Buku Ajar
EKONOMETRIKA
Teori dan Analisis Matematis

Abdul Aziz, M.Si.

JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI (UIN)
MALANG

Daftar Isi

KATA PENGANTAR

Alhamdulillah wa syukrulillah, segala puji bagi Allah SWT atas segala rahmat dan hidayah-Nya sehingga kami dapat menyelesaikan penulisan Buku Ajar Matakuliah Ekonometrika yang dilengkapi dengan analisis matematis ini. Shalawat dan salam semoga selalu terlimpahkan kehadirat Nabi Muhammad SAW.

Buku Ajar Kuliah ini sengaja kami tulis guna memenuhi kebutuhan pokok mahasiswa Jurusan Matematika UIN Malang yang mengikuti matakuliah Ekonometrika. Matakuliah ini sangat penting bagi mahasiswa guna pengembangan pengetahuan dan keilmuan mereka khususnya dalam penerapan secara integrasi antara statistika, matematika dan ekonomi.

Buku ini akan sangat membantu mahasiswa dalam memahami dan mengaplikasikan konsep-konsep ekoometrika dalam setiap praktikumnya dengan bantuan bahasa pemrograman Matlab.

Akhirnya, semoga buku panduan ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa, pemerhati keilmuan statistika, terutama ekonometrika, dan penulis pada khususnya.

Malang, Januari 2007

Penulis

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
JURUSAN MATEMATIKA
Jl. Gajayana 50 Malang Tlp. (0341) 551354 Faks (0341) 558933

SATUAN ACARA PERKULIAHAN

Mata Kuliah : Ekonometri
Dosen Pembina : Abdul Aziz, M.Si
Semester : VII (tujuh)
SKS : 2 SKS
Waktu : 2 x pertemuan @100 menit

A. Kemampuan Dasar

Mahasiswa mampu mengetahui, memahami dasar-dasar ekonometrika, pengertian, manfaat, dan hubunganya dengan matematika dan statsitika serta mampu mamahami konsep estimasi *moment, maximum Likelihood, least squares,* dan estimasi interval.

B. Hasil Belajar

Mahasiswa terampil melakukan estimasi secara *moment, maximum Likelihood, least squares*, dan estimasi interval.

C. Indikator Hasil Belajar

1. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian estimasi moment, *maximum likelihood*, *least squares*, dan estimasi interval.
2. Mahasiswa dapat melakukan estimasi parameter secara estimasi moment, *maximum likelihood*, dan *least squares.*
3. Mahasiswa dapat melakukan estimasi interval parameter.
4. Mahasiswa dapat membedakan ketiga metode estimasi parameter di atas.

D. Materi Pokok

1. Ekonometrika
1.1 Peranan Matematika dan Teori Statistik
1.2 Tujuan dan Manfaat Ekonometri

1.3 Struktur dan Model Ekonometri
1.4 Peranan Variabel Disturbansi pada Sebuah Model
1.2 Estimasi Parameter
1.1 Estimasi Titik
1.4 Estimasi Interval

E. Pengalaman Belajar

1. Mendengarkan penjelasan dosen di kelas.
2. Menganalisa penurunan rumus.
3. Memperhatikan pembahasan contoh soal dari pengajar.
4. Tanya jawab di kelas.
5. Melakukan praktikum eksperimen secara berkelompok.
6. Mengerjakan soal latihan secara individu.

F. Media

1. Papan tulis
2. Overhead Proyektor + komputer
3. Buku Pegangan Kuliah

G. Evaluasi

1. Tugas Praktikum Kelompok
2. Tugas Individu
3. Keaktifan (Tanya Jawab)

H. Skenario Pembelajaran

a. Kegiatan Awal

1. Pengajar menceritakan fenomena (realita) permasalahan statistik di masyarakat.
2. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang pengertian statistik inferensi
3. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang pengertian estimasi.
4. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang pengertian parameter.

5. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang pengertian estimasi parameter.

b. Kegiatan Inti

1. Pengajar menjelaskan tentang pengertian metode-metode statistik inferensi, diantaranya metode moment, maximum likelihood, dan least square.
2. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus metode estimasi moment, maximum likelihood, dan least square.
3. Pengajar tentang pengertian interval estimastion.
4. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus interval estimation.
5. Pengajar memberikan contoh kasus penggunaan metode estimasi moment, maximum likelihood, dan least square, serta interval estimation.

c. Kegiatan Akhir

1. Pengajar memberikan pertanyaan tentang perbandingan ketiga metode estimasi.
2. Pengajar memberikan tugas kepada mahasiswa untuk mencari kasus untuk melakukan estimasi parameter dengan ketiga metode estimasi dan sekaligus estimasi intervalnya.

Bab 1

PENDAHULUAN

1.1 Ekonometrika

Ekonometri adalah suatu ilmu yang memanfaatkan metematika dan teori statistik dalam mencari nilai parameter daripada hubungan ekonomi sebagaimana didalilkan oleh teori ekonomi. Karenanya, dalam praktek, ekonometri mencampurkan teori ekonomi dengan matematika dan teori statistik. Yang perlu diingat bahwa matematika dan teori statistik hanya merupakan alat bantu dalam melakukan analisis ekonometri yang pada hakekatnya lebih merupakan analisis ekonomi.

Ekonometri dapat dimanfaatkan untuk membuat estimasi sebuah fungsi beserta parameter-parameternya, yang selanjutnya dapat dimanfaatkan untuk membuat prediksi untuk periode yang akan datang. Disamping itu, ekonometri lebih banyak memberikan perhatiannya kepada ilmu ekonomi positif.

Aanalisis kualitatif dalam ilmu ekonomi hanya memberikan kepada kita hubungan-hubungan-hubungan yang terdapat antara variabel-variabel ekonomi. Analisis kualitatif juga mencoba mencaarikan ukuraan dari parameter-parameter yang ada dalam ekonomi. Tetapi bagaimana cara memperoleh besarnya nilai parameter-parameter tersebut?

Jawaban dari pertanyaan di atas diberikan oleh ekonometrika melalui beberapa langkah. Langkah pertama adalah menspesifikasikan model ekonomi, dalam arti menerjemahkan hubungan ekonomi yang ada berdasarkan konsep-konsep dan ketentuan-ketentuaan yang terdapat dalam teori ekonomi kedalam fungsi matematis. Kemudian model ekonomi tersebut diubah menjadi model ekonometrika. Setelah itu model ekonometrika tersebut ditaksir berdasarkan data ekonomi dengan memanfaatkan teori serta metode statistik yang relevan. Selanjutnya penaksir parameter-parameter yang diperoleh diuji perbedaannya dari nol secara statistik dan kebenarannya apakah sesuai atau tidak dengan konsep-konsep dan ketentuan-ketentuan yang ada dalam teori ekonomi. Dengan demikian ekonometri adalah suatu ilmu dan seni yang memanfaatkan matematika dan teori statistic dalam mencari nilai parameter dari hubungan ekonomi sebagaimana didalilkan oleh teori ekonomi karenanya, dalam praktek, ekonometrika mencampurkan teori ekonomi dangan matematika dan teori statistik.

1.1.1 Peranan Matematika dan Teori Statistik

Matematika dan teori statistic hanya merupakan alat bantu dalam melakukan analisis ekonometrika yang pada hakekatnya analisis ekonomi. Karenanya, bimbingan intuisi dan pemahaman yang jelas dan tepat tentang fakta ekonomi sangat diperlukan dalam memanfaatkan hasil analissis ekonometrika. Pengetahuan yang baik tentang matematika dan teori statistik secara absolut sangat diperlukan dalam memahami ekonometrika dan melakukan analisis yang berbau ekonometrika.

Ilmu matematika ekonomi hanya memperhatikan hubungan-hubungan yang tepat diantara variabel-variabel ekonomi, sedangkan ekonometrika juga memperhatikan faktor gangguan atau variabel disturbansi yang berada diluar kontrol si peneliti.

Secara matematis, suatu hubungan ekonomi dapat dituliskan dalam bentuk eksplisit atau dalam bentuk implisit. Secara eksplisit, hubungan antara variabel y dengan x_i $(i = 1, 2, 3, \ldots, k)$ dapat dituliskan dalam bentuk:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = f(X) \tag{1.1}$$

sedangkan secara implisit hubungan tersebut dapat dituliskan dalam bentuk:

$$F(y, x_1, x_2, x_3, ..., x_k) = 0 \tag{1.2}$$

Tetapi karena ekonomi adalah ilmu sosial dan variabel lainnya selain dari xi juga ikut berubah, maka dalam ekonometrika hubungan ekonomi diatas dituliskan dalam bentuk:

$$y = f(x_1, x_2, x_3, ..., x_k, e) = f(X) \tag{1.3}$$

dan

$$F(y, x_1, x_2, x_3, ..., x_k, e) = 0 \tag{1.4}$$

dimana e adalah variable (kesalahan) atau (pengganggu) yang merupakan komponen stokastik.

Variabel y dalam hubungan fungsional diatas disebut variabel tergantung atau variabel atau variabel yang diterangkan atau regresan atau prediktan, sedangkan variabel x disebut variabel bebas atau variabel , atau variabel penerang (variabel yang menerangkan), atau atau .

1.1.2 Tujuan dan Manfaat Ekonometri

Salah satu tujuan dari ekonometrika adalah untuk memberikan kontribusi dalam membuat prediksi atau ramalan-ramalan yang sangat bermanfaat bagi semua pihak. Tujuan yang kedua adalah untuk dapat memberikan sumbangan kepada pembuat kebijaksanaan atau mengambil keputusan pada berbagai tingkaat untuk dapat membuat kebijaksanaan/ pengambilan keputusan yang lebih tepat serta mengevaluasi kebijaksanaan yang telah ada. Yang ketiga, untuk dapat memberikan sumbangan kepada analisis struktur ekonometrika dan analissis lintas sektoral. Dengan bantuan ekonometrikal semuanya dapat dilakukan tanpa mengalami kesusahan.

Berdasarkan tujuan dan manfaat ekonometrika tersebut dapat disimpulkan bahwa ekonometrika lebih banyak memberikan perhatiannya kepada ilmu ekonomi positif, karena tidak diperlakukannya asumsi ceteris paribus sebagai akibat berperannya variabel disturbansi dalam model ekonometrika.

1.1.3 Struktur dan Model Ekonometri

Dasar dari struktur dan stabilitas adalah pola prilaku manusia yang rasional dan konsisten. Walaupun prilaku manusia diharapkan dapat stabil, struktur dapat berubah sepanjang waktu.

Model ekonomi matematis yang tidak mengindahkan kehadiran variabel disturbansi bersifat deterministis, sedangkan model ekonometrika yang memasukkan variabel disturbansi kedalamnya bersifat stokastis. Dalam menyusun model/ struktur biasanya tersedia 4 bentuk hubungan yang dapat dimanfaatkan yaitu:

1. Hubungan berbentuk definisi atau identitas yang tidak memerlukan pembuktian lebih lanjut atas kehadirannya, misalnya $R = PQ$ atau pendapatan penjualan (R) sama dengan jumlah barang yang dijual (Q) dikal;ikan dengan harga penjualan perunit (P).

2. Hubungan yang berkaitan dengan teknologi seperti $Q = f(K, L)$ atau keluaran yang dihasilkaan (Q) sebagai fungsi dari Kapital (K) dan tenaga kerja (L).

3. Hubungan kelembagaan seperti jumlah penerimaan pajak penjualan sama dengan volume penjualan dikalikan tarif pajak penjualan per unit yang ditetapkan oleh lembaga pemerintah.

4. Hubungan perilaku yang memperlihatkan respon sebuah variabel terhadap perubahan variabel ekonomi lainnya, misalnya $C = f(Y)$ atau pengeluaran konsumsi sebagai fungsi dari pendapatan disposebel.

1.1.4 Peranan Variabel Disturbansi pada sebuah Model

Bentuk eksplisit sebuah fungsi biasanya digunakan dalam memperhatikan hubungan sebab akibat antara variabel tergantung dan variabel-variabel bebas. Hubungan tersebut yang berbentuk linier biasanya ditulis dalam bentuk:

$$y = \sum \beta_i x_i + \varepsilon \tag{1.5}$$

pada persamaan (1.5) ϵ menunjukkan penyimpangan karena diperkirakannya fungsi yang implisit sebagai fungsi linier. Jika hubungan tersebut benar-banar linier maka ε akan sama dengan nol. Tetapi dalam kehidupan nyata, persamaan (1.5) tidak sepenuhnya berlaku sebagai akibat bekerjanya variabel pengganggu. Walaupun semua variabel bebas dapat dikontrol namun masih terdapat variabel yang tidak diperhitungkan pada variabel bebas. Variasi yang disebabkan oleh variabel pengganggu itu tidak dapat dijelaskan secara sistematis.

1.2 Estimasi Parameter

Sebuah permasalahan statistik dimulai dengan sebuah sampel data, yaitu niiai-nilai hasil pengamatan dengan satu atau beberapa variabel random (acak) yang menyatakan hasil eksperimen secara berulag-ulang. Distribusi probabilitas (peluang) dari variabel random tersebut belum diketahui, sedangkan kita ingin menggunakan data itu untuk mempelajari karakteristik dari distribusi yangbelum diketahui tersebut. Jika hasil eksperimen dapat dijelaskan dalam sebuah angka dan eksperimen itu dilakukan beralang-ulang sebanyak n kali, maka sampel tersebut memuat n variabel random . Fungsi kepadatan peluang gabungan (*joint p.d.f)* dari sampel y berbentuk $f(y|\beta)$ yang bergantung pada satu atau lebih parameter berupa nilai-nilai yang mungkin, dengan Ω sebagai ruang parameter. Peneliti selalu berasumsi untuk mengetahui bentuk matematis dari $f(y|\beta)$ dan menentukan himpunan ruang parameter Ω yang mungkin untuk nilai-nilai β.

Sebagai contoh, kita asumsikan bahwa pengeluaran orang-orang pada suatu populasi dengan pendapatan setiap tahunnya Rp. 20.000.000,- adalah mengikuti distribusi normal, $N(\beta, \sigma^2)$, dengan nilai-nilai parameter lokasi β dan parameter skala σ^2 yang belum diketahui. Estimasi (penaksiran) parmeter menggunakan sampel data untuk menentukan inferensi tentang β dan σ^2. Inferensi-inferensi ini mungkin mengambil titik khusus (point estimates) atau menentukan range nilai-nilai parameter (interval estimates). Disamping itu, kita juga menggunakan informasi tentang sampel data, yaitu informasi nonsampel yang menjelaskan secara apriori tentang distribusinya, sebagai jastifikasi nilai parameter-parameter yang belum diketahui.

1.2.1 Estimasi Titik

Tujuan estimasi titik adalah menggunakan sampel data dan informasi nonsampel (apriori) yang telah kita punya tentang distribusi peluangnya, untuk memperoleh sebuah nilai yang dapat diterima sebagai estimasi terbaik dari parameter yang belum diketahui. Ada beberapa metode yang dapat digunakan untuk menghasilkan estimator, yaitu sebuah fungsi terhadap data sampel eksperimen,

$$\hat{\beta} = \hat{\beta}(y_1, y_2, ..., y_n) \tag{1.6}$$

Sebagian besar dari metode-metode itu berdasarkan pada prinsip-prinsip yang beralasan dan pertimbangan secara intuitif. Misalkan pengeluaran orang-orang pada suatu populasi dengan pendapatan setiap tahunnya Rp. 20.000.000,- adalah mendekati distribusi normal, , dengan parameter rata-rata β yang belum diketahui tetapi variansi telah diketahui, katakanlah σ^2 = Rp. 25.000.000,-. Sehingga, y merupakan pengeluaran dari setiap pendapatan Rp. 20.000.000,- dari seseorang dalam populasi ini, maka

$$y \sim N(\beta, 25.000.000) \tag{1.7}$$

Misalkan adalah sampel random dari hasil pengamatan pada populasi ini. Sehingga kita tegaskan secara ekivalen bahwa

$$y_i = \beta + e_i,\ i = 1, 2, ..., n \tag{1.8}$$

dimana e_i variabel random berdistribusi

$$e_i \sim N(0, 25.000.000) \tag{1.9}$$

dan menyatakan perbedaan atau selisih antara y_i dengan nilai rata-ratanya. Pada kasus ini, e_i mewakili semua faktor-faktor yang mempengaruhi tingkat pengeluaran selain pendapatan. Persamaan 1.8 adalah model statistik linier yang menyatakan hipotesa yang kita pertahankan tentang proses pengambilan sampel yang berkesesuaian, atau dalam kata lain, bagaimana pengamatan sampel pengeluaran dapat diperoleh. Misalkan pengamatan sampel diasumsikan bahwa pengeluaran eksperimental ekivalen dengan nilai rata-rata ditambah dengan kesalahan random e_i yang telah diketahui distribusinya dengan baik.

Estimator untuk β secara umum merupakan rata-rata aritmatik, yang diberikan sebagai

$$\widehat{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{y} \tag{1.10}$$

Estimator ini adalah variabel random, karena fungsi terhadap variabel random y_i juga merupakan varaibel random.

Metode Momen

Momen ke-r dan sebuah variabel random y di sekitar titik asal dinyatakan sebagai

$$\mu_r' = E\left[y'\right] = \begin{cases} \sum_{y} y^r f(y), & \text{bila y diskrit} \\ \int_{-\infty}^{\infty} y^r f(y)dy, & \text{bila y kontinu} \end{cases} \tag{1.11}$$

Jika p.d.f dari y adalah $f(y|\beta)$ dimana $\beta' = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$)adalah vektor parameter-parameter yang belum diketahui, maka secara umum μ_r' merupakan sebuah fungsi terhadap β, tulis sebagai $\mu_r' = \mu_r'$ (β). Ide metode momen adalah menggunakan sampel random dari data, $y_1, y_2, ..., y_n$, untuk menghitung momen-momen sampel

$$\widehat{\mu}_r' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,r},\ r = 1, 2, ..., k \tag{1.12}$$

dan kemudian menyamakan sampel dengan momen sebenarnya,

$\mu_r' = \mu_r'$ (β) dan menyelesaikan sistem yang dihasilkan dari k persamaan (jika mungkin) untuk parameter-parameter yang belum diketahui. Estimator yang dihasilkan, $\widehat{\beta}$, merupakan estimator dari metode momen.

