Capitolo 4: Beni Perfettamente Divisibili: Domanda, Offerta e Surplus.

4.1: Introduzione

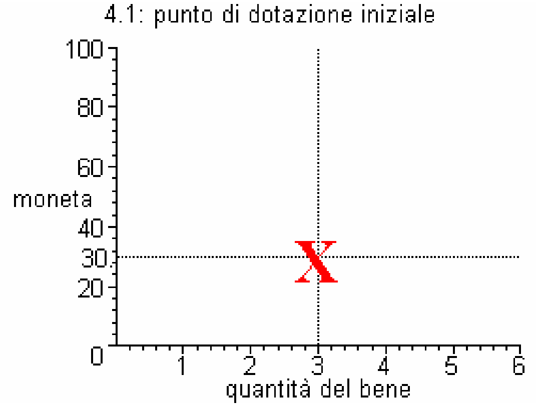
L'analisi contenuta in questo capitolo si discosta da quella condotta nel capitolo precedente per l'assunzione che il bene oggetto di scambio possa essere comprato e venduto in quantità di qualsiasi ammontare e non solo in quantità intere. Il bene considerato, dunque, è perfettamente divisibile. Al fine di mettere in risalto le similarità esistenti tra questo e il capitolo precedente, l'analisi utilizzerà lo stesso esempio numerico di partenza. Le preferenze individuali sono ancora del tipo quasi lineari.

4.2: La Situazione iniziale

Seguendo lo stesso approccio del capitolo 2, per la determinazione delle curve di domanda e offerta di un bene perfettamente divisibile utilizzeremo l'analisi grafica. Come in precedenza, la quantità del bene viene misurata sull'asse delle ascisse e l'ammontare di moneta, che l'individuo può spendere nel consumo di altri beni, sull'asse delle ordinate.

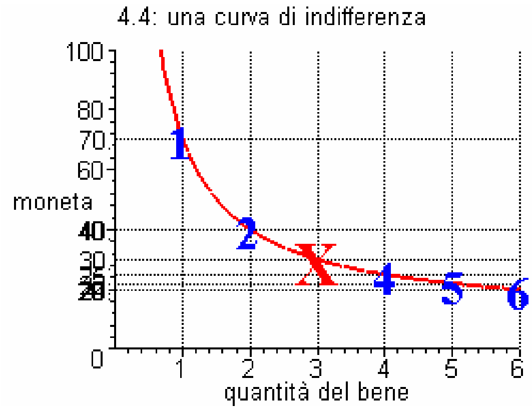
Assumiamo che la dotazione iniziale dell'individuo comprenda una certa quantità del bene (uguale o maggiore di zero) e un certo ammontare di moneta (anch'essa uguale o maggiore di zero). Assumiamo inoltre che l'individuo disponga inizialmente di 3 unità di bene e di 30 euro. Il punto X nella figura 4.1 indica tale dotazione iniziale (3,30).

4.1: punto di dotazione iniziale



4.3: Una curva di indifferenza

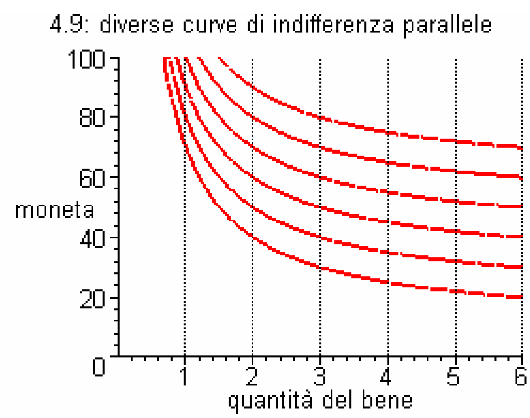
Come nel capitolo precedente, assumiamo di avere informazioni sulle preferenze dell'individuo. Utilizziamo gli stessi valori dei prezzi di riserva. Assumiamo, quindi, che l'individuo sia disposto a pagare *al massimo* 5, 3 e 2 euro per acquistare rispettivamente la prima, la seconda e la terza unità aggiuntiva del bene e che sia disposto a vendere la prima unità del bene per non meno di 10 euro e la seconda unità del bene per non meno di 30 euro. Dati questi valori dei prezzi di riserva siamo in grado di stabilire che l'individuo è indifferente tra le dotazioni indicate dai punti 1, 2, X, 4, 5, 6 in figura 4.4. Congiungendo questi punti di indifferenza otteniamo la *curva di indifferenza* passante per la dotazione iniziale X, alla quale a volte si farà riferimento con il nome di curva di indifferenza iniziale. Al contrario del caso di un bene discreto, ha ora senso considerare *tutti* i punti che giacciono su questa curva, poiché il bene può essere scambiato in qualsiasi ammontare. Possiamo affermare pertanto che l'individuo è indifferente tra *tutti* i punti che si trovano lungo la curva di indifferenza: se gli venisse offerta la possibilità di scegliere tra una qualsiasi delle dotazioni lungo la curva, egli opterebbe indifferentemente per una di esse, così come non obietterebbe se qualcun altro ne scegliesse una a caso al suo posto.



