Capitolo 2

Sistemi dinamici.

Un sistema dinamico è un modello matematico che descrive una situazione che cambia nel tempo. Inizieremo introducendo i concetti e le definizioni fondamentali. Discuteremo poi alcuni esempi. Tratteremo quindi in modo completo la teoria dei sistemi lineari, con particolare riferimento ai sistemi 2×2. Il nostro interesse principale, infine, sarà quello di fornire gli strumenti necessari a studiare certe *proprietà qualitative* del modello in esame, quali ad esempio il comportamento per tempi grandi.

2.1 Concetti introduttivi

In ogni sistema dinamico si osservano e si studiano un numero finito di quantità, rappresentate da un vettore di n variabili. Tale vettore vive in un sottinsieme dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$ detto *spazio degli stati*, ed è funzione di un parametro reale non negativo t che rappresenta il *tempo*. Indichiamo con $W \subset \mathbb{R}^n$ lo spazio degli stati. L' oggetto matematico che si vuole determinare in un sistema dinamico è una funzione

$$[0, +\infty) \ni t \mapsto X(t) \in W,$$

ovvero una legge che esprime il valore dello stato del sistema dinamico ad un dato istante t. Ricordiamo che uno stato è in realtà un vettore di n componenti, ciascuna delle quali rappresenta una delle grandezze di cui vogliamo studiare l'evoluzione. Saremo più chiari in seguito a tal proposito con degli esempi.

La legge che regola un sistema dinamico esprime la variazione nel tempo degli stati in esame. Più precisamente, un sistema dinamico è specificato tramite una relazione algebrica che coinvolge il tempo t, il valore delle singole componenti del vettore $X(t)$ e la derivata rispetto al tempo dela funzione vettoriale $t \mapsto X(t)$. Formalizziamo il tutto nella seguente definizione.

Definizione 2.1.1 (Sistema dinamico continuo) *Un* sistema dinamico continuo *in un aperto $W \subset \mathbb{R}^n$ (spazio degli stati) è un'equazione differenziale ordinaria vettoriale in $\mathbb{R}^n$*

(oppure un sistema di n equazioni differenziali ordinarie scalari), in forma normale e autonoma (cioè con secondo membro indipendente dal tempo) del tipo

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \tag{2.1}$$

dove $F : W \to \mathbb{R}^n$ è un campo vettoriale differenziabile (di classe C^1).

*Un'*orbita *(o* soluzione*) di un sistema dinamico continuo è una funzione*

$$[0, +\infty) \ni t \mapsto X(t) \in W$$

che soddisfa l'equazione differenziale (2.1).

Osservazione 2.1.2 (Sistemi dinamici discreti) Nella precendente definizione abbiamo usato il termine 'continuo' per enfatizzare il fatto che il parametro t da cui dipendono gli stati è un numero reale. Esistono anche sistemi dinamici *discreti*, in cui l'orbita è una successione di stati $\{X_j\}_{j=0}^{\infty} \subset W$, con W aperto di $\mathbb{R}^n$. La legge che regola un sistema dinamico discreto è in genere di tipo ricorsivo. Cioè, data un'applicazione vettoriale $f : W \to W$, si definisce il sistema dinamico richiedendo che sia soddisfatta la relazione

$$X_{k+1} = f(X_k)$$

per ogni intero $k \geq 0$. Naturalmente, per determinare univocamente un'orbita è necessario specificare il valore iniziale X_0 della succesione. Una volta che X_0 è noto, l'esistenza e l'unicità di un'orbita del sistema dinamico discreto sono garantite dal principio di induzione.

Ricordiamo che il problema costituito da un sistema dinamico continuo (2.1) e da una condizione iniziale $X(0) = X_0$ prende il nome di *problema ai valori iniziali* o *problema di Cauchy*.

Osservazione 2.1.3 (Esistenza e unicità) Sebbene così ovvie nel caso discreto, l'esistenza e l'unicità di una soluzione di un sistema dinamico continuo (una volta nota la condizione iniziale) costituiscono un risultato non banale. A tal proposito, ricordiamo che un sistema dinamico rientra ovviamente nella teoria delle equazioni differenziali ordinarie studiate nei precedenti corsi di analisi e richiamate nel capitolo 1. Dato che non è interesse di questo corso esaminare casi di non esistenza o di non unicità per sistemi dinamici, da qui in avanti supporremo che il campo vettoriale F in (2.1) sia di classe C^1. Sotto tale ipotesi, dunque, in virtù del Teorema 1.7.3, dato un punto $X_0 \in W$ esistono un intervallo $[0, t^*)$ ed una curva $X : [0, t^*) \to W$ tali che $X(t)$ è una soluzione locale del sistema dinamico (2.1) sotto la condizione iniziale $X(0) = X_0$.

Definizione 2.1.4 *Il* flusso integrale *(o* integrale generale*) di un sistema dinamico continuo è la famiglia di applicazioni $\Phi_t : W \to W$ (al variare di $t \in [0 + \infty)$) definite come segue: dato $X_0 \in W$, l'immagine $\Phi_t(X_0)$ è data dal valore vettoriale $X(t)$ assunto dalla soluzione del sistema (2.1), avente dato iniziale X_0, calcolata al tempo t.*

Definizione 2.1.5 *Un punto* $X_0 \in W$ *si dice* punto di equilibrio *del sistema dinamico (2.1) se l'unica orbita corrispondente al dato iniziale* X_0 *è quella costante* $X(t) \equiv X_0$.

Come vedremo nella prossima sezione, le soluzioni del sistema dinamico (2.1) possono essere esplicitamente calcolate nel caso in cui il campo vettoriale F è lineare. Per convincerci subito di ciò, analizziamo il caso più semplice, ovvero quello unidimensionale $n = 1$.

Esempio 2.1.6 Sia $W = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$. Consideriamo il sistema dinamico unidimensionale lineare

$$\frac{dx}{dt} = ax.$$

La soluzione con dato iniziale $x(0) = x_0$ è data dalla formula $x(t) = x_0 e^{at}$.

Esempio 2.1.7 (Sistema lineare bidimensionale disaccoppiato) Sia $W = \mathbb{R}^2$. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Consideriamo il sistema dinamico definito per componenti

$$\frac{dx}{dt} = ax, \qquad \frac{dy}{dt} = by.$$

La soluzione $X(t) = (x(t), y(t))$ con dato iniziale $X_0 = (x_0, y_0)$ si trova risolvendo separatamente le equazioni per le singole componenti come nell'esempio precedente, ovvero

$$x(t) = x_0 e^{at}, \qquad y(t) = y_0 e^{bt}.$$

Spesso ci porremo il problema di determinare lo stato limite del sistema dinamico (se esiste) per $t \to +\infty$, ovvero

$$\lim_{t \to +\infty} X(t).$$

Nell'esempio precedente (così come in tutti i casi in cui la soluzione si può calcolare esplicitamente) tale problema si traduce nel semplice calcolo di un limite di una funzione di una variabile. Il comportamento all'infinito dipende ovviamente dalle costanti a e b e dal dato iniziale.

Esercizio 2.1.8 Determinare il limite $\lim_{t \to +\infty} X(t)$ al variare di a, b, x_0, y_0 nell'esempio 2.1.7.

2.2 Sistemi dinamici lineari

Gli esempi trattati nella precedente sezione rientrano nella seguente

Definizione 2.2.1 *Un sistema dinamico si dice* lineare *quando il campo vettoriale* F *in (2.1) è lineare, ovvero, il sistema è della forma*

$$\frac{dX}{dt} = AX, \tag{2.2}$$

con A *matrice* $n \times n$ *a coefficienti costanti.*

Dato che il campo vettoriale F, descritto dalla formula $F(X) = AX$, è ovviamente di classe C^1, sussistono banalmente le condizioni di esistenza ed unicità delle soluzioni del problema ai valori iniziali. Inoltre, valgono anche le ipotesi di esistenza globale richieste nel teorema 1.7.4.