Momen pertama dan kedua sebenarnya adalah

$$\mu_1' = E[y] = \beta \tag{1.13}$$

$$\mu_2' = E\left[y^2\right] = (\mu_1')^2 + \sigma^2 \tag{1.14}$$

Sedangkan estimator metode momen pertama dan kedua pada suatu populasi berdistribusi normal, $N(\beta, \sigma^2)$, diberikan oleh

$$\hat{\mu}_1' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \bar{y} = \hat{\beta} \tag{1.15}$$

$$\hat{\mu}_2' = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 = \hat{\sigma}^2 + \hat{\beta}^2 \tag{1.16}$$

sehingga

$$\hat{\sigma}^2 = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \bar{y}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{y}\right)^2 \tag{1.17}$$

Metode Maximum Likelihood

Misalkan y variabel random berdistribusi *Bernoulli* dengan parameter β berukuran n . Metode maximum *likelihood* akan memilih nilai β yang diketahui sedemikian hingga memaksimumkan nilai probabilitas (*likelihood*) dari gambaran sampel secara acak yang telah diperoleh secara aktual. Karena

$$f(y \mid \beta) = \beta^{y}(1-\beta)^{1-y} \tag{1.18}$$

untuk y = 0 atau y = 1, kita dapat menghitung probabilitas sampel random dari joint p.d.f untuk y_1, y_2,..., yn , yaitu

$$f(y_1 = 1, \ldots, y_n = 0) = f(1, \ldots, 0) = \prod_{i=1}^{n} \beta^{y_i}(1-\beta)^{1-y_i} \tag{1.19}$$

Jadi, fungsi *likelihood*-nya adalah

$$l(\beta \mid y) = f(y \mid \beta) = \beta^{\sum_{i=1}^{n} y_i}(1-\beta)^{\sum_{i=1}^{n} 1-y_i} \tag{1.20}$$

sedangkan fungsi *maximum likelihood*-nya adalah

$$L(\beta \mid y) = \ln l(y \mid \beta) = \sum_{i=1}^{n} y_i \ln \beta + \sum_{i=1}^{n} (1 - y_i) \ln (1 - \beta) \tag{1.21}$$

dan, untuk memaksimukan fungsi diperlukan

$$\frac{dL}{d\beta} = \sum_{i=1}^{n} y_i \frac{1}{\beta} - \sum_{i=1}^{n} (1 - y_i) \frac{1}{1 - \beta} \tag{1.22}$$

$$\frac{d^2 L}{d\beta^2} = -\sum_{i=1}^{n} y_i \frac{1}{\beta^2} - \sum_{i=1}^{n} (1 - y_i) \frac{1}{(1 - \beta)^2} \tag{1.23}$$

menyamakan turunan pertama dengan nol dan menyelesaikannya menghasilkan

$$\hat{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{1.24}$$

yang merupakan nilai rata-rata sampel. Sedangkan turunan kedua selalu bernilai negatif untuk $0 < \beta < 1$, sehingga merupakan nilai maksimum global untuk fungsi *log-likelihood*.

Misalkan y adalah sampel random berukuran n dari populasi berdistrubusi normal, $N(\beta, \sigma^2)$. Maka parameter-paremeter yang belum diketahui adalah β dan σ^2. Sedangkan fungsi *log-likelihood*-nya adalah

$$\begin{aligned} L(\beta, \sigma^2 \mid y) &= \ln \left\{ \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(y_i - \beta)^2}{\sigma^2} \right] \right\} \\ &= \ln \left\{ (2\pi\sigma^2)^{-T/2} \exp \left[-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \beta)^2}{\sigma^2} \right] \right\} \\ &= -\frac{n}{2} \ln (2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - \beta)^2}{\sigma^2} \end{aligned} \tag{1.25}$$

Sehingga turunan pertama dan keduanya adalah sebagai berikut:

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = \frac{1}{\sigma^2} \left(\sum_{i=1}^{n} y_i - n\beta \right) \tag{1.26}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta\right)^2 \tag{1.27}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} = -\frac{n}{\sigma^2} \tag{1.28}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial\left(\sigma^2\right)^2} = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \beta\right)^2 \tag{1.29}$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \beta \partial \sigma^2} = -\frac{1}{\sigma^4}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i - n\beta\right) \tag{1.30}$$

Menyamakan turunan pertama dengan nol dan menyelesaikan untuk β dan σ^2menghasilkan

$$\widehat{\beta}_{ml} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = \overline{y} \tag{1.31}$$

$$\widehat{\sigma}^2_{ml} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \widehat{\beta}_{ml}\right)^2 \tag{1.32}$$

Solusi-solusi tunggal yang secara nyata memaksimumkan fungsi *log-likelihood* dapat diperiksa dengan kondisi turunan kedua untuk maksimum lokal. Yaitu, matriks turunan kedua harus ditentukan sebagai definit negatif jika devaluasi pada solusi-solusi $\widehat{\beta}_{ml}$ dan $\widehat{\sigma}^2_{ml}$. Hal ini dikarenakan

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial \beta^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \beta\, \partial \sigma^2} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial \sigma^2 \partial \beta} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial\left(\sigma^2\right)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{n}{\widehat{\sigma}^2_{ml}} & 0 \\ 0 & -\dfrac{n}{2\widehat{\sigma}^4_{ml}} \end{bmatrix} \tag{1.33}$$

yang merupakan matriks definit negatif.

Metode Estimasi Kuadrat Terkecil

Dua metode estimasi sebelumnya menggunakan asumsi untuk bentuk distribusi populasi normal. Pada kenyataannya, hal ini adalah sulit untuk memastikan distribusi populasinya. Salah satu metode yang sangat berguna dan populer adalah metode estimasi kuadrat terkecil (*least squares estimation*). Metode ini dapat digunakan untuk mengestimasi nilai rata-rata (*central moments*) dari variabel random. Salah satu cara untuk mendefinisikan nilai tengah dari suatu himpunan data adalah dengan mencari nilai μ_r' yang meminimumkan nilai fungsi

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i^r - \mu_r' \right)^2 \tag{1.34}$$

yang merupakan fungsi galat kesalahan rata-rata aproksimasi dengan data sebenarnya. Estimasi $\widehat{\mu}_r'$ merupakan variabel random yang dikatakan sebagai *least square estimator* (LSE).

Bentuk lain dari fungsi S adalah

$$S' = \sum_{i=1}^{n} \left| y_i^r - \mu_r' \right| \tag{1.35}$$

yang menghasilkan estimator sebagai *least absolute derivation* (LAD) atau *minimum absolute derivation* (MAD) *estimator*. Meminimumkan sebuah fungsi dilakukan dengan menyamakan turunan pertamanya dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial S}{\partial \beta} = \sum_{i=1}^{n} -2\left(y_i - \widehat{\beta} \right)^2 = 0 \tag{1.36}$$

sehingga diperoleh

$$\widehat{\beta}_{ls} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{1.37}$$

1.2.2 Estimasi Interval

Terkadang terdapat permasalahan dalam menentukan interval untuk estimasi parameter, yang dalam statistik dikatakan sebagai variansi estimator. Terkadang penentuan interval estimator sangat berguna untuk memberikan range toleransi terhadap nilai-nilai estimasi yang mungkin.

Misalkan y adalah sampel random berukuran n dari populasi berdistribusi normal dengan parameter variansi yang telah diketahui. Maka estimator maximum *likelihood* untuk β adalah

$$\widehat{\beta}_{ml} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i \sim N\left(\beta, \frac{\sigma^2}{n} \right) \tag{1.38}$$

Kita dapat menggunakan distribusi sampel ini untuk membuat pernyataan probabilitas. Karena

$$z = \frac{\widehat{\beta}_{ml} - \beta}{\sigma\sqrt{n}} \sim N(0,1) \tag{1.39}$$

maka

$$P\left[-z_{(\alpha/2)} \leq z \leq z_{(\alpha/2)}\right] = 1 - \alpha \tag{1.40}$$

dimana $z_{(\alpha/2)}$ adalah $\alpha/2$ persen bagian atas dari distribusi . Substitusi untuk z menghasilkan *interval estimator*,

$$P\left[\widehat{\beta}_{ml} - z_{(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \beta \leq \widehat{\beta}_{ml} + z_{(\alpha/2)}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 1 - \alpha \tag{1.41}$$

1.3 Tugas Eksperimen

1. Buatlah sebuah data random 100 sampel dengan eksperimen Monte Carlo dengan model linier $y = \beta + e$, dimana $\beta = 5$ dan $e_i\tilde{}U(0,2)$ berdistribusi uniform .

2. Tampilkan histogram distribusinya dalam 30 poligon.

3. Hitunglah nilai rata-rata dan variansinya.

4. Estimasi parameter β menggunakan rata-rata setiap sampel dengan

$$\hat{\beta} = \bar{y} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} y_i$$

   bandingkan dengan nilai rata-rata sebenarnya.

5. Estimasi parameter σ^2 menggunakan variansi setiap sampel dengan

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}\left(y_i - \hat{\beta}\right)^2$$

   bandingkan dengan nilai variansi sebenarnya.

6. Buatlah 100 sampel variabel random normal,

$$z = \frac{y - \bar{y}}{\sigma/\sqrt{n}}$$

   buatlah histogramnya, dan hitung nilai rata-rata dan variansinya.

7. Tentukan estimasi interval untuk mean parameter dengan tingkat kepercayaan 95%.

8. Dengan estimasi interval tersebut, tentukan apakah estimasi mean parameter di atas diterima.

9. Ulangi no 1 s/d 8 dengan $e_i\tilde{}N(0,2)$.

10. Susunlah laporan ekperimen ini dan buatlah suatu kesimpulan.

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
JURUSAN MATEMATIKA
Jl. Gajayana 50 Malang Tlp. (0341) 551354 Faks (0341) 558933

SATUAN ACARA PERKULIAHAN

Mata Kuliah : Ekonometri
Dosen Pembina : Abdul Aziz, M.Si
Semester : VII (tujuh)
SKS : 2 SKS
Waktu : 4 x pertemuan @100 menit

A. Kemampuan Dasar

Mahasiswa mengetahui dan memahami konsep model-model statistik linier, mengestimasi lokasi dan prediksi parameter, serta pengujian hipotesa estimasi parameter.

B. Hasil Belajar

Mahasiswa terampil menggunakan model statistik linier, mengestimasi lokasi dan prediksi parameter, erta pengujian hipotesa estimasi parameter.

C. Indikator Hasil Belajar

1. Mahasiswa dapat mengetahui perbedaan model statistik linier 1,2, dan 3.
2. Mahasiswa dapat melakukan estimasi lokasi parameters.
3. Mahasiswa dapat melakukan estimasi titik paremeter.
4. Mahasiswa dapat melakukan estimasi scalar parameters.
5. Mahasiswa dapat melakukan pengujian hipotesa estimasi parameter.

D. Materi Pokok

2. Model Statistik Linier
2.1. Model Statistik Linier
    2.1.1 Linieritas
    2.1.2 Estimasi Ordinary Least Square
    2.1.3 Gauss Markov
    2.1.4 Estimasi Restricted Least Square
    2.1.5 Sum of Square Total

2.1.6 Coeffisien of Determination
2.2. Model Statistik Linier Normal
2.2.1 Estimasi Maximum Likelihood
2.3. Pengujian Hipotesa
2.3.1 Uji Rasio Likelihood
2.3.2 Pengujian Hipotesa Terbatas
2.3.3 Uji Goodness of Fit

E. Pengalaman Belajar

1. Mendengarkan penjelasan dosen di kelas.
2. Menganalisa penurunan rumus.
3. Memperhatikan pembahasan contoh soal dari pengajar.
4. Tanya jawab di kelas.
5. Melakukan praktikum eksperimen secara berkelompok.
6. Mengerjakan soal latihan secara individu.

F. Media

1. Papan tulis
2. Overhead Proyektor + komputer
3. Buku Pegangan Kuliah

G. Evaluasi

1. Tugas Praktikum Kelompok
2. Tugas Individu
3. Keaktifan (Tanya Jawab)

H. Skenario Pembelajaran

a. Kegiatan Awal

1. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang model-model fungsi.
2. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang model-model fungsi linier.
3. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang model-model fungsi nonlinier.

b. Kegiatan Inti

1. Pengajar menjelaskan tentang pengertian model statistik linier 1,2, dan 3.
2. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus location of parameter estimator.

3. Pengajar memberikan contoh kasus penggunaan model statistik linier 1,2 dan 3, serta melakukan estimasi lokasi parameter.

4. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan The Gauss – Markov Result.

5. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus Estimating the Scalar Parameter.

c. Kegiatan Akhir

1. Pengajar memberikan pertanyaan tentang perbandingan ketiga model statistik linier.

2. Pengajar memberikan tugas kepada mahasiswa untuk melakukan estimasi lokasi parameter dengan ketiga model statistik linier di atas pada kasus terdahulu (pertemuan sebelumnya).

3. Pengajar memberikan tugas kepada mahasiswa untuk melakukan analisa hasil estimasi lokasi parameter dan prediksi dengan ketiga model statistik linier di atas pada kasus terdahulu (pertemuan sebelumnya).

Bab 2

MODEL STATISTIK LINIER

2.1 Model Statistik Linier

2.1.1 Linieritas

Istilah linier dapat ditafsirkan dengan dua cara yang berbeda, yaitu linieritas dalam variabel atau linieritas dalam parameter. Linieritas dalam variabel adalah harapan bersyarat dari Y merupakan fungsi linier dari X_i, contohnya

$$E\left(Y \mid X_i\right) = \beta_1 + \beta_2 x. \tag{2.1}$$

Dalam penafsiran seperti ini, fungsi regresi seperti

$$E\left(Y \mid X_i\right) = \beta_1 + \beta_2 X^2 \tag{2.2}$$

bukan fungsi linier karena variabel x berpangkat dua. Sedangkan linieritas dalam parameter adalah harapan bersyarat dari Y merupakan fungsi linier dari parameter β, contohnya

$$E\left(Y \mid X_i\right) = \beta_1 + \beta_2^{\beta_3} x \tag{2.3}$$

tetapi fungsi tersebut mungkin linier atau tidak dalam variabel x.

Dari dua penafsiran linieritas tadi, linieritas dalam parameter sangat relevan dengan pengembangan teori regresi. Jadi, istilah regresi linier akan selalu berarti suatu regresi yang linier dalam parameter, yaitu parameter β tetapi regresi tadi mungkin linier atau tidak dalam variabel bebas (variabel yang menjelaskan), yaitu variabel X.

2.1.2 Ordinary Least Square Estimator (OLS)

Misalkan model statistik linier

$$y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + ... + \beta_k X_k + e \tag{2.4}$$

dengan sejumlah n data observasi maka model linier ini dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{21} & \cdots & x_{k1} \\ x_{12} & x_{22} & \cdots & x_{k2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{1n} & x_{2n} & \cdots & x_{kn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

sehingga model ini dapat disederhanakan sebagai

$$y = X\beta + e \tag{2.6}$$

Variabel e sangat memegang peran dalam model ekonometrika, tetapi variabel ini tidak dapat diteliti dan tidak pula tersedia informasi tentang bentuk distribusi kemungkinannya. Disamping asumsi mengenai distribusi probabilitasnya, beberapa asumsi lainnya khususnya tentang sifat statistiknya perlu dibuat dalam menerapkan metode OLS.

Berkaitan dengan model regresi yang telah dikemukakan sebelumnya, Gauss telah membuat asumsi mengenai variabel e sebagai berikut:

1. Nilai rata-rata atau harapan variabel e adalah sama dengan nol atau

$$E(e) = 0 \tag{2.7}$$

   Yang berarti nilai bersyarat e yang diharapkan adalah sama dengan nol dimana syaratnya yang dimaksud tergantung pada nilai x. dengan demikian, untuk nilai x tertentu mungkin saja nilai e sama dengan nol, mungkin positif atau negative, tetapi untuk banyak nilai x secara keseluruhan nilai rata-rata e diharapkan sama dengan nol.

2. Tidak terdapat korelasi serial atau autokorelasi antar variabel untuk setiap observasi. Dengan demikian dianggap bahwa tidak terdapat hubungan yang positif atau negative antara ei dan ej . Dan, tidak terdapat heteroskedastisitas antar variabel e untuk setiap observasi, atau dikatakan bahwa setiap variabel e memenuhi syarat homoskedastisitas. Artinya variabel e mempunyai varian yang positif dan konstan yang nilainya σ^2, yaitu

$$Var(e_i, e_j) = \begin{cases} \sigma^2, i = j \\ 0 \;\;, i \neq j \end{cases} \tag{2.8}$$

atau dalam bentuk matriks

$$\begin{bmatrix} \mathrm{var}(e_1) & \mathrm{cov}(e_1,e_2) & \cdots & \mathrm{cov}(e_1,e_n) \\ \mathrm{cov}(e_2,e_1) & \mathrm{var}(e_2) & \cdots & \mathrm{cov}(e_2,e_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cov}(e_n,e_1) & \mathrm{cov}(e_n,e_2) & \cdots & \mathrm{var}(e_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma^2 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

sehingga asumsí kedua ini dapat dituliskan dalam bentuk

$$Cov\,(e) = E\left[(e - E\,(e))(e - E\,(e))'\right] = E\,(ee') = \sigma^2 I_n \tag{2.10}$$

3. Variabel x dan variabel e adalah saling tidak tergantung untuk setiap observasi sehingga

$$\begin{aligned} Cov\,(x_i, e_i) &= E\left[(x_i - E\,(x_i))(e_i - E\,(e_i))\right] \\ &= E\left[(x_i - \overline{x})(e_i - 0))\right] \\ &= E\left[(x_i - \overline{x})\, e_i\right] \\ &= (x_i - \overline{x})\, E\,(e_i) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Dari ketiga asumsi ini diperoleh:

$$\begin{aligned} E(y) &= X\beta \\ Cov(y) &= \sigma^2 I_n \end{aligned} \tag{2.12}$$

Misalkan sampel untuk y diberikan. Maka aturan main yang memungkinkan pemakaian sampel tadi untuk mendapatkan taksiran dari β adalah dengan membuat $e = y - X\beta$ sekecil mungkin. Dengan aturan main ini, diharapkan akan menghasilkan komponen sistematik yang lebih berperan dari pada komponen stokastiknya. Karena bila komponen stokastik yang lebih berperan artinya hanya diperoleh sedikit informasi tentang y. Dengan kata lain, X tidak mampu menjelaskan y.

Untuk tujuan ini maka perlu memilih parameter β sehingga

$$S = e'e = \left(y - X\beta\right)'\left(y - X\beta\right) \tag{2.13}$$

sekecil mungkin (minimal).