Ogni combinazione *(q,m)* al di sopra della curva di indifferenza rappresentata nella figura 4.4 è preferita a tutti punti che si trovano lungo curva stessa e a loro volta i punti sulla curva sono preferiti alle dotazioni che si trovano nell'area sottostante.

4.4: Le curve di indifferenza

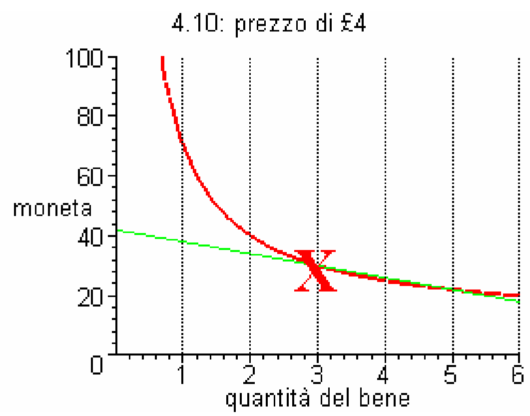
Abbiamo derivato la curva di indifferenza passante per la dotazione iniziale X, utilizzando le informazioni disponibili sui prezzi di riserva individuali. Naturalmente, lo stesso metodo può essere impiegato per disegnare la curva di indifferenza passante per uno qualsiasi dei punti appartenenti allo spazio *(q,m)*. Per ogni possibile combinazione di *q* e *m* esiste una curva di indifferenza. In generale, la forma delle curve di indifferenza dipende dalle preferenze individuali – in altri termini, dal tasso al quale l'individuo è disposto a sostituire *q* e *m*. Per determinare la forma delle curve di indifferenza, dunque, è necessario conoscere la struttura delle preferenze individuali. In questo capitolo, così come nel precedente, assumiamo che le preferenze siano quasi lineari, il che permette di derivare la forma di tutte le curve di indifferenza a partire da quella passante per la dotazione iniziale. Ancora una volta i prezzi di riserva sono indipendenti dalla disponibilità di moneta e le curva di indifferenza sono parallele in direzione verticale (figura 4.9).



Si ricorderà che l'ipotesi di preferenze quasi lineari consente di determinare in maniera non ambigua di quanto l'individuo stia meglio o peggio possedendo una particolare combinazione *(q,m)* anziché un'altra. Assumiamo ad esempio di voler confrontare una dotazione sulla più alta delle curve di indifferenza nella mappa disegnata nella figura 4.9, con una dotazione che si trova sulla più bassa di esse. Poiché un individuo è indifferente tra tutte le possibili combinazioni di bene e moneta che si trovino sulla curva di indifferenza più alta allora sappiamo che sarà indifferente tra una qualsiasi combinazione e (3,80). Allo stesso modo, egli si ritiene indifferente tra una qualsiasi dotazione che si trovi lungo la curva di indifferenza più bassa e (3,30). Ovviamente (3,80) è da preferirsi a (3,30), essendo caratterizzata da una maggiore disponibilità di moneta pari a 50 euro, in altre parole la distanza verticale che divide le due curve di indifferenza[26].

