D = \{(x, y) \text{ I } a < x < b \text{ I } y_1(x) < y_2(x)\} \qquad (5.7)$$

Jika rapat massa plat D adalah $f(x, y)$ maka integral lipat duanya menjadi :

$$\text{I} = \iint_D f(x, y)\ dxdy \qquad (5.8)$$

yang menyatakan massa totalnya dapat dihitung secara bertahap melalui definisi limit sebagai berikut :

a. Ambil sembarang titik $(x_1, 0)$ pada sumbu x dengan $a \leq x \leq b$

b. Tarik garis $x = x_i$, kemudian tinjau sebuah lempeng tegak dengan sumbu $x = x_i$ dan tebal Δx_i , dalam daerah D yang disebut lempeng ke – i

c. Hitung lampiran massa tiap petak (i, j) pada koordinat x_i dan lempeng ke – i yaitu :

$$\Delta m_{(i,j)} = f(x_i, y_i)|\Delta x_i \,, \Delta y_i| \qquad (5.9)$$

d. Hitung massa total lemping ke – i sebagai limit jumlah seluruh petak - petak didalamnya :

$$\Delta m_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\to 1}^{n} \Delta m_{(i,j)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\to 1}^{n} f(x_i, y_i)|\Delta x_i \,, \Delta y_i| \qquad (5.10)$$

Dengan

$$\Delta y_i = 0 \qquad (5.11)$$

e. Massa total plat adalah limit jumlah massa seluruh lempeng dalam D , yaitu:

$$M = \sum_{i\to 1}^{m} \Delta m_1 = \lim_{m\to\infty} \sum_{i\to 1}^{m} \left[\lim_{n\to\infty} \sum_{i\to 1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta y_i \right] \Delta x_i \qquad (5.12)$$

Dengan $\Delta x_i \to 0$ dan $\Delta y_i \to 0$

f. Limit jumlah berulang pada ruas kanan mendefinisikan integral berulang

$$\mathrm{I} = \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dx \right] dy \qquad (5.13)$$

Jika daerah $D = [(x, y)\ \mathrm{I}\ x_1(y) < x < x_2(y)\,; c < y < d\,]$

Maka :

$$\mathrm{I} = \int_{y=c}^{d} \int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy \qquad (5.14)$$

Contoh 5.1

Hitunglah nilai dari integral lipat berikut :

$$\mathrm{I} = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^2} xy\, dy\, dx$$

Jawab :

$$\mathrm{I} = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x^2} xy\, dy\, dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left| \frac{1}{2} x y^2 \right|_{y=0}^{x^2} dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[\frac{1}{2} x((x^2)^2 - 0^2) \right] dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \left[\frac{1}{2} x(x^4 - 0^2) \right] dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \frac{1}{2} x^5\, dx = \left| \frac{1}{12} x^6 \right|_{x=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{12}(1^2 - 0^2) = \frac{1}{12}(1 - 0)$$

$$\mathrm{I} = \frac{1}{12}$$

Uji Kepahaman Anda :

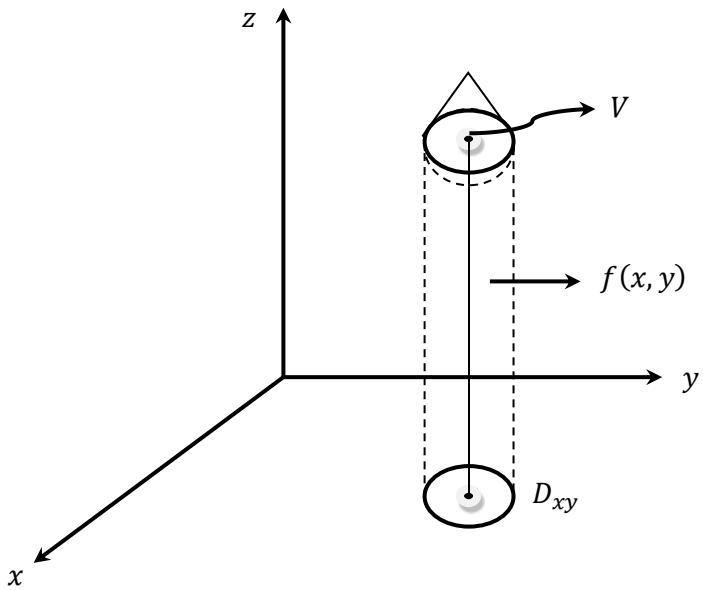
Apabila pada contoh 1 variabel x diintegralkan terlebih dahulu kemudian baru y , maka tunjukkan bahwasannya menghasilkan hasil yang sama

5.4 Integral Lipat Tiga Sebagai Volume

Jika $Z = f(x, y)$ adalah sebuah persamaan permukaan maka integral lipat duanya menjadi :

$$V = \iint_D Z\, dxdy$$
$$= \iint_D f(x,y)\, dxdy \qquad (5.15)$$

adalah volume bagian ruang tegak antara daerah D pada bidang (x,y) dengan permukaan $Z = f(x,y)$, seperti gambar dibawah ini :



Gambar 5.4 Volume V antara permukaan $Z = f(x,y)$ dan bidang D_{xy}

Tafsiran geometri yang sama diberikan pula pada integral serupa dengan variable x, y dan z dengan bertukaran posisi, dengan contoh integral lipat dua :

$$V = \iint_D y\, dxdy = \iint_D f(x,y)\, dxdy \qquad (5.16)$$

Menyatakan volume bagian ruang tegak antara D pada bidang (x,z) dengan permukaan $y = (x,y)$

Perhatikanlah Ketentuan Berikut :
Karena volume geometri bernilai positif maka jika suatu bagian ruang memiliki nilai integral volume negative, ia harus diubah menjadi positif yaitu dengan mengambil nilai mutlaknya.

Misalkan :
D_1 dan D_2 didalam dua daerah internal sub daerah D dalam $D_1 : Z = 0$ dan $D_2 : Z < 0$

$$V_1 = \iint_{D_1} Z\, dxdy > 0 \tag{5.17}$$

Dan

$$V_2 = \iint_{D_2} f(x,y)\, dxdy > 0 \tag{5.18}$$

Sehingga volume geometrinya dapat dinyatakan :

$$V = \iint_{D} Z\, dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)\, dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)\, dxdy \tag{5.19}$$

Aplikasi integral lipat pada berbagai masalah baik itu mekanika, listrik elektrodinmika dan statistika dan lain –lain, yaitu pada :

5.5 Teorema Green Sebagai Penerapan dari Integral Lipat II

Jika $Z = f(x,y)$ adalah sebuah persamaan permukaan maka integral lipat duanya menjadi :

$$V = \iint_{D} Z\, dxdy = \iint_{D} f(x,y)\, dxdy \tag{5.20}$$

Untuk fungsi 1 variabel berlaku:

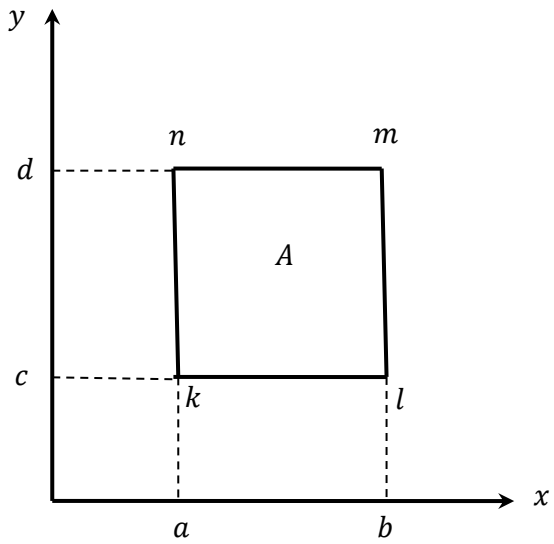
$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x) dx = f(b) - f(a) \tag{5.21}$$

Timbullah pertanyaan bahwasannya : Bagaimana jika penerapannya dengan fungsi 2 variabel $P(x,y)$ dan $Q(x,y)$?

Dalam hal ini kita harus menyederhanakan bentuk dari integral lipat tersebut secara bertahap. Dengan target pengubahan bentuk integral dari integral lipat dua menjadi integral lipat satu. Dengan meninjau

bidang dibawah ini untuk mengkaji nilai dari "*double integral*" yang berubah pada sebuah bidang pada koordinat kartesian :

Ketentuan umum yang dipakai pada teorema green adalah sebuah kontur pada luasan yang disederhanakan hingga membentuk sebuah bentuk yang sederhana dan hal bentuk ini dapat dihitung dengan menerapkan pengubahan bentuk integral.



Gambar 5.5 Bentuk Luasan Pada Koordinat Kartesian

Maka secara matematis dapat dituliskan :

$$\iint \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)\,dxdy = \int_c^d \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} Q(x,y)\,dxdy$$

$$= \int_c^d [Q(b,y) - Q(a,y)]\,dy \quad (5.22)$$

Tinjaulah integral garis keliling Δ luasan seperti yang tertera pada gambar (5.5).

$$\oint_{\partial A} \emptyset(x,y)\,dy = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Maka didapatkan keliling bidang sesuai dengan gambar (5.5) adalah :

$$A = \int_{\boldsymbol{kl}} + \int_{lm} + \int_{\boldsymbol{mn}} + \int_{nk} \cdots\cdots$$

$$dy = 0$$

Sehingga dapat dituliskan :

$$\int_{y=c}^{d} \emptyset(b,y)\,dy + \int_{y=d}^{c} \emptyset(a,y)\,dy$$

$$\oint_{\partial A} \emptyset(x,y)\,dy = \int_{y=c}^{d} \emptyset(b,y)\,dy - \int_{y=d}^{c} \emptyset(a,y)\,dy \qquad (5.23)$$

Dapat disifatkan bahwasannya :

$$\iint_{A} \frac{\partial}{\partial x} \emptyset(x,y)\,dxdy = \int_{\partial A} \emptyset(x,y)\,dy \qquad (5.24)$$

Hal yang sama dapat dilakukan pada fungsi (x,y) :

$$\oint_{\partial A} P(x,y)\,dx = \int_{a}^{b} P(x,c) - P(x-d)\,dx \qquad (5.25)$$

$$\int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} \left(\frac{\partial P}{\partial y} dy\right) dx = \int_{x=a}^{b} P(x,d) - P(x,c)\,dx \qquad (5.26)$$

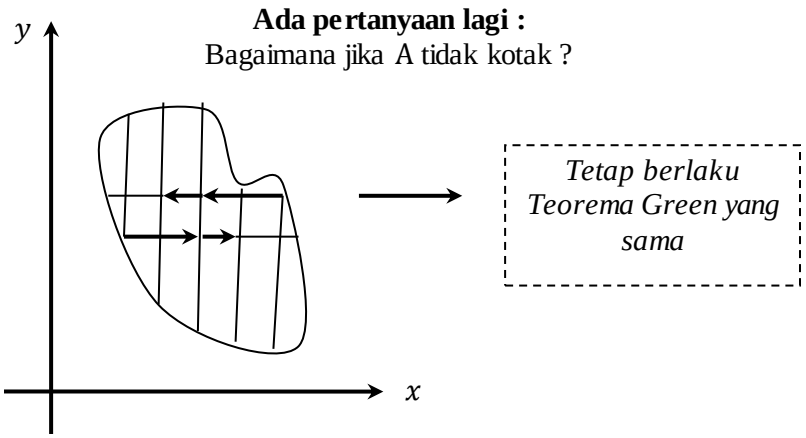
Jika dibandingkan persamaan (5.25) dan persamaan (5.26) maka akan didapatkan hasil :

$$\iint_{A} \frac{\partial P}{\partial y} dydx = -\int_{\partial A} Pdx$$

Kombinasinya didapatkan :

$$\oint_{\partial A} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy \qquad (5.27)$$

Jadi pada persamaan (5.27) inilah merupakan penerapan *teorema green* pada integral lipat.



Gambar 5.6 Penampang Luasan Yang Tidak Teratur

5.6 Divergensi Sebagai Perkalian *Dot Product* (Perkalian Titik)

Kita dapat mengambil sebuah aplikasi untuk menganalisis divergensi pada bidang ,misalkan :

$$\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath} \qquad (5.28)$$

$\vec{V}$ adalah fungsi vektor $\vec{V}(x,y)$

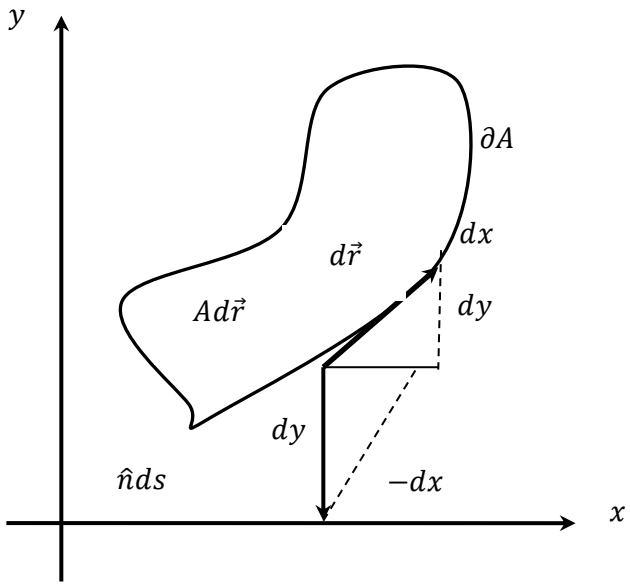
Pilihlah definisi dari :

$$Q = V_x\hat{\imath} \quad \text{dan} \quad P = V_y\hat{\jmath}$$

Maka :

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \nabla \cdot \vec{V} \text{ (divergensi } V) \qquad (5.29)$$



Gambar 5.7 Analisis Bidang 2 D Membentuk Sebuah Benda 3 D

$$d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} \tag{5.30}$$

Vektor satuan $\hat{n}$ tegak lurus terhadap $d\vec{r}$, sehingga :

$$\hat{n}ds = \hat{\imath}\,dy - \hat{\jmath}\,dx \tag{5.31}$$

Lihat bahwasanya :

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{{d_x}^2 + {d_y}^2}$$

$$\begin{aligned} Pdx + Qdy &= -V_y dx + V_x dy \\ &= \left(V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath}\right)\cdot(dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}) \\ &= \vec{V}\cdot\hat{n}ds \end{aligned}$$

$$Pdx + Qdy = V_x dx + V_y dy \tag{5.31}$$

Sehingga :

$Pdx + Qdy = \vec{V}\cdot\hat{n}ds$, dari pada lintasan $A = dr$

Menurut Teorema Green :

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial A} P\,dx + Q\,dy \qquad (5.32)$$

$$\iint_A \nabla\vec{V}\,dxdy = \int_{\partial A} \vec{V}\cdot\hat{n}ds \quad \rightarrow \text{ Teorema divergensi} \qquad (5.33)$$

5.7 Aplikasi dari Teorema Stokes

Kita menentukan dari aplikasi teorema stokes dapat berupa integral lipat tiga atau dapat disebutkan sebuah penentuan volume atau dalam makna fisis sebagaii penentuan rapat massa yang ada dalam sebuah partikel.

Dengan meninjau vektor V dalam badang : $\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath}$ dan dengan memilih $P = V_x$ dan $Q = V_y$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

$$= (\nabla\, x\, \vec{V})z \quad \rightarrow \quad \text{komponen arah } z$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = (\nabla\, x\, \vec{V})\hat{k} \qquad (5.34)$$

dengan Theorema Green :

$$\iint_A (\nabla\, x\, \vec{V})\hat{k}\,dxdy = \oint_{\partial A} \vec{V}\cdot d\vec{r} \qquad \text{(stokes)} \qquad (5.35)$$

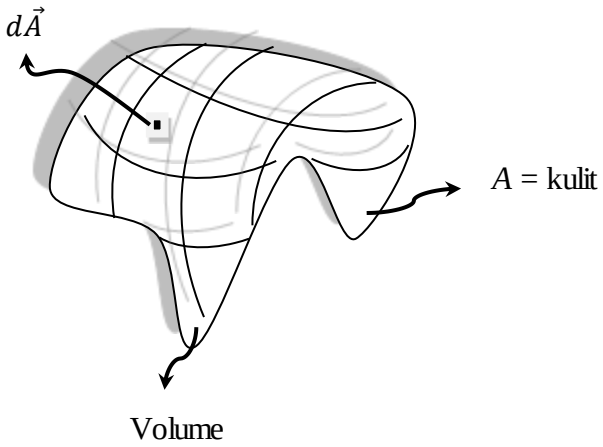
5.8 Teorema Divergensi 3 Dimensi

Kita menentukan dari *teorema stokes* dan *teeorema green* dapat berupa interagl lipat tiga atau dapat disebut sebagai sebuah penentuan volume tetapi pada teorema divergensi yang lebih ditekankan bagaimana kita dapat menentukan kombinasi dari integral lipat dua dan integral lipat tiga.

Dengan meninjau vektor V dalam bidang : $\vec{V} = V_x\hat{\imath} + V_y\hat{\jmath}$

$$\nabla\cdot\vec{V} = \lim_{dV\to 0}\underbrace{\left(\iint_A \vec{V}\cdot d\vec{A}\right)}_{dV \rightarrow \text{Volume}} \longrightarrow \text{Eleman luas}$$

dapat dilihat seperti gambar (5.8) dibawah ini



Gambar 5.8 Penampang Pada Volume Yang Diambil Elemen Luasannya

Maka :

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{V}\, dV = \iint_A \vec{V} \cdot d\vec{A} \qquad (5.36)$$

Secara umum *Teorema Divergensi 3D*, dapat dituliskan :

$$\iiint_r \text{div} \cdot \vec{V}\, dr = \iint_{\partial r} \vec{V} \cdot \hat{n} dr \qquad (5.37)$$

Contoh 5.2 :

Pada electrostatistika melalui integral lipat tentukan persamaan Maxwell :

$$\vec{V} = \vec{E}$$

$$\vec{V} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

Kita terapkan teorema divergensi 3D :

$$\iiint_r \nabla \cdot \vec{E}\, dr = \iint_A \vec{E} d\vec{A}$$

$$\vec{E}d\vec{A} = \iint_{\partial r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}\,d\vec{A}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\iint_{\partial r} d(4\pi r^2)$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}(4\pi r^2)$$

$$\vec{E}d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \quad \rightarrow \quad \text{Hukum Gauss}$$

Apabila muatan q terdistribusi

$$q = \iiint \rho\, dV \quad \rightarrow \quad \rho \text{ adalah rapat muatan}$$

Jadi :

$$\iint_A \vec{E}d\vec{A} = \iiint_V \rho\, dV$$

$$\iint_A \vec{E}d\vec{A} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \langle\text{Persamaan Maxwell}\rangle$$

Rangkuman Materi Integral Lipat

Integral lipat mempunyai arti yang sangat besar dalam penyelesaian masalah fisika seperti halnya. Integral memiliki makna fisis sebagai sebuah jumlah atau sumasi dari sebuah fungsi yang secara kontinyu nilainya.

Aplikasi Penggunaan Integral Lipat

a. Menghitung berbagai besaran fisika suatu benda.
   Contoh :
   1. Menghitung massa total benda bila rapat massa pada sebuah partikel
   2. Menghitung pusat massa benda baik dalam keadaan stasioner hingga bergerak
   3. Menghitung momen inersia sebuah benda yang berbentuk tertentu.
   4. Menghitung medan listrik dan medan magnit yang ditimbulkan suatu distribusi muatan partikel

b. Apabila bendanya berdimensi 2 atau 3, maka perhitungannya menggunakan Integral Lipat .
Definisi : *Integral Lipat Dua*
Tinjau persoalaan fisika menghitung massa total M suatu plat datar dalam bidang dengan distribusi massa tidak seragam (*non uniform*).
Sifat – sifat dari Integral Lipat Dua adalah:
1. Jika $f = f(x, y)$ dan $\mathrm{g} = \mathrm{g}(x, y)$ dan fungsi terdefinisi pada daerah D maka :
$$\iint_D (f \pm \mathrm{g})(x, y)\, dxdy = \iint_D f(x, y)dxdy \pm \iint_D \mathrm{g}(x, y)dxdy$$
2. Jika sebuah konstanta , maka :
$$\iint_D (Cf)(x, y)\, dxdy = C \iint_D f(x, y)dxdy$$
3. Jika D merupakan gabungan daerah D_1 dan D_2 atau $D = D_1 \cup D_2$ dengan D sebuah batas, maka :
$$\iint_D (Cf)(x, y)\, dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)dxdy$$

Integral Lipat Dua Sebagai Luasan .

Untuk dapat menghitung integral lipat dua, maka dapat dapat digunakan integral berulang.

Jika daerah $D = [(x, y)\ \mathrm{I}\ x_1(y) < x < x_2(y)\,; c < y < d\,]$

Maka :

$$\mathrm{I} = \int_{y=c}^{d} \int_{x=x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

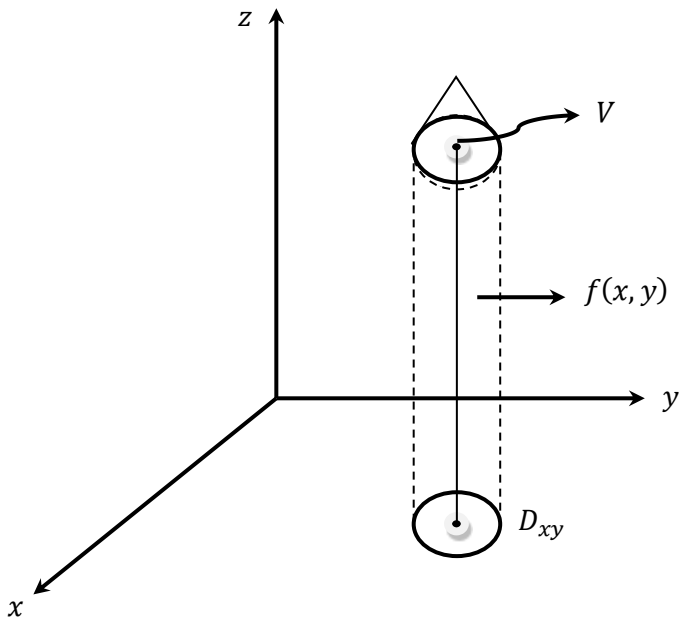
Integral Lipat Tiga Sebagai Volume

Jika $Z = f(x, y)$ adalah sebuah persamaan permukaan maka integral lipat duanya menjadi :

$$V = \iint_D Z\, dxdy = \iint_D f(x, y)\, dxdy$$

adalah volume bagian ruang tegak antara daerah D pada bidang (x, y) dengan permukaan $Z = f(x, y)$, seperti gambar dibawah ini. Sehingga volume geometrinya dapat dinyatakan :

$$V = \iint_D Z\, dxdy = \iint_{D_1} f(x, y)\, dxdy + \iint_{D_2} f(x, y)\, dxdy$$



Gambar 5.9 Integral Permukaan

Aplikasi integral lipat pada berbagai masalah baik itu mekanika, listrik elektrodinmika dan statistika dan lain –lain, yaitu pada :

Teorema Green Sebagai Penerapan Dari Integral Lipat II

$$\oint_{\partial A} P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

Maka dalam hal ini merupakan penerapan *teorema green* pada integral lipat.

Divergensi Sebagai Perkalian Dot Product (Perkalian Titik)

Dengan mengambil vector pada bidang :

$$Pdx + Qdy = \vec{V} \cdot \hat{n} ds \text{ , dari pada lintasan } A = dr$$

Menurut Teorema Green :

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy = \int_{\partial A} P\, dx + Q\, dy$$

$$\iint_A \nabla \vec{V}\, dxdy = \int_{\partial A} \vec{V} \cdot \hat{n} ds \quad \rightarrow \text{Teorema divergensi}$$

Aplikasi Dari Teorema Stokes

Kita menentukan dari aplikasi teorema stokes dapat berupa integral lipat tiga atau dapat disebutkan sebuah penentuan volume atau dalam makna fisis sebagaii penentuan rapat massa yang ada dalam sebuah partikel.

dengan Theorema Green :

$$\iint_A (\nabla\, x\, \vec{V})\hat{k}\, dxdy = \oint_{\partial A} \vec{V} \cdot d\vec{r} \qquad \text{(stokes)}$$

Teorema Divergensi 3 Dimensi

Kita menentukan dari *teorema stokes* dan *teeorema green* dapat berupa interagl lipat tiga atau dapat disebut sebagai sebuah penentuan volume tetapi pada teorema divergensi yang lebih ditekankan bagaimana kita dapat menentukan kombinasi dari integral lipat dua dan integral lipat tiga. Maka :

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{V}\, dV = \iint_A \vec{V} \cdot d\vec{A}$$

Secara umum *Teorema Divergensi 3D*, dapat dituliskan :

$$\iiint_r \text{div} \cdot \vec{V}\, dr = \iint_{\partial r} \vec{V} \cdot \hat{n} dr$$

LATIHAN SOAL

***Ketentuan* : Untuk soal nomor 1 sampai dengan 24, hitunglah hasilnya :**

1. Integral tak tentu berikut :
$$\int \sqrt[3]{x}\, dx$$

2. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{7}{x}\, dx$$

3. Integral tak tentu berikut :
$$\int 8^x\, dx$$

4. Integral tak tentu berikut :
$$\int e^{6x}\, dx$$

5. Integral tak tentu berikut :
$$\int 6 \sin x\, dx$$

6. Integral tak tentu berikut :
$$\int 7 \sinh x\, dx$$

7. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x-5} dx$$

8. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{x-4}{2x^2-16x+30}\, dx$$

9. Integral tak tentu berikut :
$$\int (x^2+3x-5)\,(2x+3) dx$$

10. Integral tak tentu berikut :

$$\int (2x^3 + 6x^2 + 6x + 9)\,(x+1)^2 dx$$

11. Integral tak tentu berikut :

$$\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$$

14. Integral tak tentu berikut :

$$\int \sec^2(4x-1)\, dx$$

15. Integral tak tentu berikut :

$$\int 7^{8x}\, dx$$

16. Integral tak tentu berikut :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

17. Integral tak tentu berikut :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

18. Integral tak tentu berikut :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$$

19. Integral tak tentu berikut :

$$\int \frac{dx}{1-x^2}$$

20. Integral tak tentu berikut :

$$\int \frac{dx}{1+4x^2}$$

21. Integral tak tentu berikut :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{6x-9x^2}}$$

22. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2+6x-9x^2}}$$

23. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{-dx}{\sqrt{-8+6x-x^2}}$$

24. Integral tak tentu berikut :
$$\int \frac{dx}{\sqrt{-3+4x-x^2}}$$

25. Buktikan bahwasannya :

a. $\int \sqrt{A^2-Z^2}\,dz = \frac{A^2}{2}\left\{\sin^{-1}\left(\frac{Z}{A}\right)+\frac{Z\sqrt{A^2-Z^2}}{A^2}\right\}+C$

b. $\int \sqrt{Z^2+A^2}\,dz = \frac{A^2}{2}\left\{\sinh^{-1}\left(\frac{Z}{A}\right)+\frac{Z\sqrt{Z^2+A^2}}{A^2}\right\}+C$

c. $\int \sqrt{Z^2-A^2}\,dz = \frac{A^2}{2}\left\{\frac{Z(Z^2-A^2)}{A^2}-\cosh^{-1}\left(\frac{Z}{A}\right)\right\}+C$

26. Hitunglah fungsi integral di bawah ini :

a. $\int_{y=0}^{2}\int_{x=2y}^{4} dxdy$

b. $\int_{y=1}^{2}\int_{x=\sqrt{y}}^{y^2} xdxdy$

c. $\int_{x=0}^{1}\int_{y=x}^{e^x} ydydx$

27. Hitunglah integral lipat 2 di bawah ini dengan deskripsi
$$\iint_A ydxdy$$
Hingga membentuk titik – titik segitiga $(-1,0)$, $(0,2)$, dan $(2,0)$

28. Hitunglah nilai integral dibawah ini.

$$\iint_A x dx dy$$

Dimana A adalah wilayah diantara dua grafik parabola $y = x^2$ and grafik garis lurus $2x - y + 8 = 0$

29. Hitunglah nilai integral dibawah ini.

$$\iint_R (2x + 3y) dx dy$$

Dimana R adalah wilayah diantara pada koordinat kartesian dengan titik - titik $(0,0)$, $(5,2)$, $(5,0)$

30. Hitunglah nilai integral dibawah ini.

$$\iint_A 6y^2 \cos x \, dx dy$$

Dimana A adalah wilayah diantara dua grafik parabola $y = \sin x$ dan sumbu x dan garis $x = \pi/2$.