Rivisitiamo l'esempio unidimensionale 2.1.6, ovvero

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{2.3}$$

con $a \in \mathbb{R}$. Integrando ambo i membri di (2.3) lungo l'intervallo $[0, t]$ otteniamo

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \frac{dx(s)}{ds} ds = x_0 + a \int_0^t x(s) ds. \tag{2.4}$$

Dunque, l'equazione differenziale che regola il sistema è stata riformulata in forma integrale. Pur conoscendo già la soluzione, risolviamo tale equazione con il metodo delle *approssimazioni successive*, che consiste nell'ottenere la soluzione $x(t)$ come approssimazione di una successione di funzioni $x_k(t)$, $k \in \mathbb{N}$ definita in modo ricorsivo come segue:

$$\begin{cases} x_0(t) = x_0 \\ x_{k+1}(t) = x_0 + a \displaystyle\int_0^t x_k(s) ds, \quad k \geq 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Calcolando esplicitamente i primi due valori della successione si ottiene

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + a \int_0^t x_0 ds = (1 + at)x_0 \\ x_2(t) &= x_0 + a \int_0^t (1 + as)x_0 ds = \left(1 + at + \frac{a^2t^2}{2}\right) x_0, \end{aligned}$$

da cui si deduce (intuitivamente) la seguente formula generale per ogni intero k,

$$x_k(t) = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{a^i t^i}{i!} \right) x_0. \tag{2.6}$$

Esercizio 2.2.2 Usando il principio di induzione, dimostrare rigorosamente la formula (2.6).

Mandando al limite per $k \to +\infty$ l'equazione approssimante (2.5), ci aspettiamo ovviamente che il limite $x(t) = \lim_{k\to+\infty} x_k(t)$ soddisfi l'equazione integrale (2.4). Se dimostriamo che $x_k(t)$ converge uniformemente al suo limite $x(t)$ sull'intervallo $[0, t]$, tale passaggio sarà giustificato dal teorema 1.5.3 di passaggio al limite sotto il segno di integrale. D'altra parte, la sommatoria in (2.6) non è altro che la successione delle somme parziali relativa alla serie di Taylor della funzione esponenziale e^{at}, che sappiamo convergere uniformemente su ogni intervallo $[0,t]$, $t \geq 0$. La soluzione del problema (2.3) è dunque rappresentata da

$$x(t) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a^i t^i}{i!} \right) x_0 = e^{at} x_0.$$

Consideriamo ora il caso generale (2.2) in più di una dimensione, con una condizione iniziale

$$X(0) = X_0. \tag{2.7}$$

Anche in questo caso possiamo riformulare il problema in forma integrale (ove l'integrale di un vettore è il vettore costituito dagli integrali delle singole componenti)

$$X(t) = X_0 + \int_0^t AX(s)ds. \tag{2.8}$$

Definiamo le approssimanti successive $X_k(t)$ come nel caso unidimensionale, ovvero

$$\begin{cases} X_0(t) \equiv X_0 \\ X_{k+1}(t) = X_0 + \displaystyle\int_0^t AX_k(s)ds, \quad k \geq 0. \end{cases} \tag{2.9}$$

In modo del tutto analogo al caso unidimensionale, otteniamo la seguente formula per le approssimanti

$$X_k(t) = \left(\sum_{i=0}^{k} \frac{A^i t^i}{i!} \right) X_0, \tag{2.10}$$

ove tutte le operazioni algebriche sono intese nel senso del calcolo matriciale. Contrariamente al caso unidimensionale, la soluzione nel caso generale non è nota a priori. Utilizzeremo pertanto le approssimanti $X_k(t)$ per otterere la rappresentazione della soluzione. Esistono però due problemi. Il primo è quello della *convergenza* della successione $X_k(t)$ (al limite per k che tende all'infinito abbiamo a che fare con una serie di funzioni a valori nello spazio delle matrici quadrate). Il secondo è quello della *consistenza* del limite: occore cioè verificare che l'eventuale limite della serie sia la soluzione del problema di Cauchy (2.2)-(2.7). Per affrontare entrambi i problemi occorre definire un nuovo oggetto: l' esponenziale di una matrice.

Definizione 2.2.3 (Esponenziale di una matrice) *Sia B una matrice $n \times n$. L'esponenziale di B è definito 'formalmente' dalla serie*

$$e^B = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!}. \tag{2.11}$$

Chiariamo il senso dell'avverbio 'formalmente' nella precedente definizione. L'oggetto a secondo membro della formula (2.11) è una serie infinita il cui termine generico è una matrice. Occorre dunque verificare che la serie converga in qualche senso. Ci occuperemo di tale problema nel caso specifico dell'esponenziale che risolve il problema ai valori iniziali in esame, ovvero

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!}.$$

Iniziamo con il considerare i casi più semplici.

Esempio 2.2.4 (Multipli dell'identità) Sia $A = \lambda\mathbb{I}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora $A^k = \lambda^k\mathbb{I}$, e dunque

$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i t^i \mathbb{I}}{i!} = e^{\lambda t}\mathbb{I}.$$

Dunque la corrispondente soluzione del sistema dinamico (2.3)-(2.7) è $X(t) = e^{\lambda t}X_0$. Dato che in questo caso il sistema dinamico è disaccoppiato (come nell'esempio 2.1.7), la verifica che l'espressione precedente è effettivamente soluzione è banale.

Esempio 2.2.5 (Matrice diagonale) Sia $A = diag[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$. Anche in questo caso il calcolo delle potenze di A è semplice, ovvero

$$A^k = diag[\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k],$$

e si ha

$$e^{At} = diag[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}].$$

Pertanto, la soluzione del corrispondente sistema dinamico è

$$X(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t)) = (e^{\lambda_1 t}x_{0,1}, \ldots, e^{\lambda_{1n} t}x_{0,n}),$$

dove $X_0 = (x_{0,1}, \ldots, x_{0,n})$ è la condizione iniziale. Anche in questo caso il sistema è disaccoppiato e la verifica è un facile esercizio.

Esempio 2.2.6 (Matrice nilpotente) Consideriamo una matrice del tipo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Una matrice siffatta si dice *nilpotente*, nel senso che una sua potenza di ordine finito dà come risultato la matrice nulla. Verificare (facile esercizio) che in questo caso $A^2 = 0$. Dunque, in questo l'esponenziale e^{At} è una somma di due termini

$$e^{At} = \mathbb{I} + At = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}.$$

Posto $X_0 = (x_0, y_0)$, la soluzione del problema (2.3)-(2.7) è dunque data da

$$X(t) = (x(t), y(t)) = (x_0, y_0 + x_0 t).$$

Il seguente teorema – del quale omettiamo la dimostrazione – ci sarà utile nel futuro.

Teorema 2.2.7 (Somma degli esponenti) *Se due matrici quadrate A e B commutano tra loro, cioè se $AB = BA$, allora l'esponenziale dela somma è il prodotto delle esponenziali, ovvero*

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Risolviamo di seguito il problema della convergenza della serie esponenziale.

Teorema 2.2.8 *Sia A una matrice quadrata $n \times n$. Allora la serie esponenziale*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i t^i}{i!} = e^{At}$$

converge puntualmente per ogni $t \in \mathbb{R}$ ed uniformemente su ogni intervallo compatto di $\mathbb{R}$. Inoltre il limite $\mathrm{e}^{\mathrm{A}t}$ è una funzione continua.

