SISTEMI e MODELLI

Prof. Laura Giarré

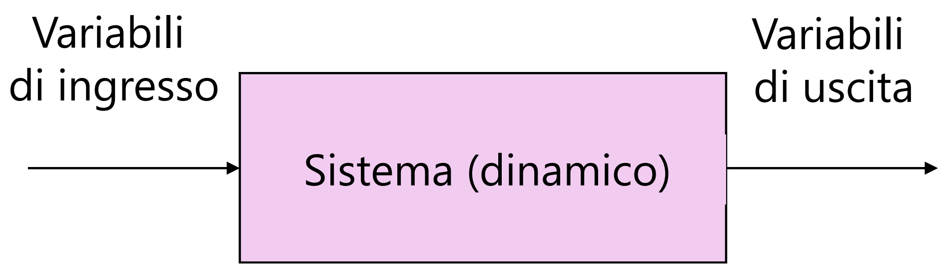
Laura.Giarre@UNIMORE.IT

https://giarre.wordpress.com/ca/

Sistemi e Modelli - Dal sistema ad un modello

- **Sistema:**

  insieme, isolato artificialmente dal contesto, costituito da più parti tra loro interagenti di cui si vuole indagare il comportamento



Variabili di ingresso: azioni compiute sul sistema da agenti esterni che ne influenzano il comportamento

variabili di uscita: grandezze del sistema in esame che, per qualche ragione, sono di interesse

Rapporto causa-effetto tra le variabili

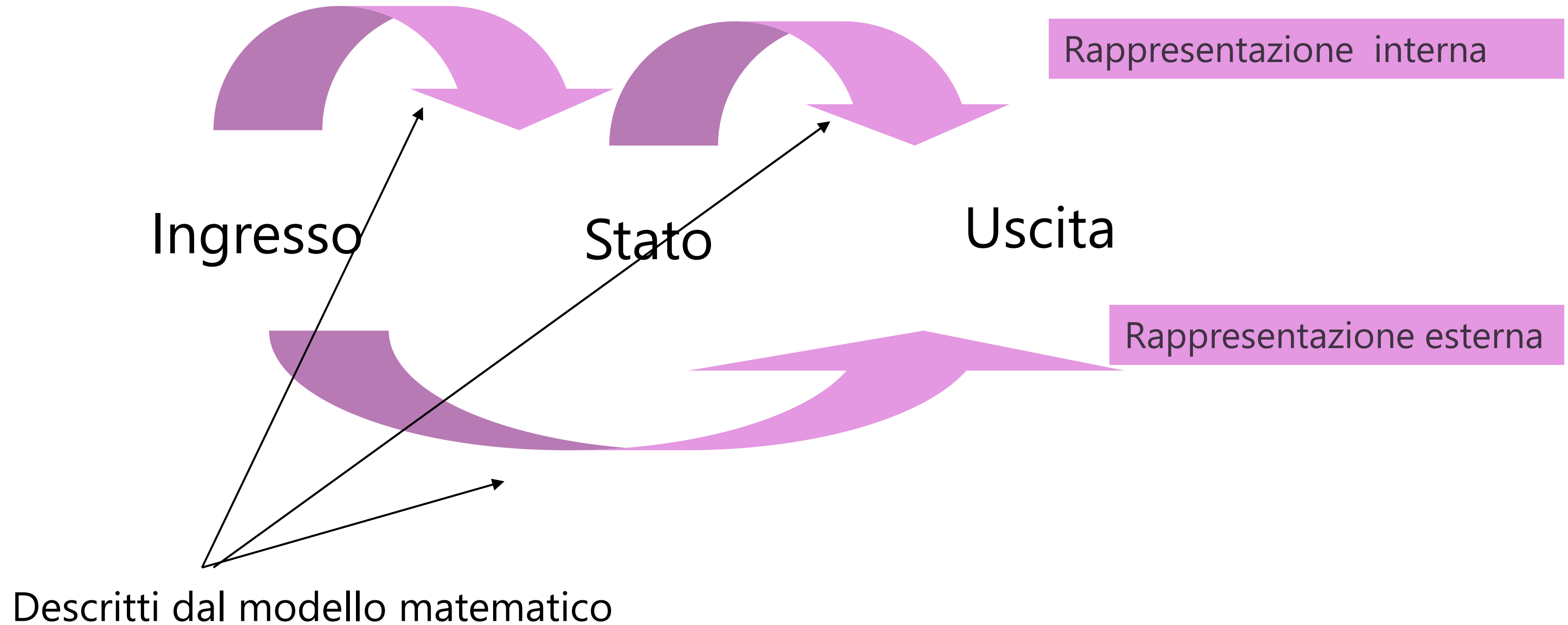
Sistemi e Modelli - Dal sistema ad un modello