31. Diketahui fungsi dari volume dari sebuah ruang adalah

$$V(x, y, z) = 8xyz$$

dengan diatassnya dilingkupi oleh permukaan yang berbentuk hiperbola secara 3 dimensi yaitu :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{25} = 1$$

Tentukanlah titik – titik koordinat pada pada masing – masing sumbu

32. Hitunglah integral lipat 2 berikut ini :

a. $\displaystyle\int_{y=0}^{3} \int_{x=0}^{2} (3x - 2y) dx dy$

b. $\displaystyle\int_{y=0}^{2} \int_{x=-1}^{1} (1 + x^2 y^2) dx dy$

c. $\displaystyle\int_{x=-2}^{3} \int_{y=-2}^{2} x(1 - y) dy dx$

d. $\int_{y=0}^{\ln 2} \int_{x=y}^{1} 2xe^{-y} dxdy$

33. Ubahlah terlebih dahulu variabel – variabel pada masing – masing integrasi, kemudian kerjakanlah

a. $\int_{x=0}^{2} \int_{y=x}^{2} e^{-\frac{y^2}{2}} dydx$

b. $\int_{x=0}^{2} \int_{x=y^2}^{1} \frac{e^x}{\sqrt{x}} dxdy$

34. Hitunglah nilai dari integral lipat tiga dibawah ini :

a. $\int_{x=1}^{2} \int_{y=x}^{2x} \int_{z=0}^{y-x} dzdydx$

b. $\int_{y=-2}^{3} \int_{z=1}^{2} \int_{x=y+z}^{2y+z} 8ydxdzdy$

c. $\int_{z=0}^{2} \int_{x=z}^{2} \int_{y=8x}^{z} dydxdz$

d. $\int_{x=1}^{3} \int_{z=x}^{2x} \int_{y=0}^{\frac{1}{z}} zdydzdx$

e. $\int_{y=1}^{3} \int_{z=-3}^{2} \int_{x=y+z}^{2+z} 3x^2yz^2 dxdzdy$

f. $\int_{z=0}^{3} \int_{x=0}^{2} \int_{y=8x}^{x+y} 2x^2yzdydxdz$

35. Pada materi Kalkulus Dasar. Tunjukkan sebuah volume bola yang memiliki jari – jari r :

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

36. Pada materi Kalkulus Dasar. Tunjukkan sebuah Luas dari permukaan bola yang memiliki jari – jari r :
    $A = 4\pi r^2$

37. Pada materi Kalkulus Dasar. Tunjukkan sebuah volume dari silinder yang memiliki jari – jari ρ :
    $V = \pi\rho^3$

38. Pada materi Kalkulus Dasar. Tunjukkan sebuah Luas dari permukaan silinder yang memiliki jari – jari r :
    $A = 2\pi\rho^2$
39. Pada materi Mekanika Klasik. Sebuah lempeng tipis berbentuk segi empat dengan titik sudut $(0,0)$, $(0,2)$, $(3,0)$, $(3,2)$ yang memiliki kerapatan massa yang serba sama. Hitunglah :
    a. Massa M pada lempeng tersebut.
    b. Titik pusat massa x dan y
    c. Momen inersia I_x dan I_y

40. Pada materi Mekanika Klasik. Sebuah lempeng tipis berbentuk segi tiga dengan titik sudut $(0,0)$, $(0,7)$, $(7,0)$ yang memiliki kerapatan massa yang serba sama. Hitunglah :
    a. Massa M pada lempeng tersebut.
    b. Titik pusat massa x dan y
    c. Momen inersia I_x dan I_y

BAB VI
ANALISA VEKTOR

Kompetensi Dasar :

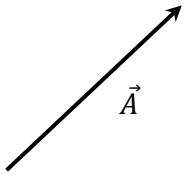
Mahasiswa dapat menggunakan vektor dalam berbagai operasi untuk menyelesaikan persoalan fisika.

Indikator Kompetensi :

1. Mahasiswa dapat menerapkan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian vektor.
2. Mahasiswa dapat menerapkan operasi vektor diferensial.
3. Mahasiswa dapat menerapkan operasi gradien, divergensi, curl dan mengetahui dari arti fisis pada masing – masing operasi diferensial vektor tersebut.
4. Mahasiswa dapat menerapkan operasi teorema green, teorema stokes, dan teorema divergensi integral permukaan dan mengetahui dari arti fisis pada masing – masing operasi vektor integral tersebut.

6.1 Pendahuluan

Vektor merupakan sebuah besaran yang selalu mempunyai nilai dan arah. Dengan operasi memiliki tanda – tanda dan vektor satuan pada tiap – tiap koordinat.



Vektor biasanya dituliskan dengan huruf kapital yang di tebalkan atau diberi tanda panah diatasnya $\vec{A}$.

Panjang panah menyatakan besar vektor $\vec{A}$ dan arah panah menunjukkan arah vektor $\vec{A}$. Jika sebuah vektor $\vec{A}$ dibagi dengan besarnya $|\vec{A}|$, diperoleh sebuah vektor yang searah dengan vektor $\vec{A}$ dan besarnya satu, yang disebut dengan vektor satuan.

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A} \qquad (6.1)$$

Vektor satuan $\hat{a}$ mempunyai besar satu dan arah yang sama dengan arah vektor $\vec{A}$.

Komponen vektor $\vec{A}$ dalam sistem koordinat kartesian (x, y, z) adalah A_x ,A_y dan A_z. Vektor satuan $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ adalah vektor satuan yang searah dengan sumbu x, y dan z yang positif.

$$\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k} \qquad (6.2)$$

Besar vektor $\vec{A} = |\vec{A}|$ adalah :

$$|\vec{A}| = (\vec{A}\cdot\vec{A})^{\frac{1}{2}}$$
$$= \sqrt{\vec{A}\cdot\vec{A}}$$
$$= \sqrt{(A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k})\cdot(A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k})}$$

$$= \sqrt{\begin{matrix} {A_x}^2(\hat{\imath}\cdot\hat{\imath}) + A_xA_y(\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath}) + A_xA_z(\hat{\imath}\cdot\hat{k}) + A_yA_x(\hat{\jmath}\cdot\hat{\imath}) + {A_y}^2(\hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath}) \\ A_yA_z(\hat{\jmath}\cdot\hat{k}) + A_zA_x(\hat{k}\cdot\hat{\imath}) + A_zA_y(\hat{k}\cdot\hat{\jmath}) + {A_z}^2(\hat{k}\cdot\hat{k}) \end{matrix}}$$

$$= \sqrt{\begin{matrix} {A_x}^2(1) + A_xA_y(0) + A_xA_z(0) + A_yA_x(0) + {A_y}^2(1) + \\ A_yA_z(0) + A_zA_x(0) + A_zA_y(0) + {A_z}^2(1) \end{matrix}}$$

$$= \sqrt{{A_x}^2 + 0 + 0 + 0 + {A_y}^2 + 0 + 0 + 0 + {A_z}^2}$$

$$|\vec{A}| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2} \qquad (6.3)$$

Contoh 6.1 :

Hitunglah vektor satuan dari vektor $\vec{A} = 2\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}$.

Jawab :

$$\vec{A} = 2\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}$$
$$A_x = 2\ ,\ \ A_y = 3\ ,\ \ A_z = 6$$

Jadi : $|\vec{A}| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$

$$= \sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2}$$
$$= \sqrt{4 + 9 + 36}$$
$$= \sqrt{49}$$
$$|\vec{A}| = 7$$

Maka vektor satuan searah $\vec{A}$ adalah :

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$
$$= \frac{2\,\hat{\imath} + 3\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}}{7}$$
$$\hat{a} = \frac{2}{7}\,\hat{\imath} + \frac{3}{7}\,\hat{\jmath} + \frac{6}{7}\,\hat{k}$$

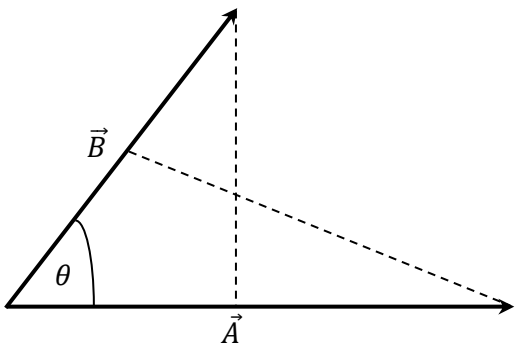
6.2 Perkalian Vektor

Ada 2 macam perkalian vector yaitu perkalian silang dan scalar baik dalam komponen 2 , 3 atau lebih vector dalam berbagai kombinasi perkalian.

6.2.1 Perkalian Dua Vektor (Perkalian Titik atau *Dot Product*)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \qquad (6.4)$$

Dengan θ adalah sudut antara $\vec{A}$ dan $\vec{B}$



Gambar 6.1 : Gambaran Proyeksi Vektor $\vec{A}$ Terhadap Vektor $\vec{B}$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|\left[|\vec{B}| \cos\theta\right] = |\vec{B}|\left[|\vec{A}| \cos\theta\right] \qquad (6.5)$$

Pada persamaan (6.5) tertulis bahwasannya $|\vec{B}| \cos\theta$ merupakan sebuah proyeksi $\vec{B}$ ke $\vec{A}$, maka $\vec{A} \cdot \vec{B}$ dapat dinyatakan sebagai perkalian antara besar $\vec{A}$ dengan proyeksi $\vec{B}$ ke $\vec{A}$, atau dapat juga dinyatakan sebagai perkalian antara besar $|\vec{B}|$dengan proyeksi $\vec{A}$ ke $\vec{B}$, sehingga secara singkat dapat dituliskan :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = (\text{Komutatif}) \qquad (6.6)$$

Ini berlaku juga untuk vektor satuan $\hat{\imath}$,$\hat{\jmath}$,$\hat{k}$ pada koordinat kartesian :

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = |\hat{\imath}||\hat{\imath}| \cos 0 \quad = 1$$
$$\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = |\hat{\jmath}||\hat{\jmath}| \cos 0 \quad = 1$$
$$\hat{k} \cdot \hat{k} = |\hat{k}||\hat{k}| \cos 0 = 1$$

Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwasannya pada perkalian titik atau *dot product* bahwasannya sesuai dari pernyataan pada persamaan (6.6) :

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$
$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0 \qquad (6.7)$$
$$\hat{k} \cdot \hat{\imath} = \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0$$

Vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ diuraikan komponen – komponennya diperoleh :

$$\vec{A} = A_x\, \hat{\imath} + A_y\, \hat{\jmath} + A_z\, \hat{k} \qquad (6.8)$$
$$\vec{B} = B_x\, \hat{\imath} + B_y\, \hat{\jmath} + B_z\, \hat{k} \qquad (6.9)$$

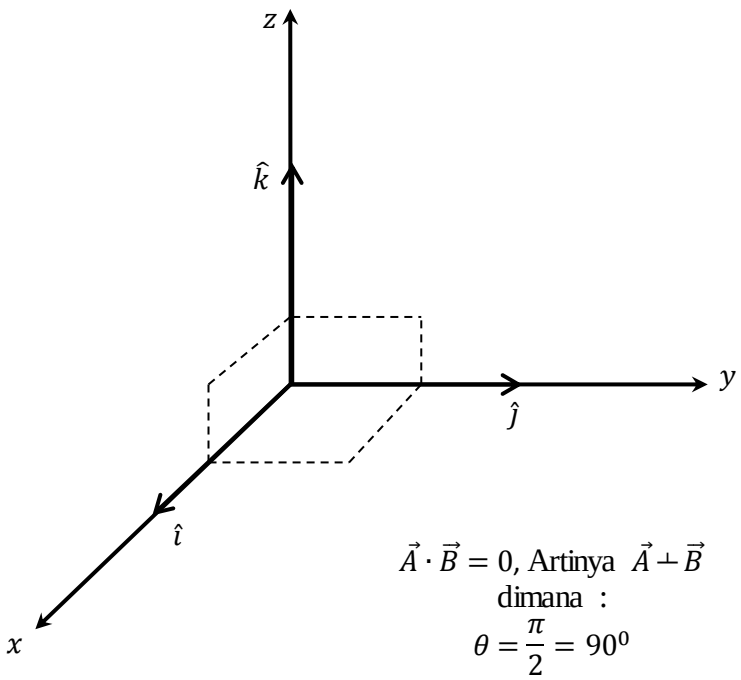
Dapat ditarik definisi sesuai pekalian *dot product* bahwasannya sesuai persamaan (6.8) dan (6.9) :

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2 = A^2 \qquad (6.10)$$
$$\vec{B} \cdot \vec{B} = {B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2 = B^2 \qquad (6.11)$$

Sehingga :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \qquad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Dibawah ini merupakan gambaran tiga dimensi koordinat kartesien dengan vekor satuan yang saling tegak lurus atau orthogonal satu sama lain.



Gambar 6.2 Vektor Satuan Pada Koodinat Kartesian

Contoh 6.2 :
Jika $\vec{A} = 12\,\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}$ dan $\vec{B} = 2\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} + 4\,\hat{k}$. Hitung proyeksi $\vec{A}$ ke $\vec{B}$ dan sudut antara $\vec{A}$ dan $\vec{B}$.

Jawab :

$$\vec{A} = 12\,\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}$$
$$\vec{B} = 2\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} + 4\,\hat{k}$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= \left(12\,\hat{\imath} - 3\,\hat{\jmath} + 6\,\hat{k}\right) \cdot \left(2\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} + 4\,\hat{k}\right)\\ &= (12 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 6 \cdot 4)\\ &= (24 - 12 + 24)\\ \vec{A} \cdot \vec{B} &= 36\end{aligned}$$

Sehingga :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \cos\theta$$

$$
\begin{aligned}
36 &= \sqrt{12^2 + (-3)^3 + 6^2}\sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2}\cos\theta \\
&= \sqrt{144 + 9 + 36}\sqrt{4 + 16 + 16}\cos\theta \\
&= \sqrt{189}\sqrt{36}\ \cos\theta \\
&= 3\sqrt{21}\ \cdot\ 6\ \cos\theta \\
&= 18\sqrt{21}\ \cos\theta \\
2 &= \sqrt{21}\ \cos\theta \\
\cos\theta &= \frac{2}{\sqrt{21}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{21}} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{21}} \\
\cos\theta &= \frac{2}{21}\sqrt{21}
\end{aligned}
$$

Jadi sudut yang dibentuk oleh vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah :

$$\theta = cos^{-1}\left(\frac{2}{21}\sqrt{21}\right)$$

Begitu pula untuk proyeksi vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah :

$$\left|\vec{A}\right|\cos\theta = \sqrt{189} \cdot \frac{2}{\sqrt{21}} = 3\sqrt{21} \cdot \frac{2}{\sqrt{21}} = 6$$

6.2.2 Perkalian Dua Vektor (Perkalian Silang atau *Cross Product*)

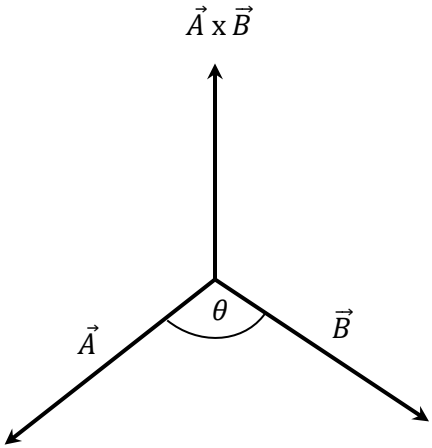
$$\vec{A}\,\mathrm{x}\,\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta\,\hat{\mu} \qquad (6.12)$$

Dapat diuraikan bahwasannya perkalian silang antara dua vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$:s

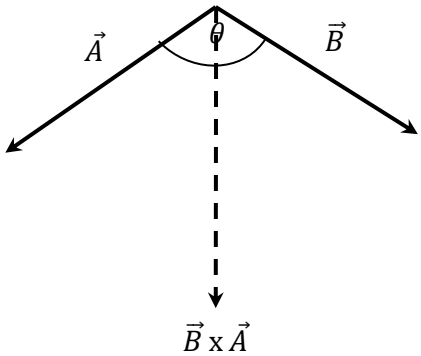
$$\vec{A}\,\mathrm{x}\,\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta\,\frac{\vec{A}\,\mathrm{x}\,\vec{B}}{\left|\vec{A}\,\mathrm{x}\,\vec{B}\right|} \qquad (6.13)$$

$$\vec{C} = \vec{A}\,\mathrm{x}\,\vec{B} \qquad (6.14)$$

Artinya :
Vektor $\vec{C}$ harus tegak lurus dengan bidang tempat $\vec{A}$ dan $\vec{B}$. Untuk menentukan arah vektor $\vec{C}$ yang digunakan sistem sekrup.



Penulisan $\vec{A}$ x $\vec{B}$ menyatakan sekrup diputar dari $\vec{A}$ ke $\vec{B}$ dan sekrup bergerak keatas



Apabila sekrup diputar dari $\vec{B}$ ke $\vec{A}$ maka akan menghasilkan vektor yang mengarah ke bawah

$\vec{A}$ x $\vec{B}$ dan $\vec{B}$ x $\vec{A}$ mempunyai besaran skalar yang sama tapi arah berlawanan.

$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = -\vec{B} \text{ x } \vec{A} \qquad (6.15)$$

Perkalian silang antara dua vektor satuan sejenis dengan sudut yang saling sejajar

$$\hat{\imath} \text{ x } \hat{\imath} = |\hat{\imath}||\hat{\imath}| \sin 0^0 \hat{\mu} = 0$$
$$\hat{\jmath} \text{ x } \hat{\jmath} = |\hat{\jmath}||\hat{\jmath}| \sin 0^0 \hat{\mu} = 0$$
$$\hat{k} \text{ x } \hat{k} = |\hat{k}||\hat{k}| \sin 0^0 \hat{\mu} = 0$$
$$\hat{\imath} \text{ x } \hat{\imath} = \hat{\jmath} \text{ x } \hat{\jmath} = \hat{k} \text{ x } \hat{k} \qquad (6.16)$$

Perkalian silang antara dua vektor satuan tak sejenis dengan sudut yang tegak lurus terhadap bidang. Untuk mengetahui hasilnya dengan meninjau salah satu perkalian atak sejenis dari vektor satuan yaitu $\hat{\imath}$ dan $\hat{\jmath}$, dapat dituliskan :

$$\hat{\imath}\, x\, \hat{\jmath} = |\hat{\imath}||\hat{\jmath}| \sin\frac{\pi}{2}\hat{\mu} \qquad (6.17)$$

Vektor satuan $\hat{\mu}$ tegak lurus terhadap bidang tempat vektor satuan $\hat{\imath}$ dan $\hat{\jmath}$ terletak yaitu bidang x dan y. Karena vektor satuan $\hat{\mu}$ dan $\hat{k}$ tegak lurus pada bidang x dan y . maka $\hat{\mu}$ =$\hat{k}$ atau $\hat{\imath}\, x\, \hat{\jmath} = \hat{k}$. Dengan cara yang sama diperoleh :

$$\begin{array}{ll} \hat{\imath}\, x\, \hat{\jmath} = \hat{k} & \hat{\jmath}\, x\, \hat{\imath} = -\hat{k} \\ \hat{\jmath}\, x\, \hat{k} = \hat{\imath} & \hat{k}\, x\, \hat{\jmath} = -\hat{\imath} \\ \hat{k}\, x\, \hat{\imath} = \hat{\jmath} & \hat{\imath}\, x\, \hat{k} = -\hat{\jmath} \end{array} \qquad (6.18)$$

Dengan melakukan perkalian silang antara 2 vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ maka didapatkan :

$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \left(A_x\, \hat{\imath} + A_y\, \hat{\jmath} + A_z\, \hat{k}\right) \text{ x } \left(B_x\, \hat{\imath} + B_y\, \hat{\jmath} + B_z\, \hat{k}\right)$$

$$= \begin{bmatrix} A_xB_x(\hat{\imath}\text{x}\hat{\imath}) + A_xB_y(\hat{\imath}\text{x}\hat{\jmath}) + A_xB_z\left(\hat{\imath}\text{x}\hat{k}\right) + A_yB_x(\hat{\jmath}\text{x}\hat{\imath}) + A_yB_y(\hat{\jmath}\text{x}\hat{\jmath}) + \\ A_yB_z\left(\hat{\jmath}\text{x}\hat{k}\right) + A_zB_x\left(\hat{k}\text{x}\hat{\imath}\right) + A_zB_y\left(\hat{k}\text{x}\hat{\jmath}\right) + A_zB_z\left(\hat{k}\text{x}\hat{k}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_xB_x(0) + A_xB_y\left(\hat{k}\right) + A_xB_z(-\hat{\jmath}) + A_yB_x\left(-\hat{k}\right) + A_yB_y(0) + \\ A_yB_z(\hat{\imath}) + A_zB_x(\hat{\jmath}) + A_zB_y(-\hat{\imath}) + A_zB_z(0) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} A_xB_y\left(\hat{k}\right) + A_xB_z(-\hat{\jmath}) + A_yB_x\left(-\hat{k}\right) + \\ A_yB_z(\hat{\imath}) + A_zB_x(\hat{\jmath}) + A_zB_y(-\hat{\imath}) \end{bmatrix}$$

$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{k} \qquad (6.19)$$

Adapun cara yang lebih mudah dengan cara dalam bentuk determinan, yaitu :

$$\vec{A}\, x\, \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\, x\, \vec{B} = \begin{vmatrix} A_y & A_z \\ B_y & B_z \end{vmatrix}\hat{\imath} - \begin{vmatrix} A_x & A_z \\ B_x & B_z \end{vmatrix}\hat{\jmath} + \begin{vmatrix} A_x & A_y \\ B_x & B_y \end{vmatrix}\hat{k}$$

$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{\imath} + (A_zB_x - A_xB_z)\hat{\jmath} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{k} \qquad (6.20)$$

Aplikasi atau penerapan dari perkalian silang dalm fisika antara lain:

1. *Usaha* : $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$
2. *Torka* : $\tau = \vec{r}\, x\, \vec{F}$
3. *Kecepatan linier* : $\vec{v} = \vec{\omega}\, x\, \vec{r}$

6.3 Perkalian Tiga Vektor

6.3.1 Perkalian Titik 3 Vektor (*Scalar Tripple Product*)

Perkalian titik 3 vektor dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \text{ x } \vec{C}\right) \tag{6.21}$$

Dalam hal ini merupakan dapat diuraikan pada komponen – komponen vektor – vektor $\vec{A}$, $\vec{B}$, dan $\vec{C}$:

$$\vec{A} = [A_1, A_2, A_3]\,, \vec{B} = [B_1, B_2, B_3]\,, \vec{C} = [C_1, C_2, C_3] \tag{6.22}$$

Dapat dituliskan secara lengkap sesuai dengan persamaan (6.21) :

$$\left(\vec{A} \cdot \vec{B} \cdot \vec{C}\right) = \vec{A} \cdot \left(\vec{B} \text{ x } \vec{C}\right) \tag{6.23}$$

Dengan menuliskan perkalian silang $\vec{B}$ x $\vec{C}$ terlebih dahulu :

$$\vec{B} \text{ x } \vec{C} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B}\ x\ \vec{C} = \begin{vmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix} \hat{\imath} - \begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ C_1 & C_3 \end{vmatrix} \hat{\jmath} + \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} \hat{k} \tag{6.24}$$

Maka didapatkan hasil perkalian matrik 2 x 2 :

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B}\ x\ \vec{C}\right) = A_1 \begin{vmatrix} B_2 & B_3 \\ C_2 & C_3 \end{vmatrix} - A_2 \begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ C_1 & C_3 \end{vmatrix} + A_3 \begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ C_1 & C_2 \end{vmatrix} \tag{6.25}$$

Bentuk dari persamaan (6.26) dapat dituliskan dalam bentuk determinan orde tiga sebagai berikut :

$$\left(\vec{A} \cdot \vec{B} \cdot \vec{C}\right) = \vec{A} \cdot \left(\vec{B}\ x\ \vec{C}\right) \tag{6.26}$$

Begitu pula untuk untuk perkalian $\vec{A} \cdot \left(\vec{B}\ x\ \vec{C}\right)$ dapat diuraikan lagi :

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \left(\vec{B}\ x\ \vec{C}\right) &= A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) \\ &\quad + A_3(B_1C_2 - B_2C_1) \\ &= A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 + A_2B_3C_1 - A_2B_1C_3 + A_3B_1C_2 \\ &\quad - A_3B_2C_1 \end{aligned}$$

$$= B_1(A_3C_2 - A_2C_3) + B_2(A_1C_3 - A_3C_1) + B_3(A_2C_1 - A_1C_2)$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}) = B_1\begin{vmatrix} C_2 & C_3 \\ A_2 & A_3 \end{vmatrix} - B_2\begin{vmatrix} C_1 & C_3 \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} + B_3\begin{vmatrix} C_1 & C_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix} \qquad (6.27)$$

Bentuk ini dapats dituliskan dalam bentuk determinan orde tiga sebagai berikut :

$$(\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\,\mathrm{x}\,\vec{A}) \qquad (6.28)$$

Sekali lagi kita uraikan untuk perkalian $\vec{A}\cdot(\vec{B}\,x\,\vec{C})$:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\,x\,\vec{C}) = A_1(B_2C_3 - B_3C_2) + A_2(B_3C_1 - B_1C_3) + A_3(B_1C_2 - B_2C_1)$$

$$= A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 + A_2B_3C_1 - A_2B_1C_3 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1$$

$$= C_1(A_2B_3 - A_3B_2) + C_2(A_3B_1 - A_1B_3) + C_3(A_1B_2 - A_2B_1)$$

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\,x\,\vec{C}) = C_1\begin{vmatrix} A_2 & A_3 \\ B_2 & B_3 \end{vmatrix} - C_2\begin{vmatrix} B_1 & B_3 \\ A_1 & A_3 \end{vmatrix} + C_3\begin{vmatrix} B_1 & B_2 \\ A_1 & A_2 \end{vmatrix}$$

Dalam hal ini secara lengkap bentuk dari persamaan (6.29) dapat dituliskan dalam bentuk determinan orde tiga sebagai berikut :

$$(\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\,x\,\vec{B}) \qquad (6.29)$$

Hasil dari kombinasi persamaan (6.26), (6.27), (6.28), dan (6.29) :

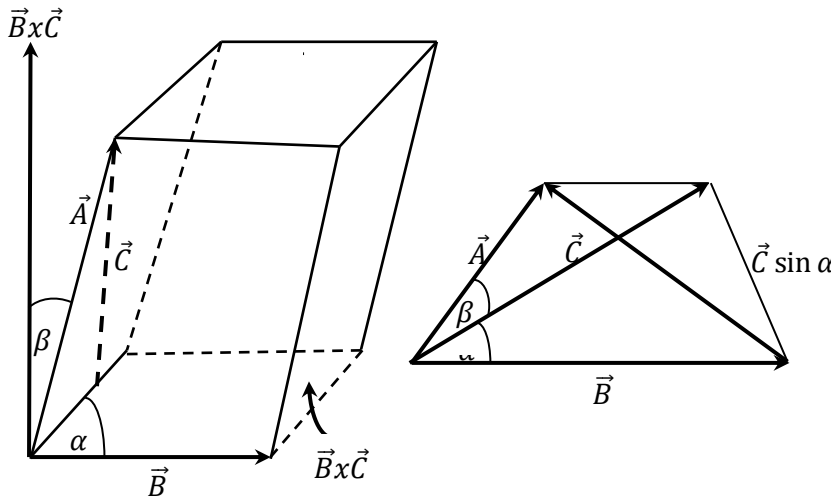
$$(\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}) = \vec{A}\cdot(\vec{B}\,x\,\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\,x\,\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\,x\,\vec{B}) \qquad (6.30)$$

Begitu pula untuk perkalian scalar 3 vektor dengan mengalikan pada konstanta k

$$(k\,\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}) = k(\,\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}) \qquad (6.31)$$

$$k(\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}) = k\vec{A}\cdot(\vec{B}\,x\,\vec{C}) = k\vec{B}\cdot(\vec{C}\,x\,\vec{A}) = k\vec{C}\cdot(\vec{A}\,x\,\vec{B}) \qquad (6.32)$$

Interpretasi atau gambaran geometri dari *Scalar Triple Product*



Gambar 6.3 Gambaran Geometris Secara 3 Dimensi Pada Koordinat Kartesian

Nilai dari Scalar Triple Product merupakan volume dari parallel epidedum, yaitu :
$\vec{B}\ x\ \vec{C} = |\vec{B}||\vec{C}|\sin\alpha$ dengan alas adalah pada vektor $|\vec{B}|$ dan $|\vec{C}|$ serta α. sedangkan tinggi parallel epidedum adalah $|\vec{A}|\cos\beta$ sehingga volume parallel epidedum adalah

$$|\vec{B}||\vec{C}|\sin\alpha\,|\vec{A}|\cos\beta = |\vec{B}\ x\ \vec{C}||\vec{A}|\cos\beta = \vec{A}\cdot(\vec{B}\ x\ \vec{C}) \qquad (6.33)$$

Contoh 6.3 :

Sebuah tetrahedron diberikan oleh tiga vector $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ dimana :

$$\vec{A} = [2,0,3] \qquad \vec{B} = [0,6,2] \qquad \vec{C} = [3,3,0]$$

Tentukan volume tetrahedran dengan :

Jawab :

Volume V dari *Paralel Epidedum* adalah:

$$\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$
$$= 2(0-6) + 0(0-6) + 3(0-18)$$
$$= 2(-6) + 0(-6) + 3(-18)$$
$$= -12 + 0 - 54$$
$$\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C} = -66 \qquad (\textit{volume}\ 66)$$

Volume tetrahedron adalah $1/6$ dari volume parallel epipedum, sehingga di dapatkan $V = 11$. tanda minus menunjukkan arah perkalian vektor yang berlawanan.