4.5: La Domanda

Deriviamo ora il livello di domanda individuale per ogni livello di prezzo. Gli esempi numerici sono gli stessi del capitolo 3 ma ricordiamo che si riferiscono ad un bene perfettamente divisibile. Iniziamo con il considerare un prezzo unitario di 4 euro (figura 4.10).



Partendo dalla propria dotazione iniziale (3,30), l'individuo (come venditore) può decidere di vendere le 3 unità del bene e spostarsi al punto (0,42), vendere 2 delle 3 unità e collocarsi su (1,38) o vendere solo 1 delle 3 unità del bene e posizionarsi su (2,34). Un'altra possibilità è che l'individuo decida di partecipare allo scambio come compratore di 1 unità aggiuntiva del bene ottenendo la nuova dotazione (4,26), di 2 unità aggiuntive e ottenere la combinazione (5,22), o infine di 3 unità aggiuntive e raggiungere il punto (6, 18). Unendo tutti i punti raggiungibili partendo dal punto di dotazione iniziale X, otteniamo il vincolo di bilancio. In questo caso il vincolo di bilancio ha una inclinazione di -4 euro, generalizzando possiamo dire che il vincolo di bilancio ha inclinazione pari a (meno) il livello del prezzo di scambio.

Sul mercato possono essere scambiate quantità del bene di qualsiasi ammontare. Ad esempio, ad un prezzo unitario di 4 euro, l'individuo può acquistare 2.5 unità del bene per un costo totale di 10 euro e spostarsi su (5.5, 20). Notiamo che anche questa dotazione appartiene al vincolo di bilancio.

Per rendere più generale la nostra analisi, assumiamo che l'individuo desideri detenere una quantità del bene pari a q e un ammontare di moneta pari a m. Ad un prezzo p, il costo della combinazione (q,m) è pari a $pq+m$ (dato che il prezzo unitario di m è 1). La dotazione iniziale di q e m costituisce la fonte di finanziamento del costo $pq+m$. Se indichiamo la dotazione iniziale del bene con Q (nel nostro esempio $Q=3$) e quella di moneta con M (nel nostro esempio $M=30$), il valore della dotazione iniziale è definito da $PQ+M$. Il vincolo di bilancio può essere scritto come segue:

$$pq + m = pQ + M \tag{4.1}$$

Il costo degli acquisti effettuati sul mercato deve essere uguale al valore della dotazione iniziale. La forma più appropriata nella quale esprimere il vincolo di bilancio del compratore del bene è:

$$p(q - Q) = M - m \tag{4.2}$$

[26]Due dotazioni possono essere confrontate *qualsiasi* sia la quantità del bene detenuta dall'individuo. Ad esempio, la combinazione (4,75) può essere confrontata con (4,25), oppure (5,72) con (5,22), oppure ancora (6,70) con (6,20) e così via, dato che la differenza tra ciascuna delle coppie di dotazioni considerate è sempre 50 euro.

Analogamente, il vincolo di bilancio può essere riscritto in una forma più adatta a riflettere il punto di vista del venditore:

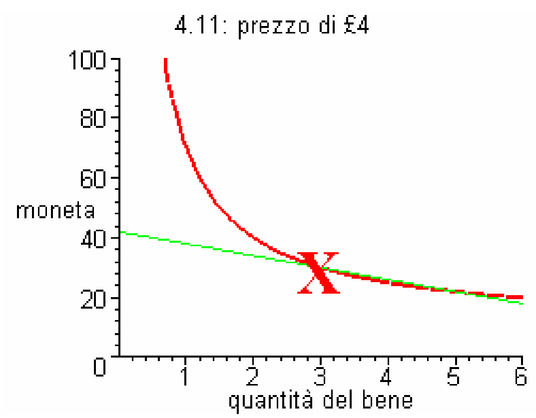
$$p(Q-q) = m - M \qquad (4.3)$$

Consideriamo il vincolo di bilancio dal punto di vista del compratore. Se il compratore desidera acquistare sul mercato quantità aggiuntive del bene rispetto alla sua dotazione iniziale, $q > Q$ e $p(q - Q) > 0$. Il costo da sostenere per acquistare le unità aggiuntive è pari a $p(q - Q)$ e deve essere finanziato riducendo la dotazione di moneta dal livello iniziale M a m.