Persamaan (2.13) adalah skalar, sehingga komponen-komponennya juga skalar. Dan akibatnya, transpose skalar tidak merubah nilai skalar tersebut. Sehingga S dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} S &= (y - X\beta)'(y - X\beta) \\ &= (y' - \beta' X')(y - X\beta) \\ &= y'y - y'X\beta - \beta'X'y + \beta'X'X\beta \\ &= y'y - (y'X\beta)' - \beta'X'y + \beta'X'X\beta \\ &= y'y - \beta'X'y - \beta'X'y + \beta'X'X\beta \\ &= y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta \end{aligned} \tag{2.14}$$

Untuk meminimumkannya dapat diperoleh dengan melakukan turunan parsial pertama S terhadap β [**?**, Misalkan z dan w adalah vektor-vektor k x 1 dan y = z'w scalar. Maka dy/dz = w, dy/dz' = w', dy/dw = z, dan dy/dw' = z'.],

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\beta} &= 0 - 2X'y + X'X\beta + (\beta'X'X)' \\ &= -2X'y + X'X\beta + X'X\beta \\ &= -2X'y + 2X'X\beta \end{aligned} \tag{2.15}$$

dan menyamakannya dengan nol diperoleh

$$X'X\beta = X'y \tag{2.16}$$

yang dinamakan sebagai persamaan normal, dan

$$\hat{\beta}_{ols} = (X'X)^{-1} X'y \tag{2.17}$$

yang dinamakan sebagai penaksir (*estimator*) parameter β secara kuadrat terkecil (*Ordinary Least Square*, OLS).

Sedangkan estimator kuadrat terkecil untuk variannya, σ^2 , adalah

$$\hat{\sigma}_{ols} = \frac{\hat{e}'\hat{e}}{n-k} = \frac{(y - X\hat{\beta}_{ols})'(y - X\hat{\beta}_{ols})}{n-k}$$

2.1.3 Gauss Markov

Misalkan A dan c adalah sebarang matriks-matriks k x n yang bukan nol dan tidak mengandung variabel y, maka definisikan $\widehat{\beta}$, sebarang penaksir linier untuk β, sebagai

$$\begin{aligned}\widehat{\beta} &= Ay \\ &= \left((X'X)^{-1}X' + c\right)y \\ &= (X'X)^{-1}X'y + cy\end{aligned} \tag{2.18}$$

dimana

$$\begin{aligned}E\left(\widehat{\beta}\right) &= E\left(\left((X'X)^{-1}X' + c\right)y\right) \\ &= E\left(\left((X'X)^{-1}X' + c\right)(X\beta + e)\right) \\ &= E\left((X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'e + cX\beta + ce\right) \\ &= E\left(\beta + (X'X)^{-1}X'e + cX\beta + ce\right) \\ &= \beta + cX\beta\end{aligned}$$

Sehingga agar $\widehat{\beta}$ adalah penaksir linier yang *unbiased* maka $cX = 0$ $(c \neq 0,\ X \neq 0)$, sehingga diperoleh

$$\widehat{\beta} = \beta + (X'X)^{-1}X'e + ce \tag{2.19}$$

dan

$$
\begin{aligned}
Cov\left(\hat{\beta}\right) &= E\left[\left(\hat{\beta}-E\left(\hat{\beta}\right)\right)\left(\hat{\beta}-E\left(\hat{\beta}\right)\right)'\right] \\
&= E\left[\left(\hat{\beta}-\beta\right)\left(\hat{\beta}-\beta\right)'\right] \\
&= E\left[\left((X'X)^{-1}X'e+ce\right)\left((X'X)^{-1}X'e+ce\right)'\right] \\
&= E\left[\left((X'X)^{-1}X'e+ce\right)\left(e'X(X'X)^{-1}+e'c'\right)\right] \\
&= E\left[(X'X)^{-1}X'ee'X(X'X)^{-1}+(X'X)^{-1}X'ee'c'+\right. \\
&\qquad \left. cee'X(X'X)^{-1}+cee'c'\right] \\
&= (X'X)^{-1}X'\sigma^2 IX(X'X)^{-1}+(X'X)^{-1}X'\sigma^2 Ic'+ \\
&\quad c\sigma^2 IX(X'X)^{-1}+c\sigma^2 Ic' \\
&= \sigma^2\left[(X'X)^{-1}+(X'X)^{-1}X'c'+cX(X'X)^{-1}+cc'\right] \\
&= \sigma^2\left[(X'X)^{-1}+cc'\right] \\
&= \sigma^2(X'X)^{-1}+\sigma^2 cc' \\
&= Cov\left(\hat{\beta}_{ols}\right)+\sigma^2 cc'
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Bila A matriks k x n dengan dan rk(A'A) $<$ k maka A'A adalah *positive semi definite* dengan nilai eigen $\lambda \geq 0$. Namun jika rk(A'A) $=$ k maka A'A adalah *positive definite* dengan nilai eigen $\lambda > 0$, sehingga

$$
\begin{aligned}
&Cov\left(\hat{\beta}\right)-Cov\left(\hat{\beta}_{ols}\right)=\sigma^2 cc' \\
&a'\left[Cov\left(\hat{\beta}\right)-Cov\left(\hat{\beta}_{ols}\right)\right]a=a'\sigma^2 cc'a \\
&a'Cov\left(\hat{\beta}\right)a-a'Cov\left(\hat{\beta}_{ols}\right)a=\sigma^2 a'cc'a\geq 0 \\
&a'Cov\left(\hat{\beta}\right)a-a'Cov\left(\hat{\beta}_{ols}\right)a\geq 0 \\
&Var\left(a'\hat{\beta}\right)-Var\left(a'\hat{\beta}_{ols}\right)\geq 0 \\
&Var\left(a'\hat{\beta}_{ols}\right)\leq Var\left(a'\hat{\beta}\right)
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Jadi, $\widehat{\beta}_{ols}$ yang juga penaksir linier untuk β, adalah lebih baik dari pada sebarang penaksir linier *unbiased* untuk lainnya karena memenuhi

$$Var\left(a'\widehat{\beta}_{ols}\right) \leq Var\left(a'\widehat{\beta}\right) \tag{2.22}$$

untuk setiap vektor a berukuran k x 1.

Pada persamaan (2.22) *cc'* adalah *positif semi definite* sehingga berlaku

$$a'cc'a \geq 0 \tag{2.23}$$

anda juga bisa membuktikan sendiri bahwa

$$a'Cov(\widehat{\beta})a = Var(a'\widehat{\beta}) \tag{2.24}$$

untuk sebaranag vektor a berukuran k x 1.

Sifat-sifat penaksir kuadrat terkecil dari β ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E\left(\widehat{\beta}_{ols}\right) &= E\left(\left(X'X\right)^{-1} X'y\right) \\ &= E\left(\left(X'X\right)^{-1} X'\left(X\beta + e\right)\right) \\ &= E\left(\left(X'X\right)^{-1} X'X\beta + \left(X'X\right)^{-1} X'Xe\right) \\ &= E\left(\beta + e\right) \\ &= E\left(\beta\right) + E\left(e\right) \\ &= \beta + 0 \\ &= \beta \end{aligned} \tag{2.25}$$

yang dinamakan sifat tak bias (*unbiased estimator*), dan karena

$$\begin{aligned} \widehat{\beta}_{ols} &= \left(X'X\right)^{-1} X'y \\ &= \left(X'X\right)^{-1} X'\left(X\beta + e\right) \\ &= \left(X'X\right)^{-1} X'X\beta + \left(X'X\right)^{-1} X'e \\ &= \beta + \left(X'X\right)^{-1} X'e \end{aligned} \tag{2.26}$$

maka

$$\begin{aligned} Cov(\widehat{\beta}_{ols}) &= E\left(\widehat{\beta}_{ols} - E(\widehat{\beta}_{ols})\right)\left(\widehat{\beta}_{ols} - E(\widehat{\beta}_{ols})\right)' \\ &= E\left(\widehat{\beta}_{ols} - \beta\right)\left(\widehat{\beta}_{ols} - \beta\right)' \\ &= E\left(\left(X'X\right)^{-1} X'e\right)\left(\left(X'X\right)^{-1} X'e\right)' \\ &= E\left(\left(X'X\right)^{-1} X'e\right)\left(e'X\left(X'X\right)^{-1}\right) \\ &= E\left(\left(X'X\right)^{-1} X'ee'X\left(X'X\right)^{-1}\right) \\ &= \left(X'X\right)^{-1} X'E\left(ee'\right)X\left(X'X\right)^{-1} \\ &= \left(X'X\right)^{-1} X'\sigma^2 I_n X\left(X'X\right)^{-1} \\ &= \sigma^2\left(X'X\right)^{-1} X'X\left(X'X\right)^{-1} \\ &= \sigma^2\left(X'X\right)^{-1} \end{aligned} \tag{2.27}$$

Dari *Teorema Gauss Markov* yaitu penaksir kuadrat terkecil dalam kelas penaksir linier tak bias adalah minimum. Jadi $\widehat{\beta}_{ols}$ linier, tak bias dan mempunyai variansi minimum dalam kelas semua penaksir tak bias linier dari β, maka biasanya disebut sebagai penaksir tak bias linier terbaik (*Best Linear Unbiased Estimator*, BLUE).

Misalkan model statistik linier

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 + e \tag{2.28}$$

maka diperoleh

$$
\begin{aligned}
S &= e'e \\
&= \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix} \\
&= e_1 e_1 + e_2 e_2 + \ldots + e_n e_n \\
&= \sum_{t=1}^{n} e_t^{\,2} \\
&= \sum_{t=1}^{n} \left(y_t - \beta_1 x_{1t} - \beta_2 x_{2t} \right)^2 \\
&= \left(y_t - \beta_1 x_{1t} - \beta_2 x_{2t} \right)' \left(y_t - \beta_1 x_{1t} - \beta_2 x_{2t} \right) \\
&= \left(y - X\beta \right)' \left(y - X\beta \right) \\
&= y'y
\end{aligned} \tag{2.29}
$$

dimana

$$
y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \tag{2.30}
$$

$$
X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & 1 \\ x_{12} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_{1n} & 1 \end{bmatrix} \tag{2.31}
$$

$$
\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \tag{2.32}
$$

dan

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial \beta} &= \frac{\partial\left[(y-X\beta)'(y-X\beta)\right]}{\partial \beta} \\
&= \frac{\partial\left[(y'-\beta'X')(y-X\beta)\right]}{\partial \beta} \\
&= \frac{\partial\left(y'y-y'X\beta-\beta'X'y+\beta'X'X\beta\right)}{\partial \beta} \\
&= \frac{\partial\left(y'y-(y'X\beta)'-\beta'X'y+\beta'X'X\beta\right)}{\partial \beta} \\
&= \frac{\partial\left(y'y-\beta'X'y-\beta'X'y+\beta'X'X\beta\right)}{\partial \beta} \\
&= \frac{\partial\left(y'y-2\beta'X'y+\beta'X'X\beta\right)}{\partial \beta} \\
&= -2X'y+2X'X\beta \\
&= -2\begin{bmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{bmatrix} y + 2\begin{bmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\
&= -2\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t}y_t \\ \sum_{t=1}^{n} x_{2t}y_t \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t}{}^2 & \sum_{t=1}^{n} x_{1t}x_{2t} \\ \sum_{t=1}^{n} x_{2t}x_{1t} & \sum_{t=1}^{n} x_{2t}{}^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\
&= -2\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t}y_t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t}{}^2 & \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \\ \sum_{t=1}^{n} x_{1t} & n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\
&= -2\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t}y_t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t}{}^2\beta_1 + \sum_{t=1}^{n} x_{1t}\beta_2 \\ \sum_{t=1}^{n} x_{1t}\beta_1 + n\beta_2 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

Untuk meminimalkan nilai β_1 dan β_2 haruslah $\frac{\partial S}{\partial \beta} = 0$, yang akan dipenuhi jika

$$\begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t}^{2} \widehat{\beta}_1 + \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \widehat{\beta}_2 \\ \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \widehat{\beta}_1 + n \widehat{\beta}_2 \end{bmatrix} \tag{2.34}$$

atau dapat ditulis dalam bentuk

$$\begin{bmatrix} x_1{}' y \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t}^{2} & \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \\ \sum_{t=1}^{n} x_{1t} & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \widehat{\beta}_1 \\ \widehat{\beta}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t}^{2} & \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \\ \sum_{t=1}^{n} x_{1t} & n \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{n\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^{2} - \left(\sum_{t=1}^{n} x_{1t} \right)^2} \begin{bmatrix} n & -\sum_{t=1}^{n} x_{1t} \\ -\sum_{t=1}^{n} x_{1t} & \sum_{t=1}^{n} x_{1t}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} x_{1t} y_t \\ \sum_{t=1}^{n} y_t \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{2.36}$$

atau

$$\widehat{\beta}_1 = \frac{n\sum_{t=1}^{n} x_{1t} y_t - \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \sum_{t=1}^{n} y_t}{n\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^{2} - \left(\sum_{t=1}^{n} x_{1t} \right)^2} \tag{2.37}$$

$$\widehat{\beta}_2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^{2} \sum_{t=1}^{n} y_t - \sum_{t=1}^{n} x_{1t} \sum_{t=1}^{n} x_{1t} y_t}{n\sum_{t=1}^{n} x_{1t}^{2} - \left(\sum_{t=1}^{n} x_{1t} \right)^2} \tag{2.38}$$

2.1.4 Restricted Least Square Estimator (RLS)

Misalkan suatu fungsi produksi *Cobb-Dauglass* (CD)

$$Q = C^{\beta} L^{1-\beta} \tag{2.39}$$

fungsi non linier, dimana:

Q = output jumlah, *quantity of product*
C = input model, *capital of product*
L = input tenaga kerja, *labour of product*

Misalkan y = ln Q dan $X\beta = \beta_1 \ln C + \beta_2 \ln L$, maka fungsi CD ini dapat dijadikan dalam bentuk linier standart, dengan syarat yang harus di penuhi (*restriction*) dalam model linier ini adalah $\beta_1 + \beta_2 = 1$, atau ditulis sebagai

$$R\beta = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = 1 = p \tag{2.40}$$

Sehingga bentuk matriksnya dapat ditulis:

$$\begin{bmatrix} \ln Q_1 \\ \ln Q_2 \\ \vdots \\ \ln Q_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ln C_1 & \ln L_1 \\ \ln C_2 & \ln L_2 \\ \vdots & \vdots \\ \ln C_n & \ln L_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \tag{2.41}$$

Pandang *Lagrangean function* berikut

$$L = (y - X\beta)'(y - X\beta) + \lambda^{*}{}'(p - R\beta) \tag{2.42}$$

misalkan $\lambda^* = 2\lambda$ maka

$$\begin{aligned} L &= (y - X\beta)'(y - X\beta) + 2\lambda'(p - R\beta) \\ &= (y' - \beta'X')(y - X\beta) + 2\lambda'(p - R\beta) \\ &= y'y - y'X\beta - \beta'X'y + \beta'X'X\beta + 2\lambda'p - 2\lambda'R\beta \\ &= y'y - (y'X\beta)' - \beta'X'y + \beta'X'X\beta + 2\lambda'p - (2\lambda'R\beta)' \\ &= y'y - \beta'X'y - \beta'X'y + \beta'X'X\beta + 2\lambda'p - 2\beta'R'\lambda \\ &= y'y - 2\beta'X'y + \beta'X'X\beta + 2\lambda'p - 2\beta'R'\lambda \end{aligned} \tag{2.43}$$

yang merupakan fungsi skalar, dan turunan parsialnya terhadap β adalah

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \beta} &= -2X'y + (\beta' X' X)' + X'X\beta - 2R'\lambda \\ &= -2X'y + X'X\beta + X'X\beta - 2R'\lambda \\ &= -2X'y + 2X'X\beta - 2R'\lambda\end{aligned} \tag{2.44}$$

dengan menyamakannya dengan nol diperoleh

$$\begin{aligned}X'X\hat{\beta}_{rls} &= X'y + R'\lambda \\ \hat{\beta}_{rls} &= (X'X)^{-1}X'y + (X'X)^{-1}R'\lambda \\ &= \hat{\beta}_{ols} + (X'X)^{-1}R'\lambda\end{aligned} \tag{2.45}$$

Sedangkan turunan parsial terhadap λ adalah

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2p - 2R\beta \tag{2.46}$$

dengan menyamakannya dengan nol diperoleh

$$p = R\hat{\beta}_{rls} \tag{2.47}$$

Dengan persamaan (2.45) maka persamaan (2.47) dapat ditulis sebagai

$$p = R\hat{\beta}_{ols} + R(X'X)^{-1}R'\lambda \tag{2.48}$$

sehingga diperoleh

$$\lambda = \left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(p - R\hat{\beta}_{ols}\right) \tag{2.49}$$

Dan, dengan mensubstitusikan hasil terakhir ini ke dalam persamaan (2.45) diperoleh

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{rls} &= \hat{\beta}_{ols} + (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(p - R\hat{\beta}_{ols}\right) \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'e + \\ &\quad (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left[p - R\left(\beta + (X'X)^{-1}X'e\right)\right] \\ &= \beta + (X'X)^{-1}X'e + \\ &\quad (X'X)^{-1}R'\left[R(X'X)^{-1}R'\right]^{-1}\left(p - R\beta - R(X'X)^{-1}X'e\right)\end{aligned} \tag{2.50}$$

Bila retriksi benar bahwa maka

$$\widehat{\beta}_{rls} = \beta + (X'X)^{-1} X'e - (X'X)^{-1} R' \left[R (X'X)^{-1} R' \right]^{-1} R (X'X)^{-1} X'e \tag{2.51}$$

sehingga

$$E\left(\widehat{\beta}_{rls}\right) = \beta \tag{2.52}$$

dan

$$\begin{aligned} Cov\left(\widehat{\beta}_{rls}\right) &= E\left[\left(\widehat{\beta}_{rls} - E\left(\widehat{\beta}_{rls}\right)\right)\left(\widehat{\beta}_{rls} - E\left(\widehat{\beta}_{rls}\right)\right)'\right] \\ &= E\left[\left(\widehat{\beta}_{rls} - \beta\right)\left(\widehat{\beta}_{rls} - \beta\right)'\right] \end{aligned} \tag{2.53}$$

$$\begin{aligned} = E\Big[&\Big((X'X)^{-1} X'e - (X'X)^{-1} R' \left(R (X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R (X'X)^{-1} X'e\Big) \\ &\Big(e'X (X'X)^{-1} - e'X (X'X)^{-1} R' \left(R (X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R (X'X)^{-1}\Big)\Big] \end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned} = E\Big[&(X'X)^{-1} X'ee'X (X'X)^{-1} - \\ &(X'X)^{-1} X'ee'X (X'X)^{-1} R' \left(R (X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R (X'X)^{-1} - \\ &(X'X)^{-1} R' \left(R (X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R (X'X)^{-1} X'ee'X (X'X)^{-1} + \\ &(X'X)^{-1} R' \left(R (X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R (X'X)^{-1} X'ee'X (X'X)^{-1} R' \\ &\left(R (X'X)^{-1} R'\right)^{-1} R (X'X)^{-1}\Big] \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$
\begin{aligned}
&= (X'X)^{-1} X'E(ee')X(X'X)^{-1} - \\
&\quad (X'X)^{-1} X'E(ee')X(X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} - \\
&\quad (X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} X'E(ee')X(X'X)^{-1} + \\
&\quad (X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} X'E(ee')X(X'X)^{-1} R' \\
&\quad \left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.56}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sigma^2 (X'X)^{-1} - \sigma^2 (X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} - \\
&\quad \sigma^2 (X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} + \\
&\quad \sigma^2 (X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} \\
&= \sigma^2 (X'X)^{-1} - \sigma^2 (X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1} \\
&= Cov\left(\widehat{\beta}_{ols}\right) - \sigma^2 (X'X)^{-1} R'\left(R(X'X)^{-1}R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1}
\end{aligned} \tag{2.57}
$$

Jadi $\widehat{\beta}_{rls}$ adalah BLUE dan lebih baik dari pada $\widehat{\beta}_{ols}$ jika *positive definit* dan retriksi benar. Sebaliknya, jika restriksi tidak benar maka unbiased tetapi persamaan hasil terakhir tetap berlaku, yaitu variansinya lebih kecil.