6.3.2 Perkalian Silang 3 Vektor (*Tripple Vektor Product*)

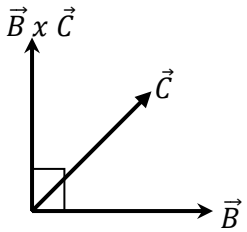
Perkalian silang 3 vektor dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\vec{A}\,\mathrm{x}\left(\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}\right) \qquad (6.34)$$

Pada perkalian dua vektor sudah di bahas bahwa $\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}$ adalah tegak lurus pada $\vec{A}$ dan $\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}$. Ada banyak kemungkinan untuk mendapatkan hasil kali tiga vektor tersebut , asalkan perkaliannya adalah satu vektor dikalikan dengan kombinasi perkalian vektor yang lain.

Untuk mendapatkan $\vec{A}\,\mathrm{x}\left(\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}\right)$ kita lihat kasus dibawah ini :

$$\vec{B} = B_x\hat{\imath}$$
$$\vec{C} = C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath}$$
$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$



$$\vec{A}\,\mathrm{x}\left(\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}\right) = \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right)\,x\left[B_x\hat{\imath}\,\mathrm{x}\left(C_x\hat{\imath} + C_y\hat{\jmath}\right)\right]$$
$$= \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right)\,x\left[B_xC_x(\hat{\imath}\mathrm{x}\hat{\imath}) + B_xC_y(\hat{\imath}\mathrm{x}\hat{\jmath})\right]$$
$$= \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right)\,x\left[B_xC_x(0) + B_xC_y(\hat{k})\right]$$
$$= \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right)\,x\left[B_xC_y(\hat{k})\right]$$
$$= \left[A_xB_xC_y(\hat{\imath}\mathrm{x}\hat{k}) + A_yB_xC_y(\hat{\jmath}\mathrm{x}\hat{k}) + A_zB_xC_y(\hat{k}\mathrm{x}\hat{k})\right]$$
$$= A_xB_xC_y(-\hat{\jmath}) + A_yB_xC_y(\hat{\imath}) + A_zB_xC_y(0)$$
$$\vec{A}\,\mathrm{x}\left(\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}\right) = A_yB_xC_y\,\hat{\imath} - A_xB_xC_y\,\hat{\jmath} \qquad (6.35)$$

Dengan menambahkan dan mengurangkan komponen $A_x B_x C_x\,\hat{\imath}$ pada ruas kanan. sehingga didapatkan hasil :

$$\begin{aligned}\vec{A}\text{ x }\left(\vec{B}\text{ x }\vec{C}\right) &= A_y B_x C_y\,\hat{\imath} - A_x B_x C_y\,\hat{\jmath} + A_x B_x C_x\,\hat{\imath} - A_x B_x C_x\,\hat{\imath}\\ &= \left(A_x C_x + A_y C_y\right) B_x\,\hat{\imath} - A_x B_x\left(C_x\,\hat{\imath} - C_y\,\hat{\jmath}\right)\\ \vec{A}\text{ x }\left(\vec{B}\text{ x }\vec{C}\right) &= \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C} \qquad (6.36)\end{aligned}$$

Uji Kemampuan Anda

Silahkan buktikan bahwasannya :

$$\vec{B}\text{ x }\left(\vec{A}\text{ x }\vec{C}\right) = \left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

$$\vec{C}\text{ x }\left(\vec{A}\text{ x }\vec{B}\right) = \left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\vec{A} - \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}$$

Selamat mencoba

Apliklasi dalam kehidupan fisika pada :

1. *Torka* pada sumbu suatu titik : $\vec{\tau} = \vec{r}\,x\,\vec{F}$
2. *Momentum Sudut* partikel : $\vec{L} = \vec{r}\,x\,\vec{p}$

6.4 Turunan Pada Vektor

6.4.1 Koordinat Kartesian

Jika kita mengambil vektor $\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$ dimana $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ merupakan vektor satuan dari vektor $\vec{A}$, maka turunannnya kita dapatkan

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{A}}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right)\\ &= \frac{dA_x}{dt}\hat{\imath} + \frac{dA_y}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dA_z}{dt}\hat{k}\\ &= \dot{A}_x\hat{\imath} + \dot{A}_y\hat{\jmath} + \dot{A}_z\hat{k}\\ \vec{A}' &= A_x'\hat{\imath} + A_y'\hat{\jmath} + A_z'\hat{k} \qquad (6.37)\end{aligned}$$

6.4.2 Untuk Vektor Posisi, Kecepatan dan Percepatan :

$$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k} \tag{6.38}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right)$$

$$= \frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}$$

$$\vec{v} = x'\hat{\imath} + y'\hat{\jmath} + z'\hat{k} \tag{6.39}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x'\hat{\imath} + y'\hat{\jmath} + z'\hat{k}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k}\right)$$

$$= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\hat{\imath} + \frac{d^2z}{dt^2}\hat{k}$$

$$\ddot{\vec{r}}' = \ddot{x}\hat{\imath} + \ddot{y}\hat{\jmath} + \ddot{z}\hat{k}$$

$$\vec{a} = x''\hat{\imath} + y''\hat{\jmath} + z''\hat{k} \tag{6.40}$$

6.4.3 Perkalian Konstanta (k) dengan Vektor Turunannya apabila ada perkalian titik vektor $\vec{u} = k\vec{A}$, maka :

$$\vec{u}' = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(k\vec{A}\right) = k\frac{d\vec{A}}{dt}$$

$$\vec{u}' = k\vec{A}' \tag{6.41}$$

contoh pada fisika "*Mekanika Klasik*"

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} \tag{6.42}$$

6.4.4 Perkalian Titik dengan Vektor Turunannya :
apabila ada vektor $\vec{V} = \vec{A} \cdot \vec{B}$, maka :

$$V' = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$V' = \vec{A}' \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{B}' \tag{6.43}$$

6.4.5 Perkalian Silang dengan Vektor Turunannya :

apabila ada vektor $\vec{p} = \vec{A}\ x\ \vec{B}$, maka :

$$\vec{p}\,' = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{A}\,\mathrm{x}\,\vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt}\mathrm{x}\,\vec{B} + \vec{A}\,\mathrm{x}\,\frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\vec{p}\,' = \vec{A}'\mathrm{x}\,\vec{B} + \vec{A}\,\mathrm{x}\,\vec{B}' \qquad (6.44)$$

contoh pada fisika klasik "*Momentum Anguler*" :

$$\vec{L} = \vec{r}\,\mathrm{x}\,\vec{p}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r}\,\mathrm{x}\,\vec{p})$$

$$= \frac{d\vec{r}}{dt}\,\mathrm{x}\,\vec{p} + \frac{d\vec{p}}{dt}\,\mathrm{x}\,\vec{r}$$

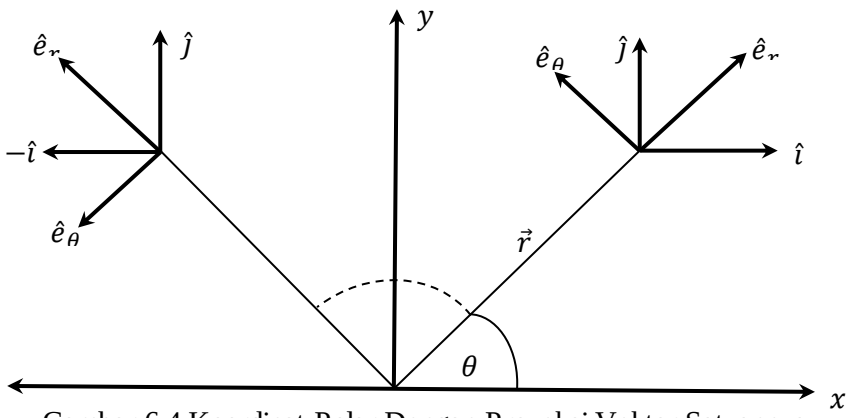
$$= \frac{d\vec{r}}{dt}\,\mathrm{x}\,\vec{p} + \vec{r}\,\mathrm{x}\,\frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= 0\,\mathrm{x}\,\vec{p} + \vec{r}\,\mathrm{x}\,\vec{F}$$

$$\vec{\tau} = \vec{r}\,\mathrm{x}\,\vec{F} \qquad (6.45)$$

6.5 Koordinat Polar

Koordinat polar pada dasarnya coordinate yang berdasarkan pada jari – jari lingkaran $r$dan sudut yang dibentuk pada koordinat tersebut. Adakalanya penyelesaian masalah atau soal fisis tidak dapat dilakukan secara langsung dengan menggunakan koordinat kartesian saja $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ tetapi dapat dilakukan dengan koordinat lain yaitu koordinat polar (*polar coordinate*) untuk 2D, koordinat silinder untuk 3D (*cylindrical coordinate*) dan koordinat bola (*spherical coordinate*) untuk 3D.



Gambar 6.4 Koordinat Polar Dengan Proyeksi Vektor Satuannya

$$\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath} \tag{6.46}$$
$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath} \tag{6.47}$$

Turunan dari $\hat{e}_r$ dan $\hat{e}_\theta$ terhadap t waktu adalah :

$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}) = -\sin\theta\,\hat{\imath}\frac{d\theta}{dt} + \cos\theta\,\hat{\jmath}\frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\cos\theta\,\hat{\imath} - \sin\theta\,\hat{\jmath})$$
$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta \tag{6.48}$$
$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(-\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}) = -\cos\theta\,\hat{\imath}\frac{d\theta}{dt} - \sin\theta\,\hat{\jmath}\frac{d\theta}{dt}$$
$$\frac{d\hat{e}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}(\cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath})$$
$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r \tag{6.49}$$

Penerapan secara real vektor posisi, kecepatan, hingga percepatan partikel pada fisika pada koordinat polar

$$\vec{r} = r\hat{e}_r \tag{6.50}$$
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\hat{e}_r) = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\hat{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\hat{e}_\theta$$
$$\vec{v} = \dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta \tag{6.51}$$
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\hat{e}_r + r\dot{\theta}\hat{e}_\theta\right)$$
$$= \frac{d\dot{r}}{dt}\hat{e}_r + \dot{r}\frac{d\hat{e}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\frac{d\dot{\theta}}{dt}\hat{e}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\hat{e}_\theta}{dt}$$
$$= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\left(\dot{\theta}\hat{e}_\theta\right) + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}\left(\dot{\theta}\hat{e}_r\right)$$
$$= \ddot{r}\hat{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$$
$$= \ddot{r}\hat{e}_r + 2\dot{r}\dot{\theta}\hat{e}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{e}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{e}_r$$
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{e}_\theta \tag{6.52}$$

Untuk Mendalami sesuai pada persamaan (6.51) dan (6.52) dapat diterapkan dengan menganalisis gerak partikel secara klasik ataupun secara kuantum. Untuk lebih mendalami konsep matematis anda silahkan mencoba uji kepahaman anda dibawah ini dengan menerapkan konsep diferensial.

Selamat Mencoba

Uji Kepahaman Anda

Silahkan buktikan bahwasannya :

Pada koordinat silinder ditunjukkan:

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\theta} = \hat{\theta} \quad \& \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{\rho}$$

Pada koordinat bola ditunjukkan:

$$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta} \quad \& \quad \frac{d\hat{r}}{d\varphi} = \sin\theta\,\hat{\varphi}$$

$$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r} \quad \& \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\varphi} = \cos\theta\,\hat{\varphi}$$

$$\frac{d\hat{\varphi}}{d\theta} = 0 \quad \& \quad \frac{d\hat{\varphi}}{d\varphi} = -\hat{\rho}$$

6.6 Turunan Berarah (*Gradien / Del / Nabla*)

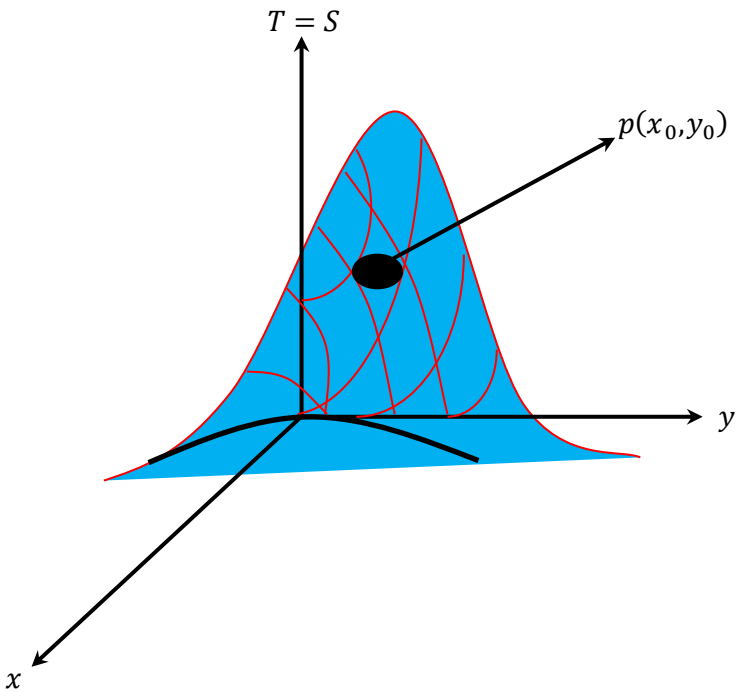
Besaran fisis yang merupakan fungsi ruang dalam fisika sering kali dipergunakan dalam konsep median (*field*) yang memiliki 2 arti sekaligus yaitu :

1. Sebagai Suatu Daerah atau Wilayah
2. Sebagai Suatu Besaran Fisis atau Kuantitas

Yang merupakan keduanya adalah fungsi ruang. Dalam hal ini medan mempunyai 2 besaran yaitu :

1. Medan Skalar : Temperatur, Usaha, Daya, dan lain - lain
2. Medan Vektor : Gaya, Mementum, Tekanan, dan lain - lain

Kita mengambil contoh Medan Temperatur (T) di dalam koordinat kartesian 3 dimensi

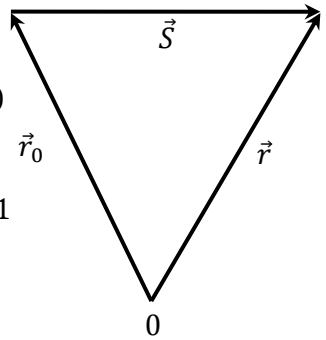


Gambar 6.5 Gambaran Distribusi Suhu Dengan Keadaan Tertentu

Misalkan pada titik $p(x_0, y_0)$ terdapat temperatur adalah T_0 maka$\emptyset$ kearah manakah perubahan suhu T yang paling besar. Dan $\Delta T/\Delta S$ merupakan perubahan gradient/kemiringan yang paling besar dengan ΔS element luasan adalah pada kurva.

Dengan Mengambil Definisi :

Apabila kita mempunyai besaran $\emptyset(x, y, z)$ ingin dicari $(d\emptyset/ds)p_{(r_0)}$ dengan ds pada kurva tertentu.



Apabila : $\vec{r} = \vec{S} + \vec{r}_0$
misalkan *unit vector*

(vektor satuan)

dalam arah $\vec{S}$ adalah :
$\hat{\mu} = a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}$,

dimana $|\hat{\mu}| = 1$

Maka : $\vec{S} = S\hat{\mu}$

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = \vec{S}$$
$$\vec{r} - \vec{r}_0 = S\hat{\mu}$$
$$\left(x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}\right) - \left(x_0\hat{\imath} + y_0\hat{\jmath} + z_0\hat{k}\right) = S\left(a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}\right)$$
$$(x - x_0)\hat{\imath} + (y - y_0)\hat{\jmath} + (z - z_0)\hat{k} = Sa\hat{\imath} + Sb\hat{\jmath} + Sc\hat{k}$$
$$x - x_0 = Sa \quad \rightarrow \quad \frac{dx}{dS} = a$$
$$y - y_0 = Sb \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dS} = b$$
$$z - z_0 = Sc \quad \rightarrow \quad \frac{dz}{dS} = c$$

Sehingga didapatkan besar perubahan dari $\emptyset$ adalah :

$$\begin{aligned}
\frac{d\emptyset}{dS} &= \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\frac{dx}{dS} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\frac{dy}{dS} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\frac{dz}{dS} \\
&= a\frac{\partial\emptyset}{\partial x} + b\frac{\partial\emptyset}{\partial y} + c\frac{\partial\emptyset}{\partial z} \\
&= \left(a\hat{\imath} + b\hat{\jmath} + c\hat{k}\right)\cdot\left(\frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}\right) \\
&= \hat{\mu}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}\right)\emptyset
\end{aligned}$$

$$\frac{d\emptyset}{dS} = \hat{\mu}\cdot\nabla\emptyset \qquad (6.53)$$

Contoh 6.4 :
Diketahui $\emptyset = xy^2 + 2xy$. Hitunglah turunan $\emptyset$ dititik $q(2,1,2)$ pada arah $p(2,1,2)$

Jawab :

$$\hat{\mu} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}}{\sqrt{9}} = \frac{2\hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\hat{k}}{3} = \frac{2}{3}\hat{\imath} + \frac{1}{3}\hat{\jmath} + \frac{2}{3}\hat{k}$$

$$\nabla\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\hat{k}$$

$$\nabla\emptyset = (y^2 + 2yz)\hat{\imath} + (2xy + 2xz)\hat{\jmath} + (2xy)\hat{k}$$

$\nabla\emptyset$ pada titik $p(2,1,2)$ adalah $\nabla\emptyset = 5\hat{\imath} + 12\hat{\jmath} + 4\hat{k}$

Sehingga didapatkan hasil :

$$\begin{aligned}
\frac{d\emptyset}{dS} &= \hat{\mu} \cdot \nabla\emptyset \\
&= \left(\frac{2}{3}\hat{\imath} + \frac{1}{3}\hat{\jmath} + \frac{2}{3}\hat{k}\right) \cdot \left(5\hat{\imath} + 12\hat{\jmath} + 4\hat{k}\right) \\
&= \left(\frac{2}{3} \cdot 5 + \frac{1}{3} \cdot 12 + \frac{2}{3} \cdot 4\right) \\
&= \left(\frac{10}{3} + 4 + \frac{8}{3}\right) \\
\frac{d\emptyset}{dS} &= 10
\end{aligned}$$

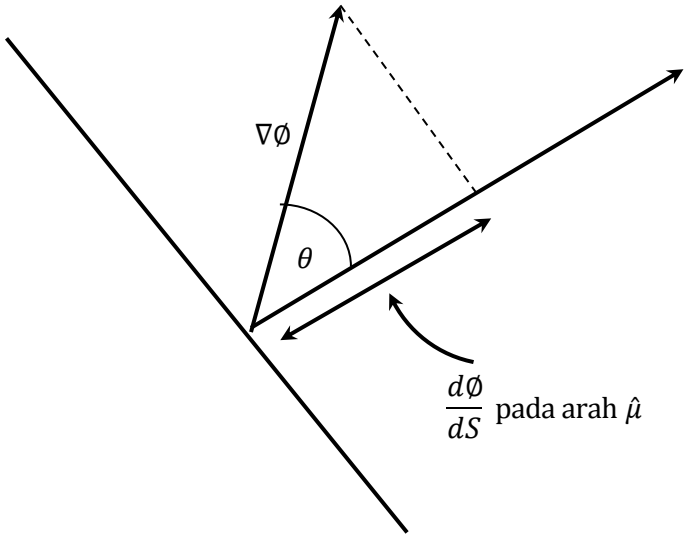
Uji Kemampuan Anda

Sesuai dengan contoh 4. Diketahui fungsi scalar $\delta = xy^2z + x^2yz^2$
Hitunglah turunan δ dititik $q(7,1,2)$ pada arah $\vec{u} = 2\hat{\imath} + 2\hat{\jmath} + 2\hat{k}$

Selamat mencoba

6.7 Arti Geometri Dari Operator $\nabla\emptyset$

Kita menetapkan $d\emptyset/dS = |\nabla\emptyset|\cos\theta$ dengan θ merupakan sudut antara $\nabla\emptyset$ dengan $\hat{\mu}$. Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwasannya $d\emptyset/dS$ adalah proyeksi $\nabla\emptyset$ dari $\hat{\mu}$



Gambar 6.6 Proyeksi gradient $d\emptyset/dS$ pada arah $\hat{\mu}$

Sehingga didapatkan kesimpulan :

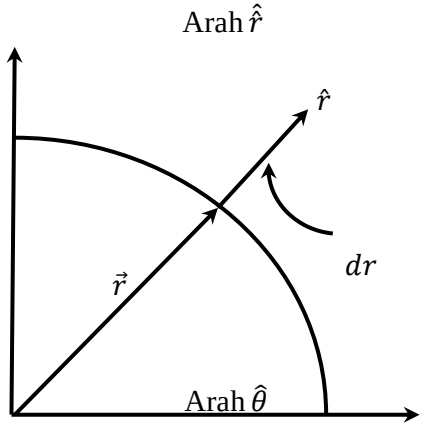
$$\frac{d\emptyset}{dS} = \hat{\mu}\cdot\nabla\emptyset = \nabla\emptyset\cos\theta \tag{6.54}$$

Harga $(d\emptyset/dS)$ terbesar jika $\theta = 0^0$ yaitu jika $\nabla\emptyset$ sejajar dengan $\hat{\mu}$, artinya $\nabla\emptyset$ adalah turunan terbesar di titik tersebut sedangkan arah $\nabla\emptyset$ menunjukkan arah yang akan menghasilkan turunan tersebut.

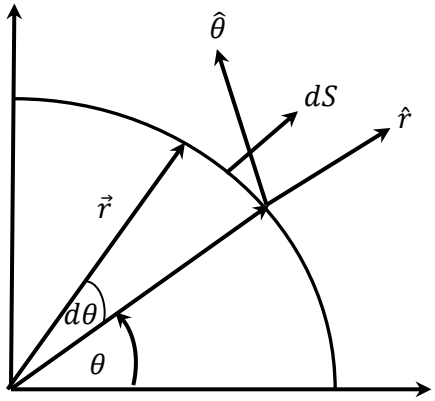
6.8 Espresi Lain Dari Operator $\nabla\emptyset$

Penerapan pertama diletakkan pada sistem koordinat polar $(\hat{r},\hat{\theta})$ dengan berbagai ketentuan – ketentuan sebagai berikut :

1. Komponen $\nabla\emptyset$ pada arah $\hat{\mu}$ adalah besar $d\emptyset/dS$ pada arah tersebut.
2. Jadi untuk menyatakan $\nabla\emptyset$ dalam koordinat polar adalah mencari komponen $\nabla\emptyset$ Pada arah –arah koordinat $(\hat{r},\hat{\theta})$



Sehingga dalam arah $\hat{r} = d\emptyset/dS$ memberikan komponen $(\nabla\emptyset)_r$ karena $\emptyset = \emptyset(r,\theta)$ maka notasinya $\partial\emptyset/\partial r$.