Prendiamo ora in considerazione l'equazione (4.3). Se il venditore decide di vendere una certa quantità del bene, $Q > q$ e $p(Q - q) > 0$. Il ricavato della vendita permette al venditore di incrementare la propria dotazione iniziale da M a m, così come l'equazione (4.3) mette in evidenza.

Le tre equazioni (4.1), (4.2) e (4.3) sono equivalenti e rappresentano algebricamente la retta nello spazio (q,m) passante per il punto X e con inclinazione pari $-p$ (sostituendo $q=Q$ e $m=M$ in una delle tre equazione si può verificare come l'equazione sia soddisfatta)[27].

Estendiamo al caso di un bene perfettamente divisibile il problema della scelta della combinazione ottima. Non essendo l'individuo costretto ad acquistare solo quantità intere del bene, possiamo eliminare dal diagramma le rette verticali che dipartono dall'asse delle ascisse in corrispondenza dei valori 1,2,3,4,5.



La semplice interpretazione del grafico 4.11 non consente di individuare dove si collochi esattamente la scelta ottima dell'individuo. Dovrebbe essere chiaro, comunque, che essa debba trovarsi nell'intervallo compreso tra 3 e 5 unità del bene, il che implica una quantità domandata del bene compresa tra 0 e 2 unità. Il vincolo di bilancio, infatti, interseca la curva di indifferenza passante per X nei punti (3,30) e (5,22). Di conseguenza, nell'intervallo compreso tra $q=3$ e $q=5$, il vincolo di bilancio si trova al di sopra della curva di indifferenza iniziale. Non è immediato risolvere il problema della scelta ottima dell'individuo senza far ricorso alcuno alla matematica ma, da quanto detto finora, la soluzione che ci proponiamo di trovare ha proprietà a noi note. Deve trattarsi di un punto del vincolo di bilancio che permetta di massimizzare la distanza verticale dalla curva di indifferenza iniziale. Dunque, la soluzione deve trovarsi sulla più alta curva di indifferenza

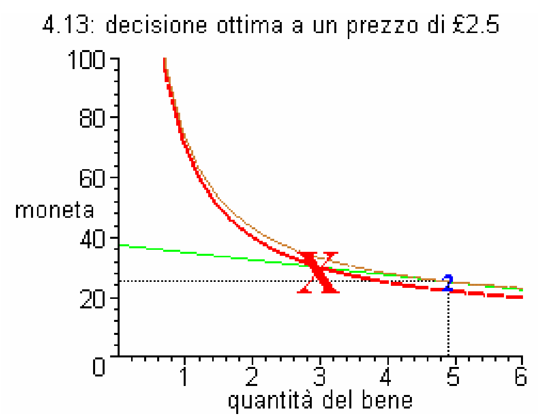
[27] Riscrivendo il vincolo di bilancio nella seguente forma: $m = (pQ + M) - pq$, risulta evidente che il valore dell'inclinazione è $-p$.

in maniera tale che la distanza tra il vincolo di bilancio e la curva passante per la dotazione iniziale sia massima.

Di seguito viene riportata la soluzione del problema della scelta ottima ottenuta utilizzando un software matematico[28]. In corrispondenza della combinazione (3.87, 26.52), la distanza tra il vincolo di bilancio e la curva di indifferenza iniziale è massimizzata ed è pari a 1.02 euro. Dunque, la scelta ottima consiste nello spostarsi dalla dotazione iniziale (3,30) al punto (3.87, 26.52), comprando 0.87 unità del bene e ottenendo un miglioramento in termini di benessere pari a 1.02 euro.

Prima di passare alla determinazione della curva di domanda, risolviamo il problema della scelta ottima per altri due livelli di prezzo unitario: 2.5 e 1.8 euro.