Sifat - sifat dari β^* bila pembatas benar :

1. $\mathrm{E}(\beta^*) = \beta$ (β^* disebut penaksir yang tak bias dari β)

2. $\mathrm{Cov}(\beta^*) = \mathrm{Cov}(\beta)$ - $\sigma^2\,(\mathrm{X'X})^{-1}\mathrm{R'}\left(\mathrm{R}\,(\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{R'}\right)^{-1}\mathrm{R}(\mathrm{X'X})^{-1}$

Perhatikan bahwa

$$\mathrm{Cov}(\beta) - \mathrm{Cov}(\beta^*) = \sigma^2\,(\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{R'}\left(\mathrm{R}\,(\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{R'}\right)^{-1}\mathrm{R}\,(\mathrm{X'X})^{-1} \qquad (2.58)$$

definit positif.
Ini berarti β^* lebih superior dibandingkan dengan β.
Bila restriksi (pembatas) salah, yaitu $\mathrm{R}\beta \neq \mathrm{r}$, maka $\mathrm{r}\text{-}\mathrm{R}\beta \neq 0$.
Maka

$$\begin{aligned} \beta^* &= \left(\beta + (\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{X'e}\right) + && (2.59)\\ &\quad (\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{R'}\left(\mathrm{R}\,(\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{R'}\right)^{-1}\left(\mathrm{r}\text{-}\mathrm{R}\beta - \mathrm{R}\,(\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{X'e}\right) && (2.60) \end{aligned}$$

Contoh :

Mencari taksiran $\beta = (\beta_1\ \beta_2\ \beta_3)'$, σ^2 dan $\mathrm{Cov}(\beta)$ bila β ditaksir dengan pembatas yang salah. Misalkan β^*adalah taksiran untuk β dengan pembatas yang salah, yaitu $\beta_2 + \beta_3 = 1.1$.

Maka $R = (0\ 1\ 1)$ dengan $r = 1.1$, sehingga

$$R\beta = (0\ 1\ 1)\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix} = \beta_2 + \beta_3 = 1.1 \neq 1.$$

Dengan mensubstitusikan β, X, e, R dan r ke persamaan (10), akan diperoleh β^*. Sehingga taksiran untuk σ^2 adalah

$$\sigma^{*2} = (\mathrm{y}\text{-}\mathrm{X}\beta^*)'\,(\mathrm{y}\text{-}\mathrm{X}\beta^*)\,/(\mathrm{T}\text{-}\mathrm{K})$$

dan

$$\mathrm{Cov}(\beta^*) = \sigma^{*2}(\mathrm{X'X})^{-1}$$

Sifat - sifat dari β^* bila pembatas salah :

1. $\mathrm{E}(\beta^*) = \beta + (\mathrm{X'X})^{-1}\mathrm{R'}\left(\mathrm{R}\,(\mathrm{X'X})^{-1}\,\mathrm{R'}\right)^{-1}(\mathrm{r}\text{-}\mathrm{R}\beta) \neq \beta$ (β^* disebut penaksir yang bias dari β)

2. $\text{Cov}(\beta^*) = \text{Cov}(\beta)$ - $\sigma^2 \left(X'X\right)^{-1} R' \left(R \left(X'X\right)^{-1} R'\right)^{-1} R(X'X)^{-1}$

Perhatikan bahwa

$$\text{Cov}(\beta) - \text{Cov}(\beta^*) = \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1} R' \left(R \left(X'X\right)^{-1} R'\right)^{-1} R \left(X'X\right)^{-1} \quad (2.61)$$

juga definit positif.

Tetapi untuk pembatas yang salah, β^* belum tentu lebih superior dari β walaupun β^* lebih presisi atau akurat.

2.1.5 Sum of Square Total (SST)

Regression Sum of Square (SSR) =

$$\sum_{i=1}^{T} \left(\hat{y}_i - \bar{\hat{y}}\right)^2 \quad (2.62)$$

SSR menyatakan variasi nilai Y yang ditaksir di sekitar rata - ratanya.

Error Sum of Square (SSE) =

$$\hat{e}'\hat{e} = (y - X\beta)' \, (y - X\beta) \quad (2.63)$$

Total Sum of Square (SST) =

$$\sum_{i=1}^{T} (y_i - \bar{y})^2 \quad (2.64)$$

SST menyatakan total variasi nilai Y sebenarnya di sekitar rata - rata sampelnya.

$$\begin{aligned}
\sum_{t=1}^{n}\left(y_t-\overline{y}\right)^2 &= \sum_{t=1}^{n}\left(y_t^{\,2}-2y_t\overline{y}+\overline{y}^2\right)\\
&= \sum_{t=1}^{n} y_t^{\,2}-2\overline{y}\sum_{t=1}^{n} y_t+n\overline{y}^2\\
&= \sum_{t=1}^{n} y_t^{\,2}-2\overline{y}\,n\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t+n\overline{y}^2\\
&= \sum_{t=1}^{n} y_t^{\,2}-2\overline{y}n\overline{y}+n\overline{y}^2\\
&= y_t\,'y_t-2n\overline{y}^2+n\overline{y}^2\\
&= y_t\,'y_t-n\overline{y}^2\\
&= \hat{y}_t\,'\hat{y}_t-n\overline{\hat{y}}^2+\hat{e}\,'\hat{e}\\
&= \sum_{t=1}^{n}\left(\hat{y}_t-\overline{\hat{y}}\right)^2+\hat{e}\,'\hat{e}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

persamaan terakhir ini bisa ditulis sebagai

$$SST = SSR + SSE$$

dimana

SSR : Sum of Square Regression

SSE : Sum of Square Error (Residual)

Hubungan ini menunjukkan bahwa total variasi dalam nilai Y yang diobservasi di sekitar nilai rata - ratanya dapat dipisahkan ke dalam dua bagian, sebagian yang diakibatkan oleh garis regresi dan bagian lain diakibatkan oleh kekuatan random karena tidak semua pengamatan Y yang sebenarnya terletak pada garis yang dicocokkan.

2.1.6 Koefisien Determinasi

Koefisien determinasi (R^2) merupakan suatu ukuran yang menyatakan seberapa baik garis regresi sampel mencocokkan data.

Koefisien determinasi (R^2) =

$$\frac{\mathrm{SSR}}{\mathrm{SST}} = 1-\frac{\mathrm{SSE}}{\mathrm{SST}} = 1-\frac{\hat{\mathrm{e}}'\hat{\mathrm{e}}}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{y}_i\text{-}\bar{\mathrm{y}}\right)^2} \tag{2.66}$$

Adjusting $\mathrm{R}^2(\bar{\mathrm{R}}^2)$ =

$$1-\frac{\hat{e}'\hat{e}/(T\text{-}K)}{\sum_{i=1}^{T}(y_i\text{-}\bar{y})^2/(T\text{-}1)} \tag{2.67}$$

Jadi secara verbal, R^2 mengukur prosentase total variasi dalam Y yang dijelaskan oleh model regresi. Nilai R^2 terletak diantara 0 dan 1. Nilai R^2 sebesar 1 berarti kecocokan sempurna, sedangkan nilai R^2 sebesar 0 berarti tidak ada hubungan antara variabel tak bebas dengan variabel yang menjelaskan.

$$\begin{aligned} 0 \le R^2 &= \frac{SSR}{SST} \\ &= \frac{\hat{y}'\hat{y} - n\bar{\hat{y}}^2}{y'y - n\bar{y}^2} \\ &= \frac{SST - SSE}{SST} \\ &= 1 - \frac{SSE}{SST} \\ &\le 1 \end{aligned} \tag{2.68}$$

Adjusted Coeffisien of Determination

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{SSE/(n-k)}{SST/(n-1)} \tag{2.69}$$

2.2 Model Statistik Linier Normal

Penerapan metode kuadrat terkecil untuk model regresi linier tidak membuat asumsi apapun mengenai distribusi probablilitas dari *error* e. Asumsi yang dibuat hanyalah bahwa gangguan tadi mempunyai nilai yang diharapkan (rata-rata) nol, tak berkorelasi dan mempunyai variansi konstan. Dengan asumsi ini, penaksir kuadrat terkecil β dan $\hat{\sigma}^2$ memenuhi beberapa sifat statistik yang diinginkan, seperti ketakbiasan dan variansi yang minimum. Jika tujuan yang diharapkan hanya untuk melakukan penaksiran titik (*point estimation*), maka metode kuadrat terkecil sudah mencukupi. Tetapi, penaksiran titik hanyalah satu aspek inferensi statistik. Aspek lainnya adalah pengujian hipotesa.

Pandang model statistik linier berikut

$$y = X\beta + e \tag{2.70}$$

Karena tujuan dari model statistik linier ini tidak hanya sekedar sebagai statistik deskriptif, tetapi juga untuk tujuan pengambilan kesimpulan maupun penaksiran, maka disini harus diasumsikan bahwa e mengikuti distribusi probabilitas, dengan distribusi yang digunakan adalah distribusi normal dengan rata - rata nol dan variansi σ^2.

Asumsi : e$\backsim$N$(0, \sigma^2 \mathrm{I}_T)$ atau e$_i \backsim$N$(0, \sigma^2)$

Ini berarti :

1. E(e) $= 0$
2. Cov$(e_i, e_j) = \sigma^2, \ \forall i = j$
3. Cov$(e_i, e_j) = 0, \ \forall i \neq j$

2.2.1 Maximum Likelihood Estimator (ML)

Suatu metoda yang bersifat umum dari penaksiran titik dengan beberapa sifat teoretis yang lebih kuat dibandingkan dengan metoda penaksir kuadrat terkecil adalah metoda maksimum likelihood (metoda kemungkinan terbesar).

Misalkan X_i' vektor $1\times k$, i=1,...,n., maka $\mathrm{y}_i = \mathrm{X}_i'\beta + \mathrm{e}_i$, i=1,...,m, sehingga $\mathrm{y}_i \backsim \mathrm{N}\left(\mathrm{X}_i'\beta, \sigma^2\right)$ .Fungsi distribusi peluang dari y_i jika diberikan X_i, β dan σ^2 adalah

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_i|\mathrm{X}_i, \beta, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{\mathrm{y}_i - \mathrm{X}_i'\beta}{\sigma}\right)^2\right) \tag{2.71}$$

Karena y_1,...,y_n saling bebas, diperoleh

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_1,...,\mathrm{y}n\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left(\frac{-1}{2}\sum_{\mathrm{i}=1}^{n}\left(\frac{\mathrm{y}_i - \mathrm{X}_i'\beta}{\sigma}\right)^2\right) \tag{2.72}$$

Pandang *likelihood function* berikut

$$l\left(\beta, \sigma^2|\mathrm{X,y}\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\left(\mathrm{y\text{-}X}\beta\right)'\left(\mathrm{y\text{-}X}\beta\right)\right) \tag{2.73}$$

maka fungsi *log-likelihood*-nya adalah

$$
\begin{aligned}
L = \ln l &= -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y - X\beta\right)'\left(y - X\beta\right) \\
&= -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y' - \beta' X'\right)\left(y - X\beta\right) \\
&= -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y'y - y'X\beta - \beta' X' y + \beta' X' X\beta\right) \\
&= \frac{-n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y'y - \left(y'X\beta\right)' - \beta' X' y + \beta' X' X\beta\right) \\
&= -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y'y - \beta' X' y - \beta' X' y + \beta' X' X\beta\right) \\
&= -\frac{T}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(y'y - 2\beta' X' y + \beta' X' X\beta\right)
\end{aligned} \tag{2.74}
$$

sehingga

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \beta} &= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2X'y + X'X\beta + \beta' X' X\right) \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2X'y + X'X\beta + \left(\beta' X' X\right)'\right) \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2X'y + X'X\beta + X'X\beta\right) \\
&= -\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2X'y + 2X'X\beta\right) \\
&= \frac{1}{\sigma^2}\left(X'y - X'X\beta\right)
\end{aligned} \tag{2.75}
$$

dengan menyamakan hasil turunan ini dengan nol diperoleh

$$
\widehat{\beta}_{ml} = \left(X'X\right)^{-1} X'y \tag{2.76}
$$

yang sama dengan estimasi least square sebelumnya, sehingga juga merupakan BLUE.

$$\begin{aligned}
\hat{e} &= y - X\hat{\beta} \\
&= y - X\left(X'X\right)^{-1}X'y \\
&= \left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]y \\
&= My \\
&= M\left(X\beta + e\right) \\
&= MX\beta + Me \\
&= I_n X\beta - X\left(X'X\right)^{-1}X'X\beta + Me \\
&= X\beta - X\beta + Me \\
&= Me
\end{aligned} \tag{2.77}$$

$$\begin{aligned}
\hat{e}'\hat{e} &= \left(Me\right)'\left(Me\right) \\
&= e'M'Me \\
&= e'\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]'\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]e \\
&= e'\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]e \\
&= e'\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X' - X\left(X'X\right)^{-1}X' + X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]e \\
&= e'\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]e \\
&= e'Me
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Sifat-sifat M:

1. simetri

$$\begin{aligned}
M' &= \left[I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]' \\
&= I' - \left(X'\right)'\left[\left(X'X\right)^{-1}\right]'X' \\
&= I - X\left(X'X\right)^{-1}X' \\
&= M
\end{aligned} \tag{2.79}$$

2. idempoten

$$
\begin{aligned}
M'M &= MM \\
&= \left[I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]\left[I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right] \\
&= I - X\left(X'X\right)^{-1}X' - X\left(X'X\right)^{-1}X' + \\
&\quad X\left(X'X\right)^{-1}X'X\left(X'X\right)^{-1}X' \\
&= I - X\left(X'X\right)^{-1}X' - X\left(X'X\right)^{-1}X' + \\
&\quad X\left(X'X\right)^{-1}X' \\
&= I - X\left(X'X\right)^{-1}X' \\
&= M
\end{aligned}
\tag{2.80}
$$

3. ortogonal

$$
\begin{aligned}
MX &= \left[I - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]X \\
&= IX - X\left(X'X\right)^{-1}X'X \\
&= X - X \\
&= O
\end{aligned}
\tag{2.81}
$$

$$
X'M = X'M' = \left(MX\right)' = O' = O \tag{2.82}
$$

4. rank atau trace (M) = n - k , singular, noninvertible

$$
\begin{aligned}
rk\left(M\right) &= tr\left(M\right) \\
&= tr\left[I_n - X\left(X'X\right)^{-1}X'\right] \\
&= tr\left(I_n\right) - tr\left[X\left(X'X\right)^{-1}X'\right] \\
&= tr\left(I_n\right) - tr\left[\left(X'X\right)^{-1}X'X\right] \\
&= tr\left(I_n\right) - tr\left(I_k\right) \\
&= n - k
\end{aligned}
\tag{2.83}
$$

rank = banyaknya nilai eigen yang tidak nol
trace = banyaknya nilai eigen yang sama dengan satu
rk (D) = tr (D), untuk sebarang matriks diagonal D

5. nilai eigen dari M adalah 0 atau 1,

Bukti:

Misalkan q adalah vektor eigen dari M dengan nilai eigen , maka

$$\begin{aligned} MMq &= M\lambda q \\ Mq &= \lambda Mq \\ \lambda q &= \lambda\lambda q \\ (1-\lambda)\lambda q &= 0 \\ \lambda &= 1, \text{ atau} \\ \lambda &= 0 \end{aligned} \tag{2.84}$$

dan

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\left(y'y - y'X\beta - \beta'X'y + \beta'X'X\beta\right) \tag{2.85}$$

sehingga, dengan menyamakannya dengan nol diperoleh

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2_{ml} &= \frac{1}{n}\left(y'y - y'X\hat{\beta}_{ml} - \hat{\beta}_{ml}'X'y + \hat{\beta}_{ml}'X'X\hat{\beta}_{ml}\right) \\ &= \frac{1}{n}\left(y - X\hat{\beta}_{ml}\right)'\left(y - X\hat{\beta}_{ml}\right) \\ &= \frac{1}{n}\hat{e}'\hat{e} \\ &= \frac{1}{n}e'Me \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned} E\left(\hat{\sigma}^2_{ml}\right) &= E\left(\frac{e'Me}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}E\left[tr\left(e'Me\right)\right] \\ &= \frac{1}{n}E\left[tr\left(Mee'\right)\right] \\ &= \frac{1}{n}tr\left[E\left(Mee'\right)\right] \\ &= \frac{1}{n}tr\left[ME\left(ee'\right)\right] \\ &= \\ &= \frac{\hat{\sigma}^2}{n}\left(n-k\right) \end{aligned} \tag{2.87}$$

yang merupakan biased estimator, berbeda dengan estimasi least square

$$E\left(\hat{\sigma}^2_{ols}\right) = E\left(\frac{e'Me}{n-k}\right) = \frac{\hat{\sigma}^2}{n-k}\left(n-k\right) = \hat{\sigma}^2 \tag{2.88}$$

yang merupakan unbiased estimator.