$dS = r\,d\theta$

sehingga dalam arah

$$\hat{\theta} = \left(\frac{d\emptyset}{d\theta}\right)_r$$

memberikan komponen $(\nabla\emptyset)_\theta$

Secara Umum dalam Koordinat Polar 2 Dimensi, dapat dituliskan dalam bentuk operator diferensial :

$$\nabla\emptyset = \hat{r}\left(\frac{\partial\emptyset}{\partial r}\right) + \hat{\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\emptyset}{\partial\theta}\right) \tag{6.55}$$

$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} \tag{6.56}$$

6.9 Ekspresi – Ekspresi Yang Mengandung Operator ∇

Banyak penerapan pada operator ∇ dalam dunia fisis. Dalam hal ini ∇ mempunyai banyak fungsi, yaitu sebagai***: Vektor, Turunan, Operator***.

$$\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{6.57}$$

Dibawah ini merupakan kombinasi dari ∇ :

1. Gradient

$$\nabla\emptyset = \left(\hat{\imath}\frac{\partial\emptyset}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial\emptyset}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\emptyset}{\partial z}\right) \tag{6.58}$$

2. Laplacian Operator

$$\nabla\cdot\nabla = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{6.59}$$

$$\nabla^2\emptyset = 0 \quad \rightarrow \quad \emptyset = \text{ vector function} \tag{6.60}$$

3. Divergence

$$\nabla\cdot\Psi = \left(\hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\hat{\imath}\,\Psi_x + \hat{\jmath}\,\Psi_y + \hat{k}\,\Psi_z\right)$$

$$\nabla\cdot\Psi = \left(\frac{\partial\Psi_x}{\partial x} + \frac{\partial\,\Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial\,\Psi_z}{\partial z}\right) \quad \rightarrow \quad \text{Divergence } \Psi \tag{6.61}$$

4. Curl Operator V $\leftrightarrow \nabla \text{ x } V$

$$\nabla \text{ x } V = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \text{ x } V = \hat{\imath}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) \tag{6.62}$$

Kuantitas $\nabla\emptyset$ adalah fungsi vektor, jika $V = \nabla\emptyset$ sehingga $\nabla^2\emptyset =$ div grad $\emptyset$ sebagai Operator Laplacian dari $\emptyset$ yang dituliskan :

$$\nabla^2\emptyset = \nabla\cdot\nabla\emptyset = \frac{\partial^2\emptyset}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\emptyset}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\emptyset}{\partial z^2} \tag{6.63}$$

Banyak sekali penerapan operasi ∇ dalam fisika dengan bentk diferensial, antara lain :

$$\nabla^2\emptyset = 0 \quad \rightarrow \quad \text{persamaan laplacian} \tag{6.64}$$

$$\nabla^2\emptyset = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2\emptyset}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \text{persamaan umum gelombang} \tag{6.65}$$

$$\nabla^2\emptyset = \frac{1}{a^2}\frac{\partial\emptyset}{\partial t} \quad \rightarrow \quad \text{persamaan panas} \tag{6.66}$$

Uji Kepahaman Anda

Untuk Memantapkan Pemahaman Matematis anda
Tunjukkan kebenaran dari perhitungan operator dibawah ini

$$\nabla \text{ x } (\nabla \text{ x } V) = \nabla(\nabla \cdot \mathrm{V}) - \nabla^2 \mathrm{V}$$

dimana V adalah vektor

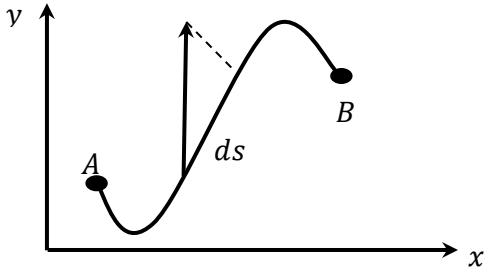
$$\nabla \cdot \emptyset \mathrm{V} = \nabla_{\emptyset}(\emptyset \mathrm{V}) + \nabla_{\mathrm{V}}(\emptyset \mathrm{V})$$

dimana $\emptyset$ adalah fungsi skalar dan V fungsi vektor

Selamat Mencoba

6.10 Integral Garis

Integral garis dapat diartikan sebagai kerja yang dilakukan oleh gaya $F(\vec{r})$ dalam memindahkan benda atau partikel sejauh $d\vec{s}$. dengan kata lain integral garis ini dapat diartikan sebagai sumasi untuk menentukan usaha yang terkandung dalam 1 koordinat.



$$W = \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

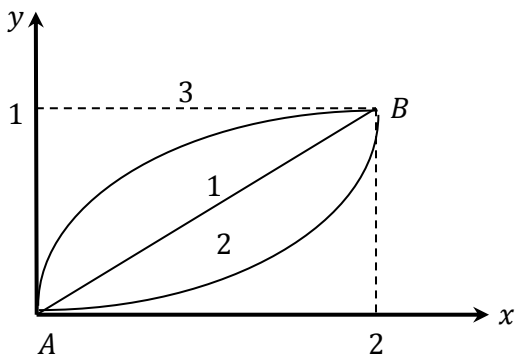
Gambar 6.7 Bentuk Integral Garis dari titik A ke titik B

Kerja oleh gaya F dalam memindahkan benda atau partikel dari titik $A \rightarrow B$

$$W_{A \rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \rightarrow \text{ Elemen pada kurva lintasan} \qquad (6.67)$$

Yang harus dicatat untuk ketentuan integral garis bahwasannya integral garis hanya ada 1 variabel saja dalam factor integrasi sepanjang lintasan yang telah dipilih.

Contoh 6.5 :
Diberikan vektor gaya $\vec{F} = xy\,\hat{\imath} - y^2\,\hat{\jmath}$ sepanjang lintasan seperti yang tertera pada kurva dibawah ini :



Tentukan kerja oleh gaya $\vec{F}$ dari titik $(0,0)$ ke titik $(2,1)$ pada :
a. Persamaan garis lurus
b. Persamaan parabola
c. Pada titik $x = 2t^3$ dan $y = t^2$

Jawab :
a. Pada koordinat kartesian 2 dimensi terdapat persamaan :

$$d\vec{s} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}$$

Dimana $x = x(t)$ dan $y = y(t)$

Maka : $\vec{F} \cdot d\vec{s} = (xy\,\hat{\imath} - y^2\,\hat{\jmath}) \cdot (dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath})$

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = xy\,dx - y^2\,dy$$

Jadi:

$$W_{A\to B} = \int xy\,dx - \int y^2\,dy$$

Lintasan garis lurus :

Yang dicari adalah fungsi x dengan batas $(0,0)$ dan $(2,0)$ sehingga didapatkan persamaan : $y = \frac{1}{2}x$ dimana $dy = \frac{1}{2}dx$

Sehingga :

$$W_{A\to B} = \int xy\,dx - \int y^2\,dy$$

$$= \int_0^2 x\left(\frac{1}{2}x\right)\ dx - \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x\right)^2 \frac{1}{2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^2}{2}\ dx - \int_0^2 \frac{x^2}{8} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{3}{8} x^2 dx$$

$$= \left[\frac{1}{8}x^3\right]_0^2$$

$$= \frac{1}{8}(2^3 - 0^3)$$

$$= \frac{1}{8}(8 - 0)$$

$$= \frac{1}{8}(8)$$

$$W_{A\to B} = 1$$

b. Lintasan Parabola :

$$y = \frac{1}{4}x^2 \qquad \rightarrow \qquad dy = \frac{x}{2} dx$$

$$W_{A\to B} = \int xy\, dx - \int y^2\, dy$$

$$= \int_0^2 x\left(\frac{1}{4}x^2\right)\ dx - \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2\right)^2 \frac{x}{2} dx$$

$$= \int_0^2 \frac{x^3}{4}\ dx - \int_0^2 \frac{x^5}{32} dx$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{x^3}{4} - \frac{x^5}{32}\right) dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{142}\right]_0^2$$

$$= \left[\left(\frac{2^4}{16} - \frac{2^6}{142}\right) - \left(\frac{0^4}{16} - \frac{0^6}{142}\right)\right]$$

$$= \left[\left(\frac{16}{16} - \frac{64}{142}\right) - (0 - 0)\right]$$
$$= \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - 0\right]$$
$$= \left(\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\right)$$
$$W_{A\to B} = \frac{2}{3}$$

c. Untuk : $x = 2t^3$ dan $y = t^2$

$dx = 6t^2 dt$ dan $dy = 2t\ dt$

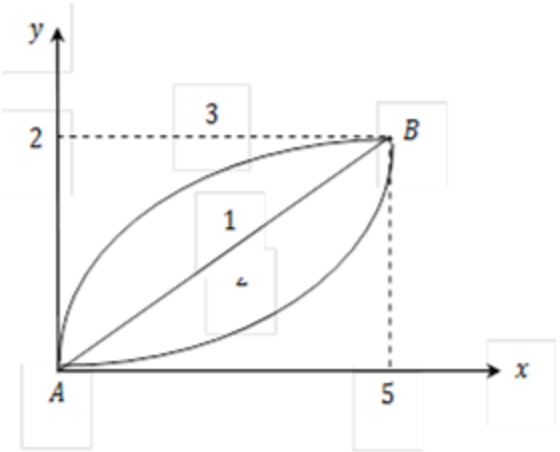
Dari titik asal $(0,0) \to t = 0$ dan pada $(2,1) \to t = 1s$

$$W_{A\to B} = \int xy\, dx - \int y^2\, dy$$
$$= \int_0^1 2t^3(t^2)6t^2 dt - \int_0^1 (t^2)^2 2t\, dt$$
$$= \int_0^1 12t^7\, dt - \int_0^1 2t^5 dt$$
$$= \int_0^1 (12t^7 - 2t^5) dt$$
$$= \left[\frac{3}{2}x^8 - \frac{1}{3}x^6\right]_0^1$$
$$= \left[\left(\frac{3}{2}(1)^8 - \frac{1}{3}(1)^6\right) - \left(\frac{3}{2}(0)^8 - \frac{1}{3}(0)^6\right)\right]$$
$$= \left[\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{3}\right) - (0 - 0)\right]$$
$$= \left[\left(\frac{9}{6} - \frac{2}{6}\right) - 0\right]$$
$$W_{A\to B} = \frac{7}{6}$$

Uji Kepahaman Anda

Untuk memantapkan pemahaman tentang kerja dari integral garis

Diberikan vektor gaya $\vec{F} = y\,\hat{\imath} - x^2 y\,\hat{\jmath}$ sepanjang lintasan :



Tentukan kerja oleh gaya $\vec{F}$ dari titik (0,0) ke titik (5,2) pada :

a. Persamaan garis lurus
b. Persamaan hiperbola
c. Pada titik $x = t^3$ dan $y = t^2$

6.11 Medan Konservatif

Gaya $\vec{F}$ disebut gaya konservatif jika kerja oleh gaya $\vec{F}$ tidak bergantung lintasan tetapi hanya titik awal dan akhir

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \qquad (6.68)$$

Sebaliknya jika persamaan (6.68) bergantung lintasan, maka $\vec{F}$ disebut gaya non konservatif Syarat dari gaya $\vec{F}$ konservatif adalah . "**Apabila operasi curl adalah nol"**

$$\nabla x \vec{F} = 0 \qquad (6.68)$$

Misalkan gaya $\vec{F}$ itu dapat dinyatakan sebagai :

$$\vec{F} = \nabla W \qquad W \rightarrow \text{fungsi sklar}$$

Berarti dapat dituliskan komponen – komponen gaya yang bekerja :

$$F_x = \frac{\partial W}{\partial x} \quad , \quad F_y = \frac{\partial W}{\partial y} , \quad F_z = \frac{\partial W}{\partial z} \tag{6.69}$$

Dan dengan operasi matriks determinan dapat dituliskan :

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} \quad \leftrightarrow \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)$$
$$= \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \tag{6.70}$$

Terlihat bahwasannya salah satu komponen pada sumbu z didapatkan :

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \tag{6.71}$$

Analogi secara tertulis untuk komponen - komponen lain dapat dilihat :

$$\nabla \text{x} \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \text{x} \vec{F} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)$$

Berarti apabila $\vec{F} = \nabla\Psi$, maka $\nabla \text{x} \vec{F} = 0$ dan sebaliknya apabila $\nabla \text{x} \vec{F} = 0$ maka $\vec{F} = \nabla W$. Seandainya $\vec{F} = \nabla W$ berarti :

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = \nabla\Psi \cdot \left(dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}\right)$$
$$= \left(\hat{\imath}\frac{\partial W}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial W}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial W}{\partial z}\right) \cdot \left(dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath} + dz\,\hat{k}\right)$$
$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = \left(\frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz\right) \tag{6.72}$$

Contoh 6.7 :

Diberikan vektor gaya $\vec{F} = (2xy - z^3)\,\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath} - (3xz^2 + 1)\,\hat{k}$

a. Tunjukkan bahwasannya gaya $\vec{F}$ adalah konservative
b. Carilah V sehingga $\nabla \text{x} \vec{F} = 0$

Jawab :

a. Koservative jika $\nabla x\vec{F} = 0$

$$\nabla \text{ x } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2xy - z^3) & x^2 & -(3xz^2 + 1) \end{vmatrix}$$

$$= \hat{\imath}\left[-\frac{\partial}{\partial y}(3xz^2 + 1) - \frac{\partial}{\partial z}(x^2)\right] +$$

$$\hat{\jmath}\left[\frac{\partial}{\partial z}(2xy - z^3) + \frac{\partial}{\partial x}(3xz^2 + 1)\right] +$$

$$\hat{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - z^3)\right]$$

$$= \hat{\imath}[-0 - 0] + \hat{\jmath}[-3z^2 + 3z^2] + \hat{k}[2x - 2x]$$

$$= 0 + \hat{\jmath}[0] + \hat{k}[0]$$

$$\nabla \text{ x } \vec{F} = 0$$

b. Untuk mencari V :

$$V = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$= -\int \left[(2xy - z^3)\,\hat{\imath} + x^2\,\hat{\jmath} - (3xz^2 + 1)\,\hat{k}\right] \cdot \left[dx\hat{\imath} + dy\hat{\jmath} + dz\hat{k}\right]$$

$$= -\int [(2xy - z^3)dx + x^2dy - (3xz^2 + 1)dz]$$

$$= -\int (2xy - z^3)dx - \int x^2dy + \int (3xz^2 + 1)dz$$

$$V = -x^2y + xz^3 - x^2y + xz^3 + z$$

Karena komponen yang merupakan komponen yang sama, maka penulisannya dapat dijadikan 1 , sehingga :

$$V = -x^2y + xz^3 + z$$

Uji Kepahaman Anda :
Untuk memantapkan pemahaman tentang kerja dari Medan Konservative
Diberikan vektor gaya

$$\vec{F} = -kx\,\hat{\imath} - ky\,\hat{\jmath} - kz\,\hat{k}$$

a. Apakah $\vec{F}$ konservative
b. Jika konservative tentukanlah nilai V

6.12 Fungsi Potensial

Jika $\vec{F}$ merupakan gaya konservatif maka kerja tersebut tidak bergantung pada lintasan, tetapi hanya posisi awal dan akhir saja. Dan dengan ketentuan umum $\nabla \mathrm{x} \vec{F} = 0$.

Padahal kerja adalah transfer energi secara mekanika melaui gaya (energi yang sedang pindah) . Maka berarti tiap posisi dapat di definisikan suatu bentuk energi yang dapat muncul atau di peroleh dari kerja

Definisi Energi Potensial :
Merupakan kerja yang melawan gaya medan secara kausi statik **(Menambah Energi Potensial)**

$$\vec{F}\,\text{yang bekerja} = -\vec{F}\,\text{medan} \qquad (6.73)$$

Secara matematis, jika V energi potensial maka dapat diterapkan metode integrasi

$$dV = -\vec{F}d\vec{r}$$

$$\int_A^B dV = -\int_B^A \vec{F}d\vec{r}$$

$$V_B - V_A = -\int_B^A \vec{F}d\vec{r} \qquad (6.74)$$

Telah ditunjukkan jika $\vec{F}$ konservatif $\left(\nabla \mathrm{x} \vec{F} = 0\right)$ berarti :

$$F = -\nabla V \quad , \quad \nabla \times \nabla V = 0 \qquad (6.75)$$

Uji Kepahaman Anda :

(*untuk memahami konsep anda*)
Diberikan vektor sesuai dengan koordinat kartesian $V = axy(y^2 - 3z^2)$

a. Tentukan masing komponen gaya $\vec{F}$
b. Apakah gaya – gaya komponen tersebut konservative

6.13 Teorema Green (*Pada Bidang*)

Untuk fungsi I variabel dengan dituliskan dalam bentuk integrasi dan diferensial berlaku :

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x)\,dx = f(b) - f(a) \qquad (6.76)$$

Pada bagian ini kita kembangkan menjadi integral 2 variabel ,andaikan :

$$P(x,y)\ , Q(x,y)\ , \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (6.77)$$

Bernilai tunggal dan kontinyu pada daerah tertutup A yang dibatasi oleh kurva tertutup. Sekarang kita akan menghitung integral lipat 2 dari persamaan (6.78) :

$$\frac{\partial}{\partial x}[Q(x,y)] \text{ pada daerah kountur } A \qquad (6.78)$$

Secara matematis dapat dituliskan :

$$\iint_A \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \int_{y=c}^{d} \int_{x=a}^{b} \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy$$

$$\iint_A \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} dxdy = \int_{y=c}^{d} [Q(b,y) - Q(a,y)]\, dy \qquad (6.79)$$

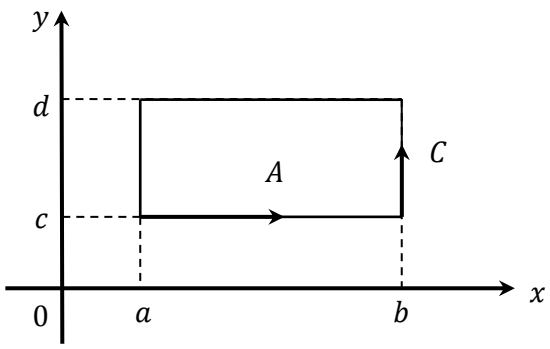
Dalam hal ini kita dapat memberikan syarat awal bahwasannya: pada lintasan kontur C yang bergerak berlawan arah jarum jam sehingga daerah A selalu berada pada arah kiri lintasan C sepanjang sisi horizontal A sehingga mendapatkan hasil integral yang sama dengan nol. Serpanjang sisi kanan $x = b$ dengan batas y dari c ke d sepanjang sisi kiri $x = a$ dengan batas y dari d ke c.

$$\oint_C Q(x,y) = \int_c^d Q(b,y)\,dy + \int_d^c Q(a,y)\,dy$$

$$\oint_C Q(x,y) = \int_c^d [Q(b,y) - Q(a,y)]\,dy \qquad (6.80)$$

Sehingga dapat digabungkan persamaan (6.79) dan (6.80) dihasilkan :

$$\iint_A \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \oint_C Q\,dy \qquad (6.81)$$



Gambar 6.8 Bentuk Bidang Pada Dengan Batasan Tertentu

Begitu juga untuk :

$$-\iint_A \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \oint_C P\,dx \qquad (6.82)$$

Dari komponen – komponen integral kontur diatas dapat di kombinasikan baik pada sumbu x dan y.

$$\oint_C P\,dx + \oint_C Q\,dy = \iint_A \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy - \iint_A \frac{\partial Q}{\partial x}\,dxdy$$

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy \qquad (6.83)$$

Teorema yang sesuai dengan persamaan (6.83) ini berlaku untuk daerah yang dibatasi 2 atau lebih kurva tertup yang terhubung ganda

6.14 Teorema Stoke's

Pada teorema green pada bidang sudah dijelaskan bahwasannya medan vektor (x, y) dapat dituliskan :

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath} \qquad (6.84)$$

Maka integral pada persamaaan (6.84) dapat dinyatakan :

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \qquad (6.85)$$

Selanjutnya kita dapat mengoperasikan operator *curl* $\vec{F}$ $(\nabla \times \vec{F})$:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P(x,y) & Q(x,y) & 0 \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{F} = \hat{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$$

Sehingga dapat dituliskan persamaan dari teorema green dalam bidang datar atau luasan

$$\iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy = \iint_A (\nabla \times \vec{F})\hat{k}\,dxdy$$

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_A (\nabla \times \vec{F})\hat{k}\,dxdy \qquad (6.86)$$

Pada persamaan (6.86) inilah yang mendasari terjadinya ***teorema stokes*** akibat perluasan teorema green dengan tinjauan 3 dimensi, dengan tinjauan volume dimana

$$\vec{F} = F_x(r)\hat{\imath} + F_y(r)\hat{\jmath} + F_z(r)\hat{k} :$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iiint_V (\nabla \, x \, \vec{F})\hat{n}dV \qquad (6.87)$$

Dengan $\hat{n}$ merupakan vektor satuan normal dari permukaan dan V adalah volume yang dibatasi oleh kurva tertutup C

6.15 Teorema Divergensi

Dalam teorema ini menjelaskan adanya kombinasi antara hubungan integral volume dan permukaan. Dengan syarat apabila $\vec{F}$ bersifat (*continou and differensiable*), dimana kita definisikan bahwasannya Teorema Divergensi menyatakan integral permukaan dari komponen normal fungsi $\vec{F}$ pada sebuah permukaan tertutup sama dengan integral dari devergensi $\vec{F}$ pada volume yang dibatasi oleh permukaan tersebut. Maka teorema divergensi dapat dituliskan dengan mengkobinasikan teorema integral lipat 2 dan integral lipat 3 :

$$\iint_S A \cdot dA = \iiint_V V \cdot \vec{F} dV \qquad (6.88)$$

Rangkuman Materi Analisa Vektor

Vektor merupakan sebuah besaran yang selalu mempunyai nilai dan arah. Dengan operasi memiliki tanda – tanda dan vektor satuan pada tiap – tiap koordinat. yang disebut dengan vektor satuan.

$$\hat{a} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A}$$

Vektor satuan $\hat{a}$ mempunyai besar satu dan arah yang sama dengan arah vektor $\vec{A}$.

Komponen vektor $\vec{A}$ dalam sistem koordinat kartesian (x, y, z) adalah A_x , A_y dan A_z. Vektor satuan $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$, $\hat{k}$ adalah vektor satuan yang searah dengan sumbu x, y dan z yang positif.

$$\vec{A} = A_x\,\hat{\imath} + A_y\,\hat{\jmath} + A_z\,\hat{k}$$

Besar vektor $\vec{A} = |\vec{A}|$ adalah :

$$|\vec{A}| = \sqrt{{A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2}$$

Perkalian Vektor

1. Perkalian Dua Vektor (Perkalian Titik atau *Dot Product*)

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta$$

Dengan θ adalah sudut antara $\vec{A}$ dan $\vec{B}$:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}|[|\vec{B}|\cos\theta] = |\vec{B}|[|\vec{A}|\cos\theta]$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} = \text{(Komutatif)}$$

Ini berlaku juga untuk vektor satuan $\hat{\imath}$,$\hat{\jmath}$,$\hat{k}$ pada koordinat kartesian :

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = |\hat{\imath}||\hat{\imath}| \cos 0 \quad = 1$$
$$\hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = |\hat{\jmath}||\hat{\jmath}| \cos 0 \quad = 1$$
$$\hat{k} \cdot \hat{k} = |\hat{k}||\hat{k}| \cos 0 = 1$$

Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwasannya pada perkalian titik atau *dot product* bahwasannya :

$$\hat{\imath} \cdot \hat{\imath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$
$$\hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = \hat{k} \cdot \hat{\imath} = 0$$
$$\hat{k} \cdot \hat{\imath} = \hat{\imath} \cdot \hat{\jmath} = \hat{\jmath} \cdot \hat{k} = 0$$

Dapat ditarik definisi sesuai pekalian *dot product* bahwasannya sesuai persamaan

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2 = A^2$$
$$\vec{B} \cdot \vec{B} = {B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2 = B^2$$

Sehingga :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos\theta \qquad \vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

2. Perkalian Dua Vektor (Perkalian Silang atau *Cross Product*)

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta\, \hat{\mu}$$

Dapat diuraikan bahwasannya perkalian silang antara dua vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$:

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \sin\theta \frac{\vec{A} \times \vec{B}}{|\vec{A} \times \vec{B}|}$$

$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$$

$\vec{A}$ x $\vec{B}$ dan $\vec{B}$ x $\vec{A}$ mempunyai besaran skalar yang sama tapi arah berlawanan.

$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = -\vec{B} \text{ x } \vec{A}$$

Perkalian silang antara dua vektor satuan sejenis dengan sudut yang saling sejajar

$$\hat{\imath} \text{ x } \hat{\imath} = |\hat{\imath}||\hat{\imath}| \sin 0^0 \hat{\mu} = 0$$
$$\hat{\jmath} \text{ x } \hat{\jmath} = |\hat{\jmath}||\hat{\jmath}| \sin 0^0 \hat{\mu} = 0$$
$$\hat{k} \text{ x } \hat{k} = |\hat{k}||\hat{k}| \sin 0^0 \hat{\mu} = 0$$
$$\hat{\imath} \text{ x } \hat{\imath} = \hat{\jmath} \text{ x } \hat{\jmath} = \hat{k} \text{ x } \hat{k} = 0$$

Didapatkan hasil umum perkalian silang antara vector – vector satuan ang berbeda

$$\hat{\imath}\, x\, \hat{\jmath} = \hat{k} \qquad \hat{\jmath}\, x\, \hat{\imath} = -\hat{k}$$
$$\hat{\jmath}\, x\, \hat{k} = \hat{\imath} \qquad \hat{k}\, x\, \hat{\jmath} = -\hat{\imath}$$
$$\hat{k}\, x\, \hat{\imath} = \hat{\jmath} \qquad \hat{\imath}\, x\, \hat{k} = -\hat{\jmath}$$

Dengan melakukan perkalian silang antara 2 vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ maka didapatkan :

$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right) \hat{\imath} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\jmath} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\hat{k}$$

Adapun cara yang lebih mudah dengan cara dalam bentuk determinan, yaitu :

$$\vec{A}\, x\, \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A} \text{ x } \vec{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right) \hat{\imath} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\jmath} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\hat{k}$$

Perkalian Tiga Vektor

1. Perkalian Titik 3 Vektor (*Scalar Tripple Product*)
   Perkalian titik 3 vektor dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \text{ x } \vec{C}\right)$$

Dengan operasi matematis diperoleh hasil umum :

$$\left(\vec{A} \cdot \vec{B} \cdot \vec{C}\right) = \vec{A} \cdot \left(\vec{B}\, x\, \vec{C}\right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{C}\, x\, \vec{A}\right) = \vec{C} \cdot \left(\vec{A}\, x\, \vec{B}\right)$$

Begitu pula untuk perkalian scalar 3 vektor dengan mengalikan pada konstanta *k*

$$\left(k\,\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}\right)=k\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$$
$$k\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\cdot\vec{C}\right)=k\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\,x\,\vec{C}\right)=k\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\,x\,\vec{A}\right)=k\vec{C}\cdot\left(\vec{A}\,x\,\vec{B}\right)$$

Nilai dari Scalar Triple Product merupakan volume dari parallel epidedum, yaitu :

$\vec{B}\,x\,\vec{C}=\left|\vec{B}\right|\left|\vec{C}\right|\sin\alpha$ dengan alas adalah pada vektor $\left|\vec{B}\right|$ dan $\left|\vec{C}\right|$ serta α. sedangkan tinggi parallel epidedum adalah $\left|\vec{A}\right|\cos\beta$ sehingga volume parallel epidedum adalah

$$\left|\vec{B}\right|\left|\vec{C}\right|\sin\alpha\left|\vec{A}\right|\cos\beta=\left|\vec{B}\,x\,\vec{C}\right|\left|\vec{A}\right|\cos\beta=\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\,x\,\vec{C}\right)$$

2. Perkalian Silang 3 Vektor (*Tripple Vektor Product*)
   Perkalian silang 3 vektor dapat didefinisikan sebagai berikut :
   $\vec{A}\,\mathrm{x}\left(\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}\right)$ (6.34)
   Pada perkalian dua vektor sudah di bahas bahwa $\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}$ adalah tegak lurus pada $\vec{A}$ dan $\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}$. Ada banyak kemungkinan untuk mendapatkan hasil kali tiga vektor tersebut , asalkan perkaliannya adalah satu vektor dikalikan dengan kombinasi perkalian vektor yang lain.

$$\vec{A}\,\mathrm{x}\left(\vec{B}\,\mathrm{x}\,\vec{C}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B}-\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$$

Turunan Pada Vektor

1. Koordinat Kartesian
   $\vec{A}'=A_x{}'\hat{\imath}+A_y{}'\hat{\jmath}+A_z{}'\hat{k}$
2. Untuk Vektor Posisi, Kecepatan dan Percepatan :
   $\vec{r}=x\hat{\imath}+y\hat{\jmath}+z\hat{k}$
   $\vec{v}=x'\hat{\imath}+y'\hat{\jmath}+z'\hat{k}$
   $\vec{a}=x''\hat{\imath}+y''\hat{\jmath}+z''\hat{k}$
3. Perkalian Konstanta (k) dengan Vektor Turunannya
   $\vec{u}'=k\vec{A}'$
   i. Perkalian Titik dengan Vektor Turunannya :
   $$V'=\vec{A}'\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{B}'$$
   ii. Perkalian Silang dengan Vektor Turunannya :
   $$\vec{p}'=\vec{A}'\mathrm{x}\,\vec{B}+\vec{A}\,\mathrm{x}\,\vec{B}'$$

Koordinat Polar

Koordinat polar pada dasarnya coordinate yang berdasarkan pada jari – jari lingkaran $r$dan sudut yang dibentuk pada koordinat tersebut

$$\hat{e}_r = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}$$
$$\hat{e}_\theta = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$$

Turunan dari $\hat{e}_r$ dan $\hat{e}_\theta$ terhadap t waktu adalah :

$$\dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\hat{e}_\theta$$
$$\dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\hat{e}_r$$

Turunan Berarah (*Gradien / Del / Nabla*)

Besaran fisis yang merupakan fungsi ruang dalam fisika sering kali dipergunakan dalam konsep median (*field*)

$$\frac{d\emptyset}{dS} = \hat{\mu}\cdot\nabla\emptyset$$

Arti Geometri Dari Operator $\nabla\emptyset$

Kita menetapkan $d\emptyset/dS = |\nabla\emptyset|\cos\theta$ dengan θ merupakan sudut antara $\nabla\emptyset$ dengan $\hat{\mu}$. Sehingga dapat ditarik kesimpulan bahwasannya $d\emptyset/dS$ adalah proyeksi $\nabla\emptyset$ dari $\hat{\mu}$. Sehingga didapatkan kesimpulan :

$$\frac{d\emptyset}{dS} = \hat{\mu}\cdot\nabla\emptyset = \nabla\emptyset\cos\theta$$

Harga $(d\emptyset/dS)$ terbesar jika $\theta = 0^0$ yaitu jika $\nabla\emptyset$ sejajar dengan $\hat{\mu}$, artinya $\nabla\emptyset$ adalah turunan terbesar di titik tersebut sedangkan arah $\nabla\emptyset$ menunjukkan arah yang akan menghasilkan turunan tersebut.