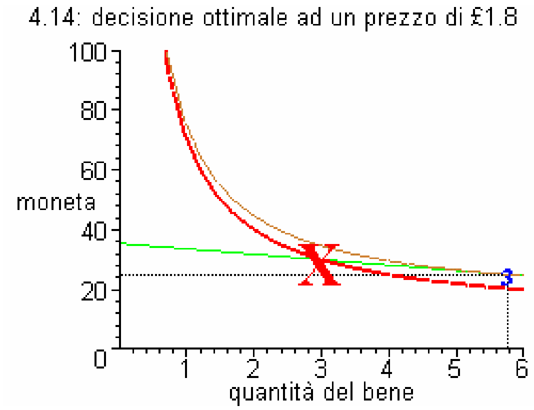
L'inclinazione del vincolo di bilancio in corrispondenza di un prezzo unitario di 2.5 euro, è -2.5 euro (figura 4.13).



Come prima, la soluzione ottima sarà data dal punto sul vincolo di bilancio in corrispondenza del quale la distanza tra curva di indifferenza iniziale e il vincolo di bilancio stesso è massimizzata. Il punto (4.9,25.25) ha questa proprietà ed è raggiungibile a partire da (3,30) acquistando 1.9 unità del bene per un costo complessivo di 4.75 euro. Di conseguenza, la dotazione iniziale di moneta si riduce da 30 a 25.25 euro. La combinazione ottima (4.9,25.25) (indicata in figura 4.6 con 2) si trova su una curva di indifferenza ad una distanza verticale di 4.62 euro da quella iniziale.

Per un prezzo unitario di 1.8 euro, l'inclinazione del vincolo di bilancio diventa -1.8 euro. La combinazione ottima per questo livello di prezzo è (5.77, 25.01) ed è indicata nella figura 4.14 con '3'. In corrispondenza di questo nuovo livello di prezzo, l'individuo compra 2.77 unità supplementari del bene ad un costo complessivo di 4.99 euro e ottiene un guadagno di 4.62 euro rispetto alla situazione di partenza.

[28] Ogni curva di indifferenza ha la seguente forma algebrica: $m - 60/q = costante$. La soluzione del problema della scelta ottima è la combinazione (q,m) tale che l'espressione $m - 60/q$ sia massimizzata rispetto al vincolo di bilancio $4q + m = 42$. La soluzione è data da $q = (60/p)^{1/2} - 3$. Pertanto si ha $p = 4$, $q = 3.87$. Una dimostrazione formale del metodo di massimizzazione sarà fornita più avanti nel testo.



Finora abbiamo individuato tre punti della curva di domanda. Procedendo con altri esempi numerici che contemplino altrettanti livelli di prezzo, potremmo trovare altri punti ancora, ma è più interessante applicare un metodo più generale che ci consenta di determinare la curva di domanda algebricamente. Chi volesse ignorare i passaggi matematici che ci permettono di determinare l'espressione della curva di domanda può farlo. Ciò che importa è comprendere il metodo applicato per risolvere il problema di massimizzazione ed essere in grado di interpretare la soluzione finale del problema stesso. In fondo, è più importante comprendere l'economia che la matematica.

Impostiamo il problema della determinazione della curva di domanda. Il vincolo di bilancio è dato da $pq + m = 3p + 30$ (nel nostro esempio numerico, $Q=3$ e $M=30$). Il nostro obiettivo è calcolare la combinazione di q e m che sia sulla più alta curva di indifferenza possibile – tale che, la sua distanza dalla curva di indifferenza iniziale sia massima. Come anticipato nella nota 3, l'espressione che definisce una generica curva di indifferenza è data dalla equazione (4.4):

$$m - 60/q = costante \qquad (4.4)$$

Maggiore è il valore assunto dalla constante, più alta (più distante dall'origine degli assi) è la curva di indifferenza[29]. Formalmente, la soluzione del problema di massimo è data dai valori di q e m tali che l'espressione $m - 60/q$ sia massimizzata dato il vincolo $pq + m = 3p + 30$. Come mostrato nell'appendice matematica la soluzione a questo problema di massimizzazione è dato dalla equazione 4.5.

$$q = \sqrt{(60/p)} \qquad (4.5)$$

L'espressione (4.5) definisce la domanda *lorda* del bene, ossia il livello ottimo di consumo del bene stesso. Per ottenere le equazioni di domanda e offerta *nette*, la domanda lorda deve essere confrontata con la dotazione iniziale del bene. È facilmente verificabile che q è minore, uguale o maggiore della dotazione iniziale Q, se e solo se $\sqrt{(60/p)}$ è rispettivamente minore, uguale o maggiore di 3; ovvero, $p/60$ maggiore, uguale o minore di 1/9 e p minore, uguale o maggiore a 60/9 = 6⅔.