Sifat - Sifat Penaksir Maksimum Likelihood

Sifat - sifat dari β adalah

1. $\mathrm{E}(\beta) = \beta$
2. $\mathrm{Cov}(\beta) = \sigma^2\,(\mathrm{X'X})^{-1}$
3. $\mathrm{E}(\tilde{\sigma}^2) \neq \sigma^2$ ($\tilde{\sigma}^2$ adalah suatu penaksir bias dari σ^2)

Penaksir σ^2 yang tak bias adalah

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{\mathrm{e}}'\hat{\mathrm{e}}}{\mathrm{T\text{-}K}} \tag{2.89}$$

karena $\mathrm{E}(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$.

Dengan melihat asumsi kenormalan, terlihat bahwa dalam model regresi linier penaksir kuadrat terkecil β dan penaksir maksimum likelihood β adalah identik. Dalam sampel kecil, penaksir maksimum likelihood $\tilde{\sigma}^2$ adalah bias meskipun bias ini dapat dihilangkan dengan menggunakan penaksir kuadrat terkecil $\hat{\sigma}^2$ yang tak bias. Tetapi dengan meningkatnya ukuran sampel secara tak terbatas, penaksir maksimum likelihood dan penaksir kuadrat terkecil dari σ^2 cenderung untuk sama.

2.3 Pengujian Hipotesa

Masalah pengujian hipotesa secara statistik dengan sederhana dapat dinyatakan sebagai berikut : Apakah suatu pengamatan atau penemuan cocok dengan suatu hipotesa yang telah dinyatakan atau tidak?. Kata cocok disini berarti "cukup" dekat dengan nilai yang dihipotesakan untuk menerima hipotesa yang dinyatakan. Jadi bila suatu teori atau pengalaman sebelumnya membawa kita untuk percaya bahwa koefisien kemiringan (gradien) sebenarnya dari β_i adalah a, apakah β_1 yang diamati, misalkan nilainya b yang diperoleh dari sampel konsisten dengan hipotesa yang dinyatakan ? Jika ya, kita bisa menerima hipotesa itu, jika tidak kita akan menolaknya.

Dalam bahasa statistik, hipotesa yang dinyatakan dikenal sebagai hipotesa nol dan dilambangkan dengan lambang H_0. Hipotesa nol ini biasanya diuji terhadap hipotesa alternatif, yang dinyatakan dengan H_1, yang mungkin menyatakan bahwa $\beta_i \neq a$.

Teori pengujian hipotesa berkenaan dengan pengembangan aturan atau prosedur untuk memutuskan apakah menerima atau menolak hipotesa. Pendekatan yang akan dipakai dalam eksperimen ini adalah pengujian arti/penting (*test of significance*). Pendekatan ini mengatakan bahwa variabel (statistik atau penaksir) yang sedang dipertimbangkan mempunyai suatu distribusi probabilitas dan bahwa pengujian hipotesa meliputi pembuatan pernyataan mengenai nilai-nilai parameter seperti itu.

Dalam bahasa pengujian tingkat arti, suatu statistik dikatakan penting secara statistik (*statistically significant*) jika nilai statistik uji (statistik hitung) terletak di dalam daerah kritis. Dalam kasus ini, hipotesa nol ditolak. Sedangkan suatu pengujian dikatakan secara statistik tidak penting (*statistically insignificant*) jika nilai statistik uji terletak dalam daerah penerimaan. Dalam situasi ini, hipotesa nol bisa diterima.

Pengujian hipotesa yang akan dilakukan pada eksperimen ini terbatas pada tiga kasus, yaitu

1. Untuk masing-masing parameter β_i, dengan hipotesa

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_0 &: \beta_i = 0,\ i = 1,2,3 \\ \mathrm{H}_1 &: \beta_i \neq 0,\ i = 1,2,3 \end{aligned}$$

2. Untuk suatu pembatas, dengan hipotesa

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_0 &: \beta_2 + \beta_3 = 1 \\ \mathrm{H}_1 &: \text{lainnya} \end{aligned}$$

3. Untuk penampilan model secara utuh (keseluruhan), dengan hipotesa

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_o &: \beta_2=\beta_3=0 \\ \mathrm{H}_1 &: \text{lainnya} \end{aligned}$$

Untuk ketiga kasus diatas digunakan *level of significance* (α) sebesar 5%. *Level of significance* (tingkat signifikansi) adalah peluang menolak H_1 padahal H_0 benar.

2.3.1 Uji Rasio Likelihood

Test Ratio ini digunakan untuk mengetahui kompatibilitas sampel y dengan hipotesa:

$$\begin{aligned} H_0 &: R\beta = p \\ H_1 &: R\beta \neq p \end{aligned} \tag{2.90}$$

Sebelum pengujian hipotesa ini, akan dibahas hal khusus, yaitu:

$$R = I \text{ dan } p = \beta_0 \tag{2.91}$$

sehingga hipotesa (2.90) menjadi

$$\begin{aligned} H_0 &: \beta = \beta_0 \\ H_1 &: \beta \neq \beta_0 \end{aligned} \tag{2.92}$$

Untuk sampel acak y_i dengan $y = X\beta + e$ dan $e\tilde{}N(0, \sigma^2 I_n)$ maka fungsi likelihood,

$$l\left(\beta,\sigma^2 \mid X,y\right)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2}\exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(y-X\beta)'(y-X\beta)\right] \tag{2.93}$$

dan

$$l\left(\beta,\sigma^2 \mid X,y,\beta=\beta_0\right)=\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2}\exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(y-X\beta_0)'(y-X\beta_0)\right] \tag{2.94}$$

sehingga estimasi untuk (2.93) adalah

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= (X'X)^{-1}X'y \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n}\left(y-X\hat{\beta}\right)'\left(y-X\hat{\beta}\right) \end{aligned}$$

sedangkan estimasi untuk (2.94) adalah

$$\hat{\beta} = \beta_0$$
$$\hat{\sigma}_0^{\ 2} = \frac{1}{n}(y - X\beta_0)'(y - X\beta_0) \tag{2.95}$$

sehingga dengan substitusi estimator ke fungsi maksimum likelihood:

$$\begin{aligned}
\hat{l}(\Omega) &= \max\left[l\left(\beta, \sigma^2 \mid y, X\right)\right] \\
&= \max\left[\left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(y - X\beta)'(y - X\beta)\right]\right] \\
&= \left(2\pi\hat{\sigma}^2\right)^{-n/2} \exp\left[\frac{-1}{2\hat{\sigma}^2}\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)\right] \\
&= \left[2\pi\frac{1}{n}\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)\right]^{-n/2} \exp\left[-\frac{\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)}{2\frac{1}{n}\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)}\right] \\
&= \left[\frac{2\pi}{n}\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)\right]^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)
\end{aligned} \tag{2.96}$$

$$\begin{aligned}
\hat{l}(\omega) &= \max\left[l\left(\beta, \sigma^2 \mid y, X, \beta = \beta_0\right)\right] \\
&= \left[\frac{2\pi}{n}(y - X\beta_0)'(y - X\beta_0)\right]^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2}\right)
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Sehingga diperoleh likelihood Ratio Test:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\hat{l}(\Omega)}{\hat{l}(\omega)} \\
&= \left[\frac{\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)}{(y - X\beta_0)'(y - X\beta_0)}\right]^{-n/2} \\
&= \left[\frac{(y - X\beta_0)'(y - X\beta_0)}{\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)}\right]^{n/2}
\end{aligned} \tag{2.98}$$

dengan *rule of the game*: tolak H_0 bila λ_1 "besar".

Selanjutnya perhatikan bahwa,

$$\begin{aligned}(y-X\beta_0)'(y-X\beta_0) &= \left(y-X\widehat{\beta}+X\widehat{\beta}-X\beta_0\right)'\left(y-X\widehat{\beta}+X\widehat{\beta}-X\beta_0\right)\\ &= \left[\hat{e}+X\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)\right]'\left[\hat{e}+X\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)\right]\\ &= \left[\hat{e}'+\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)'X'\right]\left[\hat{e}+X\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)\right]\\ &= \hat{e}'\hat{e}+\hat{e}'X\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)+\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)'X'\hat{e}+\\ &\quad \left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)'X'X\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)\end{aligned} \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned}&= (Me)'Me+(Me)'X\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)+\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)'X'Me+\\ &\quad \left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)'X'X\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)\\ &= e'M'Me+e'M'X\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)+\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)'X'Me+\\ &\quad \left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)'X'X\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)\end{aligned} \tag{2.100}$$

$$\begin{aligned}&= e'M'Me+0+0+\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)'X'X\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)\\ &= \hat{e}'\hat{e}+\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)'X'X\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)\\ &= \left(y-X\widehat{\beta}\right)'\left(y-X\widehat{\beta}\right)+\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)'X'X\left(\widehat{\beta}-\beta_0\right)\end{aligned} \tag{2.101}$$

sehingga, ratio test pada (2.98) dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= 1 + \frac{\left(\hat{\beta} - \beta_0\right)' X' X \left(\hat{\beta} - \beta_0\right)}{\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)} \\
&= 1 + \frac{\left(\hat{\beta} - \beta\right)' X' X \left(\hat{\beta} - \beta\right)}{\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)} \\
&= 1 + \frac{\left[\left(X'X\right)^{-1} X'e\right]' X' X \left[\left(X'X\right)^{-1} X'e\right]}{\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)} \\
&= 1 + \frac{e'X\left(X'X\right)^{-1} X'X\left(X'X\right)^{-1} X'e}{\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)} \\
&= 1 + \frac{e'X\left(X'X\right)^{-1} X'e}{\left(y - X\hat{\beta}\right)'\left(y - X\hat{\beta}\right)} \\
&= 1 + \frac{e'Ne}{e'Me} \\
&= 1 + \lambda_2
\end{aligned} \tag{2.102}$$

Sifat-sifat N:

1. simetri

$$\begin{aligned}
N' &= \left[X\left(X'X\right)^{-1} X'\right]' \\
&= \left(X'\right)'\left[\left(X'X\right)^{-1}\right]' X' \\
&= X\left(X'X\right)^{-1} X' \\
&= N
\end{aligned} \tag{2.103}$$

2. idempoten

$$\begin{aligned}
N'N &= NN \\
&= \left[X\left(X'X\right)^{-1} X'\right]\left[X\left(X'X\right)^{-1} X'\right] \\
&= X\left(X'X\right)^{-1} X'X\left(X'X\right)^{-1} X' \\
&= X\left(X'X\right)^{-1} X' \\
&= N
\end{aligned} \tag{2.104}$$

3.

$$
\begin{aligned}
NX &= \left[X\left(X'X\right)^{-1}X'\right]X \\
&= X\left(X'X\right)^{-1}X'X \\
&= X
\end{aligned}
\qquad (2.105)
$$

$$X'N = X'N' = \left(NX\right)' = X' \qquad (2.106)$$

4. rank atau trace (N) = k

$$
\begin{aligned}
rk\left(N\right) &= tr\left(N\right) \\
&= tr\left[X\left(X'X\right)^{-1}X'\right] \\
&= tr\left[\left(X'X\right)^{-1}X'X\right] \\
&= tr\left(I_k\right) \\
&= k
\end{aligned}
\qquad (2.107)
$$

5. nilai eigen dari N adalah 0 atau 1,

Bukti:

Misalkan q adalah vektor eigen dari N dengan nilai eigen λ , maka

$$
\begin{aligned}
NNq &= N\lambda q \\
Nq &= \lambda Nq \\
\lambda q &= \lambda\lambda q \\
\left(1-\lambda\right)\lambda q &= 0 \\
\lambda &= 1, \text{ atau} \\
\lambda &= 0
\end{aligned}
\qquad (2.108)
$$

Sehingga jika

$$\lambda_2 = \frac{e'Ne}{e'Me} = \frac{e'Ne/\sigma^2}{e'Me/\sigma^2}\frac{\sim \chi^2{}_k}{\sim \chi^2{}_{n-k}} \qquad (2.109)$$

dan

$$\lambda_3 = \frac{n-k}{k}\lambda_2 = \frac{\sim \chi^2{}_{k/k}}{\sim \chi^2{}_{(n-k)/(n-k)}} =\sim F_{k,n-k} \qquad (2.110)$$

maka rule of the game: tolak H_0 bila $\lambda_3 \geq$ *nilai kritis* dari $F_{k,\ n-k}$.

Hipotesa di atas adalah dalam keadaan khusus, $R = I,\ p = \beta_0$, sedangkan sekarang bersifat umum, yaitu dengan sebarang R dengan rk(R) = j.

Misalkan ,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{bmatrix}', \rho = O = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}', rk(R) = 1 \tag{2.111}$$

dengan

$$H_0 : \beta_1 = 0,\ H_1 : \beta_1 \neq 0 \tag{2.112}$$

maka dapat menggunakan *t-test* dengan nilai *t-hitung*:

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{\left(\hat{\beta}-\beta\right)' R' \left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} R\left(\hat{\beta}-\beta\right)/j}{e'Me/(n-k)} \\
&= \frac{\left(\hat{\beta}-\beta\right)' R' \left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1} R\left(\hat{\beta}-\beta\right)}{j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\left(\hat{\beta}'R'-\beta'R'\right)\left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta}-R\beta\right)}{j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\left(R\hat{\beta}-R\beta\right)'\left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta}-R\beta\right)}{j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\left(R\hat{\beta}-p\right)'\left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1}\left(R\hat{\beta}-p\right)}{j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\left(\hat{\beta}_1-O\right)'\left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1}\left(\hat{\beta}_1-O\right)}{j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\hat{\beta}_1'\left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1}\hat{\beta}_1}{j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\hat{\beta}_1'\left[R\left(X'X\right)^{-1} R'\right]^{-1}\hat{\beta}_1}{j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\hat{\beta}_1'\hat{\beta}_1}{R\left(X'X\right)^{-1} R' j\hat{\sigma}^2} \\
&= \frac{\hat{\beta}_1^2}{R\left(X'X\right)^{-1} R' j\hat{\sigma}^2}
\end{aligned}
\tag{2.113}
$$

Atau, jika $\lambda_2 = \sqrt{\lambda_1}$ maka *t-hitung* menjadi

$$\begin{aligned}
\lambda_2 &= \frac{\widehat{\beta}_1}{\sqrt{\widehat{\sigma}^2 R\left(X'X\right)^{-1} R'}} \\
&= \frac{\widehat{\beta}_1}{\sqrt{Cov\left(R\widehat{\beta}_1\right)}} \\
&= \frac{\widehat{\beta}_1}{\sqrt{Var\left(\widehat{\beta}_1\right)}} \\
&= \frac{\widehat{\beta}_1}{Std\left(\widehat{\beta}_1\right)} \sim t_{n-k}
\end{aligned} \tag{2.114}$$

dengan aturan main: Tolak H_0 jika t-hitung berada pada daerah kritis dari t-tabel, t $_{n-k}$.

2.3.2 Pengujian Hipotesa Terbatas

Diberikan hipotesa nol dan hipotesa alternatif sebagai berikut :

$H_0 : \beta_2 + \beta_3 = 1$

$H_1 : \beta_2 + \beta_3 \neq 1$

Perhatikan bahwa R = (0 1 1), p = 1 dan rank(R) = 1. Dengan mensubstitusikan R, p dan rank(R) = j, nilai λ dapat dicari. Untuk pengujian hipotesa, gunakan aturan mainnya yaitu: Tolak H0 jika λ lebih besar atau sama dengan nilai kritis dari $F_{\ j,\ n-k}$

2.3.3 Uji Goodness of Fit

Pandang model statistik linier

$$y = \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 \tag{2.115}$$

dengan

Karena X_3 merupakan vektor yang diberikan dan umumnya unsur - unsurnya hanya memuat angka 1 saja, maka model tersebut hanya tergantung dari X_1 dan X_2.

Diberikan hipotesa nol dan hipotesa alternatif sebagai berikut :

$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = 0$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}'$$

Gambar 2.1:

H_1 : lainnya
Perhatikan bahwa

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, p = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.116}$$

dan rank(R) = 2.

Dengan mensubstitusikan R, p dan rank(R) = 2, nilai λ dapat dicari. Untuk pengujian hipotesa, gunakan aturan mainnya yaitu: Tolak H_0 jika λ lebih besar atau sama dengan nilai kritis dari $F_{j,\ n-k}$

Untuk pengujian hipotesa dengan konstrain dan penampilan model secara keseluruhan, kita tidak dapat menggunakan uji t karena prosedur pengujian t mengasumsikan bahwa suatu sampel independen ditarik setiap saat pengujian t diterapkan. Jadi apabila sampel yang sama digunakan untuk menguji hipotesa mengenai β_1 dan β_2 secara simultan, tampaknya β_1 dan β_2 berkorelasi dan ini merupakan penyimpangan dari prosedur pengujian t.

2.4 Tugas Eksperimen

Perumusan Masalah

1. Bagaimana perbandingan penaksir-penaksir terhadap parameter β dan σ^2 yang dihasilkan oleh metoda OLS, RLS dan ML dengan nilai yang sebenarnya ?

2. Bagaimana proporsi hipotesa yang tertolak untuk masing - masing hipotesa, yaitu untuk masing-masing parameter β_i, untuk suatu pembatas dan penampilan model secara keseluruhan ?

3. Bagaimana kesesuaian hasil eksperimen dengan hasil teoritisnya ?

Tujuan Eksperimen

Eksperimen ini bertujuan untuk:

1. Membandingkan penaksir-penaksir terhadap parameter β dan σ^2 yang dihasilkan oleh metoda OLS, RLS dan ML dengan nilai yang sebenarnya.

2. Mengetahui proporsi hipotesa yang tertolak untuk masing - masing hipotesa, yaitu untuk masing-masing parameter β_i, untuk suatu pembatas dan penampilan model secara keseluruhan.

3. Membandingkan kesesuaian hasil eksperimen dengan hasil teoritisnya.

Metoda Eksperimen

Metoda yang akan digunakan pada eksperimen ini adalah metoda literatur dengan menggunakan data-data eksperimental. Kemudian dilakukan simulasi estimasi terhadap beberapa parameter dengan beberapa metoda pendekatan dan bantuan komputer. Dilanjutkan dengan melakukan pengujian hipotesa dan membandingkan semua hasil eksperimennya dengan hasil teori. Model regresi yang digunakan untuk eksperimen adalah model statistik linier normal dengan tiga variabel bebas X yang masing-masing berukuran $30x3$ dan vektor error e berukuran $30x1$ yang diambil secara acak dari komputer dengan asumsi e berdistribusi $N\ (0, \sigma^2 I_T)$.