Espresi Lain Dari Operator $\nabla\emptyset$

Penerapan pertama diletakkan pada sistem koordinat polar $(\hat{r},\hat{\theta})$ dengan berbagai ketentuan – ketentuan sebagai berikut :

1. Komponen $\nabla\emptyset$ pada arah $\hat{\mu}$ adalah besar $d\emptyset/dS$ pada arah tersebut.
2. Jadi untuk menyatakan $\nabla\emptyset$ dalam koordinat polar adalah mencari komponen $\nabla\emptyset$ Pada arah –arah koordinat $(\hat{r},\hat{\theta})$

Secara Umum dalam Koordinat Polar 2 Dimensi, dapat dituliskan dalam bentuk operator diferensial :

$$\nabla\emptyset = \hat{r}\left(\frac{\partial\emptyset}{\partial r}\right) + \hat{\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\emptyset}{\partial\theta}\right)$$
$$\nabla = \hat{r}\frac{\partial}{\partial r} + \hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Ekspresi – Ekspresi Yang Mengandung Operator ∇

Banyak penerapan pada operator ∇ dalam dunia fisis. Dalam hal ini ∇ mempunyai banyak fungsi, yaitu sebagai***: Vektor, Turunan, Operator***.

$$\nabla = \hat{\imath}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

Dibawah ini merupakan kombinasi dari ∇ pada koordinat kartesian:

1. Gradient

$$\nabla\emptyset = \left(\hat{\imath}\frac{\partial\emptyset}{\partial x} + \hat{\jmath}\frac{\partial\emptyset}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\emptyset}{\partial z}\right)$$

2. Laplacian Operator

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2\emptyset = 0 \quad \rightarrow \quad \emptyset = \text{ vector function}$$

3. Divergence

$$\nabla \cdot \Psi = \left(\frac{\partial\Psi_x}{\partial x} + \frac{\partial\,\Psi_y}{\partial y} + \frac{\partial\,\Psi_z}{\partial z}\right) \quad \rightarrow \quad \text{Divergence } \Psi$$

4. Curl Operator V ↔ ∇ x V

$$\nabla \text{ x } V = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \text{ x } V = \hat{\imath}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right)$$

Integral Garis

Integral garis dapat diartikan sebagai kerja yang dilakukan oleh gaya $F(\vec{r})$ dalam memindahkan benda atau partikel sejauh $d\vec{s}$. Kerja oleh gaya F dalam memindahkan benda atau partikel dari titik $A \rightarrow B$

$$W_{A\rightarrow B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad \rightarrow \text{ Elemen pada kurva lintasan}$$

Yang harus dicatat untuk ketentuan integral garis bahwasannya integral garis hanya ada 1 variabel saja dalam factor integrasi sepanjang lintasan yang telah dipilih.

Medan Konservatif

Gaya $\vec{F}$ disebut gaya konservatif jika kerja oleh gaya $\vec{F}$ tidak bergantung lintasan tetapi hanya titik awal dan akhir

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

Integral diatas jika bergantung lintasan, maka $\vec{F}$ disebut gaya non konservatif. Syarat dari gaya $\vec{F}$ konservatif adalah. **"Apabila operasi curl adalah nol"**

$$\nabla \text{ x } \vec{F} = 0$$

$$\nabla \text{ x } \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = 0$$

$$\nabla \text{ x } \vec{F} = \hat{\imath}\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) + \hat{\jmath}\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = 0$$

Berarti apabila $\vec{F} = \nabla\Psi$, maka $\nabla \text{ x } \vec{F} = 0$ dan sebaliknya apabila $\nabla \text{ x } \vec{F} = 0$ maka $\vec{F} = \nabla W$. Seandainya $\vec{F} = \nabla W$ berarti :

$$\vec{F} \cdot d\vec{s} = \left(\frac{\partial W}{\partial x}dx + \frac{\partial W}{\partial y}dy + \frac{\partial W}{\partial z}dz\right)$$

Fungsi Potensial

Definisi Energi Potensial : Merupakan kerja yang melawan gaya medan secara kausi statik **(Menambah Energi Potensial)**

$$\vec{F}\text{yang bekerja} = -\vec{F}\text{medan}$$

$$V_B - V_A = -\int_B^A \vec{F} d\vec{r}$$

Telah ditunjukkan jika $\vec{F}$ konservatif $\left(\nabla \text{x} \vec{F} = 0\right)$ berarti :

$$F = -\nabla V \qquad , \qquad \nabla \text{ x } \nabla V = 0$$

Teorema Green (*Pada Bidang*)

Untuk fungsi I variabel dengan dituliskan dalam bentuk integrasi dan diferensial berlaku :

$$\int_a^b \frac{d}{dx} f(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

Dengan menerapkan operasi matematis didapatkan hasil akhir :

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) dxdy$$

Teorem ini berlaku untuk daerah yang dibatasi 2 atau lebih kurva tertup yang terhubung ganda.

Teorema Stoke's

Pada teorema green pada bidang sudah dijelaskan bahwasannya medan vektor (x, y) dapat dituliskan :

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{\imath} + Q(x,y)\hat{\jmath}$$

Sehingga dapat dituliskan persamaan dari teorema green dalam bidang datar atau luasan

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_A \left(\nabla\, x\, \vec{F}\right)\hat{k}\,dxdy$$

Hal inilah yang mendasari terjadinya ***teorema stokes*** akibat perluasan teorema green dengan tinjauan 3 dimensi, dengan tinjauan volume dimana

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iiint_V \left(\nabla\, x\, \vec{F}\right)\hat{n}dV \qquad (6.87)$$

Dengan $\hat{n}$ merupakan vektor satuan normal dari permukaan dan V adalah volume yang dibatasi oleh kurva tertutup C.

Teorema Divergensi

Teorema Divergensi menyatakan integral permukaan dari komponen normal fungsi $\vec{F}$ pada sebuah permukaan tertutup sama dengan integral dari devergensi $\vec{F}$ pada volume yang dibatasi oleh permukaan tersebut. Maka teorema divergensi dapat dituliskan dengan mengkobinasikan teorema integral lipat 2 dan integral lipat 3 :

$$\iint_S A \cdot dA = \iiint_V V \cdot \vec{F} dV$$

LATIHAN SOAL

1. Diberikan sebuah vektor $\vec{A} = (x^2 + y^2)\hat{\imath} + 2xy\hat{\jmath}$
   a. Tentukanlah $\nabla\, x\, \vec{A}$
   b. Tentukanlah $\nabla \cdot \vec{A}$
2. Tunjukkan bahwasannya $\vec{F} = (2xy - z^3)\hat{\imath} + x^2\hat{\jmath} - (3xz^2 + 1)\hat{k}$ adalah konservatif. Dan tentukanlah fungsi potensialnya V dari gaya diatas.
3. Sebuah posisi partikel yang bergerak yang bergantung pada waktu adalah : $\vec{r}(t) = t^3\hat{\imath} - 2t^2\hat{\jmath} - (t^2 + 2t)\hat{k}$.
   a. Tentukanlah vektor posisi dan besar dari partikel tersebut jika terletak pada koordinat $(4, -4{,}8)$
   b. Tentukanlah vektor kecepatan dan besar dari partikel tersebut jika terletak pada koordinat $(4, -4{,}8)$
   c. Tentukanlah vektor percepatan dan besar dari partikel tersebut jika terletak pada koordinat $(4, -4{,}8)$
   d. Tentukanlah jenis pergerakan yang dialami oleh paartikel tersebut. Baik mulai dari awal bergerak hingga berhenti.
4. Pada materi Mekanika Klasik. Sebuah partikel bergerak pada koordinat bola yang memiliki persamaan posisi $\vec{r} = r\hat{r}(r, \theta, \varphi)$.
   Tentukanlah :
   a. Vektor kecepatan dan besar dari partikel tersebut .
   b. Vektor percepatan dan besar dari partikel tersebut .
5. Pada materi Mekanika Klasik. Sebuah partikel bergerak pada koordinat silinder yang memiliki persamaan posisi $\vec{r} = r\hat{r} + z\hat{k}$.
   Tentukanlah :
   a. Vektor kecepatan dan besar dari partikel tersebut .
   b. Vektor percepatan dan besar dari partikel tersebut .
6. Pada materi Elektrodinamika. Gaya yang bekerja pada muatan q yang memiliki medan magnet $\vec{B}$ adalah $\vec{F} = q\vec{v}\,\mathrm{x}\,\vec{B}$ dimana $\vec{v}$ merupakan vector kecepatan partikel. Dengan menerapkan hukum II newton. Tentuakanlah :
   a. Kecepatan partikel tersebut yang dipengaruhi oleh medan magnet B.
   b. Percepatan partikel tersebut yang dipengaruhi oleh medan magnet B.
7. Pada materi Mekanika Lanjut. sebuah partikel bermassa m memiliki vector momentum anguler sebuah partikel adalah $\vec{L}$ yang dapat

dituliskan dalam bentuk $\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v}$. Tunjukkanlah bahwa penurunan dari $\vec{L}$ terhadap waktu t adalah :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\vec{r} \times \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

8. Tentukanlah divergensi dan curl dari medan vector $\vec{V}$ berikut pada koordinat kartesian :
   Tentukanlah :
   a. $\vec{V} = y\hat{\imath} + z\hat{\jmath} + x\hat{k}$
   b. $\vec{V} = x^2y\hat{\imath} + xy^2\hat{\jmath} + xyz\hat{k}$
   c. $\vec{V} = \sinh z\,\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} + x\cosh z\,\hat{k}$
9. Tentukanlah laplacian dari medan vector V berikut pada koordinat kartesian :
   Tentukanlah :
   a. $V = x^3 - 3xy^2 + y^3$
   b. $V = (x+y)^{-1}$
   c. $V = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$
   d. $V = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$
   e. $V = xyz(x^2 - 2y^2 + z^2)$
10. Untuk vector posisi $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$. Tentukanlah :
    a. $\nabla \cdot \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)$ b. $\nabla \times \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)$
11. Gunakanlah teorema stokes untuk menghitung tiap – tiap integral yang dibatasi oleh kurva tertutup.

$$\iint_{\text{survace}} \text{curl}\left(x^2\hat{\imath} + z^2\hat{\jmath} - y^2\hat{k}\right) \cdot n\, d\sigma$$

    Dimana σ adalah bagian permukaan $z = 4 - x^2 - y^2$ diatas bidang (x, y)
12. Tunjukkan bahwa pada luas ellips dengan kontur dan syarat batas $x = a\cos\theta$, $y = b\sin\theta$, $\theta \leq \theta \leq 2\pi$ adalah πab .
13. Hitunglah integral countur C pada bidang segitiga (x, y) pada titik $(0,0)$, $(1,1)$, dan $(2,0)$:

$$\oint_C (x\sin x - y)\,dx + (x - y^2)\,dy$$

14. Hitunglah integral countur C pada bidang segi empat (x, y) pada titik $x = 3$, $x = 5$, $y = 1$ dan $y = 3$:

$$\oint_C 2ydx - 3xdy$$

15. Hitunglah integral countur C pada bidang (x, y) pada titik $(0,0)$, to , $(0, \sqrt{5})$ ke arah bentuk berbentuk lngkaran $(\sqrt{5}, 0)$, to , $(1,2)$:

$$\oint_C (y^2 - x^2)dx + (2xy + 3)dy$$

16. Hitunglah luas daerah pada kurva $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$.
17. Tunjukkan bahwa $\nabla \cdot (\vec{U}\, x\, \vec{r}) = r \cdot (\nabla\, x\, \vec{U})$ dimana U adalah sebuah fungsi vektor x, y, z dan $\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$
18. Didapatkan fungsi gaya $\vec{F} = \hat{\imath} - 5\hat{\jmath} + 2\hat{k}$ yang terletak pada titik $(2,1,0)$. Tentukanlah fungsi dan besar dari torque yang melalui vektor garis $\vec{r} = -2t\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$
19. Diberikan $\varphi = x^2 - yz$ dan pada titik $P(3,4,1)$. Tentukanlah :
    a. $\nabla\varphi$ pada titik P
    b. Turunan dari fungsi φ pada titik P secara langsung pada vektor garis
    $$\vec{r} = \hat{\imath} - \hat{\jmath} + 2\hat{k} + (6\hat{\imath} - \hat{\jmath} - 4\hat{k})t$$
20. Buktikan bahwasannya :

$$\int_C e^x cosydx - e^y sinydy = -\frac{3}{2}$$

21. Gunakanlah teorema stokes untuk menghitung tiap – tiap integral yang dibatasi oleh kurva tertutup.

$$\iint_{\text{survace}} \text{curl}(x^2y\hat{\imath} - xz\hat{k}) \cdot n\, d\sigma$$

Dimana σ adalah bagian permukaan $x^2/4 + y^2/9 + z^2/16 = 1$.

22. Terapkan beberapa teorema diatas untuk menghitung tiap – tiap integral yang dibatasi oleh kurva tertutup.

$$\iint_{\text{survace}} (x^2 - y^2)\hat{\imath} + (2xy - y)\hat{\jmath} + 3z\hat{k} \cdot n\, d\sigma$$

Dimana σ adalah bagian permukaan pada sebuah silinder $x^2 + y^2 = 16$, $z = 3$, dan $z = -3$.

23. Hitunglah integral countur C pada bidang parallelogram pada titik $(0,0), (2,0), (1,1)$, $(3,1)$

$$\oint_C (x^2 - y)dx + (x + y^3)dy$$

24. Hitunglah integral countur C pada bidang lingkaran dengan persamaan $x^2 + y^2 + 2x = 0$ dimana $\vec{F} = y\hat{\imath} - x\hat{\jmath}$.

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

25. Buktikanlah operator $\nabla \cdot (\nabla\alpha \; x \; \nabla\beta) = 0$, dimana α dan β merupakan konstanta.

BAB VII
DERET FOURIER

Kompetensi Dasar :

Mahasiswa mampu menggunakan deret Fourier untuk menyelesaikan persoalan fisika.

Indikator Kompetensi :

1. Mahasiswa dapat membuktikan sifat dari ortogonalitas fungsi sinusiodal
2. Mahasiswa dapat menentukan koefisien dari fungsi dari deret Fourier sinus dan cosines.
3. Mahasiswa dapat membentuk fungsi dari deret Fourier sinus dan cosines.
4. Mahasiswa dapat membentuk deret Fourier kompleks hingga menjadi integral Fourier kompleks.

7.1 Pendahuluan

Ketika kita bermain biola, gitar, piano, bahkan sampai sexofone kita selalu menggunakan peraturan nada yang berbeda – beda meskipun semua alunan nada – nada dasarnya adalah sama. Peraturan disini yang dimaksutkan letak – letak dari setiap kunci nada adalah berbeda, hal inilah yang menunjukkan perbedaan intensitas setiap bunyi.

Ilmuan dari perancis, James D Fourier meneliti adanya bentuk dari setiap bunyi – bunyi pada nada ternyata memiliki bentuk yang berbeda – beda tergantung intensitasnya tetapi hasil dari interpretasi nada tersebut tidak lain berupa grafik trigonometri (sinus, cosines,dll) begitu pula bentuk eksponensial, bahkan ada yang berbentuk grafik hiperbolik. Tetapi yang menjadi keanehan adalah bentuk amplitudo pada masing – masing grafik adalah berbeda.

Pada bab deret VII (Deret Fourier) ini kita akan menentukan koefisen – koefisien pada grafik yang dibentuk oleh masing – masing fungsi secara analitik.

7.2 Penentuan Koefisien Fungsi Dari Deret Fourier

Fungsi periodik dari fungsi $f(x)$ dapat dituliskan untuk semua nilai x. Dengan penambahan koefisien n pada masing – masing fungsi :

$$f(x + np) = f(x) \tag{7.1}$$

Dengan $p, 2p, 3p, 4p, \ldots\ldots$ adalah periode dari x. Untuk fungsi periodik pada sistem trigonometri dapat dituliskan:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (7.2)$$

Atau dapat direpresentasi untuk fungsi periodik dan periode 2π :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (7.3)$$

Kita integrasi terhadap x pada kedua ruas dari $-\pi$ ke π, didapatkan persamaan :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \right] dx$$

Integrasi diatas dapat:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx \right)$$

Dengan menguraikan satu persatu dari masing – masing ruas fungsi trigonometri:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = a_0 [x]_{-\pi}^{\pi}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) = a_0 [\pi - (-\pi)]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 2\pi\, a_0$$

Secara periodic dapat dikaitkan dengan fungsi dengan persamaan (7.3) sehingga:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx \qquad (7.4)$$

Kita dapat mendefinisikan $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots$ dengan cara yang sama, dengan mengalikan $\cos mx$ pada persamaan. Maka:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\right]\cos mx\,dx$$

Integrasi perbagian pada masing – masing fungsi trigonometri :

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mx\,dx = a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\,dx +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,dx\right]$$

Dengan menguraikan tiap – tiap perkalian trigonometri, sehingga didapatkan hasil

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\;dx = \frac{1}{2}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n+m)x\;dx + \frac{1}{2}a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(n-m)x\;dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\;dx = \frac{1}{2}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n+m)x\;dx + \frac{1}{2}b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(n-m)x\;dx$$

Karena koefisien dari a_0 sudah didapatkan, maka kita dapat menentukan koefisien a_n dan b_n melalui perkalian dari trigonometri. Pada integrasi perbagian terdapat nilai *nol*, jika pada bentuk kedua pada persamaan dimana untuk π, maka dapat berlaku pada $n = m = 1$ dan dapat dikalikan dengan a_m, maka didapatkan persamaan :

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos 2x\;dx + \frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(m-m)x\,dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,dx = \frac{a_n}{4}\sin 2x\;dx + \frac{a_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx$$

$$= \frac{a_n}{4}\sin 2\,[\pi - (-\pi)] + \frac{a_n}{2}[\pi - (-\pi)]$$

$$= \frac{a_n}{4}\sin 2\,[2\pi] + \frac{a_n}{2}(2\pi)$$

$$= \frac{a_n}{4}\sin 4\pi \ + a_n(\pi)$$
$$= 0 + a_n\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = a_n\pi$$

$$a_n\pi \ = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \ dx \quad ; \quad n = 1,2,3, \dots \dots \dots \dots \qquad (7.5)$$

Untuk mendefenisikan b_1, b_2 ,…….. Dilakukan hal yang sama dengan $a_1, a_2, a_3 \dots, a_n$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, dx +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx \, dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx\right]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = -\frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(2)x \, dx + \frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(m-m)x \, dx$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = -\frac{b_n}{4}\sin(2)x \ dx + \frac{b_n}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx$$
$$= \frac{b_n}{2}[\pi - (-\pi)]$$
$$= -\frac{b_n}{4}\sin 2\,[2\pi] \ + \frac{b_n}{2}(2\pi)$$
$$= -\frac{b_n}{4}\sin 4\pi \ + b_n(\pi)$$
$$= 0 + b_n\pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = b_n \pi$$

$$b_n \pi = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \; dx \quad ; \quad n = 1,2,3, \dots \dots \dots \dots \qquad (7.6)$$

Dengan menuliskan $m = n$, maka didapat formula dari koefisien Euler Deret Fourier pada persamaan (7.7) , (7.8) , dan (7.9) :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \qquad n = 1, 2, \dots \dots \dots . \qquad (7.7)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \qquad n = 1, 2, \dots \dots \dots . \qquad (7.8)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \qquad n = 1, 2, \dots \dots \dots . \qquad (7.9)$$

Apabila diterapkan untuk fungsi yang lain bahwasannya adanya perubahan dari variabel x :

$$V = \frac{\pi x}{L} \quad \rightarrow x = \frac{LV}{\pi}$$

Dimana $x = \pm L$ dan $V = \pm \pi$, maka fungsi itu bisa kita sebut dengan fungsi $\mathrm{g}(V)$

$$f(x) = \mathrm{g}(V) \qquad (7.10)$$

Deret fourier untuk fungsi $\mathrm{g}(V)$ dapat dituliskan :

$$\mathrm{g}(V) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nV + b_n \sin nV \qquad (7.11)$$

Dengan koefisien masing – masing pada persamaan (7.11) adalah :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{g}(V)\, dV \qquad n = 1, 2, .. \qquad (7.12)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{g}(V) \cos nV\, dV \qquad n = 1, 2, .. \qquad (7.13)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{g}(V) \sin nV\, dV, \qquad n = 1, 2, .. \qquad (7.14)$$

7.3 Deret Fourier Compleks

Sama seperti halnya persamaan (7.2) kita dapat tuliskan kembali bahwasannya penerapan awal diambil dari fungsi trigonometri secara umum :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Kita dapat menuliskan dalam bentuk complex eksponensial maka diperoleh hasil:

$$e^{it} = \cos\, t + i \sin t \qquad (7.15)$$
$$e^{it} = \cos\, t - i \sin t \qquad (7.16)$$

Dari definisi fungsi trigonometri secara umum :

$$\cos(-t) = \cos t \quad ,$$
$$\sin(-t) = -\sin t \qquad (7.17)$$

Dengan $t = nx$, maka :

$$e^{inx} = \cos\, nx + i \sin nx \qquad (7.18)$$
$$e^{-inx} = \cos\, nx - i \sin nx \qquad (7.19)$$

Dengan menggabungkan persamaan (7.18) dan (7.19) dengan menjumlah dan mengurangkan, didapatkan persamaan trigonometri :

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} \qquad (7.20)$$

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \qquad (7.21)$$

Dengan mengganti bentuk

$$\frac{1}{i} = -1 \tag{7.22}$$

Maka didapatkan :

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{a_n}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right) + \frac{b_n}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right) \tag{7.23}$$

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{2}(a_n - b_n)e^{inx} + \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-inx} \tag{7.24}$$

Maka persamaan (7.23) dan (7.24) dapat diubah menjadi:

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n e^{inx} + K_n e^{-inx}) \tag{7.25}$$

Dimana:

$$C_0 = a_0 \tag{7.26}$$

Dan menurut rumus Eulernya maka koefisien dari persamaan (7.25) adalah :

$$C_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{7.27}$$

$$K_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx \tag{7.28}$$

Dengan memperkenalkan koefisien pada fungsi eksponensial, dimana :

$$K_n = C_{-n} \tag{7.29}$$

Didapatkan hasil dari ketentuan persamaan (7.29) adalah :

$$f(x) = \sum_{n=-\sim}^{\infty} C_n e^{-inx} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{7.30}$$

Dimana nilai dari koefisien C_n didapatkan :

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx \tag{7.31}$$

Pada persamaan (7.30) dan (7.31) inilah yang disebut dengan *deret fourier* pada fungsi eksponensial kompleks dengan C_n adalah koefisien

Fourier Compleks. Untuk Fungsi pada periode $2L$, maka deret Fourier Complex menjadi:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i\left(\frac{n\pi}{L}\right)x} \tag{7.32}$$

Dimana :

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\left(\frac{n\pi}{L}\right)x} dx \tag{7.33}$$

7.4 Integral Fourier

Untuk berbagai fungsi periodik $F_L(x)$ pada periode $2L$, kita dapat menuliskan Deret Fouriernya menjadi :

$$F_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x)\,, \quad w = \frac{n\pi}{L} \tag{7.34}$$

Dengan mengingat bahwa variabel - variabel integrasi dilakukan pada V, maka:

$$F_L(x) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} F_L(V)\, dV + \frac{1}{L} \sum_{n=1}^{\sim} \left[\begin{array}{c} \cos w_n x \displaystyle\int_{-L}^{L} F_L(V) \cos w_n V dV + \\ \sin w_n x \displaystyle\int_{-L}^{L} F_L(V) \sin w_n V dV \end{array} \right]$$

Kita dapat menuliskan hasil ketentuan :

$$\Delta w = w_{n+1} - w_n \tag{7.35}$$

$$\Delta w = \frac{(n+1)\pi}{L} - \frac{n\pi}{L} = \frac{\pi}{L} \tag{7.36}$$

Dengan mengganti simbul :

$$\frac{1}{L} = \frac{\Delta w}{\pi} \tag{7.37}$$

Deret Fouriernya sesua dengan ketentuan persamaan (7.37) menjadi :

$$F_L(x) = \frac{1}{2<}\int_{-L}^{L} F_L(V)dV + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\sim}\left[\begin{array}{c}(\cos w_n x)\Delta w \int_{-L}^{L} F_L(V)\cos w_n V dV + \\ (\sin w_n x)\Delta w \int_{-L}^{L} F_L(V)\sin w_n V dV\end{array}\right]$$

Untuk $L \to \sim$ dan asumsi bahwa fungsi tersebut nonperiodik maka:

$$f(x) = \lim_{L\to\infty} F_L(x) \tag{7.38}$$

Dari teorema kalkulus dapat dituliskan :

$$\lim_{a\to-\sim}\int_a^0 |f(x)|\,dx + \lim_{b\to\sim}\int_0^b |f(x)|\,dx \tag{7.39}$$

Dengan mengkombinasikan persamaan (7.39) dapat dituliskan dari batas tak hingga didapatkan hasil :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\ dx \tag{7.40}$$

Dan untuk 0 ke ∞ maka $f(x)$ menjadi bentuk :

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\sim}\left[\cos wx \int_{-\sim}^{\sim} f(V)\cos w V dV + \sin wx \int_{-\sim}^{\sim} f(V)\sin w V dV\right]dw$$

Didapatkan sebuah koefisien deret Fourier dengan notasi :

$$A(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(V)\cos w V dV \tag{7.41}$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi}\int_{-\sim}^{\sim} f(V)\sin w V dV \tag{7.42}$$

Dapat dituliskan bentuk dari integral fourier yang sesuai dengan persamaan (7.41) dan (7.42) didapatkan hasil :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(w)\cos wx + B(w)\sin wx]\ dw \tag{7.43}$$

Rangkuman Materi Deret Fourier

Ilmuan dari perancis, James D Fourier meneliti adanya bentuk dari setiap bunyi – bunyi pada nada ternyata memiliki bentuk yang berbeda – beda tergantung intensitasnya tetapi hasil dari interpretasi nada tersebut tidak lain berupa grafik trigonometri (sinus, cosines,dll) begitu pula bentuk eksponensial, bahkan ada yang berbentuk grafik hiperbolik. Tetapi yang menjadi keanehan adalah bentuk amplitudo pada masing – masing grafik adalah berbeda.