Dimostrazione. Consideriamo la serie delle norme

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{A^j t^j}{j!} \right\|.$$

Usando la maggiorazione (1.4) si ha

$$\left\| \frac{A^j t^j}{j!} \right\| \leq \frac{\|A\|^j |t|^j}{j!}.$$

Dunque la serie delle norme è maggiorata dalla serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A\|^j |t|^j}{j!} = e^{\|A\| t}$$

che sappiamo convergere su ogni compatto (si tratta di una serie esponenziale classica, vedi la sezione 1.5). Dunque la serie di partenza converge in norma. Inoltre, dal teorema 1.5.2 segue che il limite è una funzione continua su ogni compatto di $\mathbb{R}$, ovvero su tutto $\mathbb{R}$. □

Il teorema precedente risponde senz'altro al primo dei due problemi sollevati in precedenza riguardo alle approssimanti X_k definite (2.10), ovvero quello della convergenza. Infatti, si ha evidentemente

$$\lim X_k(t) = e^{At} X_0 =: X(t).$$

In realtà, grazie al teorema 1.5.3 è possibile risolvere anche il problema della consistenza. Infatti, la convergenza uniforme della serie esponenziale implica la convergenza uniforme del termine $AX_k(s)$ nella (2.9), e dunque la possibilità di passare tale limite sotto il segno di integrale. Dunque, come primo passo otteniamo, al limite per $k \to \infty$,

$$X(t) = X_0 + \int_0^t AX(s)ds.$$

La relazione precedente ci dice in particolare che la curva $t \mapsto X(t)$ è regolare e soddisfa il problema (2.2)-(2.7).

Nel seguito di questa sezione ci occuperemo della soluzione esplicita del problema di Cauchy (2.2)-(2.7) per un sistema dinamico lineare, introducendo anche dei concetti relativi all'analisi qualitativa. Nel seguito utilizzeremo le nozioni richiamate nella sezione 1.2.

Supponiamo di sottoporre il sistema dinamico lineare $\dot{X} = AX$ ad un cambiamento di coordinate $Y = BX$, con $B \in \mathcal{M}(n, n)$. Si suppone che B sia invertibile, ovvero $\det B \neq 0$. Allora l'equazione differenziale diventa

$$\dot{Y} = B\dot{X} = BAX = (BAB^{-1})Y,$$

ovvero $t \mapsto Y(t)$ è soluzione del sistema dinamico lineare $\dot{Y} = CY$ ove C è ottenuta per coniugio da A mediante il cambiamento di coordinate B, ovvero $C = BAB^{-1}$. Posto $Y_0 = BX_0$, avremo

$$Y(t) = e^{Ct}Y_0,$$

per cui

$$X(t) = B^{-1}Y(t) = B^{-1}e^{Ct}Y_0 = B^{-1}e^{Ct}BX_0. \tag{2.12}$$

Dunque le orbite $X(t)$ ed $Y(t)$ sono uguali a meno dell'operazione di coniugio operata mediante il cambio di variabile B^{-1}. Poichè tale operazione non modifica le proprietà geometriche del flusso integrale, è conveniente effettuare uno studio basato su proprietà delle matrici che siano *invarianti* per coniugio, come ad esempio gli autovalori.

2.2.1 Matrici diagonalizzabili

Supponiamo che la matrice A sia diagonalizzabile. In tal caso tutte le orbite del sistema dinamico (2.2) si possono esprimere medidante combinazioni lineari di funzioni esponenziali. Tale affermazione è una diretta conseguenza dell'espressione (2.12) e dell'esempio 2.2.5. Infatti, siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori reali di A (con eventuali ripetizioni a seconda della loro molteplicità algebrica). Siano $V_1, \ldots, V_n$ i corrispondenti autovettori e sia V la matrice avente per colonne i vettori V_j. Allora, da quanto richiamato nella sezione 1.2 e dalla (2.12) segue che

$$X(t) = Ve^{Dt}V^{-1}X_0,$$

ove X_0 è il dato iniziale e $D = \text{diag}[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]$. Dall'esempio 2.2.5, otteniamo quindi

$$X(t) = V\text{diag}\left[e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}\right]V^{-1}X_0,$$

per cui ogni coordinata di $X(t)$ è combinazione lineare di funzioni esponenziali scalari.

Analizziamo nel dettaglio il caso 2×2. Nell'ipotesi che A sia diagonalizzabile, il comportamento del sistema dinamico è racchiuso nell'esempio 2.1.7. A meno di cambiamenti di coordinate (e quindi a meno di operazioni di coniugio), la soluzione $X(t) = (x(t), y(t))$ si esprime come

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}x_0 \\ y(t) = e^{bt}y_0, \end{cases}$$

ove a e b sono i due autovalori di A ed $X_0 = (x_0, y_0)$ è il dato iniziale. Il comportamento qualitativo del sistema dipende dal segno di a e b. Distinguiamo i seguenti casi significativi.

- $a < 0$, $b < 0$. Tutte le orbite hanno per limite per $t \to +\infty$ l'origine. Per $x_0 \neq 0$, le orbite si scrivono in forma cartesiana (detta anche *traiettoria*) come

  $$y = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{b/a}.$$

  Osserviamo che le tangenti delle orbite nell'origine sono parallele all'asse $x = 0$ se $a < b$, all'asse $y = 0$ se $b < a$. Se $a = b$ le traiettorie sono rette passanti per l'origine con coefficiente angolare y_0/x_0. Nel caso in cui $x_0 = 0$ le orbite sono racchiuse nell'asse $x = 0$. In tutti questi casi il punto di equilibrio nell'origine è detto *nodo attrattivo.*

- $a > 0$, $b > 0$. Tutte le orbite (ad eccezione di quella ferma nel punto di equilibrio nell'origine) vanno all'infinito per $t \to +\infty$. Le traiettorie coincidono con quelle del punto precedente, percorse però in senso contrario. In questo caso il punto di equilibrio nell'origine è detto *nodo repulsivo.*

- $a < 0 < b$. Tutte le orbite con $x_0 \neq 0$ tendono all'infinito per $t \to +\infty$. Le traiettorie sono

  $$y = y_0 \left(\frac{x_0}{x}\right)^{-b/a}.$$

  Esse sono asintotiche all'asse $y = 0$ per $t \to +\infty$. Se $x_0 = 0$, invece, le orbite (racchiuse nell'asse $x = 0$) tendono all'origine. Un caso analogo a coordinate 'invertite' si ha per $b < 0 < a$. In tutti questi casi il punto di equilibrio nell'origine è detto *punto di sella.*

Esercizio 2.2.9 Determinare le orbite del sistema dinamico $\dot{X} = AX$, con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & -6 \end{bmatrix},$$

e scrivere l'equazione cartesiana delle traiettorie, classificando il punto di equilibrio nell'origine secondo lo schema precedente.

2.2.2 Autovalori complessi

Iniziamo generalizzando il concetto di matrice diagonalizzabile al caso complesso.

Definizione 2.2.10 (Matrice semisemplice) *Una matrice $A \in \mathcal{M}(n,n)$ si dice* semisemplice *se è diagonalizzabile in senso complesso, ovvero se esiste una base di $\mathbb{C}^n$ formata da autovettori $\{V_1, \dots, V_n\}$ tali che*

$$AV_k = \lambda_k V_k, \quad \lambda_k \in \mathbb{C},\ k = 1, \dots, n.$$

I numeri complessi λ_k sono detti autovalori di A.

Quanto dimostrato in precedenza nel caso di matrici diagonalizzabili può essere generalizzato anche al caso semisemplice. Tale procedimento, tuttavia, non è banale, in quento gli autovettori possono avere componenti complesse, ed un cambio di variabili a coefficienti complessi non è facilmente interpretabile. Procediamo, come sempre, esaminando prima i casi più semplici.