- **Sistema statico/dinamico**
  - modello matematico dei sistemi statici
    - equazioni algebriche (sistemi privi di memoria)
      - l'uscita del sistema dipende solo dal valore assunto dall'ingresso in quell'istante
      - es: relazione tra tensione e corrente in un resistore
  - modello dei sistemi dinamici *(a parametri concentrati)*
    - equazioni differenziali (sistemi con memoria)
      - l'uscita del sistema non dipende solo dal valore assunto dall'ingresso in quell'istante, ma anche da quelli passati
      - es: relazione tra tensione e corrente in un condensatore

$\Downarrow$

Variabili di stato: variabili che descrivono la "situazione interna" del sistema (determinata dalla storia) necessarie per determinare l'uscita (sono legate alla memoria passata del sistema)

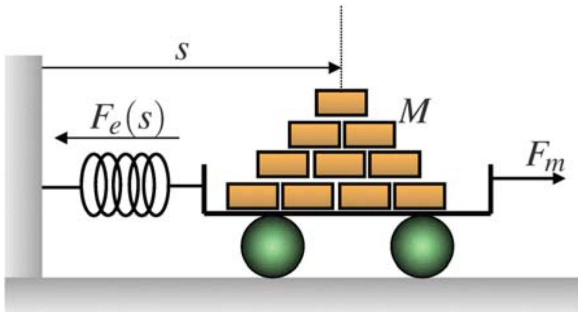
Sistemi e Modelli - Dal sistema ad un modello: Esempi



Sistemi e Modelli - Dal sistema ad un modello

Esempi

Sistema meccanico

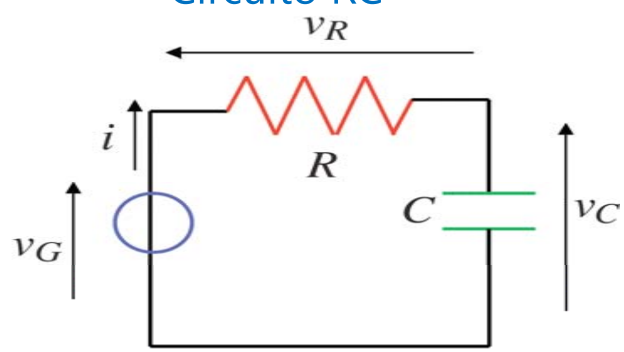


Ingresso: forza motrice F_m

Uscita: posizione del carrello s

Stato: posizione e velocità del carrello

Circuito RC



Ingresso: tensione v_G ai capi del generatore

Uscita: tensione v_R ai capi della resistenza

Stato: tensione v_C ai capi del condensatore

Sistemi e Modelli – Rappresentazione di stato (interna)

Ingresso → Stato → Uscita

- Evoluzione dello stato in funzione dell'ingresso e dello stato:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), u(t), t)$$

Equazione di stato

Derivata dello stato all'istante t

Vettore di stato

Vettore di ingresso

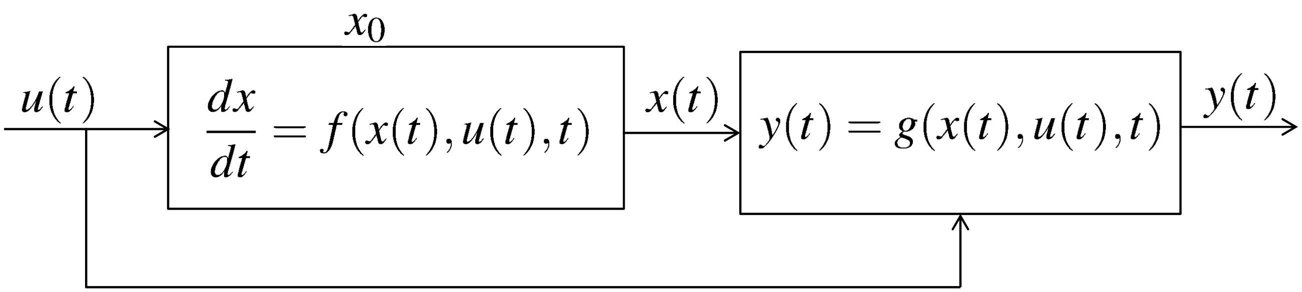
- Dipendenza dell'uscita dall'ingresso e dallo stato

$$y(t) = g(x(t), u(t), t)$$

Vettore di uscita

Dato $x(t_0)$ (valore dello stato all'istante iniziale) e dato $u(t)$, $t \geq t_0$, sotto certe proprietà di regolarità di f( ), allora l'equazione di stato definisce l'andamento di x(t) e y(t).