Penentuan Koefisien Fungsi Dari Deret Fourier

Fungsi periodik dari fungsi $f(x)$ dapat dituliskan untuk semua nilai x. Degan penambahan koefisien n pada masing – masing fungsi :

$$f(x+np) = f(x)$$

Dengan $p, 2p, 3p, 4p, \ldots\ldots$ adalah periode dari x. Untuk fungsi periodik pada sistem trigonometri dapat dituliskan:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Dengan menuliskan masing – masing koefisien dari deret fourier :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx, \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots\ldots$$

Apabila deret fourier untuk fungsi $\mathrm{g}(V)$ dapat dituliskan secara umum bentuknya :

$$\mathrm{g}(V) = a_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nV + b_n \sin nV$$

Dengan koefisien masing – masing dari fungsi $\mathrm{g}(V)$ adalah :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{g}(V)\ dV \qquad n = 1, 2, ..$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(V)\cos nV\,dV \qquad n = 1, 2, ..$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(V)\sin nV\,dV, \qquad n = 1, 2, ..$$

Deret Fourier Compleks

Sama halnya kita dapat tuliskan kembali bahwasannya penerapan awal diambil dari fungsi trigonometri secara umum :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Kita dapat menuliskan dalam bentuk complex eksponensial maka diperoleh hasil:

$$e^{it} = \cos\, t + i \sin t$$
$$e^{it} = \cos\, t - i \sin t$$

Dari definisi fungsi trigonometri secara umum :

$$\cos(-t) = \cos t \qquad ,$$
$$\sin(-t) = -\sin t$$

Maka persamaan deret Fourier dalam bentuk eksponensial dapat diubah menjadi:

$$f(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(C_n e^{inx} + K_n e^{-inx})$$

Dan menurut rumus Eulernya maka koefisien dari persamaan adalah :

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

$$K_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}dx$$

Dengan memperkenalkan koefisien pada fungsi eksponensial secara tunggal adalah :

$$f(x) = \sum_{n=-\sim}^{\infty} C_n e^{-inx} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Dimana nilai dari koefisien C_n didapatkan :

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$$

Apabila deret Fourier tersebut dibatasi oleh panjang L maka didapatkan fungsi :

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i\left(\frac{n\pi}{L}\right)x}$$

Dimana besar dari koefisien C_n adalah :

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i\left(\frac{n\pi}{L}\right)x} dx$$

Integral Fourier

Untuk berbagai fungsi periodik $F_L(x)$ pada periode $2L$, kita dapat menuliskan Deret Fouriernya menjadi :

$$F_L(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos w_n x + b_n \sin w_n x), \quad w = \frac{n\pi}{L}$$

Didapatkan sebuah koefisien deret Fourier dengan notasi :

$$A(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(V) \cos w\, V dV$$

$$B(w) = \frac{1}{\pi} \int_{-\sim} f(V) \sin w\, V dV$$

Dapat dituliskan bentuk dari integral fourier yang sesuai adalah :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(w) \cos wx + B(w) \sin wx]\ dw$$

LATIHAN SOAL

1. Hitunglah integral berikut ini :

   a. $\int_{0}^{\frac{4\pi}{3}} \sin^2\left(\frac{3x}{2}\right) dx$

   b. $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{11}{4}} \cos^2 \pi x \, dx$

   c. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) dx$

   d. $\int_{0}^{\frac{2\pi}{\omega}} \cos^2 \omega t \, dx$

   e. $\int_{-1}^{2} \sin^2\left(\frac{\pi x}{3}\right) dx$

   f. $\int_{0}^{2} \cos^2 2\pi t \, dt$

2. Buktikanlah bahwasannya :

$$\int_{a}^{b} \sin^2 kx \, dx = \int_{a}^{b} \cos^2 kx \, dx = \frac{1}{2}(b-a)$$

3. Pada materi Fisika Klassik, sebuah muatan listik bergerak berosilasi membentuk fungsi $q(t) = 3\sin(120\pi t + \pi/4)$. Tentukanlah :
   a. Periode gerakan muatan tersebut.
   b. Amplitudo pada partikel tersebut
   c. Frekuensi dari muatan tersebut disaat bergetar.

d. Fungsi dari arus listrik tersebut $I(t)$.
e. Besar dari arus listrik tersebut jika waktu yang dimulai dari pusat koordinat.
f. Jika terdapat hambatan sebesar R. Fungsi dari potensialnya.
g. Jika berasal dari pusat koordinat. Tentukanlah besar dari potensial tersebut.

4. Hitunglah deret Fourier dari data – data di bawah ini :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

5. Hitunglah deret Fourier dari data dibawah ini :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

6. Hitunglah deret Fourier dari data dibawah ini :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

7. Buktikan bahwasannya :

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi}{L}\right) x \cos\left(\frac{n\pi}{L}\right) x \, dx = 0$$

8. Hitunglah deret Fourier dari data dibawah ini :

$$f(x) = \begin{cases} -1 & -\pi < x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

9. Tentukanlah deret fourier dari fungsi berikut ini :

$$f(x) = x^2 \begin{cases} 2\pi \\ 0 \end{cases}$$

10. Hitunglah deret Fou data – data di bawah ini :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ -1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases}$$

11. Tentukanlah deret fourier dari fungsi berikut ini :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\pi < x < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \frac{\pi}{2} < x < 0 \end{cases}$$

12. Buktikanlah bahwasnnya :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \cdots\cdots\cdots\cdots\right) + \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\cdots\cdots\cdots\right)$$

13. Jika $f(x)$ merupakan fungsi genap, Buktikan bahwa :

$$a_n = -\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}\right)x\,dx \quad ; \quad \text{dengan} \quad b_n = 0$$

14. Buktikanlah bahwasnnya :

$$f(x) = \begin{cases} 1 + x & -\pi < x < \pi \\ 0 & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$f(x) = 1 + 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x - \frac{1}{4}\sin 4x \cdots\cdots\cdots\cdots\right)$$

15. Buktikanlah bahwasnnya :

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & -\pi < x < 0 \\ 0 & 0 < x < \pi \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{9} + \frac{\cos 5x}{25} + \cdots\cdots\cdots\cdots\right) - \left(\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \cdots\cdots\cdots\cdots\right)$$

16. Tentukanlah deret fourier dari fungsi berikut ini :

$$f(x) = x^2 \begin{cases} 2\pi \\ 0 \end{cases}$$

Dengan setengah jangkauan menggunakan fungsi :

a. Sinus
b. Cosinus

17. Tentukanlah deret fourier dari fungsi berikut ini :

$$f(x) = \begin{cases} x + \pi & -\pi < x < 0 \\ -x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

18. Tentukanlah deret fourier dari fungsi berikut ini :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \sin x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

19. Buktikanlah hasil dari persoalan nomor 18 adalah :

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{2^2 - 1} + \frac{\cos 4x}{4^2 - 1} + \frac{\cos 6x}{6^2 - 1} + \cdots\cdots\cdots\right)$$

20. Tentukanlah deret fourier dari fungsi berikut ini :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 < x < L \\ 1 & L < x < 2L \end{cases}$$

21. Dengan menerapkan deret fourier secara genap maupun ganjil.
    a. Buktikanlah bahwasannya :

$$f(x) = |x| \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

b. Buktikanlah bahwasannya :

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=\text{genap}} \frac{\cos 2nx}{n^2}$$

$$f(x) = x^2 \qquad -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{12} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=\text{genap}} \frac{\cos 2nx}{n^2}$$

c. Buktikanlah bahwasannya :

$$f(x) = \cosh x \qquad -\pi < x < \pi$$

$$f(x) = \frac{2\sinh \pi}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{5}\cos 2x - \frac{1}{10}\cos 3x - \cdots\cdots\cdots\right)$$

22. Hitunglah deret Fourier dari data dibawah ini :

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 1 \\ -2 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

BAB VIII
PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA

Kompetensi Dasar :

Mahasiswa mampu menggunakan persamaan diferensial biasa untuk menyelesaikan masalah - masalah fisika.

Indikator Kompetensi

1. Mahasiswa dapat menyelesaikan permasalahan Persamaan Diferensial Biasa (PDB) dalam bentuk dan jenis persamaan yang dapat dipisahkan dan berbagai bentuk/tenik lain.
2. Mahasiswa dapat memahami konsep dasar dari Persamaan Diferensial Biasa (PDB) orde dua linear dengan koefisien tetap dan homogen.
3. Mahasiswa dapat menyelesaikan masalah fisika/fisis yang berbentuk Persamaan Diferensial Biasa (PDB) yang melibatkan berbagai metode yang ada di dalam Persamaan Diferensial Biasa (PDB).

8.1 Pendahuluan

Setiap jalan pada solusi PDB (Pesamaan Diferensial Biasa) memiliki arti sebagai perubahan element berbeda dengan setiap masing – masing fungsi. sebab di saat ketika kita peroleh hasil solusi dari PDB senantiasa digunakan sebagai hasil kompilasi dari fungsi komposisi pada masing – masing element dan jumlah limit tertentu.

Penerapan secara fisis sangatlah besar pada PDB sebab sebagian besar masalah yang meliputi dari fisika klasik hingga modern dalam berbagai metode.

Pada bab VIII terakhir ini kita akan membahas berbagai masalah matematis dan fisis yang melibatkan materi PDB dalam berbagai metode.

8.2 Persamaan Diferensial Orde Satu (PDOS)

Ada dua tipe dalam penerapan persamaan diferensial orde satu yang digunakan dalam menyelesaikan masalah fisika secara analitik yaitu metode pemisahan variabel (*variable sparation*) dan persamaan linear orde satu (PLOS) . dalam penggunaan setiap metode – metode ini sangatlah besar dalam berbagai materi fisika, contohnya pada materi Fisika Inti sangatlah diperlukan penerapan metode *sparation variable* dalam menentukan waktu paruh atom, dan lain – lain penerapannya pada bidang fisika lain.

8.2.1 Metode (Variable Sparation) Pemisahan Peubah

Metode pemisahkan variabel merupakan metode yang sangat umum digunakan dalam menyelesaikan masalah fisika hal ini terkait dengan veriabel bebas (konstanta) dan variable tak bebas (variabel yang terikat pada koordinat), dan setelah itu hasil yang sudah dipisahkan kemudian masing - masing dapat diintegralkan. Berikut ini contoh analitik dari metode *sparation variable*.

Contoh 8.1 :
Selesaikanlah PDB orde satu disamping $xy' - xy = y$

Jawab :

$$x\frac{dy}{dx} = xy + y$$

$$x\frac{dy}{dx} = y(x+1) \rightarrow \text{di separasi variabel}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{x}dx \quad \rightarrow \quad \text{di integralkan}$$

$$\int \frac{dy}{dx} = \int \left(1 + \frac{1}{x}\right) dx \quad \rightarrow \quad \frac{x+1}{x} = \frac{x}{x} + \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{x}$$

$$\ln y = x + \ln x + C$$

$$\ln y - \ln x = x + C$$

$$\ln\left(\frac{y}{x}\right) = x + C$$

$$\frac{y}{x} = e^{x+C}$$

$$= Ae^{x}$$

$$y = Ax\exp(x)$$

Uji Kemampuan Anda
Selesaikanlah persamaan diferensial berikut ini :

1. $x\sqrt{1-y^2}dx + y\sqrt{1-x^2}dy = 0$
2. $xy' - xy = y$
3. $(1+y^2)dx + xydy = 0$
4. $ydy + (xy^2 - 8x)dx = 0$
5. $\cos x \cos y\, dx - \sin x \sin y\, dy = 0$
6. $y' = -\dfrac{x}{y+1}$

8.2.2 Metode Persamaan Linear Orde Satu (PLOS)

Metode persamaan linear orde satu (PLOS) merupakan metode yang sangat umum digunakan dalam menyelesaikan masalah fisika hal ini terkait dengan adanya veriabel terakhir dari persamaan umum merupakan konstanta.

$$y' + Py = Q \tag{8.1}$$

Cara – cara yang dibentuk untuk mendapatkan solusi dari persamaan (8.1) didapatkan dengan cara setiap (PLOS) diubah dalam bentuk baku seperti persamaan (8.1) diatas, kemudian tentukanlah variabel P dan Q . dengan penguraian matematis secara runtut pada persamaan (8.1) maka kita dapatkan definisi bahwasannya :

$$\mathrm{I} = \int P\,dx \tag{8.2}$$

Bentuk umum dari solusi persamaan (8.1) adalah :

$$ye^{\mathrm{I}} = \int Q e^{\mathrm{I}} dx + C$$

$$y = e^{-\mathrm{I}} \int Q e^{\mathrm{I}} dx + Ce^{-\mathrm{I}} \tag{8.3}$$

Contoh 8.2

Selesaikanlah persamaan diferensial disamping berikut ini $x^2y' + 3xy = 1$

Jawab :

$$x^2y' + 3xy = 1 \quad \div\ x^2$$

$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{1}{x^2} \qquad , \qquad P = \frac{3}{x}\ , Q = \frac{1}{x^2}$$

Maka :

$$\mathrm{I} = \int P\ dx = \int \frac{3}{x}\ dx = 3\int \frac{dx}{x} = 3\ \ln x$$

$$e^{\mathrm{I}} = e^{3\ln x} = x^3$$

Solusi :

$$ye^{\mathrm{I}} = \int Q\ e^{\mathrm{I}}\ dx + C$$

$$yx^3 = \int \frac{1}{x^2} x^3 dx + C$$
$$yx^3 = \int x\, dx + C$$
$$yx^3 = \frac{1}{2}x^2 + C$$
$$y = \frac{1}{2x} + \frac{C}{x^3}$$

Uji Kemampuan Anda

Selesaikanlah persamaan diferensial berikut ini :

1. $y' - \frac{2}{x} y = \frac{1}{x^3}$
2. $x^2\, y' - 2xy = \frac{1}{x}$

Tentukanlah penyelesaian N_2dari persamaan peluruhan atom $dN_2/dt + \alpha_2 N_2 = \alpha_1 N_0 e^{-\alpha_1 t}$.

8.3 Metode Lain Dari Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Untuk penerapan metode lain yang ada pada Persamaan Diferensial Biasa (PDB) yaitu metode Persamaan Bernoulli, Persamaan Diferensial Eksakta, dan Persamaan Diferensial Homogen. Berikut ini akan diuraikan keterangan materi beserta disertai tipe dan bentuk contoh – contoh soalnya.

8.3.1 Persamaan Bernoulli

Metode persamaan bernoulli merupakan metode yang sangat umum digunakan dalam menyelesaikan masalah fisika hal ini terkait dengan adanya veriabel terakhir dari persamaan umum merupakan sebuah fungsi yang memiliki variable bertingkat.

$$y' + py = Qy^n \qquad (8.4)$$

Cara – cara yang dibentuk untuk mendapatkan solusi dari persamaan (8.4) didapatkan dengan cara : Dengan ambil variabel baru tak bebas $Z =$

y^{1-n} maka $Z' = (1-n)y^{-n}y'$. Jika bentuk baku dikalikan $(1-n)y^{-n}$ didapatkan:

$$(1-n)y^{-n}y' + (1-n)y^{-n}P = (1-n)Qy^{-n}y^{n} \qquad (8.5)$$

Atau bentuk baru dari persamaan (8.5) didapatkan :

$$Z' + (1-n)PZ = (1-n)Q \qquad (8.6)$$

Diperoleh PDLOS dengan $P_{\text{baru}} = (1-n)P$ dan $Q_{\text{baru}} = (1-n)Q$

Contoh 8.3 :
Selesaikanlah persamaan diferensial biasa disamping $3xy^2y' + 3y^3 = 1$

Jawab :

$$\frac{3xy^2y' + 3y^3 = 1}{3xy^2}$$
$$\frac{3xy^2y' + 3y^3 = 1}{3xy^2}$$
$$y' + \frac{3}{x}y = \frac{1}{3x}y^{-2}$$

Maka:

$$Z = y^{1-(-2)} = y^3$$
$$Z' = \frac{dZ}{dx} = \frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2\frac{dy}{dx} = 3y^2y'$$

Dengan mengalikan persamaan $3y^2y'$ pada persamaan diatas :

$$\left(y' + \frac{3}{x}y = \frac{1}{3x}y^{-2}\right)3y^2$$
$$3y^2y' + \frac{3}{x}y^3 = \frac{1}{x}$$
$$Z' + \frac{3}{x}Z = \frac{1}{x}$$

Didapatkan persamaan baru dimana :

$$P_{\text{baru}} = \frac{3}{x} \qquad \text{dan} \qquad Q_{\text{baru}} = \frac{1}{x}$$

Dapat diselesaikan sesuai PLOS :

$$Ze^{\mathrm{I}} = \int Qe^{\mathrm{I}}\,dx + C$$
$$\mathrm{I} = \int P\,dx = \int \frac{3}{x}\,dx = 3\ln x$$
$$Ze^{3\ln x} = \int \frac{1}{x}\,e^{3\ln x}\,dx + C$$

$$Zx^3 = \int \frac{1}{x} \cdot x^3\, dx + C$$
$$Z = \frac{1}{x^3} \int x^2\, dx + \frac{C}{x^3}$$
$$= \frac{1}{x^3} \cdot \frac{1}{3} x^3 + \frac{C}{x^3}$$
$$Z = \frac{1}{3} + \frac{C}{x^3}$$
$$y^3 = \frac{1}{3} + \frac{C}{x^3}$$
$$y = \sqrt[3]{\frac{1}{3} + \frac{C}{x^3}}$$

Uji Kemampuan Anda

Selesaikanlah persamaan diferensial berikut ini :

1. $5xy^3\, y' - 2y^2 = 1$
2. $y' + y = x^{\frac{2}{3}}$
3. $\cos y \sin 2x\, dx + (\cos^2 y - \cos^2 x) dy = 0$
4. $y' + y = y^2(\cos x - \sin x)$
5. $2x^3 y = y(y^2 + 3x^2)$

8.3.2 Persamaan Differensial Eksak

Pada Persamaan umum dari diferensial eksakta memiliki bentuk baku yang tertera pada persamaan (8.7). Persamaan Diferensial Eksakta berasal dari persamaan diferensial parsial secara total. Namun dalam hal ini pada difeensial eksak kita langsung mengkaitkan fungsi – fungsi yang terlibat dalam berbagai keadaan.

$$P\, dx + Q\, dy = 0 \qquad (8.7)$$

Dengan ketentuan syarat – syarat umum bahwasannya :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \qquad (8.8)$$

Persamaan (8.7) memiliki bentuk solusi :

$$U = \int P\,dx + Cy \text{ atau } U = \int Q\,dy + Cx$$

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \text{ diperoleh } C_y\,, \qquad P = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \text{ diperoleh } C_x$$

$$Cy = \int c'y\,dy \rightarrow \text{ di dapat Cy}\,,\ Cx = \int c'x\,dx \rightarrow \text{ di dapat } Cx$$

Solusinya menjadi :

$$\int P\,dx + Cy = C \qquad , \qquad \int P\,dy + Cx = C \qquad (8.9)$$

Contoh 8.4 :
Selesaikanlah PDB berikut ini $(x - y)dy + (y + x + 1)dx = 0$

Jawab :

$$P = x + y + 1 \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = 1$$

$$Q = x - y \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 1$$

$$U = \int P\,dx + Cy = \int (y + x + 1)dx + Cy$$

$$U = xy + \frac{1}{2}x^2 + x + Cy$$

Untuk menentukan Cy :

$$Q = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$x - y = x + Cy'$$

$$Cy' = -y$$

$$Cy = -\int y\,dy$$

$$Cy = -\frac{1}{2}y^2$$

Jadi : $U = xy + 1/2\,x^2 + x - 1/2\,y^2$

Sehingga dapat diambil Solusi umum bahwasannya:

$$xy + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}y^2 = C$$

Uji Kemampuan Anda

Selesaikanlah persamaan diferensial berikut ini :

1. $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$
2. $2t(xe^t - 1)dt + e^t dx = 0$
3. $(2xy - \tan y)dx + (x^2 - xsec^2 y)dy = 0$
4. $ye^{xy}dx + xe^{xy}dy = 0$

8.3.3 Persamaan Differensial Homogen

Pada Persamaan umum dari diferensial homogen memiliki bentuk baku yang tertera pada persamaan (8.10) :

$$P\,dx + Q\,dy = 0 \qquad (8.10)$$

dimana P dan Q fungsi homogen atau kita dapat menuliskan :

$$\frac{dy}{dx} = y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (8.11)$$

Dimana ciri-ciri dari persamaan differensial homogen adalah : *setiap suku terdiri dari faktor (perkalian dan pembagian) dari variabel baik bebas maupun tak bebas dalam derajat yang sama.*

Cara menyelesaikan :
Dengan mengambil: $y = Vx \rightarrow dy = V\,dx + x\,dV$. Kemudian substitusikan ke persamaan awal sehingga diperoleh V kemudian dalam fungsi x .

Contoh 8.5 :
Tentukan solusi umum dari : $xy\,dx + (y^2 - x^2)dy = 0$

Jawab :
Misalkan :
$y = Vx \rightarrow dy = Vdx + xdV$

Maka :

$$x(Vx)dx + ((Vx)^2 - x^2)(Vdx + x\,dV) = 0$$
$$Vx^2\,dx + x^2(V^2 - 1)(V\,dx + x\,dV) = 0 \quad : x^2$$
$$V\,dx + (V^2 - 1)(V\,dx + x\,dV) = 0$$
$$V\,dx + V^3dx - V\,dx + V^2x\,dV - x\,dV = 0$$

$$V^3dx + x(V^2 - 1)dV = 0$$

$$x(V^2 - 1)dV = -V^3$$

$$\frac{(V^2 - 1)dV}{V^3} = -\frac{1}{x}dx$$

$$\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V^3}\right)dV = -\frac{1}{x}dx$$

$$\int\left(\frac{1}{V} - \frac{1}{V^3}\right)dV \int -\frac{1}{x}dx$$

$$\ln V + \frac{1}{2V^2} = -\ln x + C \quad \rightarrow y = dx$$

$$\ln V + \ln x + \frac{1}{2V^2} = C$$

$$\ln(Vx) + \frac{1}{2V^2} = C$$

$$\ln y + \frac{1}{2\left(\frac{y}{x}\right)^2} = C$$

$$\ln y = -\frac{x}{2y^2} + C$$

$$y = e^{-\frac{x^2}{2y^2}+C}$$

$$= e^C\, e^{-\frac{x^2}{2y^2}}$$

$$y = A\exp\left(-\frac{x^2}{2y^2}\right)$$

Uji Kemampuan Anda

Selesaikanlah persamaan diferensial berikut ini :

1. $ydy = \left(-x + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx$
2. $(x^3 + y^3)dx - 3xy^2dy = 0$

8.3.4 Persamaan Differensial Orde Dua (PDOD)

a. *Persamaan Diferensial Orde Dua (PDOD) dengan Koefesien Konstan dengan Ruas Kanan sama dengan Nol.*
Bentuk umum dari Pesamaan Diferensial Orde Dua (PDOD) sesuai yang tertera pada persamaan (8.12):

$$a_2 \frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0 \qquad (8.12)$$

Untuk mendapatkan sebuah solusi kita definisikan dahulu bahwasannya

$$D = \frac{d}{dx} \qquad (8.13)$$

sehingga diperoleh

$$(a_2 D^2 + a_1 D + a_0)y = 0 \qquad (8.14)$$

Anggap operator dalam tanda kurung merupakan persamaan kuadrat dalam D, kemudian tentukan nilai D misalkan diperoleh $D_1 = a$ dan $D_2 = b$ maka solusinya :
Untuk $a \neq b$

$$y = Ae^{ax} + Be^{bx} \qquad (8.15)$$

Untuk $a = b$

$$y = (Ax + B)e^{ax} \qquad (8.16)$$

Catatan :
- a dan b dapat berupa bilangan kompleks
- jika a dan b kompleks akan memberikan osilasi teredam
- jika a dan b imajiner akan memberikan osilasi murni.

Contoh 8.6 :
Tentukanlah solusi dari PDB berikut ini $y'' - 5y' + 6y = 0$

Jawab :
dapat ditulikan $y'' - 5y' + 6y = 0$ sebagai bentuk yang lebih sederhana :

$$(D^2 - 5D + 6)y = 0$$
$$(D-2)(D-3)y = 0$$
$$D = 2 \quad \text{dan} \quad D = 3$$

Jadi $a = 2 \quad \neq \quad b = 3$, Maka:
$$y = Ae^{2x} + Be^{3x}$$

b. *Persamaan Diferrensial Orde Dua (PDOD) dengan Koefesien Konstan dan Ruas Kanan Tidak sama dengan Nol.*
Bentuk umum dari Pesamaan Diferensial Orde Dua (PDOD) dengan ruas kanan tidak sama dengan nol sesuai yang tertera pada persamaan (8.17):

$$a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \qquad (8.17)$$

Atau

$$(D-a)(D-b)y = f(x) \qquad (8.18)$$

Solusinya lengkap dari persamaan (8.18) adalah:

$$y = y_C + y_P \qquad (8.19)$$

dimana y_C = solusi komplementer dan y_P = solusi particular → $f(x) = 0$
y_C adalah solusi jika ruas kanan nol (sama dengan nol)
y_P adalah solusi jika ruas kanan (x) , tentu nilainya disesuaikan dengan $f(x)$ yang diberikan.

Cara Menentukan Solusi Partikular (y_P)

a. $f(x) = Ce^{ck}$ (8.20)
Jika $a \neq b \neq c$. Ambillah $y_P = Ce^{cx}$ → cari $y_P{}'$ dan $y_P{}''$ substitusikan ke persamaan awal untuk mendapatkan C_0 .

Contoh 8.7 :
Selesaikanlah persamaan differensial diberikut ini : $y'' + y' - 2y = 2e^{2x}$.

Jawab :

$$y'' + y' - 2y = 2e^{2x}$$
$$(D^2 + D - 2) = 2e^{2x}$$
$$(D + 2)(D - 1) = 2e^{2x}$$

sehingga didapatkan :

$$a = -2 \quad b = 1 \quad c = 2 \quad \rightarrow \quad a \neq b \neq c$$

solusi komplementer :

$$y_C = Ae^{-2x} + Be^{x}$$

Solusi partikular :

$$y_P = Ce^{2x} \rightarrow y_P' = 2\,Ce^{2x} \quad \rightarrow \quad y_P'' = 4\,Ce^{2x}$$
$$y_P'' + y_P' - 2y = 2e^{2x}$$
$$4\,Ce^{2x} + 2\,Ce^{2x} - 2Ce^{2x} = 2e^{2x}$$
$$4\,Ce^{2x} = 2e^{2x}$$
$$4C = 2$$
$$C = \frac{1}{2}$$
$$y_P = \frac{1}{2}e^{2x}$$

Sehingga diperoleh hasil akhir :

$$y = y_C + y_P \;;\quad y = Ae^{-2x} + Be^{x} + \frac{1}{2}e^{2x}$$

Catatan : A dan B diperoleh dari kondisi atau syarat tertentu (*misal syarat batas*)

b. $f(x) = Cx\,e^{cx}$ (8.21)

Jika $a \neq b$ tetapi a $= c$ atau $b = c$. Ambillah $y_P = Cx\,e^{cx}$ → cari $y_P{}'$ dan $y_P{}''$ substitusikan ke persamaan awal untuk mendapatkan C.