Esempio 2.2.11 (Forma matriciale di un numero complesso) Consideriamo un numero complesso $z = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$. Definiamo la matrice quadrata 2×2

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

e consideriamo la matrice

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a\mathbb{I} + bJ.$$

Si può dimostrare che la corrispondenza tra numeri complessi z e matrici quadrate della stessa forma di A è biunivoca. La matrice A è detta *forma matriciale di z*. L'utilità di tale rappresentazione è che tutte le operazioni tra numeri complessi si interpretano come operazioni tra matrici. In particolare (ed è qui che tale rappresentazione torna utile alla nostra causa), l'esponenziale di A non è altro che l'esponenziale del numero complesso z espresso in forma matriciale, cioè

$$e^A = \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(e^z) & -\mathrm{Im}(e^z) \\ \mathrm{Im}(e^z) & \mathrm{Re}(e^z) \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

La dimostrazione della formula (2.13) non è difficile, ma richiede un po' di calcoli con gli esponenziali di matrici. Essa viene lasciata per esercizio. Come suggerimenti per risolvere l'esercizio raccomandiamo l'utilizzo della formula di Eulero

$$e^z = e^a(\cos b + i \sin b)$$

e del teorema 2.2.7. Inoltre, suggeriamo di calcolare a parte l'esponenziale e^{bJ}.

Consideriamo ora il caso di una qualsiasi A matrice semisemplice (con autovalori complessi) 2×2. Dal teorema fondamentale dell'algebra segue che gli autovalori sono i complessi coniugati $a+ib$ e $a-ib$. Esistono allora due autovettori complessi W e Z tali che

$$AW = (a+ib)W, \quad AZ = (a-ib)Z.$$

Possiamo scegliere Z in modo che $\overline{Z} = W$. Infatti, poichè $\overline{A} = A$, si ha

$$A\overline{W} = \overline{AW} = \overline{(a+ib)W} = (a-ib)\overline{W}.$$

Quindi, detti $Y = \mathrm{Re}(W) = (W+\overline{W})/2$ e $Y = \mathrm{Im}(W) = (W-\overline{W})/2i$, abbiamo

$$(a+ib)(Y+iX) = AW = A(Y+iX) = AY + iAX$$

e uguagliando parte reale e parte immaginaria otteniamo

$$\begin{cases} AX = aX + bY \\ AY = -bX + aY. \end{cases} \tag{2.14}$$

Ponendo

$$Q = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix},$$

e detta B la matrice avente per colonne X ed Y, la relazione (2.14) ci dice che

$$AB = BQ,$$

e dato che B è invertibile (i vettori X ed Y sono linearmente indipendenti, la dimostrazione è lasciata per esercizio), si ha

$$A = BQB^{-1}.$$

Dunque, la relazione (2.12) ci dice ancora una volta che

$$e^{At} = Be^{Qt}B^{-1},$$

e, dato che Q è della forma dell'esempio 2.2.11, siamo dunque in grado di calcolare l'esponenziale di una qualunque matrice semisemplice 2×2 e di risolvere il sistema dinamico associato.

Il procedimento appena esposto si può generalizzare al caso di matrici quadrate di dimensione maggiore di due. Abbiamo il seguente teorema.

Teorema 2.2.12 (Teorema del sistema semisemplice) *Se la matrice A è semisemplice, allora tutte le orbite del sistema dinamico $\dot{X} = AX$ si possono esprimere mediante combinazioni lineari di funzioni esponenziali $e^{a_k t}$ (dove gli a_k sono le parti reali degli autovalori di A) moltiplicate per funzioni trigonometriche $\cos(b_k t)$ e $\sin(b_k t)$ (dove i b_k sono le parti immaginarie degli autovalori di A).*

La dimostrazione del precedente teorema consiste nel ricondursi (mediante calcolo *a blocchi*) ai casi noti di matrici diagonalizzabili e semisemplici in due dimensioni. Essa viene lasciata come esercizio facoltativo.

Vogliamo ora trattare in modo dettagliato il caso 2×2 come nella sezione precedente. Da quanto detto in precedenza, è sufficiente studiare i sistemi del tipo $\dot{X} = AX$ con A della forma

$$A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} = a\mathbb{I} + bJ,$$

a cui potremo sempre ricondurci mediante un cambiamento di variabile invertibile, che non modifica le proprietà qualitative del sistema. Come puntualizzato nel suddetto esempio, la soluzione del sistema $X(t) = (x(t), y(t))$ con dato iniziale (x_0, y_0) è data da (ricordando sempre la formula di Eulero)

$$\begin{cases} x(t) = e^{at}[\cos(bt)x_0 - \sin(bt)y_0] \\ y(t) = e^{at}[\sin(bt)x_0 + \cos(bt)y_0]. \end{cases} \tag{2.15}$$

L'orbita (2.15) si può interpretare come una rotazione di un angolo bt seguita da una omotetia di fattore e^{at}. Il comportamento qualitativo dipende solo dal segno di a. Distinguiamo tre casi:

- $a < 0$. Tutte le orbite tendono all'origine per $t \to +\infty$. Le traiettorie sono spirali che si avvolgono attorno al punto di equilibrio con 'frequenza' pari a b. Il punto di equilibrio nell'origine si dice *fuoco attattivo.*

- $a < 0$. Tutte le orbite (tranne quell ferma nell'origine) divergono all'infinito per $t \to +\infty$. Le traiettorie sono spirali che si svolgono dal punto di equilibrio con frequenza pari a b. Il punto di equilibrio nell'origine si dice *fuoco repulsivo.*

- $a = 0$. Tutte le orbite (tranne quell ferma nell'origine) sono descritte da circonferenze (che diventano ellissi a seguito dell'operazione di coniugio) di raggio $\|X_0\|$ e centro l'origine. Esse girano attorno al punto di equilibrio, ripassando sempre per gli stessi punti: ogni orbita è quindi un orbita *periodica* (ovvero assume gli stessi valori a distanza di un tempo fissato detto periodo). Il limite per $t \to +\infty$ non esiste. Si noti che il senso della rotazione dipende dal segno di b. Il punto di equilibrio nell'origine si dice *centro.*

2.2.3 Matrici nilpotenti

Definizione 2.2.13 *Una matrice $N \in \mathcal{M}(n, n)$ si dice* nilpotente *se esiste un intero positivo m tale che $N^m = 0$.*

Una conseguenza elementare della definizione precedente è che l'unico autovalore possibile di una matrice nilpotente è quello nullo. Infatti, supponendo che $NV = \lambda V$, si avrebbe

$N^jV = \lambda^jV$ per ogni intero $j > 0$, e per un certo intero k avremo $\lambda^kV = 0$, ovvero $\lambda = 0$ dato che $V \neq 0$.

Il numero k nella definizione precedente (detto anche *ordine del nilpotente*) deve essere necessariamente minore della dimensione n. Per dimostrare tale affermazione, considerare l'immagine I di $\mathbb{R}^n$ tramite l'applicazione lineare associata alla matrice N. Supponendo per assurdo che la dimensione di I sia pari ad n, si avrebbe che l'immagine di ogni iterata $N^k(\mathbb{R}^n)$ è ancora n, contro l'ipotesi di nilpotenza. Dunque si ha $\dim(I) < n$. Da ciò segue che

$$n > \dim(N(\mathbb{R}^n)) > \dim(N^2(\mathbb{R}^n)) > \ldots > \dim(N^k(\mathbb{R}^n)) = 0,$$

che implica che il numero k è strettamente minore di n.