Sistemi e Modelli – Rappresentazione di stato (interna)



$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{pmatrix} \quad f(x,u,t) = \begin{pmatrix} f_1(x,u,t) \\ f_2(x,u,t) \\ \vdots \\ f_n(x,u,t) \end{pmatrix}$$

$$g(x,u,t) = \begin{pmatrix} g_1(x,u,t) \\ g_2(x,u,t) \\ \vdots \\ g_r(x,u,t) \end{pmatrix}$$

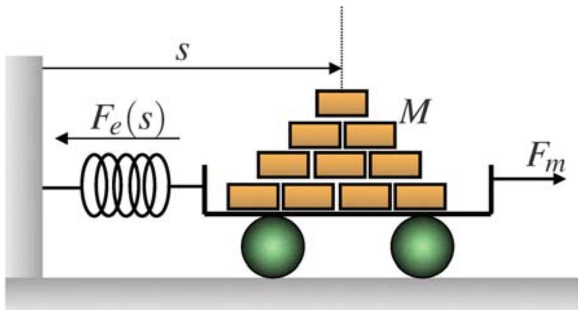
$n =$ Ordine del modello

$m =$ Numero di ingressi

$r =$ Numero di uscite

Sistemi e Modelli – Rappresentazione di stato (interna) - esempio

- Sistema meccanico



Dalla legge di Newton si ha che

$$M\frac{d^2s}{dt^2} = F_m - F_e(s)$$

quindi definendo

$$x := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ \frac{ds}{dt} \end{pmatrix}$$

si ottiene il modello matematico

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{M}(F_m - F_e(x_1)) \\ y = \dot{x}_2 &= \frac{1}{M}(F_m - F_e(x_1)) \end{aligned}$$

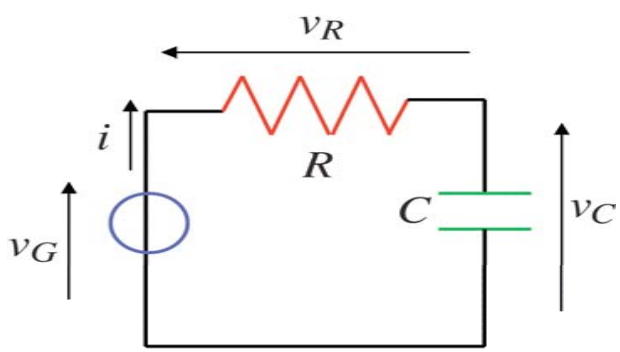
$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) \\ y &= g(x, u) \end{aligned}$$

dove

$$u := F_m \qquad f(x,u) := \begin{pmatrix} x_2 \\ \frac{1}{M}(u - F_e(x_1)) \end{pmatrix} \qquad g(x,u) := \frac{1}{M}(u - F_e(x_1))$$

Sistemi e Modelli – Rappresentazione di stato (interna) - esempio

- Circuito RC



Dalla legge delle tensioni

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t)$$

e sapendo che

$$C\frac{dv_C(t)}{dt} = i(t)$$

$$v_R(t) = Ri(t)$$

si ottiene

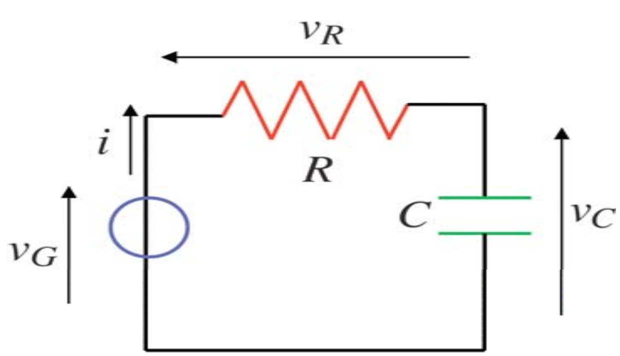
$$\dot{x}(t) = \frac{1}{RC}(u(t) - x(t))$$

$$y(t) = (u(t) - x(t))$$

Avendo posto $u(t) = v_G(t)$, $x(t) = v_C(t)$, $y(t) = v_R(t)$

Sistemi e Modelli – Rappresentazione ingresso-uscita (esterna) - esempio

- Circuito RC



Dalla legge delle tensioni

$$v_R(t) = v_G(t) - v_C(t)$$

e sapendo che

$$v_c(t) = \frac{1}{C}\int i(t)dt$$

$$v_R(t) = Ri(t)$$

si ottiene

$$v_R(t) = v_G(t) - \frac{1}{RC}\int v_R(t)dt$$

ovvero (derivando rispetto a t)

$$\frac{dy(t)}{dt} + \frac{1}{RC}y(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