Contoh 8.8 :

Selesaikanlah persamaan differensial diberikut ini : $y'' + y' - 2y = 5e^{x}$.

Jawab :

Dari penyelesain soal terdahulu diperoleh $a = 2$, $b = 1$ dan disini $c = 1$ sehingga $b = c$, maka :

$$Yp \quad = Cx\,e^x$$
$$Y'p \;= Ce^x + Cx\,e^x$$
$$Y''p = Ce^x + Ce^x + Cx\,e^x = 2Ce^x + \;Cx\,e^x$$
$$Y''p + Y'p - 2Y = 5e^x$$
$$(2Ce^x + \;Cx\,e^x) + (Ce^x + Cx\,e^x) - 2Cx\,e^x = 5e^x$$
$$3Ce^x = 5e^x \quad \rightarrow 3C = 5 \quad \rightarrow C = \frac{5}{3}$$
$$Yp = \frac{5}{3}x\,e^x$$
$$Y = Yc + Yp = Ae^{-2x} + Be^x + \frac{5}{3}x\,e^x$$

c. $f(x) = Cx^2\,e^{cx}$ (8.22)

Jika $a = b = c$. Ambillah $y_P = Cx^2\,e^{cx} \rightarrow$ cari $y_P{}'$ dan $y_P{}''$ substitusikan ke persamaan awal untuk mendapatkan C .

Contoh 8.9 :

Selesaikanlah persamaan differensial diberikut ini : $y'' + 4y' + 4y = 6\,e^{-2x}$

Jawab :

Dari penyelesain soal terdahulu diperoleh $a = b = c$ sehingga. Terlihat bahwa $a = b = c = -2$ sehingga

$$Yc = (A + B)e^{-2x} \text{ dan } Yp = Cx^2e^{-2x}$$
$$Y'p = 2Cxe^{-2x} - 2Cx^2\,e^{-2x}$$
$$Y''p = 2Ce^{-2x} - 4Cxe^{-2x} - 4Cxe^{-2x} + 4Cx^2\,e^{-2x}$$
$$= 2Ce^{-2x} - 8Cxe^{-2x} + 4Cx^2\,e^{-2x}$$
$$Y''p + 4Y'p + 4Yp = 6\,e^{-2x}$$
$$2Ce^{-2x} - 8Cx^{-2x} + 4Cx^2\,e^{-2x} + 4(2Cx^{-2x} - 2Cx^2\,e^{-2x}) + 4(Cx^2e^{-2x}) = 6\,e^{-2x}$$
$$2Ce^{-2x} = 6\,e^{-2x} \quad \rightarrow 2C = 6 \quad , C = 3$$

Jadi $yp = 3x^2e^{-2x}$, sehingga :

$$y = yc + yp = (Ax + B)e^{-2x} + 3x^2e^{-2x}$$
$$y = (3x^2 + Ax + B)e^{-2x}$$

d.

$$f(x) = \begin{cases} k\ sin\ \alpha\ x \\ \\ k\ \cos\alpha\ x \end{cases}$$

Fungsi Trigonometri

Cara I : ambil

$$Yp = C \sin \alpha\, x + D \cos \alpha\, x \qquad (8.23)$$

Cari $Y'p$ dan $Y''p$ substitusi ke persamaan awal hingga diperoleh C dan D.

Contoh 8.10 :
Selesaikanlah PDB tak homogen berikut ini $y'' + y' - 2y = 5 \sin 2x$.

Jawab :
Disini : $yc = Ae^{-2x} + Be^{x}$
Dan : $Yp = C \sin 2x + D \cos 2x$

$$Y'p = 2\,\mathrm{C} \cos 2x - 2\,\mathrm{D} \sin 2x$$

$$Y''p = -4\,C \sin 2x - 4\,D \cos 2x$$

$$Y''p + Y'p - 2Yp = 5 \sin 2x$$

$$-4\,C \sin 2x - 4\,D \cos 2x + 2\,\mathrm{C} \cos 2x - 2\,\mathrm{D} \sin 2x$$

$$-2(C \sin 2x + D \cos 2x) = 5 \sin 2x$$

Koefisien $\cos 2x \quad \rightarrow -4D + 2C - 2D = 0 \quad \rightarrow 6D = 2C, \therefore C = 3D \cdots\cdots (1)$
Koefisien $\sin 2x \quad \rightarrow -4C - 2D - 2C = 5 \quad \rightarrow -6C - 2D = 5 \cdots\cdots (2)$
Dari persamaan (1) dan (2) diperoleh :

$$D = -\frac{5}{20} = -\frac{1}{4} \quad \text{dan} \quad C = -\frac{3}{4}$$

$$yp = -\frac{3}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x$$

$$y = yc + yp = Ae^{-2x} + Be^{x} - \frac{3}{4} \sin 2x - \frac{1}{4} \cos 2x$$

Cara II :
Dengan menggunakan bilangan kompleks

Karena $\begin{bmatrix} k \cos \alpha\, x \\ \\ k \sin \alpha\, x \end{bmatrix}$ itu bagian real atau imajiner dari bilangan kompleks $ke^{i\,\alpha\, x}$ sehingga tinggal menyesuaikan. Jika $f(x)$ bagian real maka solusi ambil realnya juga, jika $f(x)$ bagian imajiner ambil imajinernya.

Sesuai dengan contoh 8.10 :

$y'' + y' - 2y = 5\sin 2x \;\; \rightarrow 5\sin 2x = \text{ Im}\left\{5\, e^{i\,2\,x}\right\}$

Maka :

$Yp = C\, e^{i\,2\,x} \;\rightarrow yp = \text{lm}\, Yp$

$Y'p = 2\, i\, C\, e^{i\,2\,x}$

$Y''p = 4\, i^2 C\, e^{i\,2\,x} = \; -4\, C\, e^{i\,2\,x}$

$Y''p + Y'p - 2Yp = 5\, e^{i\,2\,x}$

$-4\, C\, e^{i\,2\,x} + 2\, i\, C\, e^{i\,2\,x} - 2\left(C\, e^{i\,2\,x}\right) = 5\, e^{i\,2\,x}$

$-6C + 2i\, C = 5 \qquad \rightarrow C(-6 + 2i) = 5 \;\; \rightarrow C = \dfrac{5}{(-6 + 2i)}$

$C = \dfrac{5}{-6 + 2i} \times \dfrac{-6 - 2i}{-6 - 2i} = \dfrac{-30 - 10i}{36 + 4} = -\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}i$

$\therefore Yp = \left(-\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}i\right) e^{i\,2\,x}$

$yp = \text{lm}\, Yp = \text{lm}\left(-\dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{4}i\right) e^{i\,2\,x}$

$yp = -\dfrac{3}{4}\sin 2x - \dfrac{1}{4}\cos 2x$

$y = yc + yp = Ae^{-2x} + Be^{x} - \dfrac{3}{4}\sin 2x - \dfrac{1}{4}\cos 2x$

Uji Kepahaman Anda

Selesaikanah PDB Orde Dua Berikut Ini :

1. $(3D^2 + 3D - 10)y = 0$
2. $(D^2 - 6D + 9)y = 0$
3. $(D^2 + 4D + 5)y = 0$
4. $(D^2 - 5D + 6)y = 0$
5. $y'' + y' - 2y = 0$
6. $y'' + y = 3\sin x$
7. $d^2x/dt^2 + k\, dx/dt = -\text{g}$

Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Carilah solusi dari masing – masing persamaan berikut ini :

1. $2xy' + y = 2x^{\frac{5}{2}}$
2. $x^3y' + 3xy = 1$
3. $y' + y = e^x$
4. $dy + \left(2xy - x\,e^{-x^2}\right)dx = 0$
5. Sebuah rangkaian listrik dihubungkan seri yang bersumber pada tegangan V volt , hambatan R ohm, dan inductor L henry. Berapakah arus listrik $i(t)$ jika diketahui $t = 0$, $i = 0$.
6. Menurut hukum II newton pada pegas yang digantungkan secara vertikal diperoleh sebuah persamaan diferensial :

   $$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = F_0 \cos\omega t + mg$$

   Dengan m, b, k, F_0, dan g merupakan konstanta. Kalau kita menganggap $b = 0$ dengan ketentuan awal, Tentukanlah solusi umum dari fungsi $y(t)$.

Rangkuman Materi Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Penerapan secara fisis sangatlah besar pada PDB sebab sebagian besar masalah yang meliputi dari fisika klasik hingga modern dalam berbagai metode.

Persamaan Differensial Orde Satu (PDOS)
Metode (Variable Sparation) Pemisahan Peubah

Metode pemisahkan variabel merupakan metode yang sangat umum digunakan dalam menyelesaikan masalah fisika hal ini terkait dengan veriabel bebas (konstanta) dan variable tak bebas (variabel yang terikat pada koordinat), dan setelah itu hasil yang sudah dipisahkan kemudian masing - masing dapat diintegralkan.

Metode Persamaan Linear Orde Satu (PLOS)

Metode persamaan linear orde satu (PLOS) merupakan metode yang sangat umum digunakan dalam menyelesaikan masalah fisika hal ini terkait dengan adanya veriabel terakhir dari persamaan umum merupakan konstanta.

$$y' + Py = Q$$

didapatkan definisi bahwasannya :

$$\mathrm{I} = \int P\,dx$$

Bentuk umum dari solusi persamaan diatas :

$$ye^{\mathrm{I}} = \int Qe^{\mathrm{I}}dx + C$$

$$y = e^{-\mathrm{I}} \int Q\,e^{\mathrm{I}}dx + C\,e^{-\mathrm{I}}$$

Metode Lain Dari Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan Bernoulli

Metode persamaan bernoulli merupakan metode yang sangat umum digunakan dalam menyelesaikan masalah fisika hal ini terkait dengan adanya veriabel terakhir dari persamaan umum merupakan sebuah fungsi yang memiliki variable bertingkat.

$$y' + py = Qy^n$$

Atau bentuk baru dari persamaan diatas didapatkan :

$$Z' + (1-n)PZ = (1-n)Q$$

Diperoleh PDLOS dengan $P_{\text{baru}} = (1-n)P$ dan $Q_{\text{baru}} = (1-n)Q$

Persamaan Differensial Exact

Persamaan umum dari diferensial eksakta memiliki bentuk baku yang tertera :

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

Dengan ketentuan syarat:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Persamaan Diferensial Eksakta memiliki bentuk solusi :

$$U = \int P\,dx + Cy \text{ atau } U = \int Q\,dy + Cx$$

$$\varphi = \frac{\partial u}{\partial y} \rightarrow \text{ diperoleh } C_y, \qquad P = \frac{\partial u}{\partial x} \rightarrow \text{ diperoleh } C_x$$

$$Cy = \int c'y\,dy \rightarrow \text{ di dapat Cy}, \quad Cx = \int c'x\,dx \rightarrow \text{ di dapat } Cx$$

Solusinya menjadi :

$$\int P\,dx + Cy = C \qquad , \qquad \int P\,dy + Cx = C$$

Persamaan Differensial Homogen

Persamaan umum dari diferensial homogen memiliki bentuk baku yang tertera adalah :

$$P\,dx + Q\,dy = 0$$

dimana P dan Q fungsi homogen atau kita dapat menuliskan :

$$\frac{dy}{dx} = y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Dimana ciri-ciri dari persamaan differensial homogen adalah : *setiap suku terdiri dari faktor (perkalian dan pembagian) dari variabel baik bebas maupun tak bebas dalam derajat yang sama.*

Cara menyelesaikan :
Dengan mengambil: $y = Vx \rightarrow dy = V\,dx + x\,dV$
kemudian substitusikan ke persamaan awal sehingga diperoleh V kemudian dalam fungsi x .

Persamaan Differensial Orde Dua (PDOD)

a. *Persamaan Differensial Orde Dua dengan Koefesien Konstan dengan Ruas Kanan sama dengan Nol.*
   Bentuk umum dari PDOD sesuai yang tertera pada persamaan :

$$a_2\frac{d^2y}{dx^2} + a_1\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0$$

   kemudian tentukan nilai D misalkan diperoleh $D_1 = a$ dan $D_2 = b$ maka solusinya :
   Untuk $a \neq b$

$$y = Ae^{ax} + Be^{bx}$$

   Untuk $a = b$

$$y = (Ax + B)e^{ax}$$

   Catatan :
   - a dan b dapat berupa bilangan kompleks
   - jika a dan b kompleks akan memberikan osilasi teredam
   - jika a dan b imajiner akan memberikan osilasi murni.

b. *Persamaan Diferrensial Orde Dua dengan Koefesien Konstan dan Ruas Kanan Tidak sama dengan Nol.*

Bentuk umum :

$$a_2\frac{d^2y}{dx^2}+a_1\frac{dy}{dx}+\ a_0y=f(x)$$

Atau

$$(D-a)(D-b)y=f(x)$$

Solusinya berupa:

$$y=y_C+y_P$$

Cara Menentukan Solusi Partikular (y_P)

1. $f(x)=Ce^{ck}$
   Jika $a\neq b\neq c$. Ambillah $y_P=Ce^{cx}$ → cari y_P' dan y_P'' substitusikan ke persamaan awal untuk mendapatkan C_0 .
2. $f(x)=Cx\,e^{cx}$
   Jika $a\neq b$ tetapi a $=c$ atau $b=c$. Ambillah $y_P=Cx\,e^{cx}$ → cari y_P' dan y_P'' substitusikan ke persamaan awal untuk mendapatkan C.
3. $f(x)=Cx^2\,e^{cx}$
   Jika $a=b=c$. Ambillah $y_P=Cx^2\,e^{cx}$ → cari y_P' dan y_P'' substitusikan ke persamaan awal untuk mendapatkan C .
4. $$f(x)=\begin{cases} k\ sin\ \alpha\ x \\ \\ k\ \cos\alpha\ x \end{cases}$$ Fungsi Trigonometri

5. *Cara* I : Ambil
   $$Yp=C\sin\alpha\,x+D\cos\alpha\,x \qquad (8.23)$$
   Cari $Y'p$ dan $Y''p$ substitusi ke persamaan awal hingga diperoleh
   C dan D .

   Cara II : Dengan menggunakan bilangan kompleks

   Karena $\begin{bmatrix} k\cos\alpha\,x \\ \\ k\sin\alpha\,x \end{bmatrix}$ itu bagian real atau imajiner dari bilangan kompleks $ke^{i\,\alpha x}$ sehingga tinggal menyesuaikan. Jika $f(x)$ bagian real maka solusi ambil realnya juga, jika $f(x)$ bagian imajiner ambil imajinernya.

LATIHAN SOAL

1. Selesaikanlah PDB dengan teknik pemisahan variabel (*sparation variable*)
   a. $xydy - (1 + y^2)dx = 0$
   b. $y + x\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x^2y}{x^2 - x^2y^2}$
   c. $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{4y}{x(y-3)} = 0$
   d. $\dfrac{dv}{dt} - \dfrac{3}{5t^2} = 7t$
2. Tentukan solusi umum dari masing – masing persamaan dibawah ini :
   a. $x^2\dfrac{dy}{dx} - (xy - y^2) = 0$
   b. $x^2\dfrac{dy}{dx} - xy = \dfrac{1}{x}$
   c. $\dfrac{dy}{dx} - 2y\cos x = \sin 2x$
   d. $\dfrac{dy}{dx} - y\sin x = \cos 2x$
   e. $\dfrac{di}{dt} + 20i = 6\sin 2t$
   f. $x^2y' - 3x^3y = 1$
   g. $\dfrac{dq}{dt} + 10q = 100$
   h. $\dfrac{dy}{dx} + y\sec x = 5e^{\cos x}$

3. Selesaikanlah persamaan diferensial berikut ini yang berkaitan dengan GLBB benda secara klassik :

$$a(v) + \omega^2 v - \mathrm{g} = 0$$

4. Carilah solusi dari persamaan Bernouli dibawah ini :
   a. $y' - \dfrac{y}{x} = 2x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}$
   b. $y' - y = -xy^3e^{-2x}$
   c. $\cos y \sin x\, dx + (\cos^2 y - \cos^2 x)dy = 0$

5. Sebuah zat radio aktif meluruh dengan jumlah inti yang lepas tiap detik berbanding lurus dengan jumlah inti yang masih ada. Tentukanlah bentuk persamaan diferensialnya,

6. Mayor (TNI) Ali Rahman terjun dari sebuah pesawat boing 277 pada ketinggian tertentu. Besarnya gaya gesekan antara penerjun dengan udara F_v berbanding lurus dengan kecepatan jatuhnya. Tentukanlah persamaan diferensialnya beserta solusi umum dari pergerakan Mayor (TNI) Ali Rahman saat jatuh ke bumi.

7. Seseorang mengendarai mobil dengan gaya tetap. Akan tetapi gaya gesekan antara jalan dengan ban mobil berbanding lurus dengan kuadrat kecepatan geraknya. Buatlah persamaan diferensialnya dan tentukanlah bentuk solusi umum dari pergerakan mobil tersebut.

8. Sebuah mesin zet bermassa M (dimana $M = m_{\text{roket}} + m_{\text{bahan bakar}}$). gaya yang bekerja pada roket tersebut berbanding lurus dengan pengurangan massa bahan bakar setiap detik. Apabila gaya berat bumi diabaikan, maka buatlah persamaan diferensial dari gerak roket tersebut dan beserta bentuk solusi umumnya.

9. Buatlah persamaan diferensial beserta solusi umumnya dari gerak benda jatuh vertical, jika massa benda m dan gerak benda ini dipengaruhi oleh gaya gravitasi dan gaya gesek udara berbanding lurus dengan kecepatan gerak dari benda tersebut.

10. Carilah solusi dari persamaan diferensial niasa eksakta dibawah ini :
    a. $(r + \sin\theta - \cos\theta)dr + r(\sin\theta + \cos\theta)d\theta = 0$
    b. $(2xy - \sin y)dx + (x^2 - x\cos y)dy = 0$
    c. $ye^{xy}dx + xe^{xy}dy = 0$

11. Carilah solusi dari persamaan diferensial biasa homogen dibawah ini:
    a. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x-y}{x}$
    b. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - y^2}{xy}$
    c. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \cot\left(\dfrac{y}{x}\right)$

12. Sebuah batang logam dengan jari – jari 0,5 m dilapisi bahan setebal 8 cm apabila logam tersebut memiliki konduktifitas termal $k = 3\,x\,1^{-4}$. hitunglah panas yang hilang setiap jam melalui 1 meter panjang pipa dan apabila pipa tersebut memiliki suhu 100^0C dan bagian terluarnya adalah 35^0C .

13. Tentukan solusi umum dari persamaan diferensial biasa yang memiliki koefisien yang konstant dibawah ini :
    a. $y'' + 6y' + 9y = 0$
    b. $4y'' + 12y' + 9y = 0$
    c. $y'' + 9y = 0$
    d. $y'' + 5y' = 0$
    e. $y'' - 4y = 0$
    f. $y'' + 4y' + 4y = 0$
    g. $y'''' - 9y'' + 20y = 0$

14. Tentukan solusi umum dari persamaan diferensial biasa yang memiliki koefisien yang tidak konstant dibawah ini :
    a. $y'' + y' = x - 3$
    b. $y'' - 3y' - 10y = 2x - 3$
    c. $(D^2 + 1)y = \sin x$
    d. $(D^2 + 9)y = 6e^{2x} - 162x^2$
    e. $(D^2 + D)y = -\cot x$
    f. $(D^2 + 9)y = 5e^x$
    g. $y'' + 2y' + y = 4\sin 2x$
    h. $(D^2 + 2D + 1)y = \dfrac{1}{(e^x - 1)^2}$
    i. $(D^2 - 4)y = \cot x$
    j. $(D^2 - 2)y = \sec x$
    k. $y'' - y = 3x$
    l. $y'' - y' - 2y = e^{3x}$

15. Tentukanlah solusi khusus dari persamaan diferensial biasa dengan penerapan tiap – tiap syarat batas yang ada :
    $y'' + y' = 2\cos x + \sin x \quad ; \quad y'(0) = 0$ dan $y(0) = 0$
16. Sebuah pendulum sederhana dengan panjang tali l berayun terhadap sudut θ dengan sinpangan sejauh x . tentukanlah persamaan θ terhadap fungsi waktu.

17. Rangkaian RLC dirangkai secara seri hingga membentuk persamaan diferensial :
$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=V(t)$$
Apabila $V(t)=0$. Tentukanlah bentuk dari solusi umum persamaan diatas.

18. Apabila terdapat 2 pegas dipasang seri digantung secara vertical dengan benda yang dibebankan pada pegas tersebut bermassa m dan konstanta pegas masing – masing adalah k_1 dan k_2 . Tentukanlah persamaan gerak dari benda tersebut dan tentukanlah solusi umum dari pergerakan benda tersebut.
19. Apabila terdapat 3 pegas dipasang paralel digantung secara vertical dengan benda yang dibebankan pada pegas tersebut bermassa m dan konstanta pegas masing – masing adalah k_1 , k_2 dan k_3 dan masing – masing nilai konstanta tersebut adalah k. Tentukanlah persamaan gerak dari benda tersebut dan tentukanlah solusi umum dari pergerakan benda tersebut.

20. Sebuah massa 20 gram digantungkan pada ujung sebuah system pegas bergantung dan panjang pegas tersebut berubah menjadi 4 cm dari keadaan semula. Tidak ada gaya luar yang bekerja pada massa pegas, dan gaya gesekan udara diabaikan. Tentukanlah persamaan gerak yang terjadi jika tertarik sejauh 1 cm dari keadaan setimbang dan memiliki kecepatan awal 0,5 $\mathrm{cm/s}$ kearah atas.

21. Massa 5 kg digantungkan pada pegas dengan tetapan pegas $k=1000\ \mathrm{N/m}$. Tentukanlah persamaan gerak jika $t=0$, $y'=0$.

22. Sebuah rangkaian listrik terdiri dari $L=1\,H$, resistor sebesar $R=100$ ohm, dan capasitor $C=4\,x\,10^{-6}\,F$. Pada saat $t=0$. tentukanlah persamaan arus $i(t)$ dan muatan $q(t)$.

23. Sebuah kabel digantungkan pada sebuah katrol yang bergerak bebas dengan gesekan katrol diabaikan. Panjang kabel pada salah satu sisi katrol sejauh 8 cm dan pada sisi yang lain sejauh 12 cm. nyatakan persamaaan gerak dari kabel tersebut.

24. Sebuah rangkaian listrik terdiri dari $L = 0{,}1\,H$, fungsi potensial adalah $V(t) = 100\cos 5t$ volt, dan capasitor $C = 10^{-6}\,F$. Pada saat $t = 0$. tentukanlah persamaan arus $i(t)$ dan nilai i secara maksimum dan muatan $q(t)$ yang bersangkutan .

25. Sebuah rangkaian RLC yang tidak menggunakan sumber tegangan yang terdiri dari tahanan sebesar $R = 6$ ohm, capasitor sebesar $C = 0{,}02$ farad, dan inductor sebesar $L = 0{,}6$ henry. Hitunglah arus pada rangkaian jika saat rangkaian dihubungkan dengan waktu $t = 0$ detik, arus $i_0 = 0$ amper dan kapasitor telah bermuatan sebesar $q_0 = 10^{-12}$ coulomb.

26. Sebuah balok massa 2 kg digantungkan pada sebuah ujung system pegas yang tergantung. Dengan massa pegas diabaikan dan tetapan pegas tersebut sebesar $32\,N/m$. gaya yang bekerja sebesar $0{,}002\sin 20t$ newton. Carilah waktu yang diperlukan agar amplitudo osilasi sebesar 0,5 ohm dengan gerak dimulai saat $t = 0$ sekon dari titik kesetimbangan dalam kasus ini factor teredam dapat diabaikan.

27. Sebuah benda bermassa m jatuh pada sebuah cairan dengan gaya gesek udara dapat diabaikan dan gaya pada cairan akibat gesekan benda dan cairan adalah $-2mv/(1-t^2)$, dimana v merupakan kecepatan dari benda yang memiliki massa m , jika benda berasal dari titik koordinat waktu saat bergerak. Tentukanlah fungsi dari kecepatan dan posisi dari pergerakan benda tersebut.

28. Jika suatu gaya memiliki fungsi $F(x) = -2m/x^5$, dengan syarat batas $F(x) = -2m/x^5$ $v = -1$, $x = 1$ pada saat $t = 0$.

29. Selesaikanlah persamaan diferensial biasa berikut ini :
    a. $3x^3y^2\,y'' + x^2y^3 = 3$
    b. $\sin\theta\cos\theta\,dr - \sin^2\theta d\theta = r\cos^2\theta d\theta$
    c. $x(\ln y)y' - y\ln x = 0$

30. Selesaikanlah persamaan diferensial biasa berikut ini :
    $y''^2 = k^2\left(1 + y'^2\right)$

DAFTAR PUSTAKA

Arfken, G B Weber, HJ. 1995. *Mathematical Methods For Physicist*, 4th Edition. Boston: Academic Press.

Boas, M. L .1983. *Mathematical Methods In The Physical Sciences*. New York: Jhon Wiley & Sons.

Churchil, Ruel V., *dkk* , 1978. *Complex Variables And Application*, 3th Edition. New York: McGraw – Hill.

Kreyzig, Erwin A. 1972. *Advanced Engineering Mathematics*, 3th. Edition New York: McGraw - Hill.

Hans J. Wospakrik. 1993. *Dasar-Dasar Matematika untuk Fisika*, Depdikbud, Jakarta.

Harper, Charlie. 1976. *Introduction to Mathematical Physics*, Engelwood Cliffs: Prentice Hall.

Jackson, Jhon David. 1975. *Classical Electrodinamics*, 2th .Edition New York: John Willey.

Mathews, Jon, and R. M . Redheffer, 1970. *Mathematics Methods Of Physics*, 2th Edition New York: Benjamin.

Mudjiarto, R dan Krips, F.J. 1995. *Matematika Fisika 1*, Institut Teknologi Bandung: Bandung.

Sokolnikoff, I. S., And R. M. Redhefer. 1966 *Mathematics Of Physics And Modern Enginineering*. 2th Edition New York: McGraw - Hill.

Spiegel, Murray R. 1983 *Schaum's Outline Of Theory And Problems Of Vector Analysis And Introduction To Tensor Analysis*. New York: Schaum's.

Thomas G. B., Jr, And Finney. 1983 *Calculus And Analytic Geometry*. 2th Edition, Addison – Wesley, Reading Mass.

Wyled., W. 1979. *Mathematical Methods For Physics*. 2th Edition, Addison – Wesley, Reading Mass.