L'esempio tipico di matrice nilpotente è, nel caso 2×2

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Infatti, $A^2 = 0$, come si dimostra facilmente per calcolo diretto. Limitandoci come sempre al caso 2×2, mostriamo come anche in questo caso si può sempre ricondurre una matrice nilpotente alla matrice canonica A mediante un cambio di coordinate invertibile. Sia V_1 un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^2$ tale che $NV_1 \neq 0$, la cui esistenza è garantita nell'ipotesi che N non sia la matrice identicamente nulla. Poniamo quindi $V_2 = NV_1$. Dato che l'ordine del nilpotente è strettamente minore di 2 (e non può essere 0), necessariamente si deve avere $NV_2 = 0$. Ricapitolando, si ha

$$\begin{cases} NV_1 = 0V_1 + 1V_2 \\ NV_2 = 0V_1 + 0V_2, \end{cases}$$

ovvero, detta B la matrice avente per colonne V_1 e V_2,

$$NB = BQ, \quad Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

B è invertibile in quanto V_1 e V_2 sono linearmente indipendenti (altrimenti N avrebbe un autovalore non nullo). Dunque abbiamo la relazione di coniugio

$$N = BQB^{-1}.$$

Quanto appena detto può essere generalizzato in più di due dimensioni. Enunciamo il seguente risultato senza dimostrazione.

Teorema 2.2.14 (Forma canonica delle matrici nilpotenti) *Per ogni matrice quadrata $n \times n$ nilpotente N, esiste un cambio di coordinate invertibile B tale che BNB^{-1} ha tutti i coefficienti nulli tranne quelli immediatamente sotto la diagonale principale, che valgono 0 o 1.*

L'importanza delle matrici nilpotenti è espressa dal seguente teorema di decomposizione.

Teorema 2.2.15 *Ogni matrice A di tipo $n \times n$ si può scrivere in uno ed un solo modo come somma di una matrice semisemplice S e di una matrice nilpotente N che commutano tra loro, ovvero $A = S + N$, $NS = SN$.*

In particolare, dal precedente teorema si deduce che se una matrice non è semisemplice, essa ammette una componente nilpotente non banale. Anzichè esaminare i casi di un sistema dinamico a matrice nilpotente, siamo interessati al caso di un sistema dinamico la cui matrice A associata non è semisemplice. Come al solito, semplifichiamo la trattazione considerando il caso 2×2.

Consideriamo il sistema dinamico $\dot{X} = AX$ con $X(t) = (x(t), y(t))$, ed $X(0) = (x_0, y_0)$ ed

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix},$$

con $\lambda \in \mathbb{R}$. Decomponiamo $A = S + N$ con S semisemplice ed N nilpotente nel modo seguente

$$S = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Non è difficile mostrare che N ed S commutano tra loro, dunque il teorema 2.2.7 ci dice che

$$e^{At} = e^{St} e^{Nt}.$$

Sappiamo già calcolare e^{St}. Il termine e^{Nt} è semplicemente dato dalla somma di due termini

$$e^{Nt} = \mathbb{I} + tN = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix},$$

come già visto nell'esempio 2.2.6. Dunque, la soluzione del sistema dinamico è

$$\begin{cases} x(t) = e^{\lambda t} x_0 \\ y(t) = e^{\lambda t}(t x_0 + y_0). \end{cases}$$

Per $\lambda < 0$ le orbite tendono all'origine per $t \to +\infty$. Viceversa, per $\lambda > 0$ le orbite divergono all'infinito (tranne quella all'equilibrio). Le traiettorie in entrambi i casi sono date dalla formula

$$y = \frac{x}{\lambda} \log \frac{x}{x_0} + x \frac{y_0}{x_0},$$

in cui si evince che la tangente nell'origine è verticale. In questi casi il punto di equilibrio nell'origine è detto *nodo improprio*. Nel caso $\lambda = 0$ l'orbita giace sull'asse $x \equiv x_0$.

2.3 Teoria qualitativa

Quando un sistema dinamico $\dot{X} = F(X)$ è non lineare non sempre è possibile determinare esplicitamente il suo flusso integrale. Tuttavia, da alcune proprietà strutturali del sistema è possibile determinare certe *proprietà qualitative* delle orbite. Ad esempio, in condizioni abbastanza generali è possibile stabilire il comportamento limite per tempi grandi, ovvero il limite delle orbite per $t \to +\infty$. Andiamo con ordine, e stabiliamo subito una condizione necessaria affinchè un punto sia uno stato limite.

Teorema 2.3.1 *Se la soluzione $X(t)$ ha limite per $t \to +\infty$, ovvero se*

$$\lim_{t\to+\infty} X(t) = X_l \in W,$$

ove W è l'aperto su cui F è definito, allora X_l è un punto di equilibrio del sistema, ovvero $F(X_l) = 0$.

Dimostrazione.

Sia Φ^t il flusso integrale del sistema. Dal teorema di esistenza ed unicità locale, la soluzione con dato iniziale il punto limite X_l esiste localmente nell'intervallo di tempo $[0, h)$. Abbiamo la seguente relazione

$$\Phi^h(X_l) = \Phi^h\left(\lim_{t\to+\infty} X(t)\right) = \lim_{t\to+\infty} X(t+h) = X_l,$$

ove la penultima uguaglianza è giustificata dalla continuità del flusso integrale rispetto ai dati iniziali, la cui dimostrazione esula dai propositi di questo corso. □

Definizione 2.3.2 (Nozioni concernenti la stabilità) *Sia dato il sistema dinamico*

$$\dot{X} = F(X), \quad \textit{con} \quad F : W \to \mathbb{R}^n.$$

- *Un punto $S \in W$ si dice* attrattivo *se esiste una sfera aperta U, $S \in U \subset W$ tale che per ogni condizione iniziale $X_0 \in U$, la soluzione $X(t)$ ad essa corrispondente ha S come limite. Dal teorema precedente, ogni punto attrattivo deve essere di equilibrio.*
- *Se S è un punto di equilibrio, si dice* bacino di attrazione *di S l'insieme U delle condizioni iniziali tali che le corrispondenti soluzioni hanno S come limite.*
- *Un punto $S \in W$ si dice* stabile *se per ogni sfera aperta U contenente S esiste una sfera aperta V contenente S ($U, V \subset W$) tale che ogni soluzione con dato iniziale in V è tutta contenuta in U per ogni $t \geq 0$.*
- *Un punto stabile ed attrattivo si dice* asintoticamente stabile.
- *Un punto di equilibrio S si dice* instabile *se è contenuto in una sfera aperta U tale che per ogni sfera aperta V contenente S esiste una condizione iniziale $X_0 \in V$ la cui soluzione non sta in U per qualche $t \geq 0$. Ovvero, un punto è instabile se e solo se non è stabile.*

Esercizio 2.3.3 Stabilire una relazione tra le definizioni di punti di equilibrio dati nella sezione precedente (fuochi, nodi, etc) ed i concetti appena definiti. Ad esempio: un nodo attrattivo è asintoticamente stabile (qual'è il suo bacino di attrazione?).

Un punto attrattivo non è necessariamente stabile, ma i controesempi sono sono semplici.

Passiamo ora a stabilire i criteri utili per determinare la stabilità o l'instabilità di un punto di equilibrio di un sistema dinamico non lineare. Analizzeremo due metodi: il metodo di linearizzazione ed il metodo dei funzionali di Lyapounov.