Prosedur Eksperimen

Dalam melakukan eksperimen ini, kami menyusun langkah-langkah/prosedur pengerjaan agar kegiatan yang dilakukan jelas dan terarah. Adapun prosedur dalam melakukan eksperimen ini adalah :

1. Pendekatan teori sampel dan regresi untuk estimasi, inferensi dan pengambilan kesimpulan pada model statistik linier. Hal ini dilakukan sebagai bekal awal pengetahuan teoretis dalam melakukan eksperimen.

2. Menentukan data-data untuk variabel X, β, σ^2 dan α. Data untuk variabel bebas X yang berukuran 30X3, parameter β dan σ^2 diambil dari data riil observasi langsung atau dari data sekunder dan *level of significance* (tingkat keberartian / tingkat signifikansi) α ditentukan sebesar 5%.

3. Membuat data vektor e berukuran 30X1. Nilai e diambil secara acak dari komputer, yang masing-masing isi selnya berdistribusi normal N(0,0.1).

4. Menyusun matriks y yang berukuran 30X1 dengan menggunakan e yang didapat pada langkah 3.

5. Melakukan penaksiran terhadap β dan σ^2. Dari data X dan y yang telah diperoleh dapat dilakukan penaksiran terhadap β dan σ^2, yaitu langkah 6-11.

6. Menaksir β dengan *Ordinary Least Square* (OLS).

7. Menaksir σ^2 yang tak bias dengan menggunakan penaksir β OLS.

8. Menaksir Cov (β), dengan menggunakan penaksir σ^2 OLS.

9. Mengulangi penaksiran β, σ^2 dan Cov (β) dengan pembatas yang benar, yaitu $\beta_2 + \beta_3 = 1$.

10. Mengulangi penaksiran β, σ^2 dan Cov (β) dengan pembatas yang salah, yaitu $\beta_2 + \beta_3 = 1.1$.

11. Mengulangi penaksiran β, σ^2 dan Cov (β) dengan metoda *Maximum Likelihood* (ML).

12. Membandingkan hasil-hasil penaksiran pada langkah 5 dengan nilai sebenarnya yang ditentukan pada langkah 2.

13. Melakukan pengujian hipotesa, yaitu langkah 14-16.

14. Menguji hipotesa untuk masing-masing parameter β_i (dengan menggunakan uji t), yaitu $\mathrm{H}_0 : \beta_i = 0$, i=1,2,3 vs $\mathrm{H}_1 : \beta_i \neq 0$.

15. Menguji hipotesa untuk pembatas berikut (dengan menggunakan uji F), yaitu $\mathrm{H}_0 : \beta_2 + \beta_3 = 1$ vs H_1 : lainnya.

16. Menguji hipotesa untuk penampilan model secara keseluruhan (dengan menggunakan uji F), yaitu $H_0 : \beta_2 = \beta_3 = 0$ vs H_1 : lainnya.

17. Menghitung koefisien determinasi R^2 dan adjusting R^2 (R^2 yang disesuaikan).

18. Melakukan pengulangan eksperimen, yaitu langkah 5 dan langkah 7 hingga 100.000 kali dengan penyusunan y yang baru untuk setiap pengulangannya. Langkah ini dilakukan untuk membandingkannya dengan hasil penaksiran dan pengujian hipotesa yang dilakukan pertama kali.

19. Menghitung proporsi hipotesa yang tertolak pada langkah 9 untuk masing-masing hipotesa.

20. Membandingkan hasil eksperimen dengan hasil teoritisnya.

21. Mengamati dan menganalisa hasil eksperimen.

22. Menyusun laporan.

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
JURUSAN MATEMATIKA
Jl. Gajayana 50 Malang Tlp. (0341) 551354 Faks (0341) 558933

SATUAN ACARA PERKULIAHAN

Mata Kuliah : Ekonometri
Dosen Pembina : Abdul Aziz, M.Si
Semester : VII (tujuh)
SKS : 2 SKS
Waktu : 4 x pertemuan @100 menit

A. Kemampuan Dasar

Mahasiswa mengetahui, dan memahami konsep homoskedastisitas, heteroskedastisitas, dan autokorelasi, serta estimasi parameter-parameter pada model statistik linier umum dengan Matriks Kovariansi Nonscalar Identity dan Matriks Kovariansi Tidak diketahui.

B. Hasil Belajar

Mahasiswa terampil menggunakan data homoskedastisitas, heteroskedastisitas, dan autokorelasi, serta melakukan estimasi parameter-parameter pada general linear statistical model dengan Nonscalar Identity Covariance Matrix dan an Unknown Covariance Matrix.

C. Indikator Hasil Belajar

1. Mahasiswa dapat melakukan estimasi parameter pada model statistik linier umum dengan Matriks Kovariansi Nonscalar Identity.
2. Mahasiswa dapat melakukan estimasi parameter pada model statistik linier umum dengan Matriks Kovariansi Tidak diketahui.
3. Mahasiswa dapat menjelaskan pengertian dan perbedaan homoskedastisitas, heteroskedastisitas, dan autokorelasi.

D. Materi Pokok

3.1. Heteroskedastisitas
3.1.1 Transformasi Persamaan Linier

3.1.2 Estimasi Generalized Least Squares
3.1.3 Estimasi Aitken
3.1.4 Pengujian Heteroskedastisitas
3.2. Autokorelasi
3.2.1 Proses Autoregressive Orde Satu
3.2.2 Estimasi Generalized Least Squares
3.2.3 Uji Asymtotik
3.2.4 Uji Durbin-Watson

E. Pengalaman Belajar

1. Mendengarkan penjelasan dosen di kelas.
2. Menganalisa penurunan rumus.
3. Memperhatikan pembahasan contoh soal dari pengajar.
4. Tanya jawab di kelas.
5. Melakukan praktikum eksperimen secara berkelompok.
6. Mengerjakan soal latihan secara individu.

F. Media

1. Papan tulis
2. Overhead Proyektor + komputer
3. Buku Pegangan Kuliah

G. Evaluasi

1. Tugas Praktikum Kelompok
2. Tugas Individu
3. Keaktifan (Tanya Jawab)

H. Skenario Pembelajaran

a. Kegiatan Awal

1. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang model general statistik linier.
2. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang estimasi parameter pada model general statistik linier.

b. Kegiatan Inti

1. Pengajar menjelaskan tentang pengertian The Normal General Linear Statistical Model.
2. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus General linear Statistical Model with Nonscalar Identity Covariance Matrix.

3. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus Homoskedasticity.

4. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus General linear Statistical Model with an Unknown Covariance Matrix.

5. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus Estimated Generalized Least Squares.

6. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus Heteroskedasticity.

7. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus Autocorrelation.

c. Kegiatan Akhir

1. Pengajar memberikan pertanyaan tentang perbandingan General linear Statistical Model dengan Scalar dan Nonscalar Identity Covariance Matrix

2. Pengajar memberikan pertanyaan tentang perbandingan General linear Statistical Model dengan Covariance Matrix yang diketahui dan tak diketahui.

3. Pengajar memberikan tugas kepada mahasiswa untuk mencari kasus baru untuk melakukan estimasi parameter dengan model heteroskedasticity, homoskedasticity, dan autocoerrelation.

4. Pengajar memberikan tugas kepada mahasiswa untuk melakukan analisa hasil estimasi parameter untuk model heteroskedasticity, homoskedasticity, dan autocoerrelation.

Bab 3

HETEROSKEDASTISITAS DAN AUTOKORELASI

3.1 Heteroskedastisitas

3.1.1 Transformasi Persamaan Linier

Model statistik linier yang diperumum

$$y = X\beta + e \tag{3.1}$$

dengan $e\tilde{\ } N(0, \Phi)$, dimana

$$\Phi = \sigma^2\Psi = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

matriks simetri dan *positive definite*. Karena Φ matriks simetri dan positive definite maka ada matriks C yang ortogonal ($CC' = C'C = I$) sedemikian hingga $C'\Phi C = D$ adalah matriks diagonal yang elemen-elemennya merupakan nilai-nilai eigen dari Φ.

Misalkan

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

dan tulis

$$W = \begin{bmatrix} 1/\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/\lambda_n \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

maka diperoleh $W\,'D\,W = I$.

Karena $C\,'\Phi\,C = D$ maka $W\,'C\,'\Phi\,C\,W = W\,'D\,W = I$.

Misalkan $P = W\,'C\,'$ maka $I = W\,'C\,'\Phi\,C\,W = P\,\Phi\,P\,'$ akibatnya diperoleh $\Phi = P^{-1}(P\,')^{-1} = (PP\,')^{-1}$ atau $\Phi^{-1} = P\,'P$

Dari persamaan model statistik linear diperoleh transformasi model menjadi

$$Py = P(X\beta + e) = PX\beta + Pe \tag{3.5}$$

atau

$$y^* = X^*\beta + e^* \tag{3.6a}$$

dimana

$$E(e^*) = E(Pe) = PE(e) = 0 \tag{3.7}$$

dan

$$E(e^*e^{*\prime}) = E(Pe(Pe)') = E(Pee'P') = PE(ee')P' = P\Phi P' = I \tag{3.8}$$

sehingga persamaan model transformasi 3.6a memenuhi asumsi standard model statistik linier.

Dengan cara serupa, yaitu karena Ψ juga matriks simetri dan positive definite maka ada matriks Q sedemikian hingga $Q\,\Psi\,Q\,' = I$ dan diperoleh $\Psi = (Q\,Q\,')^{-1}$ atau $\Psi^{-1} = Q\,'Q$. Akibatnya diperoleh model statistik linier

$$Qy = Q(X\beta + e) = QX\beta + Qe \tag{3.9}$$

atau

$$y^\wedge = X^\wedge\beta + e^\wedge \tag{3.10}$$

dimana

$$E(e^\wedge) = E(Qe) = QE(e) = 0 \tag{3.11}$$

dan

$$\begin{aligned}E\left(e\wedge e\wedge '\right) &= E\left(Qe\left(Qe\right)'\right) = E\left(Qee'Q'\right)\\ &= QE\left(ee'\right)Q' = Q\Phi Q'\\ &= Q\sigma^2\Psi Q' = \sigma^2 Q\Psi Q' = \sigma^2 I\end{aligned} \tag{3.12}$$

yang memenuhi asumsi standart model statistik linier.

3.1.2 Estimasi Generalized Least Squares

Penaksir parameter-parameter pada β untuk model transformasi statistik linier yang umum, persamaan 3.6a disebut sebagai *generalized least squares estimator* (GLSE), yaitu

$$\begin{aligned}\widehat{\beta}_{gls} &= \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}X^{*\prime}y^{*}\\ &= \left[\left(PX\right)'\left(PX\right)\right]^{-1}\left(PX\right)'\left(Py\right)\\ &= \left(X'P'PX\right)^{-1}X'P'Py\\ &= \left(X'\Phi^{-1}X\right)^{-1}X'\Phi^{-1}y\\ &= \left(X'\left(\sigma^2\Psi\right)^{-1}X\right)^{-1}X'\left(\sigma^2\Psi\right)^{-1}y\\ &= \sigma^2\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1}X'\left(1/\sigma^2\right)\Psi^{-1}y\\ &= \left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1}X'\Psi^{-1}y\end{aligned} \tag{3.13}$$

yang merupakan *best linear unbiased estimator* (BLUE) dengan matriks kovariansi

$$\begin{aligned}Cov\left(\widehat{\beta}_{gls}\right) &= \left(X^{*\prime}X^{*}\right)^{-1}\\ &= \left[\left(PX\right)'\left(PX\right)\right]^{-1}\\ &= \left(X'P'PX\right)^{-1}\\ &= \left(X'\Phi^{-1}X\right)^{-1}\\ &= \left(X'\left(\sigma^2\Psi\right)^{-1}X\right)^{-1}\\ &= \sigma^2\left(X'\Psi^{-1}X\right)^{-1}\end{aligned} \tag{3.14}$$

Jika digunakan penaksir *ordanary least squares* (OLS) terhadap β maka penaksir ini adalah tidak efisien, meskipun *unbiased estimator,* karena matriks kovariansi sebenarnya adalah

$$Cov\left(\hat{\beta}_{ols}\right) = \left(X'X\right)^{-1} X'\Phi X \left(X'X\right)^{-1} \tag{3.15}$$

sehingga

$$Cov\left(\hat{\beta}_{ols}\right) - Cov\left(\hat{\beta}_{gls}\right) > 0 \tag{3.16}$$

Sedangkan estimasi untuk σ^2 secara *generalized least squares* adalah

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}^2_{gls} &= \frac{1}{n-k}\left(y \wedge - X \wedge \hat{\beta}_{gls}\right)'\left(y \wedge - X \wedge \hat{\beta}_{gls}\right) \\ &= \frac{1}{n-k}\left(Qy - QX\hat{\beta}_{gls}\right)'\left(Qy - QX\hat{\beta}_{gls}\right) \\ &= \frac{1}{n-k}\left(Q\left(y - X\hat{\beta}_{gls}\right)\right)'\left(Q\left(y - X\hat{\beta}_{gls}\right)\right) \\ &= \frac{1}{n-k}\left(y - X\hat{\beta}_{gls}\right)'Q'Q\left(y - X\hat{\beta}_{gls}\right) \\ &= \frac{1}{n-k}\left(y - X\hat{\beta}_{gls}\right)'\Psi^{-1}\left(y - X\hat{\beta}_{gls}\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

3.1.3 Aitken Estimator (Feasible GLS Estimator)

Jika matriks Ψ tidak diketahui maka perlu adanya cara penaksiran lain yang dikenal sebagai *Aitken estimator (feasible GLS estimator)* of β atau *estimated generalized least squares* (EGLS) *estimator,* yaitu

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{egls} &= \left(X'\hat{\Phi}^{-1}X\right)^{-1} X'\hat{\Phi}^{-1}y \\ &= \left[X'\left(\hat{\sigma}^2\hat{\Psi}\right)^{-1}X\right]^{-1} X'\left(\hat{\sigma}^2\hat{\Psi}\right)^{-1}y \\ &= \hat{\sigma}^2\left(X'\hat{\Psi}^{-1}X\right)^{-1} X'\left(1/\hat{\sigma}^2\right)\hat{\Psi}^{-1}y \\ &= \left(X'\hat{\Psi}^{-1}X\right)^{-1} X'\hat{\Psi}^{-1}y \end{aligned} \tag{3.18}$$

yang juga merupakan *unbiased estimator* dengan kovariansi

$$Cov\left(\hat{\beta}_{egls}\right) = \left(X'\hat{\Phi}^{-1}X\right)^{-1} = \hat{\sigma}^{2}_{egls}\left(X'\hat{\Psi}^{-1}X\right)^{-1} \tag{3.19}$$

dimana

$$\hat{\sigma}^{2}_{egls} = \frac{1}{n-k}\left(y - X\hat{\beta}_{egls}\right)'\hat{\Psi}^{-1}\left(y - X\hat{\beta}_{egls}\right) \tag{3.20}$$

3.1.4 Pengujian Heteroskedastisitas

Uji Multiplikatif Heteroskedastisitas

Misalkan model statistik linier dengan

$$\begin{aligned} Cov(e_i) &= E\left(e_i^2\right) = \sigma_i^2 \\ &= \exp(z_i'\alpha) = \exp(\alpha_1)\exp(z_i^{*\prime}\alpha^*) \\ &= \sigma^2 \exp(z_i^{*\prime}\alpha^*) \end{aligned} \tag{3.21}$$

diasumsikan sebagai model dengan *homokedastic errors* maka sama halnya dengan menggunakan hipotesa

$H_0 : \alpha^* = 0,$

$H_1 : \alpha^* \neq 0.$

Untuk menguji hipotesa ini digunakan estimasi

$$\hat{\alpha} = (Z'Z)^{-1}Z'q = \left(\sum_{i=1}^{n} z_i z_i'\right)^{-1}\sum_{i=1}^{n} z_i \ln \hat{e}_i^{\,2} \tag{3.22}$$

dengan

$$\hat{e} = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta} \tag{3.23}$$

Misalkan D adalah matriks $(Z'Z)^{-1}$ dengan menghilangkan baris pertama dan kolom pertamanya, maka

$$\hat{\alpha}^* \sim N(\alpha^*, 4.9348D) \tag{3.24}$$

dan

$$\frac{\left(\hat{\alpha}*-\alpha*\right)' D^{-1}\left(\hat{\alpha}*-\alpha*\right)}{4.9348} \sim \chi^2_{s-1} \tag{3.25}$$

Sehingga pengujian untuk multiplicative *heteroskedastisitas* dengan cara membandingkan nilainya dengan nilai pada distribusi *Chi-square* yang sesuai, χ^2_{s-1}.

Uji Goldfield-Quandt

Hipotesa yang digunakan pada metode ini adalah

$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_1 : \sigma_1^2 < \sigma_2^2 \leq ... \leq \sigma_n^2$

Misalkan hipotesa satu adalah benar, lakukan dua regresi terpisah masing-masing berukuran sama yaitu (n - r) / 2 observasi. Hitung perbandingan residual sum of squaresnya, $\lambda = S_2 \ / \ S_1$. Di bawah hipotesa nul, λ berdistribusi F dengan derajat kebebasan $[(n-r-2k)/2, (n-r-2k)/2]$. Bandingkan nilai λ dengan titik kritis yang sesuai dari distribusi F dan terima atau tolak hipotesa nul.

Uji Breusch-Pagan

Misalkan di bawah hipotesa yang digunakan adalah

$H_0 : \alpha^* = 0$

$H_1 : \sigma_1^2 = h(z_i'\alpha) = h(\alpha_1 + z_i^{*}\,'\alpha^*)$

dimana h adalah fungsi independent terhadap t, dan

$$z_i' = \begin{bmatrix} 1 & z_i*' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z_{i2} & \cdots & z_{is} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

dan

$$\alpha' = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha*' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_s \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Maka pengujian dilakukan pada *sum of squares total* (SST) dan *residual sum of squares* (SSR) dari regresi

$$\frac{\hat{e}_i^2}{\hat{\sigma}^2} = z_i'\alpha + v_i \sim \chi^2_{s-1} \tag{3.28}$$

yang berdistribusi secara asimtotik sebagai χ^2_{s-1} dimana

$$\tilde{e}_i = y_i - X_i \hat{\beta}_{ols} \tag{3.29}$$

dan

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_i^2 \tag{3.30}$$

3.2 Autokorelasi

3.2.1 Proses Autoregressive Orde Satu

Misalkan model statistik linier umum sebagai

$$y_i = X_i'\beta + e_i \tag{3.31}$$

dimana *error*-nya merupakan *proses autoregressive orde satu* (AR1) sebagai

$$e_i = \rho e_{i-1} + v_i \tag{3.32}$$

dengan $iid.v_i\tilde{}N(0,\sigma_v^2)$ dan matriks varian kovarian sebagai

$$\begin{aligned} Cov(e_i) = E(e_i^2) = \sigma_e^2 = \frac{\sigma_v^2}{1-\rho^2} = \Phi = \sigma_v^2\Psi \\ = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \cdots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \cdots & \rho^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho^{n-1} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.33}$$

dan

$$Cov(e_i, e_{i-j}) = E(e_i e_{i-j}) = \rho^j \sigma_e^2 = \frac{\rho^j \sigma_v^2}{1-\rho^2} \tag{3.34}$$

3.2.2 Estimasi Generalized Least Squares

Jika ρ diketahui maka GLS estimator adalah BLUE. Sebagaimana pada model *heteroskedastisitas*, GLSE untuk β dilakukan serupa, persamaan 3.13. Begitu juga untuk matriks kovariansinya, persamaan 3.15, dengan estimasi variansi serupa pula, persamaan 3.17. Sebaliknya, jika ρ tidak diketahui maka dilakukan estimasi sebagai

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i \hat{e}_{i-1}}{\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_{i-1}^2} \tag{3.35}$$

dan diberlakukan EGLS estimator terhadap β yang serupa pula sebagaimana model *heteroskedastisitas*, persamaan 3.18. Begitu pula berlaku untuk matriks kovariansinya, sedangkan estimasi variansinya diberlakukan sebagai $\hat{\sigma}_v^2$.