Avendo posto $u(t) = v_G(t)$, $y(t) = v_R(t)$

Sistemi e Modelli

- statici/dinamici
  - modello matematico dei sistemi statici
    - equazioni algebriche (sistemi privi di memoria)
  - modello dei sistemi dinamici (a parametri concentrati)
    - equazioni differenziali (sistemi con memoria)
- monovariabili/multivariabili (SISO – MIMO)
  - un ingresso-una uscita, più ingressi-più uscite
- lineari/nonlineari
  - le variabili entrano linearmente/non linearmente
- invarianti/tempo varianti
  - le loro caratteristiche sono costanti/variano nel tempo
- a parametri concentrati/distribuiti
  - equazioni differenziali ordinarie/alle derivate parziali

Sistemi e Modelli

Definizione:

- Un modello si dice causale quando l'uscita corrispondente ad una data sollecitazione si manifesta soltanto in istanti non anteriori a quello iniziale di applicazione della sollecitazione
- Un modello non causale si dice anticipativo.
- Un modello anticipativo non può corrispondere ad alcun sistema fisico
  - non è immaginabile un sistema che reagisca ad una sollecitazione ancor prima che questa sia applicata!

Il modello $$y(t) = a\frac{d\,x(t)}{d\,t}$$

è non causale se consideriamo *x* come ingresso ed *y* come uscita (si pensi alla derivata come rapporto incrementale)
$\Rightarrow$ occorrono sia il valore passato che quello futuro della variabile

Non si può costruire un derivatore ideale

è causale se consideriamo *y* come ingresso ed *x* come uscita

$$x(t) = \frac{1}{a}\int_0^t y(\tau)\,d\tau + x_0$$

Modelli non causali sono utilizzati per comodità di analisi e manipolazione e filttraggio

Modelli a parametri concentrati

- Le caratteristiche fisiche dei sistemi dinamici sono *distribuite* nel sistema fisico stesso:
  - \- massa
  - \- elasticità
  - \- resistenza
  - \- …

- Nella descrizione dei modelli dinamici, se possibile, è bene fare delle approssimazioni che permettono di *concentrare* in uno (o pochi) punti tali caratteristiche e quindi ottenere notevoli semplificazioni nelle loro espressioni matematiche. Si hanno i cosiddetti *modelli a parametri concentrati*.

- Nella pratica, anche se è chiaro che tutte le caratteristiche dei sistemi fisici sono *distribuite*, si cerca ove possibile di avere modelli a parametri concentrati.

Modelli a parametri concentrati

- I modelli a parametri concentrati sono espressi da equazioni differenziali ordinarie (tempo continuo) o equazioni alle differenze (tempo discreto), che sono funzioni solo del tempo:

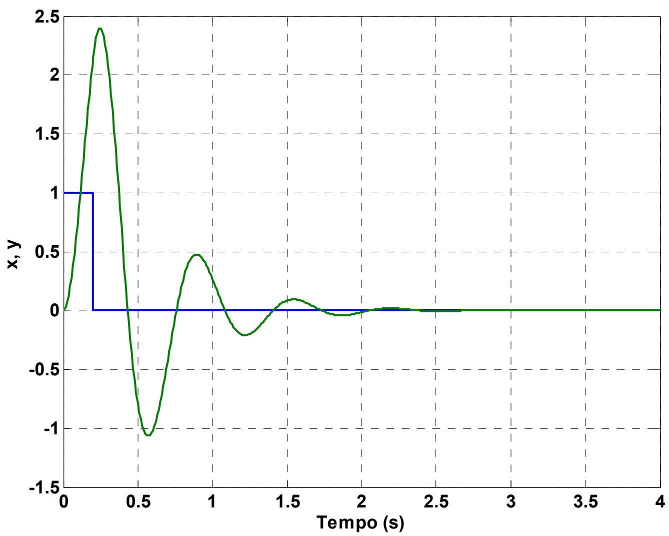
$$
\begin{aligned}
a_m \frac{d^m y}{dt^m} + a_{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dt^{m-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y &= b_n \frac{d^n u}{dt^n} + \ldots + b_0 u \\
a_m y(mT) + a_{m-1} y((m-1)T) + \ldots + a_1 y(T) &= b_n u(nT) + \ldots + b_1 u(T)
\end{aligned}
$$

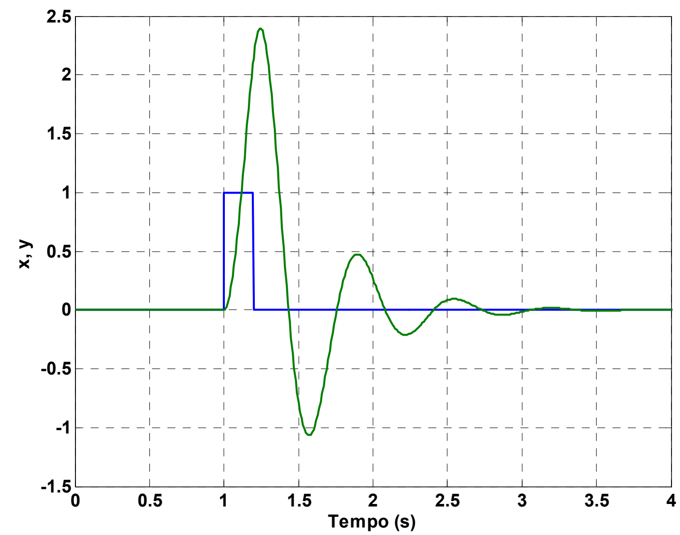
- Se non è possibile considerare come concentrati alcuni dei parametri del modello, allora si deve ricorrere a equazioni alle differenze parziali. Infatti, la dinamica non dipende solo dal tempo ma anche, per esempio, dallo spazio:

$$
a_m \frac{\partial^m y}{\partial t^m} + a_{m-1} \frac{\partial^{m-1} y}{\partial t^{m-1}} + \ldots + a_p \frac{\partial^p y}{\partial x^p} + a_{p-1} \frac{\partial^{p-1} y}{\partial t^{p-1}} + \ldots + a_0 y = b_n \frac{d^n u}{dt^n} + \ldots + b_0 u
$$

Modelli a parametri costanti nel tempo

- Se le proprietà di un dato sistema sono indipendenti dal tempo (costanti), allora i relativi parametri sono costanti. I relativi modelli sono detti *stazionari* o *invarianti*.
- Per tali sistemi si ha la *ripetibilità degli esperimenti*: l'uscita che si ottiene applicando al sistema con un dato stato iniziale x_0 un ingresso al tempo t_0 è uguale (a parte una traslazione nel tempo) a quella che si ottiene (con lo stesso stato iniziale x_0) applicando lo stesso ingresso all'istante $t-\delta$.





Modelli a parametri costanti nel tempo

- Da un punto di vista pratico, è raro che i parametri di un sistema non cambino nel tempo.
- D'altra parte, è sufficiente che essi non varino in modo apprezzabile in un arco temporale confrontabile alla durata dell'esperimento.
- Nei modelli stazionari, non ha importanza l'istante di inizio dell'osservazione, che viene quindi solitamente considerato uguale a zero: $t_0 = 0$

Risposta da stato zero

- In generale, l'uscita $y(t)$ di un sistema dinamico per $t > t_0$ dipende:
  - dall'ingresso $u(\tau)$ applicato in $[t_0, t]$;
  - dallo stato iniziale x_0 che ha il sistema per $t = t_0$.

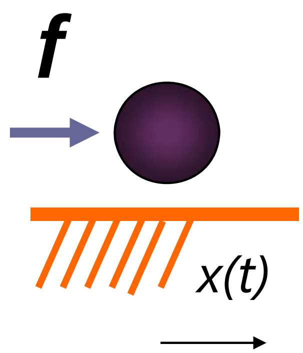
- **Risposta da stato zero** (o risposta forzata)

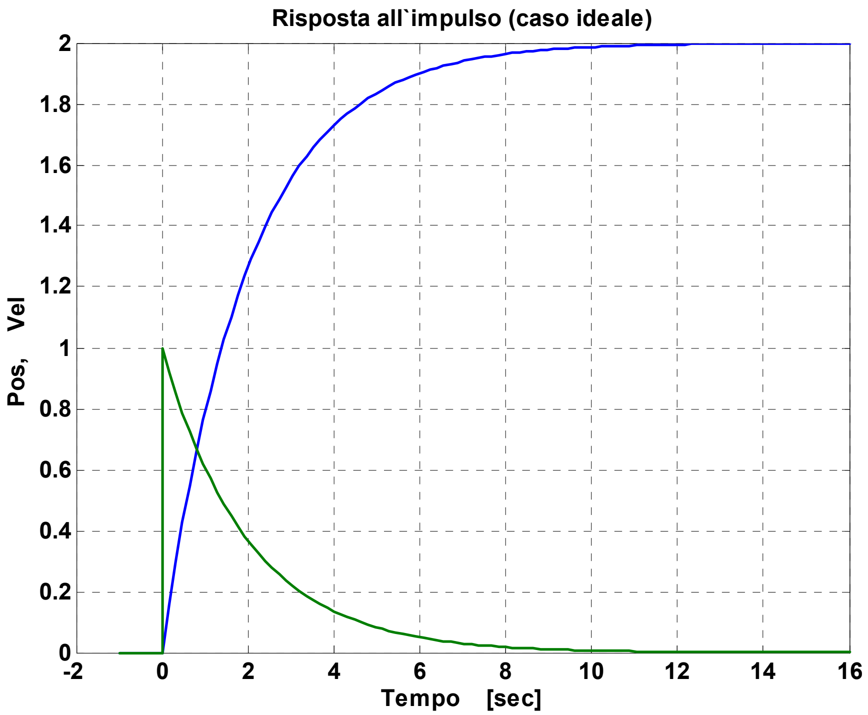
  Si dice *risposta da stato zero* o *risposta forzata* la risposta $y_{ZS}(t)$ di un sistema che è inizialmente in quiete (ingresso ed uscita nulli) e che viene sollecitato da un ingresso non nullo.

- Il sistema, senza l'applicazione dell'ingresso non nullo, rimarrebbe indefinitivamente nella condizione di quiete.

Risposta da stato zero

Risposta da stato zero

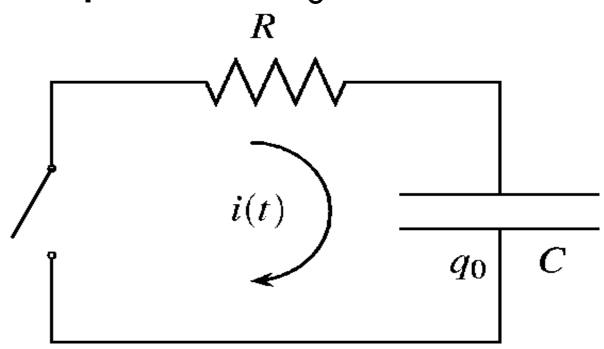




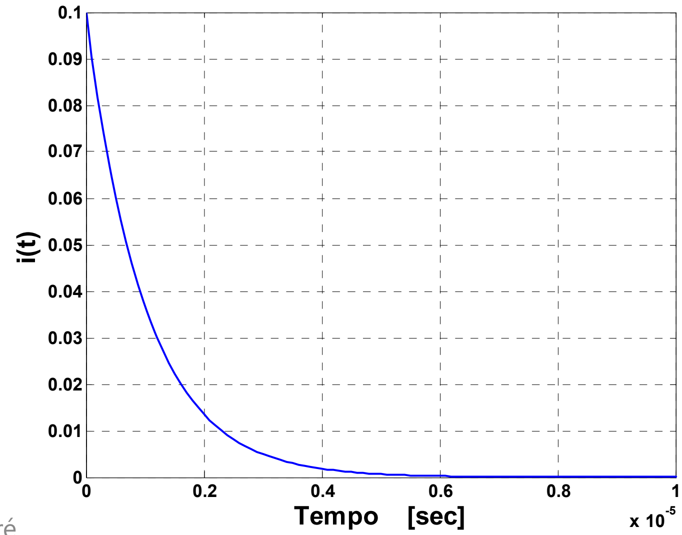
Palla inizialmente in quiete (v_0 = 0), sollecitata da una forza *impulsiva* (piano con attrito non nullo).

Risposta con ingresso zero

- **Risposta con ingresso zero** (o risposta libera)
- Si dice *risposta con ingresso zero* o *risposta libera* la risposta $y_{ZI}(t)$ di un sistema che è sollecitato da un ingresso nullo.
- Se il sistema è inizialmente in quiete (ingresso ed uscita nulli), vi permane per $t > t_0$, altrimenti vi è una evoluzione dell'uscita.



Condensatore inizialmente carico ($q(t_0) = q_0 \neq 0$);
la variabile di uscita è la corrente i(t) nel circuito.



Risposta completa

- **Risposta completa**
  - Si dice risposta completa la risposta di un sistema che si trova inizialmente in condizioni non di quiete ed è sollecitato con ingresso non nullo.
  - E’ in questo caso necessario conoscere sia l'ingresso applicato che lo stato iniziale in cui si trova il sistema.
  - **ESEMPIO:** Data una massa m che nell'intervallo $[t_0, t_1]$ cade in caduta libera, soggetta alla sola forza di gravità -g, non è possibile in $t = t_1$ calcolarne la posizione e/o la velocità se non si conoscono la posizione e la velocità iniziali.

$$\begin{cases} a(t) = -\dfrac{g}{m} & & \\ v(t) = -\dfrac{g}{m}t + v_0 & = at + v_0 & v_0, \quad p_0 \\ p(t) = -\dfrac{g}{2m}t^2 + v_0 t + p_0 & = \dfrac{a}{2}t^2 + v_0 t + p_0 & \end{cases}$$

Modelli lineari

- Una funzione $f : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ è lineare sse gode delle seguenti proprietà:
  1) Additività $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2), \qquad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{C}$
  2) Omogeneità $f(\alpha x) = \alpha f(x), \qquad \forall \alpha, x \in \mathcal{C}$

- Un modello dinamico è *lineare* sse valgono le seguenti tre proprietà:
  1) la risposta con ingresso zero è lineare rispetto allo stato iniziale;
  2) la risposta da stato zero è lineare rispetto all'ingresso;
  3) la risposta completa coincide con la somma della risposta con ingresso zero e della risposta da stato zero:

$$y(t) = y_{ZI}(t) + y_{ZS}(t)$$

- Spesso, l'ipotesi di linearità di un sistema è una approssimazione che si applica considerando opportune limitazioni sugli ingressi e uscite del sistema stesso.

- In generale infatti i sistemi fisici NON sono lineari, e possono essere considerati tali solo entro opportuni intervalli di `funzionamento'.

Modelli lineari

- **ESEMPIO:** Si consideri la risposta completa di un sistema dinamico

$$y(t) = \sin(t) x_0^2 + \int_{t_0}^{t} e^{-2(t-\tau)} u^2(\tau) d\tau = y_{ZI}(t) + y_{ZS}(t)$$

in cui $x_0 = x(t_0)$ è lo stato iniziale.

La risposta è somma della risposta con ingresso zero e da stato zero, però il sistema è non lineare poiché la risposta non è lineare né rispetto allo stato iniziale (x_0^2) né rispetto all'ingresso (u^2).

Modelli lineari

- **ESEMPIO:** Si consideri la risposta completa del sistema dinamico

$$y(t) = \sin(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-2(t-\tau)}u^2(\tau)d\tau = y_{ZI}(t) + y_{ZS}(t)$$

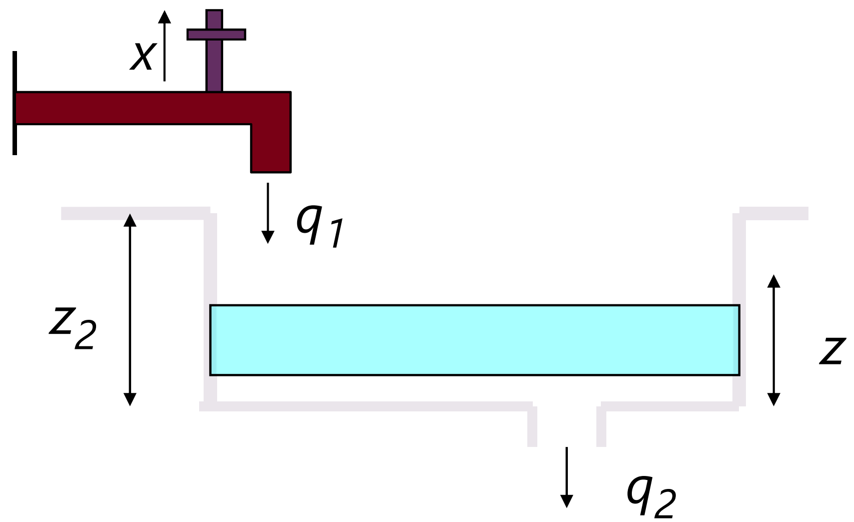
  Il sistema è non lineare poichè la risposta non è lineare rispetto all'ingresso (u^2).
- **ESEMPIO:** Si consideri la risposta completa del sistema dinamico

$$y(t) = \sin(t)x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{-2(t-\tau)}u(\tau)d\tau = y_{ZI}(t) + y_{ZS}(t)$$

  Il sistema è lineare poiché:
  - la risposta è somma della risposta con ingresso zero e da stato zero;
  - la risposta è lineare rispetto allo stato iniziale;
  - la risposta è lineare rispetto all'ingresso.

Modelli lineari

- Molti sistemi ammettono modelli matematici lineari purché i valori delle variabili non escano da determinati campi.



- Si consideri il sistema di figura, costituito da un serbatoio:
- la portata entrante q_1 è funzione lineare della posizione x dello stelo di una valvola $q_1 = K x$
- si suppone che la portata uscente q_2 sia indipendente dal livello z.

Modelli lineari

- Il modello matematico del sistema è espresso dall'equazione integrale lineare

$$z(t) = Z_0 + \frac{1}{A}\int_0^t \big(q_1(\tau) - q_2(\tau)\big)\,d\tau = Z_0 + \frac{1}{A}\int_0^t \big(K x(\tau) - q_2(\tau)\big)\,d\tau$$

o, equivalentemente, dall'equazione differenziale (ottenuta derivando rispetto al tempo ambo i membri)

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1}{A}\,[q_1(t) - q_2(t)]\ , \quad z(0) = Z_0$$

in cui z indica il livello dell'acqua nel serbatoio (in m), Z_0 il livello iniziale, q_1 e q_2 le portate entrante e uscente (in mc/sec), A l'area della sezione orizzontale del serbatoio (in mq).

- Tale modello è evidentemente valido entro i limiti

$$X_1 \le x(t) \le X_2\ , \quad Z_1 \le z(t) \le Z_2$$

in cui X_1, X_2, Z_1 (=0) e Z_2 rappresentano rispettivamente i valori minimo e massimo della posizione dello stelo della valvola e del livello nel serbatoio.

Modelli lineari – Proprietà di sovrapposizione degli effetti

- Per i sistemi lineari vale una proprietà molto importante:

La sovrapposizione degli effetti.

- Linearità rispetto allo stato iniziale

Questo caratteristica dei sistemi dinamici risulta evidente (ed utile) nello studio dei sistemi *nello spazio degli stati*.

Modelli lineari – Proprietà di sovrapposizione degli effetti

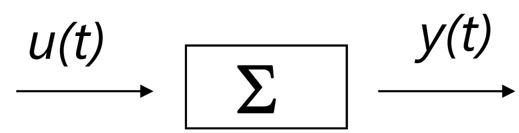
- Linearità rispetto all'ingresso

  Sia dato un sistema inizialmente in quiete.

  Si applichino (singolarmente) i q ingressi $u_i(t)$, i=1, …, q, t ¸ 0

  ottenendo le corrispondenti risposte forzate $y_{ZS,i}(t)$:

$$
\begin{array}{ccc}
u_1(t) & \Longrightarrow & y_{ZS,1}(t) \\
u_2(t) & \Longrightarrow & y_{ZS,2}(t) \\
 & \cdots & \\
u_q(t) & \Longrightarrow & y_{ZS,q}(t)
\end{array}
$$



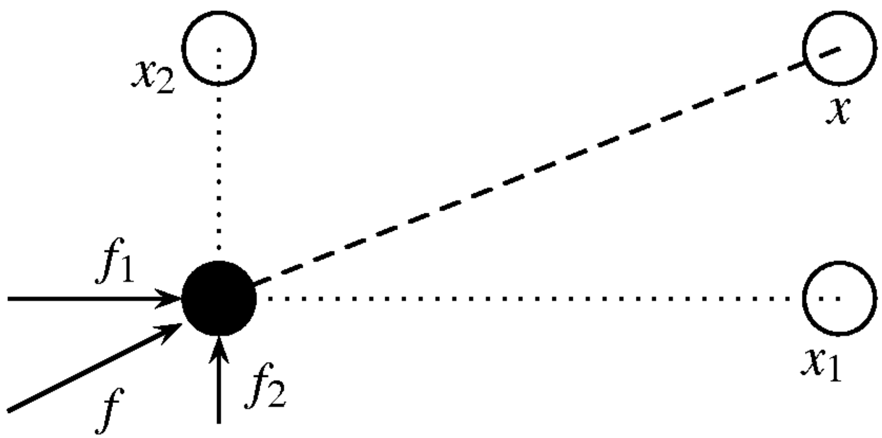
- La linearità rispetto all'ingresso implica che se si applica al sistema l'ingresso

$$u(t) = \alpha_1 u_1(t) + \alpha_2 u_2(t) + \ldots + \alpha_q u_q(t) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i u_i(t), \qquad \alpha_i \in \mathbb{R}$$

allora si ottiene l'uscita
$$y(t) = \alpha_1 y_{ZS,1}(t) + \alpha_2 y_{ZS,2}(t) + \ldots + \alpha_q y_{ZS,q}(t) = \sum_{i=1}^{q} \alpha_i y_{ZS,i}(t)$$

Modelli lineari – Proprietà di sovrapposizione degli effetti

- **Esempio:**



$$f = f_1 + f_2$$
$$x = x_1 + x_2$$

- Additività delle risposte

  Proprietà di additività della risposta libera e della risposta forzata.