2.3.1 Metodo di linearizzazione

Il metodo di linearizzazione consiste nello studiare il sistema dinamico ottenuto *linearizzando* il campo vettoriale F, ovvero considerando solo la parte lineare. Ricordiamo che, nell'ipotesi di F campo vettoriale di classe C^1, detta A la sua matrice Jacobiana in suo punto X_0, si ha

$$F(X) = A(X - X_0) + R,$$

ove il termine R è un infinitesimo di ordine superiore al primo in X_0, ovvero

$$\lim_{X \to X_0} \frac{R}{\|X - X_0\|} = 0.$$

Nel seguito diremo $A(X - X_0)$ la 'parte lineare di F vicino ad X_0'.

Definizione 2.3.4 *Dato un punto di equilibrio X_l, detta A la matrice Jacobiana di F in X_l, il sistema lineare*

$$\dot{Y} = AY,$$

è detto sistema linearizzato *di $\dot{X} = F(X)$ in X_l. Le parti reali degli autovalori di A sono detti* esponenti di Lyapounov *del sistema. Se tutti gli esponenti di Lyapounov sono negativi il punto di equilibrio X_l si dice un* pozzo*. Se tutti gli esponenti di Lyapounov sono positivi, X_l si dice una* sorgente.

Torniamo brevemente al caso lineare. Da quanto visto nella sezione precedente, ogni matrice $A \in \mathcal{M}(n, n)$ si può decomporre nella somma di una matrice S semisemplice e di una N nilpotente che commutano tra loro. Quindi, l'esponenziale di At è pari al prodotto $e^{St}e^{Nt}$. Il primo dei due fattori (vedi il teorema 2.2.12) è coniugato di una matrice diagonale a blocchi, ciascuno dei quali è l'esponenziale $e^{\lambda t}$, ove λ è un autovalore di A (reale o complesso), espresso in forma matriciale (vedi l'esempio 2.2.11). Il secondo termine è coniugato dell'esponenziale di una matrice nilpotente in forma canonica, e quindi è una matrice contenente monomi in t. Supponendo che le parti reali degli autovalori siano tutte negative, si dimostra facilmente che il punto di equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile. Abbiamo dunque dato un'idea (senza entrare nei dettagli che lasciamo come esercizio facoltativo) della dimostrazione del seguente teorema.

Teorema 2.3.5 (Teorema del pozzo lineare) *Sia dato il sistema dinamico lineare* $\dot{X} = AX$ *e supponiamo che gli autovalori di* A *hanno tutti parte reale negativa. Allora il punto di equilibrio nell'origine è asintoticamente stabile.*

Il teorema precedente riveste un'importanza tale da meritare una dimostrazione più dettagliata. Il motivo per cui ci accontentiamo invece del precedente abbozzo di dimostrazione è che saremo ben presto in grado di dimostrare rigorosamente l'asserto nel caso non lineare. Prima ci occorrono due teoremi preliminari di cui omettiamo la dimostrazione.

Teorema 2.3.6 (Teorema della norma adattata) *Sia* A *una matrice quadrata a coefficienti reali di tipo* $n \times n$, *e siano* α, β *due numeri reali tali che, per ogni autovalore* λ *di* A *si ha*

$$\alpha < \mathrm{Re}(\lambda) < \beta.$$

Allora esiste una base $V = \{V_1, \ldots, V_n\}$ *di* $\mathbb{R}^n$ *tale che se*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} y_i V_i, \qquad X = \sum_{i=1}^{n} x_i V_i$$

sono due vettori espressi mediante le coordinate in questa base, ed il prodotto scalare definito da queste coordinate è

$$(X, Y)_V = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

allora vale la disuguaglianza

$$\alpha (Y, Y)_V \leq (AY, Y)_V \leq \beta (Y, Y)_V. \tag{2.16}$$

Il prodotto scalare associato alla base V *definisce una norma* $\|Y\|_V^2 = (Y, Y)_V$ *'adattata' alla matrice* A, *quindi la disuguaglianza (2.16) si può riscrivere come*

$$\alpha \|Y\|_V^2 \leq (AY, Y)_V \leq \beta \|Y\|_V^2.$$

Ricordiamo che una *norma* su $\mathbb{R}^n$ è una applicazione $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ tale che

- $\|X\| = 0$ se e solo se $X = 0$,
- $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$ per ogni $X \in \mathbb{R}^n$ e per ogni scalare α,
- $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$, per ogni coppia di vettori X, Z.

La norma Euclidea e la norma adattata del teorema precedente sono esempi di norma. Con il simbolo $\|\cdot\|$ senza ulteriori notazioni indicheremo di qui in avanti la norma euclidea.

Teorema 2.3.7 (Teorema di equivalenza delle norme) *Su* $\mathbb{R}^n$ *tutte le norme sono equivalenti, ovvero, date due qualunque norme* $\|\cdot\|_A$ *e* $\|\cdot\|_B$ *esistono costanti positive* c *e* C *tali che*

$$c \|X\|_B \leq \|X\|_A \leq C \|X\|_B$$

per ogni vettore $X \in \mathbb{R}^n$.

Siamo ora pronti per dimostrare uno dei teoremi più importanti di questa sezione.

Teorema 2.3.8 (Teorema del pozzo nonlineare) *Sia X_l un pozzo per il sistema dinamico $\dot{X} = F(X)$, con F definito e di classe C^1 su $W \subset \mathbb{R}^n$. Sia A la matrice del sistema linearizzato in X_l. Se c è un numero reale positivo tale che ogni autovalore λ di A ha parte reale $\mathrm{Re}(\lambda) < -c$, allora esiste una sfera aperta U contenente X_l tale che:*

(a) il flusso integrale $\Phi^t(X)$ è definito per ogni X in U e per ogni $t \geq 0$,

(b) esiste una costante $B > 0$ tale che, per ogni $X \in U$ e per ogni $t \geq 0$ si ha

$$\|\Phi^t(X) - X_l\| \leq Be^{-ct}\|X - X_l\|.$$

In particolare, X_l è asintoticamente stabile.

Dimostrazione.

Cambiamo coordinate mediante traslazione in modo che $X_l = 0$. Sia $b > 0$ reale tale che $\mathrm{Re}(\lambda) < -b < -c$ per ogni autovalore λ. Per il teorema della norma adattata esiste una base V (con prodotto scalare e norma associati) tale che

$$(AX, X)_V \leq -b\|X\|_V^2.$$

Dalla definizione di differenziabilità in $X_l = 0$ abbiamo

$$\lim_{X\to 0} \frac{\|F(X) - AX\|}{\|X\|} = 0.$$

D'altra parte, applicando il teorema di equivalenza delle norme possiamo trovare una costante $C > 0$ tale che

$$\frac{\|F(X) - AX\|_V}{\|X\|_V} \leq C\frac{\|F(X) - AX\|}{\|X\|} \to 0 \quad \text{per } X \to 0.$$