INDEKS

T

V

LAMPIRAN

LAMPIRAN I
DAFTAR RUMUS – RUMUS DAN IDENTITAS TRIGONOMETRI

1. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
2. $1 + \operatorname{tg}^2 x = \sec^2 x$
3. $1 + \operatorname{ctg}^2 x = \csc^2 x$
4. $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
5. $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
6. $\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$
7. $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{1}{2} x$
8. $1 + \cos x = 2 \cos^2 \frac{1}{2} x$
9. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$
10. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$
11. $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos x$
12. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$
13. $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
14. $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
15. $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$
16. $2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$
17. $2 \cos \alpha \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)$
18. $2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

19. $2\sin\alpha\sin\beta = -\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)$

20. $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

17. $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

18. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

19. $-\cos\alpha + \cos\beta = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$

20. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos x$

20. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

21. $\sin\frac{1}{2}x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

22. $\cos\frac{1}{2}x = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$

23. $\tan\frac{1}{2}x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$

LAMPIRAN II
DAFTAR RUMUS DASAR BEBERAPA FUNGSI TURUNAN DI DALAM MATEMATIKA YANG BERGUNA DI DALAM FISIKA

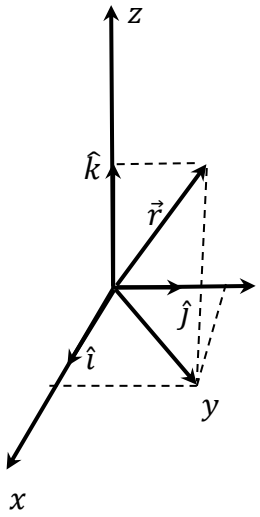
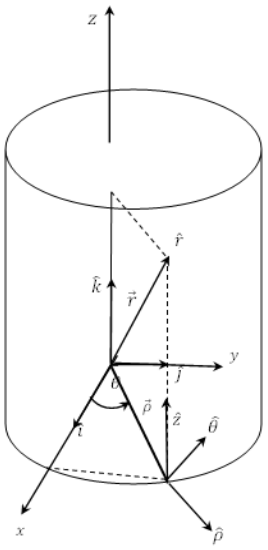
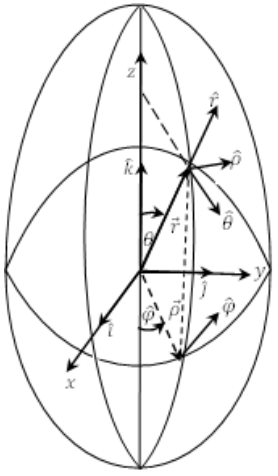
No	*Fungsi Asal*	*Fungsi Turunan*	*Keterangan*
1	$d(cu)$	cu'	c merupakan konstanta
2	$d(u+v)$	$u'+v'$	
3	$d\left(\frac{u}{v}\right)$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$	
4	$\frac{du}{dx}$	$\frac{du}{dy}\cdot\frac{dy}{du}$	Aturan Berantai
5	$d(x^n)$	nx^{n-1}	
6	$d(e^x)$	e^x	
7	$d(a^x)$	$a^x \ln a$	
8	$d(\sin x)$	$\cos x$	
9	$d(\cos x)$	$-\sin x$	
10	$d(\tan x)$	$\sec^2 x$	
11	$d(\cot x)$	$\csc^2 x$	
12	$d(\sinh x)$	$\cosh x$	
13	$d(\cosh x)$	$\sinh x$	
12	$d(\ln x)$	$\frac{1}{x}$	
13	$d(\log_a x)$	$\frac{\log_e e}{x}$	
14	$d(\arcsin x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
15	$d(\arccos x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
16	$d(\arctan x)$	$\frac{1}{1+x^2}$	
17	$d(\operatorname{arc\,cot} x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$	

LAMPIRAN III
DAFTAR RUMUS DASAR BERAPA FUNGSI INTEGRAL DI DALAM MATEMATIKA YANG BERGUNA DI DALAM FISIKA

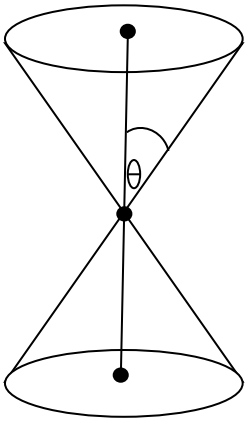
No	*Fungsi Asal*	*Fungsi Integral*	*Keterangan*
1	$\int x^n\,dx$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$	C merupakan konstanta
2	$\int \frac{1}{x}\,dx$	$\ln\lvert x\rvert + C$	
3	$\int e^{ax}\,dx$	$\frac{1}{a}e^{ax}+C$	
4	$\int uv'\,dx$	$uv-\int u'v dv+C$	
5	$\int \sin x\,dx$	$-\cos x + C$	
6	$\int \cos x\,dx$	$\sin x + C$	
7	$\int \tan x\,dx$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	
8	$\int \cot x\,dx$	$\ln\lvert\sin x\rvert + C$	
9	$\int \sec x\,dx$	$\ln\lvert\sec x+\tan x\rvert + C$	
10	$\int \csc x\,dx$	$\ln\lvert\csc x-\cot x\rvert + C$	
11	$\int \frac{dx}{x^2+a^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$	
12	$\int \frac{dx}{a^2-x^2}$	$\arcsin\frac{x}{a}+C$	
13	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$	$\sinh^{-1}\frac{x}{a}+C$	
14	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$	$\cosh^{-1}\frac{x}{a}+C$	
15	$\int \sin^2 x\,dx$	$\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$	
16	$\int \cos^2 x\,dx$	$\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$	

17	$\int \tan^2 x\, dx$	$\tan x - x + C$	
18	$\int \cot^2 x\, dx$	$-\cot x - x + C$	
19	$\int \ln x\, dx$	$x \ln x - x + C$	
20	$\int e^{ax} \sin bx\, d$	$\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \sin bx - b \cos bx) + C$	
21	$\int e^{ax} \cos bx\, d$	$\frac{e^{ax}}{a^2 + b^2}(a \cos bx + b \sin bx) + C$	

LAMPIRAN IV
DAFTAR TABEL KOORDINAT TIGA DIMENSI

Sistem Koordinat Kartesian	***Sistem Koordinat Silinder***	***Sistem Koordinat Bola***
		
$\vec{r} = x\hat{\imath} + y\hat{\jmath} + z\hat{k}$ $(\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k})$ (x, y, z)	$\vec{r} = \lvert\vec{r}\rvert\hat{r}$ $\vec{r} = \vec{\rho} + z\hat{k}$ $\vec{r} = \rho\hat{\rho} + z\hat{k}$ $(\hat{\rho}, \hat{\theta}, \hat{k})$ (ρ, z) $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$ $z = k$ $\hat{\rho} = \cos\theta\,\hat{\imath} + \sin\theta\,\hat{\jmath}$ $\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{\imath} + \cos\theta\,\hat{\jmath}$	$\vec{r} = \lvert\vec{r}\rvert\hat{r}$ $\vec{r} = r\hat{r}(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ $(\hat{r}, \hat{\theta}, \hat{\varphi})$ (r, θ, φ) $x = r\,sin\theta\cos\varphi$ $y = r\,sin\theta\sin\varphi$ $z = r\cos\theta$ $\hat{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\imath} + \sin\theta\cos\varphi\,\hat{\jmath} + \cos\theta\,\hat{k}$ $\hat{\theta} = \cos\theta\cos\varphi\,\hat{\imath} + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{\jmath} - \sin\theta\hat{k}$ $\hat{\varphi} = -\hat{\imath}\sin\varphi + \hat{\jmath}\cos\varphi$

LAMPIRAN V
BAGIAN - BAGIAN DARI IRISAN KERUCUT



Akan Menghasilkan :

1. Titik
2. Garis Lurus
3. Lingkaran
4. Parabola
5. Hiperbola
6. Ellips

keterangan

1. TITIK

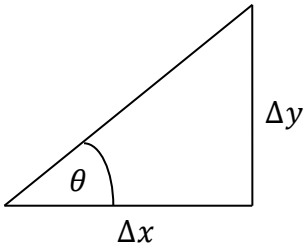
Tanda penghubung antara garis – garis yang terletak didalam kerucut.

2. GARIS LURUS

Dengan ketentuan:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan\theta$$

m merupakan sebuah kemiringan garis atau disebut sebagai gradient.



Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1)

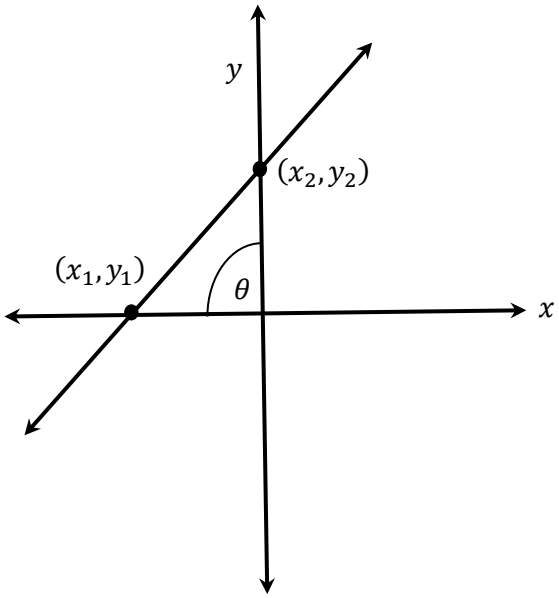
$$y = m(x - x_1) + y_1$$
$$= mx - mx_1 + y_1$$
$$y = mx + c$$

Persamaan garis yang melalui titik (x_1, y_1) dan (x_2, y_2)

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Dengan kata lain persamaan garis dapat dituliskan:

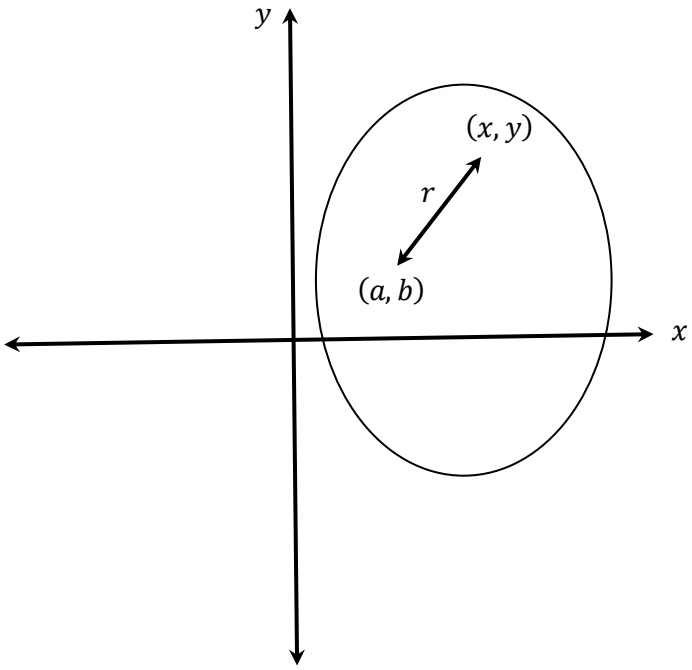
$ax + by + c = 0$



3. LIINGKARAN

Tempat kedudukan titik – titik yang berjarak sama terhadap satu titik tetap

- Persamaan lingkaran dengan pusat (0.0) dengan jari – jari r
  $r^2 = x^2 + y^2$
- Persamaan lingkaran dengan pusat (a, b) dangan jari – jari r
  $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$
- Dapat diketahui persamaan umum lingkaran diatas dengan cara menguraikan :
  $r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$
  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$
  $x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$
  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$
  $x^2 + y^2 - Ax - By + C = 0$

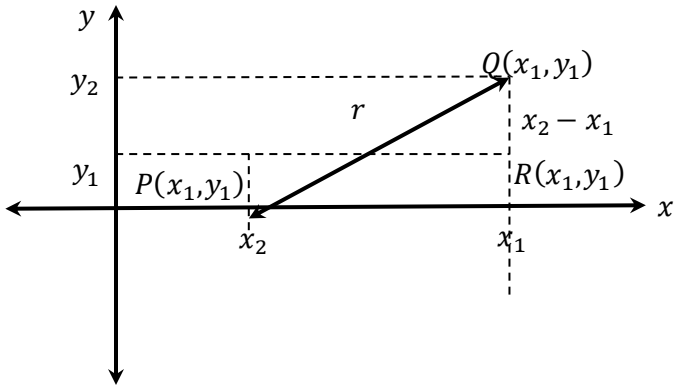


- Jarak antara 2 titik :
  Jarak $PQ = r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
  Persamaan lingkaran dengan pusat :
  $$\left(-\frac{1}{2}A\,, -\frac{1}{2}B\right)$$

  Maka jari – jari :

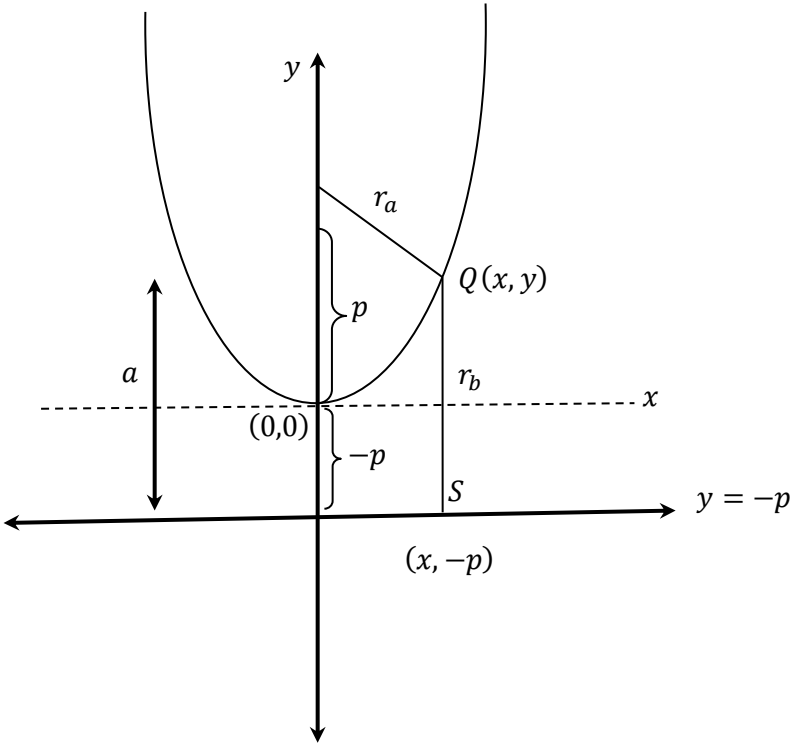
  $$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}A\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}B\right)^2 - C}$$

  $$r = \sqrt{\frac{1}{4}A^2 + \frac{1}{4}B^2 - C}$$



4 PARABOLA

Tempat kedudukan titik – titik yang berjarak sama terhadap satu titik tetap (*fokus*) dan 1 garis lurus (*direefrik*).



a. Parabola Tegak

$FQ^2 = {r_a}^2 = (x-0)^2 + (y-p)^2$
$QS^2 = {r_b}^2 = (x-x)^2 + (y+p)^2$
$FQ^2 = QS^2$
$x^2 + y^2 - 2py + p^2 = 0 + y^2 + 2py + p^2$
$x^2 + y^2 - y^2 + p^2 - p^2 = 2py + 2py$
$x^2 = 4py$

Persamaan parabola yang berpusat di $(0,0)$ dan berfokus $(0,p)$ dengan persamaan direktrik $y = -p$ .jika puncak parabola di (a,b), maka persamaan menjadi :

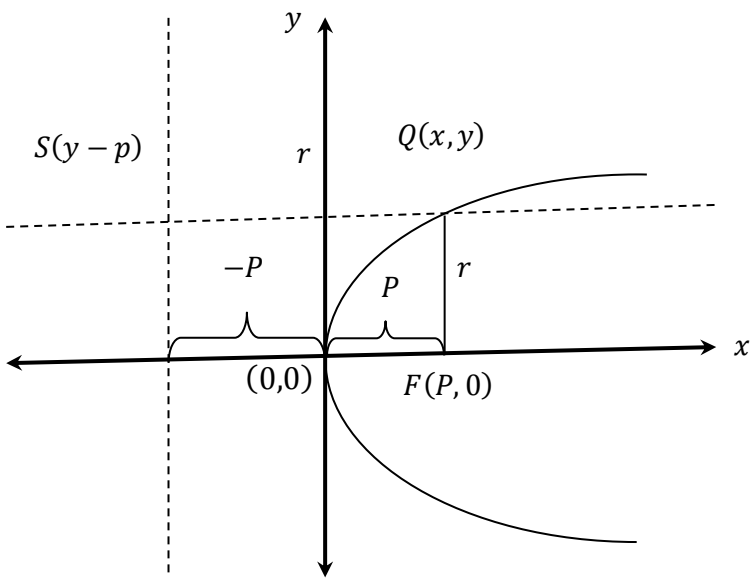
$$(x-a)^2 = 4p(y-b)$$

Fokus di $(a, p+b)$, persamaan direktrik $y = b - p$

"*catatan*"

$p > 0$, Parabola menghadap ke atas
$p < 0$, Parabola menghadap ke bawah

b. Persamaan Datar



$FQ^2 = r^2 = (x-p)^2 + (y-0)^2$
$QS^2 = r^2 = (x+p)^2 + (y-y)^2$
$(x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2$

$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$
$y^2 + x^2 - x^2 + p^2 - p^2 = 2px + 2px$
$y^2 = 4px$

Persamaan parabola yang berpuncak di $(0,0)$ berfokus di $F(p, 0)$ dengan persamaan direktrik $x = -p$ Jika puncak parabola di (a, b), maka persamaan menjadi :

$$(y - b)^2 = 4p(x - a)$$

Fokus $(a + p\,, b)$ dengan persamaan direktrik $x = a - p$

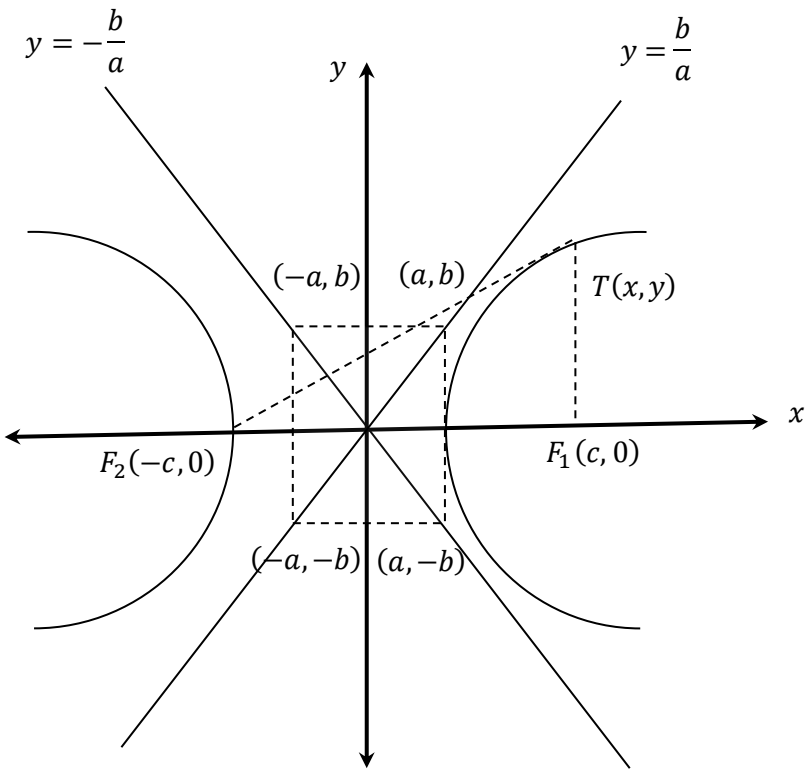
"*catatan*"

$p > 0$, Parabola menghadap ke kanan

$p < 0$, Parabola menghadap ke kiri

5. HIPERBOLA

Himpunan titik – titik yang selisih jaraknya terhadap dua titik tetap selalu sama.



Persamaan Hiperbola yang berpusat di titik $(0,0)$:

$TF_2 - TF_1 = 2a$

$TF_2 = 2a + TF_1$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$(kuadratkan\ masing - masing\ ruas)$

$\left(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right)^2 = \left(2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2$

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$

$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 - x^2 + 2cx - c^2 - y^2$

$= 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$4cx = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$

$4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -4a^2 + 4cx$

$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -a^2 + cx$ $(kuadratkan\ masing - masing\ ruas)$

$\left(a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = (-a^2 + cx)^2$

$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 - 2a^2cx + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$

$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$

$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Perlu diketahui bahwasannya nilai dari $a^2 - c^2$ adalah negatif dan kita misalkan bernilai $-b^2$, maka akan diperoleh :

$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$

Maka dapat disederhanakan menjadi :

$$\frac{-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Persamaan Hiperbola yang berpusat di titik (h,k) dan sumbu mayornya sejajar sumbu x

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Dengan ketentuan :

1. Pusat di (h,k)
2. Puncak $(h+a,k)$ dan $(h-a,k)$

3. Fokus $(h+c,k)$ dan $(h-c,k)$

Persamaan Hiperbola yang berpusat di titik (h,k) dan sumbu mayornya sejajar sumbu y

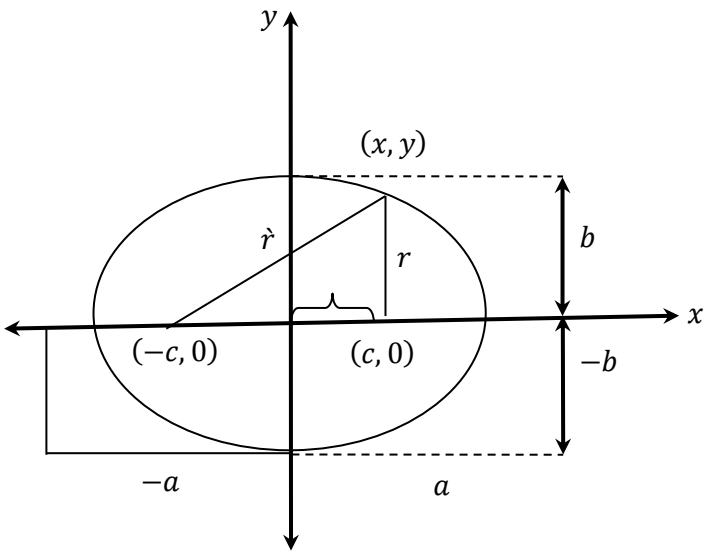
$$\frac{(x-h)^2}{b^2}-\frac{(y-k)^2}{a^2}=-1$$

Dengan ketentuan :

1. Pusat di (h,k)
2. Puncak $(h,k+a)$ dan $(h,k-a)$
3. Fokus $(h,k+c)$ dan $(h,k-c)$

6 ELLIPS

Tempat kedudukan titik – titik yang jumlah jaraknya sama terhadap 2 titik tetap. Persamaan hiperbola berpusat di titik $(0,0)$



$r+r=2a$

$r=2a-r$

$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$

(kuadratkan masing masing ruas)

$$\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2$$

$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2+y^2$
$x^2+2cx+c^2+y^2-x^2+2cx-c^2-y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$
$4cx = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$
$4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 4a^2 - 4cx$
$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx$
($kuadratkan\ masing - masing\ ruas$)
$\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = (a^2-cx)^2$
$a^2(x^2-2cx+c^2+y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$
$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$
$a^2x^2 - 2a^2cx + 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2$
$a^2x^2 + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 + c^2x^2$
$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$
$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2)$
Misal $a^2 - c^2 = b^2$, Maka :
$\dfrac{b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2}{a^2b^2}$
$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$
Jadi :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Persamaan Ellips Yang Berpusat di (0,0)
Untuk : $a > b$ maka sumbu mayor sejajar dengan sumbu x
$a < b$ maka sumbu mayor sejajar dengan sumbu y

Jika pusat Ellips di (m,n) sejajar dengan sumbu x, maka :

$$\frac{(x-m)^2}{a^2} + \frac{(y-n)^2}{b^2} = 1$$

1. Pusat di titik (m,n)
2. Puncak di $(h+a,k)$ dan $(h-a,k)$
3. Fokus di $(h+c,k)$ dan $(h-c,k)$

Jika pusat Ellips di (m,n) sejajar dengan sumbu y, maka :

$$\frac{(x-m)^2}{b^2} + \frac{(y-n)^2}{a^2} = 1$$

1. Pusat di titik (m,n)
2. Puncak di $(h,k+a)$ dan $(h,k-a)$
3. Fokus di $(h,k+c)$ dan $(h,k-c)$

LAMPIRAN VI
BEBERAPA OPERASI DALAM OPERATOR (∇)

1. $\nabla \cdot \nabla\Psi = \nabla^2\Psi \rightarrow \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}$
2. $\nabla \text{ x } \nabla\Psi = 0$
3. $\nabla(\nabla \cdot \Psi) = \hat{\imath}\left(\dfrac{\partial^2\Psi_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2\Psi_y}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2\Psi_z}{\partial x\partial z}\right) +$
   $\hat{\jmath}\left(\dfrac{\partial^2\Psi_x}{\partial x\partial y} + \dfrac{\partial^2\Psi_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2\Psi_z}{\partial y\partial z}\right) +$
   $\hat{k}\left(\dfrac{\partial^2\Psi_x}{\partial x\partial z} + \dfrac{\partial^2\Psi_y}{\partial y\partial z} + \dfrac{\partial^2\Psi_z}{\partial z^2}\right)$
4. $\nabla \cdot (\nabla \text{ x } \Psi) = 0$
5. $\nabla \text{ x } (\nabla \text{ x } \Psi) = \nabla(\nabla \cdot \Psi) - \nabla^2\Psi$
6. $\nabla \cdot (\varphi\,\Psi) = \varphi(\nabla \cdot \Psi) + \Psi \cdot (\nabla\varphi)$
7. $\nabla \text{ x } (\varphi\,\Psi) = \varphi(\nabla \text{ x } \Psi) - \Psi \text{ x } (\nabla\varphi)$
8. $\nabla \cdot (k \text{ x } \Psi) = \Psi \cdot (\Psi \text{ x } k) - k \text{ x } (\nabla \text{ x } \Psi)$
9. $\nabla \text{ x } (k \text{ x } \Psi) = (\Psi \cdot \nabla)k - (k \cdot \nabla)\Psi - \Psi(\nabla \cdot k) + k(\nabla \cdot \Psi)$
10. $\nabla(k \cdot \Psi) = k \text{ x } (\nabla \text{ x } \Psi) + (k \cdot \nabla)\Psi + \Psi \text{ x } (\nabla \text{ x } k) + (\Psi \cdot \nabla)k$
11. $\nabla \cdot (\nabla\varphi \text{ x } \nabla\Psi) = 0$

BIOGRAFI PENULIS

Dra. Sri Astutik, M.Si, lahir di Jember pada tahun 1967. Pada tahum 1980 lulus dari SDN Tembokrejo 4. Pada tahun 1983 lulus dari SLTPN 1 Kencong, pada tahun 1986 lulus dari SMAN 1 Jember, dan pada tahun 1991 lulus dari Fakultas Keguruan Dan Ilmu Pendidikan Fisika Universitas Jember. Mulai tahun 1992 hingga sekarang aktif sebagai dosen di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Fisika Universitas Jember. Pada tahun 2000 berhasil menyelesaikan program magister (S2) pada bidang Geofisika di Institut Teknologi Bandung (ITB). Pada tahun 2004 - 2006 menjabat sebagai Kepala Laboratorium Fisika di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember, dalam selang waktu 2006 - 2010 menjabat sebagai Ketua Program Studi Pendidikan Fisika di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember. Pada tahun 2010 sampai sekarang menjabat sebagai Ketua Jurusan Pendidikan Matematika dan IPA di Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember.