Capítulo 4

Probabilidad

TÉCNICAS DE CONTEO

Arboles de decisión

Un **árbol de decisiones** es una herramienta para determinar la probabilidad de tomar una serie de decisiones cuando cada decisión es independiente de la otra.

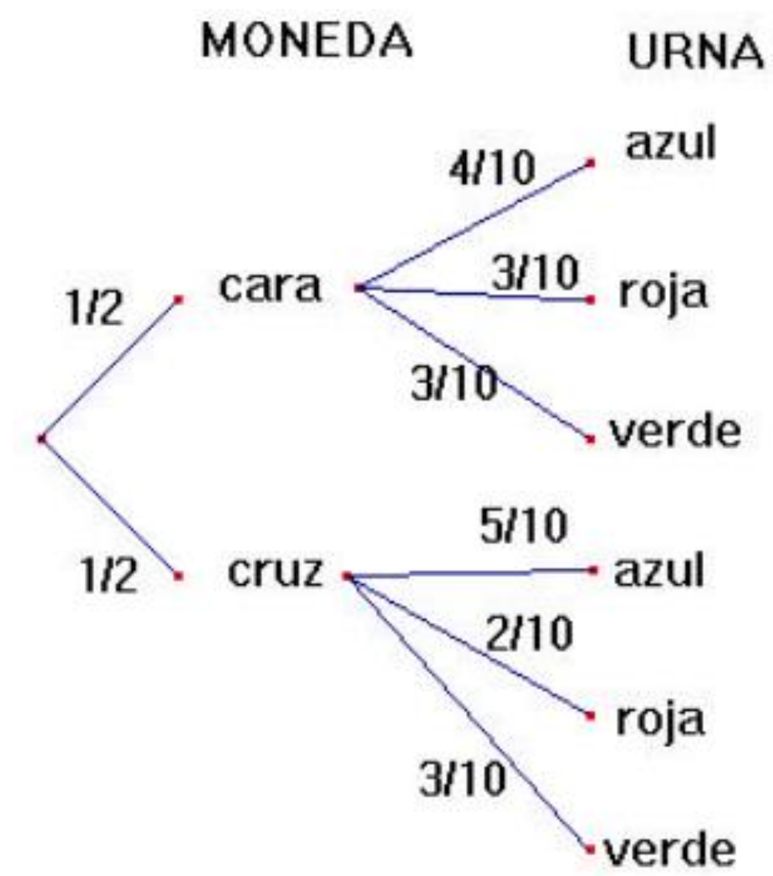
Tenemos dos urnas A y B. En la urna A hay 4 bolas azules, 3 rojas y 3 verdes y en la urna B hay 5 bolas azules, 2 rojas y 3 verdes. Lanzamos una moneda. Si sale cara acudimos a la urna A y si sale cruz acudimos a la urna B. Calcula la probabilidad de obtener:

a) cara y bola roja
b) bola azul
c) bola no-azul

Arboles de decisión (cont.)

Use el árbol de decisiones para calcular la probabilidad de obtener:

a) cara y bola roja
b) bola azul
c) bola no-azul



$$P(\text{cara y roja}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} = 0.15$$

$$P(\text{azul}) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{10} + \frac{1}{2}\cdot\frac{5}{10} = 0.45$$

P(bola no-azul) = $1 - P(\text{azul})$

= 1 - 0.45

= 0.55

Técnicas de conteo

- En muchos problemas de probabilidad, el reto mayor es encontrar el número total de resultados.
  - Por ejemplo, uno de los juegos de la lotería de California requiere la selección de cinco números diferentes (enteros) entre 1 y 39 inclusive.
  - Ganar el premio mayor requiere seleccionar los cinco números exactos.
  - La probabilidad de ganar el premio mayor es 1 dividido entre el número de diferentes maneras para seleccionar cinco números de 39.
- Esta sección presenta métodos para encontrar el número de maneras diferentes para seleccionar cinco números entre el 1 y el 39.

La regla fundamental de conteo

Para una *secuencia* de dos eventos en los que el primer evento puede ocurrir de m maneras y el segundo evento puede ocurrir de n maneras, los eventos juntos se puede producir en total de $m \cdot n$ maneras.

La regla fundamental de conteo se extiende fácilmente a situaciones que afectan a más de dos eventos.

EJEMPLO Contar las posibles opciones

Para cada una de las 2 opciones para el entremés, un restaurante tiene 4 opciones para el plato principal y 2 opciones para el postre.
¿Cuántas comidas diferentes se pueden formar?

Usando un árbol binario:

EJEMPLO Contar las posibles opciones

Para cada una de las 2 opciones para el entremés, un restaurante tiene 4 opciones para el plato principal y 2 opciones para el postre.
¿Cuántas comidas diferentes se pueden formar?

$$2 \cdot 4 \cdot 2 = 16$$

Se pueden formar 16 comidas diferentes.

EJEMPLO Contar las posibles opciones

1. Deseamos clasificar un paciente por el tipo de sangre A, AB, B, O y por la presión sanguínea en baja, normal o alta. ¿De cuántas maneras distintas se puede clasificar un paciente por su tipo y presión de la sangre?
2. Un examen tiene 10 preguntas de selección múltiples, donde en cada pregunta hay 4 posibles alternativas; ¿de cuántas maneras distintas se puede contestar este examen?
3. ¿Cuántos números telefónicos de 7 dígitos son posibles si el primer dígito no puede ser 0 ó 1?

EJEMPLO

¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras P, Q, R?

SOLUCIÓN:

3	2	1
opciones para la primera posición	opciones para la segunda posición	opción para la tercera posición

$$3 \times 2 \times 1 = 6$$

EJEMPLO Contar las posibles opciones

1. ¿De cuántas maneras distintas se puede seleccionar un presidente, un vicepresidente, un secretario y un tesorero de un grupo de 20 miembros?

2. 5 personas llegan simultáneamente a un teatro; ¿de cuántas maneras pueden organizarse en una fila para comprar su boleto?

EJEMPLO Robo de identidad

Suponga que se identifica a un individuo usando tu número de seguro social y éste afirma que todos los dígitos fueron generados al azar.
¿Cuál es la probabilidad de obtener tu número de seguro social generando al azar nueve dígitos?

SOLUCIÓN:
El seguro social se compone de 9 dígitos.
Cada uno de los 9 dígitos tiene 10 posibles resultados: 0, 1, 2,. . . , 9.
Según la regla fundamental de conteo, existen
$10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1{,}000{,}000{,}000$ posibilidades
Sólo **una** de esas posibilidades corresponde a la números de seguro social, por lo que la probabilidad de elegir aleatoriamente tu número es $\frac{1}{1000000000}$

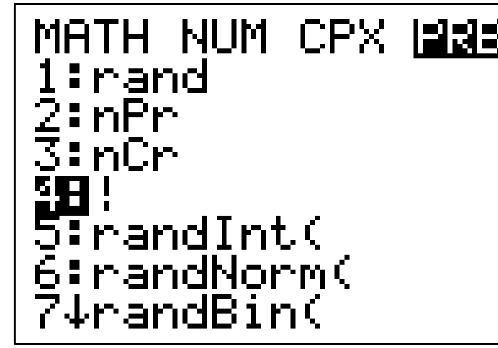
n! (ene-factorial)

Si $n \geq 0$ es un entero, n! se define como sigue

n! = n(n-1)$\cdot \cdots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

1! = 1

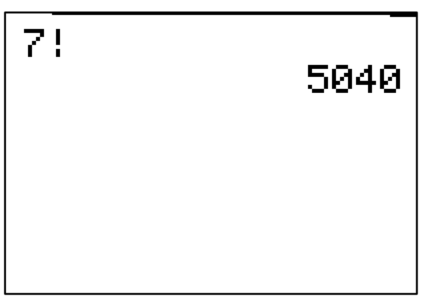
0! = 1



Ejemplo: Determinar cada uno de los siguientes:

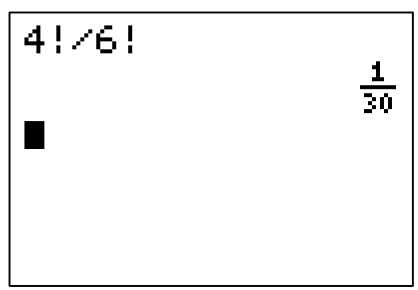
- 7!

$= 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$



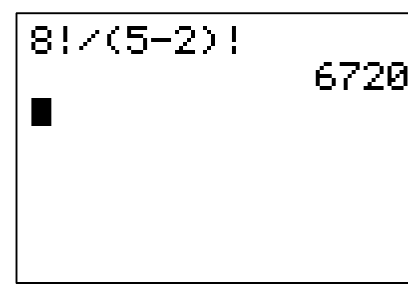
$$\frac{4!}{6!}$$

$$= \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{6 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$



$$\frac{8!}{(5-2)!}$$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1}$$



Número de permutaciones

El número de formas que se pueden elegir *r* objetos distintos de un total de n objetos en los cuales

- los n objetos son distintos
- no se permite la repetición de objetos (objetos no pueden ser seleccionados más de una vez).
- el orden importa

está dado por

$$_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

EJEMPLO

¿Cuántas opciones hay para elegir dos letras (diferentes) a la vez, de las letras P, Q, R, S, T?

SOLUCIÓN:

En esta ocasión se quieren elegir grupos de 2 letras de un total de 5.

En otras palabras queremos todas las permutaciones posibles de 5 objetos distintos elegidos 2 a la vez.

$$_5P_2 = \frac{5!}{(5-2)!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1} = 20$$

EJEMPLO Apuestas

En cuántas formas pueden los caballos en una carrera de 10 caballos terminar primero, segundo y tercero.

Combinaciones

Una combinación es una colección, ***sin tomar en cuenta orden***, de *n* objetos distintos sin repetición (objetos no pueden ser seleccionados más de una vez).

El símbolo $_nC_r$ representa el número de combinaciones de *n* objetos distintos tomados *r* a la vez.

Número de combinaciones

El número de formas diferentes de ordenar *n* objetos distintos tomando $r \leq$ n para los cuales

- los n objetos son distintos
- no se permite la repetición de objetos (objetos no pueden ser seleccionados más de una vez).
- el orden no importa

está dado por

$$_{n}C_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$

EJEMPLO Muestras aleatorias simples

¿De cuántas maneras se puede formar un comité elegiendo 4 personas de un grupo de 10?

Los 10 individuos son diferentes.
Queremos elegir 4.
El orden no importa.
Usaremos la fórmula para combinaciones con
n = 10 y r = 4:

$$ {}_{10}C_4 = \frac{10!}{4!\,(10-4)!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{(4 \times 3 \times 2 \times 1)(6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1)} $$

= 210.

EJEMPLO Muestras aleatorias simples

¿Cuantas muestras aleatorias simples de 4 objetos se pueden obtener de una población de tamaño 20?

EJEMPLO Ganar la lotería

En la Lotería de Illinois, una urna contiene pelotas enumeradas del 1 a 52. De esta urna, seis pelotas se eligen al azar sin reemplazo.

Al hacer una apuesta de $1, un jugador elige dos grupos de seis números.

Para ganar, los seis números deben coincidir con los números seleccionados de la urna.

El orden en que se seleccionan las pelotas no importa.

¿Cuál es la probabilidad de ganar la lotería?