Usando la (1.2) applicata al prodotto scalare $(\cdot, \cdot)_V$ otteniamo

$$(F(X) - AX, X)_V \leq \|F(X) - AX\|_V\|X\|_V$$

e dalle due relazioni precedenti segue che

$$\lim_{X\to 0} \frac{(F(X) - AX, X)_V}{\|X\|_V^2} = 0.$$

Sia ora $\epsilon > 0$ arbitrariamente piccolo. Dalla definizione di limite segue che esiste una sfera aperta U tale che, per ogni $X \in U$ si ha

$$\frac{(F(X) - AX, X)_V}{\|X\|_V^2} \leq \epsilon,$$

e di conseguenza

$$(F(X), X)_V = (F(X) - AX, X)_V + (AX, X)_V \leq (\epsilon - b)\|X\|_V^2,$$

e dato che $b > c$, si ha, definitivamente per $X \to 0$,

$$(F(X), X)_V \leq -c\|X\|_V^2.$$

Consideriamo una soluzione $X(t)$ con dato iniziale in U. Esisterà un tempo $t_1 > 0$ tale che per $0 \leq t \leq t_1$ la soluzione resterà in U. Dunque, abbiamo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|X(t)\|_V^2 &= \frac{d}{dt}(X(t), X(t))_V = 2(X(t), \dot{X}(t))_V \\ &= 2(X(t), F(X(t))_V \leq -2c(X(t), X(t))_V = -2c\|X(t)\|_V^2,\end{aligned}$$

da cui segue

$$\frac{d}{dt}\left(\|X(t)\|_V^2 e^{2ct}\right) \leq 0,$$

che implica

$$\|X(t)\|_V \leq e^{-ct}\|X(0)\|_V.$$

La formula precedente è vera nell'intervallo temporale $[0, t_1]$. Per mostrare che essa è vera per ogni $t \geq 0$, basta ripetere lo stesso procedimento svolto in precedenza ponendo come dato iniziale $X(t_1)$. Si ottiene una formula analoga valida sull'intervallo $[t_1, 2t_1]$. Iterando questo procedimento si raggiunge lo scopo. Infine, usando nuovamente il teorema di equivalenza delle norme si ottiene la tesi (b). La tesi (a) è conseguenza del teorema 1.7.4. □

Un risultato analogo si può dimostrare nel caso di una sorgente. Ovviamente in questo caso il punto di equilibrio è instabile. Omettiamo i dettagli.

2.3.2 Metodo dei funzionali di Lyapounov

Consideriamo un sistema dinamico $\dot{X} = F(X)$, F campo vettoriale definito e di classe C^1 su un aperto $W \subset \mathbb{R}^n$. Sia dato un funzionale $V : W \to \mathbb{R}$ di classe C^1. Si dice *derivata totale* di V (lungo il campo vettoriale F) la funzione

$$t \mapsto \dot{V}(X(t)) = \frac{d}{dt}V(X(t)) = \nabla V(X) \cdot F(X),$$

ovvero, la derivata totale di V lungo F è la derivata della funzione composta $t \mapsto V \circ \Phi^t$.

Definizione 2.3.9 *Una funzione V definita e di classe C^1 su un aperto $U \subset W$ contenente il punto di equilibrio X_l si dice* funzionale di Lyapounov *per il sistema dinamico rispetto all'equilibrio X_l se valgono le due condizioni*

(a) $\dot{V}(X(t)) \leq 0$ per ogni orbita $X(t)$ avente dato iniziale in U,

(b) $V(X_l) = 0$ *e* $V(X) > 0$ *per ogni* $X \in U$ *diverso da* X_l.

Se valgono la proprietà (b) e la seguente

(a') $\dot{V}(X(t)) < 0$ *per ogni orbita* $X(t)$ *avente dato iniziale in* U *diverso dall'equilibrio* X_l,

allora V *si dice* funzionale di Lyapounov stretto.

Osserviamo che un funzionale di Lyapounov ha un minimo forte nel punto di equilibrio, ed il suo valore non cresce mai lungo le soluzioni. Un funzionale di Lyapounov stretto è strettamente decrescente lungo le soluzioni. Un tipico esempio di funzionale di Lyapounov per un sistema dinamico è la norma adattata $\|X - X_l\|_V$ nel caso di un pozzo, come si evince dal teorema del pozzo nonlineare.

Teorema 2.3.10 (Primo teorema di stabilità di Lyapounov) *Se il punto di equilibrio* X_l *possiede, in un aperto* U *che lo contiene, un funzionale di Lyapounov* $V(X)$*, allora* X_l *è stabile.*

<u>Dimostrazione</u>.

Sia $\delta > 0$ abbastaza piccolo perché si abbia $B(X_l, \delta) \subset U$. L'insieme $\partial B(X_l, \delta)$ è un compatto su cui $V(X) > 0$. Dunque V ha un minimo $m > 0$ su tale insieme per il teorema di Weierstrass. Sia ora

$$Q := \{X \in B(X_l, \delta) \mid V(X) < m\}.$$

Se il dato iniziale è in Q, la soluzione non può uscire da $B(X_l, \delta)$. Infatti, dato che la distanza $d(X, X_l)$ è una funzione continua del vettore X, e dato che la soluzione deve essere anch'essa continua, la composizione $t \mapsto d(X(t), X_l)$ è una funzione continua. Dato che per $t = 0$ essa vale un numero minore o uguale di δ, se l'orbita uscisse fuori da $B(X_l, \delta)$ la funzione $t \to d(X(t), X_l)$ deve assumere necessariamente il valore δ ad un certo istante (per il teorema dei valori intermedi). Questo vuol dire che ad un certo istante t l'orbita $X(t)$ è distante δ da X_l, ovvero $X(t) \in \partial B(X_l, \delta)$, ovvero $V(X(t)) = m$. Ma questo è impossibile, perché significherebbe che V sta crescendo lungo l'orbita, contro le ipotesi. Dato che il procedimento precedente si può ripetere per ogni $\delta' < \delta$, la definizione di stabilità è dimostrata. $\square$

Se la proprietà (a) dei funzionali di Lyapounov è soddisfatta su tutto l'aperto W, è possibile ottenere delle proprietà più forti della stabilità.

Definizione 2.3.11 *Un insieme* $P \subset W$ *si dice* positivamente invariante *se, per ogni* $X_0 \in P$ *la soluzione con dato iniziale* X_0 *esiste per ogni* $t > 0$ *ed è contenuta in* P.

Enunciamo il seguente teorema senza darne la dimostrazione.

Teorema 2.3.12 (Secondo teorema di stabilità di Lyapounov) *Sia* X_l *un punto di equilibrio e sia* $V(X)$ *un funzionale di Lyapounov rispetto ad* X_l *definito su tutto* W *e tale che la proprietà (a) della definizione 2.3.9 sia soddisfatta su tutto* W*. Se* P *è un compatto (di misura non nulla), contenente* X_l*, positivamente invariante e tale che la funzione* V *sia strettamente decrescente lungo le orbite contenute in* P *(salvo che in* X_l*), allora* X_l *è asintoticamente stabile e* P *è contenuto nel bacino di attrazione di* X_l.

Osservazione 2.3.13 Come specificato in precedenza, la tecniche usate nella dimostrazione del teorema di linearizzazione e nel metodo di Lyapounov si somigliano molto: in entrambi i casi si utilizzano dei funzionali per avere informazioni sul comportamento delle orbite. Un tale approccio sarà efficace anche in contesti diversi, quali lo studio delle equazioni di diffusione o dei modelli di trasporto trattati in questo corso.

2.4 Applicazioni

2.4.1 Sistemi newtoniani

Consideriamo un punto materiale che si muove lungo una retta la cui ascissa indichiamo con x, soggetto ad una forza esterna $f(x)$ dipendende dalla posizione del punto. L'equazione di Newton ci dice che

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x).$$

Supponiamo per semplicità che f sia di classe C^1. Ponendo $\dot{x} = y$ si ottiene il sistema dinamico 2×2

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x). \end{cases} \tag{2.17}$$

Si tratta di un sistema dinamico nonlineare detto *sistema dinamico newtoniano*. Lo spazio degli stati va interpretato come lo spazio bi–dimensionale avente per coordinate la posizione x e la velocità y. Prima di studiarlo in dettaglio, diamo la seguente definizione, che vale per ogni sistema dinamico.

Definizione 2.4.1 *Un funzionale $E : W \to \mathbb{R}$ si dice* integrale primo *per il sistema dinamico $\dot{X} = F(X)$, $F : W \to \mathbb{R}^n$, se, per ogni orbita $X(t)$ del sistema, la funzione*

$$t \mapsto E(V(t))$$

è costante.