3.2.3 Uji Asimtotik

ρ diaproksimasikan berdistribusi normal dengan mean ρ dan variansi $(1 - \rho^2)/n$. Sehingga

$$z = \frac{\hat{\rho} - \rho}{\sqrt{\left(1 - \rho^2\right)/n}} \tag{3.36}$$

secara aproksimasi berdistribusi normal standart. Jika hipotesa nol benar $(H_0 : \rho = 0)$ maka statistik menjadi

$$z = \hat{\rho}\sqrt{n} \tag{3.37}$$

dan akibatnya, pada level signifikansi 5%, dalam test dua sisi, hipotesa nol ditolak jika

$$|z| = \left|\hat{\rho}\sqrt{n}\right| \geq 1.96 \tag{3.38}$$

3.2.4 Uji Durbin-Watson

The Durbin-Watson test didasarkan pada statistik

$$d = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(\hat{e}_i - \hat{e}_{i-1}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_{i-1}^2} = \frac{\hat{e}' A \hat{e}}{\hat{e}' \hat{e}} = \frac{e' MAMe}{e' Me} \tag{3.39}$$

dimana

$$\hat{e} = \begin{bmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \cdots & \hat{e}_n \end{bmatrix} = y - X\hat{\beta}_{ols} \tag{3.40}$$

adalah vektor *least squares residuals* dan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & 2 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{3.41}$$

3.3 Tugas Eksperimen

Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka pada eksperimen ini kami merumuskan beberapa permasalahan, yaitu:

1. Bagaimana perbandingan penaksir-penaksir terhadap parameter β dan σ^2 yang dihasilkan oleh metoda OLS dan GLS, baik antar penaksir maupun dengan nilai yang sebenarnya, baik untuk Ψ yang diketahui maupun yang tidak diketahui?

2. Bagaimana proporsi hipotesa yang tertolak untuk masing - masing hipotesa, yaitu untuk masing-masing parameter β_i, untuk suatu pembatas dan penampilan model secara keseluruhan?

3. Bagaimana kesesuaian hasil eksperimen dengan hasil teoritisnya, penaksir mana yang lebih baik?

Tujuan Eksperimen

Eksperimen ini bertujuan untuk:

1. Membandingkan penaksir-penaksir terhadap parameter β dan σ^2 yang dihasilkan oleh metoda OLS dan GLS, baik antar penaksir maupun dengan nilai yang sebenarnya, baik untuk Ψ yang diketahui maupun yang tidak diketahui.

2. Mengetahui proporsi hipotesa yang tertolak untuk masing - masing hipotesa, yaitu untuk masing-masing parameter β_i, untuk suatu pembatas dan penampilan model secara keseluruhan.

3. Mengatahui kesesuaian hasil eksperimen dengan hasil teoritisnya, yaitu mengetahui penaksir mana yang lebih baik.

Metoda Eksperimen

Metoda yang akan digunakan pada eksperimen ini adalah metoda literatur dengan menggunakan data-data eksperimental. Kemudian dilakukan kalkulasi estimasi terhadap beberapa parameter dengan beberapa metoda pendekatan dan bantuan komputer dengan menggunakan pemrograman komputer. Dilanjutkan dengan melakukan pengujian hipotesa dan membandingkan semua hasil eksperimennya dengan hasil teori. Model regresi yang digunakan untuk eksperimen adalah model statistik linier umum dengan tiga variabel bebas X yang masing-masing berukuran 30x3 dan vektor error e berukuran 30x1 yang diambil secara acak dari komputer dengan asumsi e berdistribusi $N\ (0, \sigma^2\Psi)$.

UNIVERSITAS ISLAM NEGERI MALANG
FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
JURUSAN MATEMATIKA
Jl. Gajayana 50 Malang Tlp. (0341) 551354 Faks (0341) 558933

SATUAN ACARA PERKULIAHAN

Mata Kuliah : Ekonometri
Dosen Pembina : Abdul Aziz, M.Si
Semester : VII (tujuh)
SKS : 2 SKS
Waktu : 4 x pertemuan @100 menit

A. Kemampuan Dasar

Mahasiswa mengetahui, dan memahami konsep model statistik nonlinier, serta estimasi parameter-parameter pada model statistik nonlinier umum dengan menggunakan estimasi least square dan maximum likelihood.

B. Hasil Belajar

Mahasiswa terampil menggunakan data hmodel statistik nonlinier, serta terampil melakukan estimasi parameter-parameter pada model statistik nonlinier umum dengan menggunakan estimasi least square dan maximum likelihood.

C. Indikator Hasil Belajar

1. Mahasiswa dapat melakukan estimasi parameter pada model statistik nonlinier dengan estimasi least square.
2. Mahasiswa dapat melakukan estimasi parameter pada model statistik nonlinier dengan estimasi maximum likelihood.

D. Materi Pokok

4.1. Model Statistik Nonlinier
4.2. Kuadrat Terkecil Nonlinier
4.2.1 Iterasi Gauss-Newton
4.2.2 Iterasi Newton-Raphson
4.3. Maximum Likelihood Nonlinier
4.3.1 Iterasi Newton-Raphson
4.3.2 Iterasi BHHH

E. Pengalaman Belajar

1. Mendengarkan penjelasan dosen di kelas.
2. Menganalisa penurunan rumus.
3. Memperhatikan pembahasan contoh soal dari pengajar.
4. Tanya jawab di kelas.
5. Melakukan praktikum eksperimen secara berkelompok.
6. Mengerjakan soal latihan secara individu.

F. Media

1. Papan tulis
2. Overhead Proyektor + komputer
3. Buku Pegangan Kuliah

G. Evaluasi

1. Tugas Praktikum Kelompok
2. Tugas Individu
3. Keaktifan (Tanya Jawab)

H. Skenario Pembelajaran

a. Kegiatan Awal

1. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang model statistik nonlinier.
2. Pengajar berdiskusi dengan mahasiswa tentang estimasi parameter pada model statistik nonlinier.

b. Kegiatan Inti

1. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus iterasi Least Square Gauss-Newton.
2. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus iterasi Least Square Newton -Raphson.
3. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus iterasi Maximum Likelihood Newton -Raphson.
4. Pengajar bersama-sama mahasiswa menganalisa penurunan rumus iterasi Maximum Likelihood BHHH.

c. Kegiatan Akhir

1. Pengajar memberikan pertanyaan tentang perbandingan Model Statistik Nonlinier dengan Linier.

2. Pengajar memberikan pertanyaan tentang perbandingan iterasi Least Square dan Maximum Likelihood.

3. Pengajar memberikan tugas kepada mahasiswa untuk mencari kasus baru untuk melakukan estimasi parameter dengan model Statistik Nonlinier dengan estimasi iterasi least square dan maximum likelihood.

4. Pengajar memberikan tugas kepada mahasiswa untuk melakukan analisa hasil estimasi parameter untuk model Statistik Nonlinier dengan estimasi iterasi least square dan maximum likelihood.

Bab 4

MODEL STATISTIK NONLINIER

4.1 Model Statistik Nonlinier

Bentuk umum dari model statistik nonlinier adalah

$$\mathrm{y} = \mathrm{f}\,(\mathrm{X},\beta) + \mathrm{e} \tag{4.1}$$

dengan $e \backsim N\left(0, \sigma^2 I_T\right)$. Atau, dapat ditulis sebagai

$$y_t = f\left(x_t, \beta\right) + e_t \tag{4.2}$$

dengan $\mathrm{e}_t \backsim$i.i.d $\mathrm{N}(0, \sigma^2)$. Akibatnya, $\mathrm{y}_t \backsim$i.i.d $\mathrm{N}(\mathrm{f}\,(\mathrm{X}_t, \beta)\,, \sigma^2)$ dengan $f\,(x_t,\beta)$, yaitu fungsi nonlinier dalam parameter β dan $e \backsim N\left(0, \sigma^2 I_T\right)$.

Ada dua cara untuk menaksir β pada model statistik nonlinier, yaitu dengan metoda *nonlinear least square* dan *maximum likelihood*.

4.2 Kuadrat Terkecil Nonlinier

Ada dua cara untuk menaksir β dengan metode *nonlinear least square*, yaitu

1. f(X,β) diaproksimasi dengan deret *Taylor* orde 1
2. $\mathrm{S}(\beta) = \left(\mathrm{y} - \mathrm{f}\,(\mathrm{X},\beta)\right)'\left(\mathrm{y} - \mathrm{f}\,(\mathrm{X},\beta)\right)$ diaproksimasi dengan deret Taylor orde 2

Cara penaksiran pertama dikenal sebagai iterasi Gauss Newton, sedangkan cara penaksiran kedua dikenal sevagai iterasi Newton Raphson. Secara umum, iterasi untuk mendapatkan taksiran β dengan nonlinear least square dapat ditulis dengan

$$\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} - t_n P_n \gamma_n \tag{4.3}$$

Beberapa iterasi yang dikenal adalah

1. *Gauss Newton*

$$t_n = \frac{1}{2},\ P_n = \left(Z\left(\beta^{(n)}\right)' Z\left(\beta^{(n)}\right) \right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial S}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.4}$$

2. *Newton Raphson*

$$t_n = 1,\ P_n = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial S}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.5}$$

3. *Steepest Descent*

$$t_n \text{ bervariasi},\ P_n = I_K,\ \gamma_n = \frac{\partial S}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.6}$$

4. *Marquardt-Levenberg*

$$t_n \text{ bervariasi, } P_n = \left(Z\left(\beta^{(n)}\right)' Z\left(\beta^{(n)}\right) + \lambda_n I_K \right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial S}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.7}$$

5. *Quadratic Hill Climbing*

$$t_n \text{ bervariasi, } P_n = \left(\frac{\partial^2 S}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(n)}} + \lambda_n I_K \right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial S}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.8}$$

4.2.1 Iterasi Gauss Newton

Aproksimasi $f(X,\beta)$ di sekitar *initial values* $\beta^{(1)}$ dilakukan dengan menggunakan deret *Taylor* orde 1, yaitu

$$\begin{aligned} f(X,\beta) &= f\left(X,\beta^{(1)}\right) + \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \\ &= f\left(X,\beta^{(1)}\right) + \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \beta - \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \beta^{(1)} \end{aligned} \tag{4.9}$$

Misalkan $\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} = Z\left(\beta^{(1)}\right)$. Maka

$$
\begin{aligned}
y &= f(X,\beta) + e \\
&= f\left(X,\beta^{(1)}\right) + \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\beta - \frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\beta^{(1)} + e \\
&= f\left(X,\beta^{(1)}\right) + Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta - Z\left(\beta^{(1)}\right)\beta^{(1)} + e \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

atau

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y} - \mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(1)}\right) + \mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)\beta^{(1)} &= \mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)\beta + \mathrm{e} \\
\bar{\mathrm{y}}\left(\beta^{(1)}\right) &= \mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)\beta + \mathrm{e} \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

Bentuk persamaan (4.11) dikenal sebagai model *pseudo-linier*. Dari bentuk ini, β dapat ditaksir dengan metoda *least squares*, diperoleh

$$
\begin{aligned}
\beta^{(2)} &= \left(\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)'\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)'\bar{\mathrm{y}}\left(\beta^{(1)}\right) \\
&= \left(\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)'\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)'\left(\mathrm{y} - \mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(1)}\right) + \mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)\beta^{(1)}\right) \\
&= \beta^{(1)} + \left(\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)'\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)\right)^{-1}\mathrm{Z}\left(\beta^{(1)}\right)'\left(\mathrm{y} - \mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(1)}\right)\right) \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

Aproksimasi f(X,β) di sekitar $\beta^{(2)}$ adalah

$$
\begin{aligned}
\mathrm{f}(\mathrm{X},\beta) &= \mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(2)}\right) + \frac{\partial \mathrm{f}(\mathrm{X},\beta)}{\partial \beta'}|_{\beta=\beta^{(2)}}\left(\beta - \beta^{(2)}\right) \\
&= \mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(2)}\right) + \mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta - \mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta^{(2)} \qquad (4.13)
\end{aligned}
$$

Maka

$$
\begin{aligned}
\mathrm{y} &= \mathrm{f}(\mathrm{X},\beta) + \mathrm{e} \\
&= \mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(2)}\right) + \mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta - \mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta^{(2)} + \mathrm{e} \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

atau

$$\begin{aligned}
\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(2)}\right)+\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta^{(2)} &= \mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta+\mathrm{e} \\
\bar{\mathrm{y}}\left(\beta^{(2)}\right) &= \mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta+\mathrm{e} \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

Dari bentuk persamaan(4.15), taksir kembali β dengan metoda *least squares*, diperoleh

$$\begin{aligned}
\beta^{(3)} &= \left(\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)'\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\right)^{-1}\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)'\bar{\mathrm{y}}\left(\beta^{(2)}\right) \\
&= \left(\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)'\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\right)^{-1}\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(2)}\right)+\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\beta^{(2)}\right) \\
&= \beta^{(2)}+\left(\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)'\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)\right)^{-1}\mathrm{Z}\left(\beta^{(2)}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(2)}\right)\right) \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Sehingga, secara umum diperoleh iterasi sebagai berikut

$$\beta^{(n+1)}=\beta^{(n)}+\left(\mathrm{Z}\left(\beta^{(n)}\right)'\mathrm{Z}\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1}\mathrm{Z}\left(\beta^{(n)}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(n)}\right)\right) \qquad (4.17)$$

Bila iterasi tersebut sudah konvergen, yaitu

$$\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}=\beta^{(n+1)}\approx\beta^{(n)} \qquad (4.18)$$

maka akan diperoleh

$$\mathrm{Z}\left(\beta^{(n)}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(n)}\right)\right)=0 \qquad (4.19)$$

atau

$$Z\left(\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\right)\right)=0 \qquad (4.20)$$

Persamaan terakhir ini memenuhi *first order condition* (FOC) dari masalah $\min_{\beta}\left(\mathrm{S}\left(\beta\right)\right)$.

Ini ditunjukkan bahwa

$$\frac{\partial\mathrm{S}}{\partial\beta}=-2\frac{\partial\mathrm{f}'}{\partial\beta}|\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\right)\right)=0 \qquad (4.21)$$

Atau

$$\mathrm{Z}\left(\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\right)\right)=0 \tag{4.22}$$

Jadi, bila

$$\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}=\beta^{(n+1)}\approx\beta^{(n)} \tag{4.23}$$

itu berarti FOC dari upaya untuk meminimumkan *sum of square* S(β) sudah terpenuhi dan

$$\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\beta}=-2\mathrm{Z}\left(\beta\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta\right)\right) \tag{4.24}$$

atau

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\beta} &= \mathrm{Z}\left(\beta\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta\right)\right)\\ -\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\beta}|_{\beta^{(n)}} &= \mathrm{Z}\left(\beta^{(n)}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\beta^{(n)}\right)\right)\end{aligned} \tag{4.25}$$

Maka

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial\beta}|_{\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}}=\mathrm{Z}\left(\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\right)'\left(\mathrm{y}-\mathrm{f}\left(\mathrm{X},\hat{\beta}_{\mathrm{NLS}}\right)\right) \tag{4.26}$$

Jadi iterasi umum diatas dapat ditulis menjadi

$$\beta^{(n+1)}=\beta^{(n)}-\frac{1}{2}\left(Z\left(\beta^{(n)}\right)'Z\left(\beta^{(n)}\right)\right)^{-1}\frac{\partial S\left(\beta\right)}{\partial\beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.27}$$

Iterasi inilah yang dikenal sebagai iterasi *Gauss Newton*.

4.2.2 Iterasi Newton Raphson

Aproksimasi $\mathrm{S}(\beta)$ di sekitar $\beta^{(1)}$ dilakukan dengan menggunakan deret *Taylor* orde 2, yaitu

$$\mathrm{S}\left(\beta\right)=\mathrm{S}\left(\beta^{(1)}\right)+\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\left(\beta-\beta^{(1)}\right) \tag{4.28}$$

Perhatikan

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{S}\left(\beta\right)}{\partial \beta} &= 0+\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)'+2.\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\left(\beta-\beta^{(1)}\right)\\ &= \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)'+\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\left(\beta^{(2)}-\beta^{(1)}\right)=0 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Karena

$$\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)'=\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} \tag{4.30}$$

maka

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)'+\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\left(\beta^{(2)}-\beta^{(1)}\right) &= 0\\ \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}}+\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\left(\beta^{(2)}-\beta^{(1)}\right) &= 0\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} &= -\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\left(\beta^{(2)}-\beta^{(1)}\right)\\ \beta^{(2)} &= \beta^{(1)}-\left(\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)^{-1}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}}\end{aligned} \tag{4.32}$$

dengan syarat $\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}$ harus merupakan matriks positif definit agar $\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}$ mempunyai invers.

Secara umum, iterasi yang akan diperoleh adalah

$$\beta^{(n+1)}=\beta^{(n)}-\left(\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.33}$$

Bila iterasi sudah konvergen, yaitu

$$\beta^{(n+1)}=\beta^{(n)} \tag{4.34}$$

maka FOC dari masalah $\min_{\beta}\left(\mathrm{S}\left(\beta\right)\right)$ sudah dipenuhi. Iterasi inilah yang dikenal sebagai iterasi *Newton Raphson* untuk nonlinear least square.