I sistemi newtoniani del tipo (2.17) hanno sempre un integrale primo. Per convincercene, chiamiamo $E(x, y)$ una funzione definita sullo spazio degli stati ed imponiamo che E sia un integrale primo. Si ha

$$\dot{E} = E_x\dot{x} + E_y\dot{y} = E_x y + E_y f(x).$$

Quindi si ottiene $\dot{E} = 0$ ponendo ad esempio

$$E_x = -f(x), \quad E_y = y.$$

Integrando entrambi le precedenti equazioni rispetto ad x ed y rispettivamente, otteniamo

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

I due addendi di E sono interpretati come *energia cinetica* ed *energia potenziale*. Notare che, coerentemente con quanto appreso nei corsi di Fisica, l'energia potenziale è definita a meno di una costante x_0. La somma E è detta *energia totale*. Appare chiaro che i punti di equilibrio sono quelli in cui sia la velocità $\dot{x} = y$ che la forza $f(x)$ sono nulle. Applichiamo il metodo di Lyapounov nel seguente teorema.

Teorema 2.4.2 *Nel sistema newtoniano $\ddot{x} = f(x)$, se x_0 è un punto in cui $V = -\int^x f(\xi)d\xi$ ha un minimo locale forte, allora $(x, y) = (x_0, 0)$ è un punto di equilibrio stabile ma non asintoticamente stabile.*

Dimostrazione.
Scegliamo la costante che definisce l'energia potenziale in modo che $V(x_0) = 0$, ovvero

$$V(x) = \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

Allora E è un funzionale di Lyapounov per $(x_0, 0)$ (verificare per esercizio). Quindi il punto di equilibrio è stabile. D'altra parte, $(x_0, 0)$ non può essere un punto limite per $t \to +\infty$, altrimenti si avrebbe su quell'orbita $E \to 0$, cosa impossibile per il teorema della permanenza del segno visto che E è costante e positiva lungo le orbite. $\square$

Osservazione 2.4.3 Analizzando il modello nello spazio degli stati, si deduce che le orbite sono racchiuse nelle curve di livello $E \equiv$ costante. In particolare, le orbite sono periodiche, dato che sono definite globalmente nel tempo e non possono uscire da una data curva di livello.

Modifichiamo ora il sistema newtoniano introducendo un termine *dissipativo*, ovvero dovuto ad attrito. L'equazione di Newton in questo caso è data da

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x) - \gamma\frac{dx}{dt}, \quad \gamma > 0.$$

Ponendo $\dot{x} = y$ si ottiene il sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f(x) - \gamma y. \end{cases} \tag{2.18}$$

Possiamo definire l'energia totale E come nel caso precedente. Supponiamo di nuovo che x_0 sia un punto di minimo per $-\int^x f(\xi)d\xi$ e definiamo

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

In questo caso otteniamo

$$\dot{E} = -f(x)y + yf(x) - \gamma y^2 = -\gamma y^2 \leq 0,$$

ovvero l'energia totale non è più un integrale primo (l'energia viene dissipata per via dell'attrito), ma è ancora un funzionale di Lyapounov. Quindi il punto $(x_0, 0)$ è stabile. Questa volta però è possibile che esso sia anche asintoticamente stabile, perchè l'energia non è più conservata. Inoltre, l'osservazione ci suggerisce che l'attrito induce nel sistema la tendenza a raggiungere l'equilibrio per tempi lunghi. Per rendere tale affermazione rigorosa utilizziamo questa volta il metodo di linearizzazione. Supponendo per semplicità che $x_0 = 0$, il sistema linearizzato è

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = f'(0)x - \gamma y, \end{cases} \tag{2.19}$$

per cui l'equazione caratteristica per determinare gli autovalori è

$$\lambda^2 + \gamma\lambda - f'(0) = 0,$$

da cui si evince che, sotto l'ipotesi di $f'(0) < 0$, gli esponenti di Lyapounov hanno parte reale strettamente negativa (per alcuni valori di γ si hanno anche autovalori reali, entrambi negativi). Dunque, il teorema di linearizzazione ci dice che il punto di equilibrio è asintoticamente stabile.

Esercizio 2.4.4 (Oscillatore armonico smorzato) Consideriamo un punto soggetto ad una forza elastica di richiamo $f(x) = -k \sin x$, con $k > 0$, e ad una forza di attrito lineare $-\gamma\dot{x}$. Usando il metodo di linearizzazione, determinare la natura dei punti di equilibrio del sistema dinamico associato e del suo linarizzato.

2.4.2 Il modello preda-predatore di Lotka e Volterra

Vediamo qui un celebre modellino (dovuto a Lotka e Volterra), che riesce a mettere in equazioni differenziali (abbastanza semplici) l'evoluzione temporale del numero di individui di due specie, prede e predatori, in interazione. Questo modello è sorto dalla necessità di giustificare qualitativamente e decrivere quantitativamente i risultati sperimentali rigurdanti l'andamento periodico della quantità di pesce al mercato di Ancona. Consideriamo il sistema composto di due popolazioni ed indichiamo con C il numero delle prede (conigli) e con V il numero dei predatori (volpi). L'evoluzione di queste due grandezze è data dal sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} \dot{C} = \alpha C - \beta CV \\ \dot{V} = -\gamma V + \delta CV, \end{cases} \tag{2.20}$$

ove $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono numeri reali positivi. Possiamo notare che in assenza di volpi i conigli cescerebbero esponenzialmente (secondo il cosiddetto modello di Malthus), mentre in assenza di conigli le volpi si estinguerebbero esponenzialmente. I termini nonlineari modellano l'interazione fra le due specie. In particolare il termine $-\beta CV$ ci dice che la probabilità che un coniglio muoia è proporzionale al numero di volpi, mentre il termine δCV ci dice che la probabilità che una volpe si riproduca è proporzionale al numero dei conigli. Vogliamo mostrare che il sistema 2.20 ammette un integrale primo. Dividendo la prima equazione in (2.20) per C e la seconda per V e ponendo $x = \log C$ ed $y = \log V$, si ottiene:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha - \beta e^y \\ \dot{y} = -\gamma + \delta e^x. \end{cases} \tag{2.21}$$

Imponendo che $H(x, y)$ sia un integrale primo otteniamo

$$\dot{H} = H_x \dot{x} + H_y \dot{y} = 0$$

che è soddisfatta, ad esempio, qualora valgano le relazioni

$$H_x = -\gamma + \delta e^x, \quad H_y = -\alpha + \beta e^y,$$

per cui, a meno di costanti additive,

$$H(x, y) = \delta e^x - \gamma x + \beta e^y - \alpha y$$

è un integrale primo. Nelle variabili originali (con abuso di notazione) abbiamo determinato l'integrale primo

$$H(C, V) = \delta C - \gamma \log C + \beta V - \alpha \log C.$$

Dalle (2.20) si vede bene che vi è un punto di equilibrio quando

$$V = \frac{\alpha}{\beta}, \quad C = \frac{\gamma}{\delta}.$$

Dal primo teorema di Lyapounov applicato all'integrale primo H attorno a tale punto, si vede che l'equilibrio è stabile, e quindi piccole perturbazioni danno piccoli moti. Inoltre, le orbite sono periodiche. Questo fenomeno oscillatorio è assai interessante e nasce da un ritardo tra l'evoluzione dei conigli e delle volpi. Se ad esempio le volpi crescono, allora i conigli diminuiscono per la caccia che subiscono, ma allora molte volpi muoiono di fame per la difficoltà di reperire il cibo. Di conseguenza i conigli, soggetti a minore pressione dalle volpi, crescono, trascinando una crescita del cibo e quindi delle volpi stesse, e così via.