4.3 Maximum Likelihood Nonlinier

Secara umum, iterasi untuk mendapatkan taksiran β dengan maximum likelihood nonlinier dapat ditulis dengan

$$\beta^{(n+!)} = \beta^{(n)} - \mathrm{t}_n \mathrm{P}_n \gamma_n \tag{4.35}$$

Beberapa iterasi yang dikenal adalah

1. *Newton Raphson*

$$t_n = 1,\ P_n = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}} \right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial L}{\partial\beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.36}$$

2. *Method of scoring*

$$t_n = 1,\ P_n = \left(E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}} \right) \right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial L}{\partial\beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.37}$$

3. *Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH)*

$$t_n = 1,\ P_n = -\left(Z^*\left(\beta^{(n)}\right)' Z^*\left(\beta^{(n)}\right) \right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial\beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.38}$$

4. *Modified BHHH*

$$t_n \text{ bervariasi},\ P_n = -\left(Z^*\left(\beta^{(n)}\right)' Z^*\left(\beta^{(n)}\right) + \lambda_n I_K \right)^{-1},\ \gamma_n = \frac{\partial L}{\partial\beta}|_{\beta^{(n)}} \tag{4.39}$$

4.3.1 Iterasi Newton Raphson

Fungsi distribusi peluang (pdf) dari y_t diberikan oleh X_t, β dan σ^2 adalah

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\mathrm{y}_t - \mathrm{f}\left(\mathrm{X}_t, \beta\right)\right)^2 \right) \tag{4.40}$$

Likelihood function dari β dan σ^2 diberikan oleh y_t dan X_t adalah

$$\mathrm{l}_t\left(\beta, \sigma^2\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \left(\mathrm{y}_t - \mathrm{f}\left(\mathrm{X}_t, \beta\right)\right)^2 \right) \tag{4.41}$$

Log likelihood function dari β dan σ^2 diberikan oleh y_t dan X_t adalah

$$\ln\ \mathrm{l}_t = \mathrm{L}_t = -\frac{1}{2}\left(\ln\left(2\pi\right) + \ln\left(\sigma^2\right)\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\mathrm{y}_t - \mathrm{f}\left(\mathrm{X}_t, \beta\right)\right)^2 \tag{4.42}$$

P.d.f gabungan dari $(\mathrm{y}_1, ..., \mathrm{y}_T)$ diberikan oleh X,β dan σ^2 adalah

$$\begin{aligned}
\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_1, ..., \mathrm{y}_T | \mathrm{X},\beta, \sigma^2\right) &= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\mathrm{T}/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{y}_t - \mathrm{f}\left(\mathrm{X}_t, \beta\right)\right)^2\right) \\
&= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\mathrm{T}/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mathrm{y} - \mathrm{f}\left(\mathrm{X}, \beta\right)\right)'\left(\mathrm{y} - \mathrm{f}\left(\mathrm{X}, \beta\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Likelihood function dari β dan σ^2 diberikan X dan y adalah

$$\mathrm{l}\left(\beta, \sigma^2\right) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-\mathrm{T}/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mathrm{y} - \mathrm{f}\left(\mathrm{X}, \beta\right)\right)'\left(\mathrm{y} - \mathrm{f}\left(\mathrm{X}, \beta\right)\right)\right) \tag{4.43}$$

dan log likelihood function dari β dan σ^2 diberikan oleh X dan y adalah

$$\begin{aligned}
\mathrm{L} &= \Sigma_{\mathrm{t}=1}^{\mathrm{T}}\mathrm{L}_t \\
&= \ln \mathrm{l}\left(\beta, \sigma^2\right) \\
&= -\frac{\mathrm{T}}{2}\left(\ln\left(2\pi\right) + \ln\left(\sigma^2\right)\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\left(\mathrm{y} - \mathrm{f}\left(\mathrm{X}, \beta\right)\right)'\left(\mathrm{y} - \mathrm{f}\left(\mathrm{X}, \beta\right)\right) \\
&= -\frac{\mathrm{T}}{2}\left(\ln\left(2\pi\right) + \ln\left(\sigma^2\right)\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\mathrm{S}\left(\beta\right) \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

Maka

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \sigma^2} = \frac{\mathrm{T}}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\mathrm{S}\left(\beta\right) \tag{4.45}$$

Menyamakannya dengan nol akan diperoleh

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\mathrm{S}\left(\beta\right)}{\mathrm{T}} \tag{4.46}$$

Sekarang L dapat ditulis menjadi

$$\begin{aligned}
\mathrm{L}\left(\beta\right) &= \mathrm{L} = -\frac{\mathrm{T}}{2}\left(\ln\left(2\pi\right) + \ln\left(\frac{\mathrm{S}\left(\beta\right)}{\mathrm{T}}\right)\right) - \frac{1}{2\left(\frac{\mathrm{S}(\beta)}{\mathrm{T}}\right)}\mathrm{S}\left(\beta\right) \\
&= -\frac{\mathrm{T}}{2}\left(\ln\left(2\pi\right) + \ln\left(\frac{\mathrm{S}\left(\beta\right)}{\mathrm{T}}\right)\right) - \frac{\mathrm{T}}{2} \qquad (4.47)
\end{aligned}$$

Aproksimasi $\mathrm{L}(\beta)$ di sekitar $\beta^{(1)}$ dengan deret Taylor orde 2, yaitu

$$\mathrm{L}(\beta) = \mathrm{L}\left(\beta^{(1)}\right) + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) + \frac{1}{2}\left(\beta - \beta^{(1)}\right)' \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \tag{4.48}$$

Diperoleh

$$\frac{\partial \mathrm{L}(\beta)}{\partial \beta} = \left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)' + \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \tag{4.49}$$

Karena

$$\left(\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)' = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} \tag{4.50}$$

maka

$$\frac{\partial \mathrm{L}(\beta)}{\partial \beta} = \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} + \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta - \beta^{(1)}\right) \tag{4.51}$$

Menyamakannya dengan nol akan diperoleh

$$\frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} + \frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}} \left(\beta^{(2)} - \beta^{(1)}\right) = 0 \tag{4.52}$$

atau

$$\beta^{(2)} = \beta^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(1)}}\right)^{-1} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta}|_{\beta^{(1)}} \tag{4.53}$$

Pada umumnya diperoleh iterasi

$$\begin{aligned}
\beta^{(n+1)} &= \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}} \\
&= \beta^{(n)} - \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1} \left(-\frac{1}{2\sigma^2}\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}}\right) \\
&= \beta^{(n)} - \left(\frac{\partial^2 \mathrm{S}}{\partial \beta \partial \beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial \mathrm{S}}{\partial \beta}|_{\beta^{(n)}}\right)
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Iterasi inilah yang dikenal sebagai iterasi *Newton Raphson* untuk *nonlinear maximum likelihood.*

4.3.2 Iterasi Berndt-Hall-Hall-Hausman (BHHH)

Iterasi BHHH diturunkan dari *Method of Scoring*, yaitu

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_n &= \left(\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1} \\ &= \left(\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}} \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1} \\ &= \left(\mathrm{E}\left(\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1} \end{aligned} \tag{4.55}$$

Pandang kembali pdf dari y_t yang diberikan oleh X_t, β dan σ^2 yaitu

$$\begin{aligned} \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\mathrm{y}_t - \mathrm{f}\left(\mathrm{X}_t, \beta\right)\right)^2\right) \\ &= \mathrm{l}_t\left(\beta, \sigma^2\right) \end{aligned} \tag{4.56}$$

Dengan menggunakan sifat dari pdf, yaitu bahwa

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)\ \mathrm{dy}_t = 1 \tag{4.57}$$

maka

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)\ \mathrm{dy}_t = 0 \tag{4.58}$$

atau

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}{\partial\beta}\ \mathrm{dy}_t &= 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}{\partial\beta} \frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}{\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}\ \mathrm{dy}_t &= 0 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Perhatikan

$$\mathrm{l}_t\left(\beta, \sigma^2\right) = \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right) \tag{4.60}$$

dan

$$\mathrm{L}_t = \log\ \mathrm{l}_t\left(\beta, \sigma^2\right) = \log \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t|\mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right) \tag{4.61}$$

Maka

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta} &= \frac{1}{\mathrm{l}_t\left(\beta, \sigma^2\right)} \frac{\partial \mathrm{l}_t\left(\beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta} \\ &= \frac{1}{\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)} \frac{\partial \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta} \end{aligned} \tag{4.62}$$

atau

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta} &= \frac{\partial \log \mathrm{l}_t}{\partial \beta} \\ &= \frac{\partial \log \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta} \end{aligned} \tag{4.63}$$

Dari

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta} \frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}{\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}\ \mathrm{dy}_t = 0 \tag{4.64}$$

maka

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta} \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)\ \mathrm{dy}_t = 0 \tag{4.65}$$

Dengan melakukan turunan parsial pertama terhadap β' dan menyamakannya dengan nol, yaitu

$$\frac{\partial}{\partial \beta'}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta} \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)\ \mathrm{dy}_t\right) = 0 \tag{4.66}$$

akan diperoleh

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial \beta \partial \beta'} \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right) + \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta} \frac{\partial \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta'}\right)\ \mathrm{dy}_t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial \beta \partial \beta'} \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right) + \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta} \frac{\partial \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}{\partial \beta'} \frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}{\mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)}\right)\ \mathrm{dy}_t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial \beta \partial \beta'} \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right) + \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta} \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta'} \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)\right)\ \mathrm{dy}_t \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial \beta \partial \beta'} + \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta} \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta'}\right) \mathrm{f}\left(\mathrm{y}_t | \mathrm{X}_t, \beta, \sigma^2\right)\right)\ \mathrm{dy}_t \\ &= \mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial \beta \partial \beta'} + \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta} \frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta'}\right) \end{aligned} \tag{4.67}$$

Atau

$$\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}\right) = -\mathrm{E}\left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'}\right) \tag{4.68}$$

Berdasarkan hukum bilangan besar, taksiran untuk $\mathrm{E}\left(\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}\right)$ adalah

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'} \tag{4.69}$$

sedangkan taksiran untuk $\mathrm{E}\left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'}\right)$ adalah

$$\frac{1}{\mathrm{T}}\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'} \tag{4.70}$$

Dengan demikian

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{T}}\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'} &= -\frac{1}{\mathrm{T}}\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'}\\
\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'} &= -\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'}\\
&= -\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta}\left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta}\right)'\\
&= -\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'}\right)'\left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'}\right)
\end{aligned} \tag{4.71}$$

Perhatikan kembali

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_n &= \left(\mathrm{E}\left(\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1}\\
&= \left(\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{E}\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1}\\
&= \left(\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{\mathrm{T}}\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1}\\
&= \left(\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 \mathrm{L}_t}{\partial\beta\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)^{-1}\\
&= -\left(\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}}\left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)'\left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial\beta'}|_{\beta^{(n)}}\right)\right)^{-1}
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Diperoleh iterasi BHHH yang berbentuk

$$
\begin{aligned}
\beta^{(n+!)} &= \beta^{(n)} - \mathrm{t}_n \mathrm{P}_n \gamma_n \\
&= \beta^{(n)} + \left(\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta'} |_{\beta^{(n)}} \right)' \left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta'} |_{\beta^{(n)}} \right) \right)^{-1} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta} | \beta^{(n)} \\
&= \beta^{(n)} + \left(\Sigma_{\mathrm{t=1}}^{\mathrm{T}} \left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta'} |_{\beta^{(n)}} \right)' \left(\frac{\partial \mathrm{L}_t}{\partial \beta'} |_{\beta^{(n)}} \right) \right)^{-1} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta} | \beta^{(n)} \\
&= \beta^{(n)} + \left(\mathrm{Z}^* \left(\beta^{(n)} \right)' \mathrm{Z}^* \left(\beta^{(n)} \right) \right)^{-1} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta} | \beta^{(n)} \qquad (4.73)
\end{aligned}
$$

dengan

$$
Z^* \left(\beta^{(n)} \right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{L}_1}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial \mathrm{L}_1}{\partial \beta_K} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathrm{L}_\mathrm{T}}{\partial \beta_1} & \cdots & \frac{\partial \mathrm{L}_\mathrm{T}}{\partial \beta_K} \end{pmatrix} \qquad (4.74)
$$

Iterasi BHHH ini dapat dimodifikasi (Modified BHHH) menjadi

$$
\beta^{(n+1)} = \beta^{(n)} + \left(\mathrm{Z}^* \left(\beta^{(n)} \right)' \mathrm{Z}^* \left(\beta^{(n)} \right) + \lambda_n \mathrm{I}_\mathrm{K} \right)^{-1} \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial \beta} | \beta^{(n)} \qquad (4.75)
$$

4.4 Tugas Eksperimen

Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang tersebut, maka pada eksperimen ini kami merumuskan beberapa permasalahan, yaitu

1. Bagaimana hasil penaksiran parameter-parameter yang dilakukan dengan iterasi *Gauss-Newton* dan *Marquardt-Levenberg* pada LSE untuk model fungsi produksi CD dan CES ?

2. Bagaimana hasil penaksiran parameter-parameter yang dilakukan dengan iterasi BHHH dan *Modified* BHHH pada MLE untuk model fungsi produksi CD dan CES ?

3. Model fungsi produksi mana yang lebih sesuai (paling cocok) dengan data sampel yang diberikan ?

Tujuan Eksperimen

Eksperimen ini bertujuan untuk

1. Mengetahui hasil penaksiran parameter-parameter yang dilakukan dengan iterasi *Gauss-Newton* dan *Marquardt-Levenberg* pada LSE untuk model fungsi produksi CD dan CES.

2. Mengetahui hasil penaksiran parameter-parameter yang dilakukan dengan iterasi BHHH dan *Modified* BHHH pada MLE untuk model fungsi produksi CD dan CES.

3. Mengetahui model fungsi produksi mana yang lebih sesuai (paling cocok) dengan data sampel yang diberikan.

Metoda Eksperimen

Metoda yang akan digunakan pada eksperimen ini adalah metoda literatur dengan menggunakan data-data eksperimental. Kemudian dilakukan kalkulasi estimasi terhadap beberapa parameter dengan beberapa metoda penaksiran LSE dan MLE, yang dilakukan dengan perhitungan iterasi dengan menggunakan pemrograman komputer, hingga diperoleh suatu nilai yang konvergen. Dilanjutkan dengan melakukan perhitungan data AIC dan/atau SC untuk nilai yang konvergen dari masing-masing iterasi. Dari hasil perhitungan akhir ini dapat ditentukan model fungsi produksi mana yang lebih sesuai (paling cocok) untuk data sampel tersebut.

Prosedur Eksperimen

Dalam melakukan eksperimen ini, kami menyusun beberapa langkah prosedur yang dilakukan dari awal hinga akhir eksperimen, yaitu

1. Pendekatan teori sampel dan regresi untuk estimasi dan inferensi, khususnya model regresi statistik nonlinier umum. Hal ini dilakukan sebagai bekal awal pengetahuan teoretis dalam melakukan eksperimen.

2. Menentukan data-data sampel untuk variabel L dan K, yaitu data untuk variabel bebas X yang berukuran 30x2, dan data sampel Q, yaitu data untuk variabel tak bebas y yang berukuran 30x1.Data-data sampel ini dibuat dalam bentuk matriks LKy yang berukuran 30x3.

3. Melakukan penaksiran parameter-parameter dengan metoda *Nonlinear Least Square Estimator.*

4. Menentukan nilai awal (*initial values*) untuk parameter-parameter β, dimana nilai awal ini disesuaikan untuk setiap model iterasi untuk memperoleh kekonvergenan, dengan selisih nilai sebesar 10^{-9}.

5. Melakukan perhitungan iterasi untuk parameter-parameter β dan perhitungan iterasi untuk nilai S hingga diperoleh suatu nilai yang konvergen untuk keduanya, dengan model iterasi yang digunakan adalah *Gauss-Newton* dan *Marquardt-Levenberg* , keduanya digunakan untuk model fungsi produksi CD dan CES.

6. Melakukan perulangan penaksiran dengan metoda *Nonlinear Maximum Likelihod Estimator.*

7. Menentukan nilai awal (*initial values*) untuk parameter-parameter β, dimana nilai awal ini disesuaikan untuk setiap model iterasi untuk memperoleh kekonvergenan, dengan selisih nilai sebesar 10^{-10}.

8. Melakukan perhitungan iterasi untuk parameter-parameter β dan perhitungan iterasi untuk nilai L hingga diperoleh suatu nilai yang konvergen untuk keduanya, dengan model iterasi yang digunakan adalah BHHH dan *Modified* BHHH, keduanya untuk model fungsi produksi CD dan CES.

9. Menghitung nilai AIC dan SC pada nilai konvergen yang dihasilkan dari perhitungan iterasi.

10. Membandingkan nilai-nilai konvergen dan nilai AIC dan SC yang dihasilkan oleh iterasi BHHH dan *Modified* BHHH, keduanya untuk model fungsi produksi CD dan CES.

11. Menentukan model fungsi produksi mana yang lebih sesuai (paling cocok) untuk data sampel yang diberikan, dengan perbandingan nilai AIC dan SC.

12. Mengamati dan menganalisa hasil eksperimen.

13. Menyusun laporan.

Daftar Pustaka

[1] Aziz, Abdul, Ekonometrika, Teori Analisis Matematis dilengkapi Eksperimen dengan Matlab, Jakarta: Prestasi Pelajar , 2007.

[2] Bibby, John, Prediction And Improcved Estimation In lInear Models, John Wiley & Sons, 1979.

[3] Gujarati, D., Basic Econometrics, McGraw-Hill, Inc., 1978

[4] Greene, William.H, Econometrics Analysis, Macmillan, Inc., 1995

[5] Hamilton, D.J., Time Series Analysis, Princeton University Press, New Jersey, 1994.

[6] Hogg & Craig, Introduction to Mathematical Statistics, Macmillan, Inc., 1978.

[7] Judge, G.G., et.al., The Theory and Practice of Econometrics, John Wiley & Sons, Inc., 1985.

[8] Judge, G.G., et.al., Introduction to Theory and Practice of Econometrics, John Wiley & Sons, Inc., 1988.

[9] Netter, J., et.al., Applied Linear Statistical Models, Richard D.Irwin, Inc., 1990.

[10] Wonnacot, J.R. & Thomas Wonnacott, Econometrics, John Wiley and Sons, Inc., 1979.

[11] Walpole &Myers, Probability and Statistics for Engineers and Scientists, Macmillan Inc., 1989.