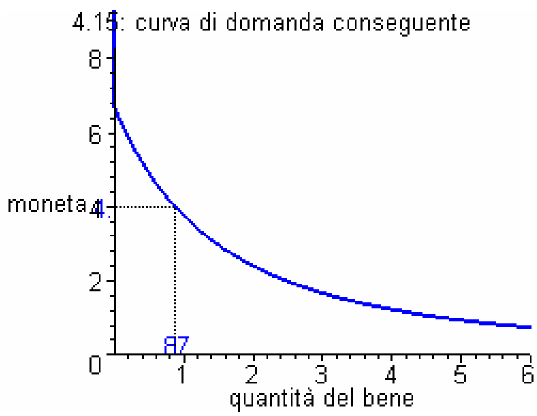
Si può concludere che l'individuo sarà compratore netto se p è sufficientemente basso (minore di 6⅔) e sarà venditore netto per valori di p sufficientemente alti (maggiori di 6⅔). Infine, egli non si sposta dalla dotazione iniziale nel caso in cui p sia uguale a 6⅔. Le considerazioni conclusive del capitolo contengono alcune osservazioni sull'interpretazione del valore del prezzo di 6⅔.

[29] Nella figura 4.3, il valore della costante per la curva di indifferenza più bassa è 10 euro (un punto sulla curva è (3,30)). L'equazione della curva è dunque $m - 60/q=10$. Il valore della costante per la più alta delle curve di indifferenza rappresentate in figura è 60 euro e la sua equazione uguale è data da $m - 60/q=60$.

La nostra conclusione è che l'individuo si comporta come compratore netto se p è minore di 6⅔. In questo caso la domanda lorda (equazione 4.5) è maggiore di 3. La domanda *netta* si calcola come differenza tra la domanda lorda e la dotazione iniziale:

$q = \sqrt{(60/p)} - 3$ (4.6)

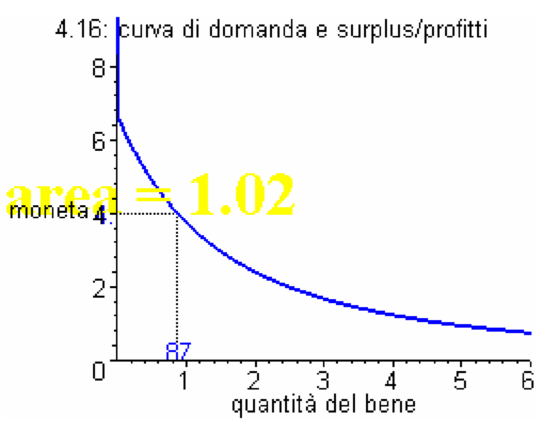
La domanda netta rappresentata nella figura successiva, decresce al crescere del prezzo ed è perciò inclinata negativamente.



Nella figura 4.15 è indicata la quantità di bene (0.87) acquistata dall'individuo in corrispondenza del prezzo unitario di 4 euro. Le quantità domandate in corrispondenza degli altri livelli di prezzo dei nostri esempi numerici possono essere indicate nella figura allo stesso modo.

Verifichiamo ora la validità delle proprietà del surplus.

Si ricorderà che il surplus del compratore è pari all'area compresa tra il prezzo effettivamente pagato e la curva di domanda. Dal grafico precedente risulta che tale area è *approssimativamente* uguale all'area del triangolo con base 0.87 e altezza 2⅔ (0.5 x 0.87 x 2⅔ = 1.16). Tuttavia, questa è solo una misura approssimativa, infatti, la misura corretta del surplus è stata già ricavata in precedenza (1.02 euro) e calcolando esattamente l'area tra la curva di domanda e il prezzo pagato, si ottiene lo stesso risultato[30].



Il lettore può verificare da sé la validità in questo contesto delle altre proprietà del surplus del compratore.

---

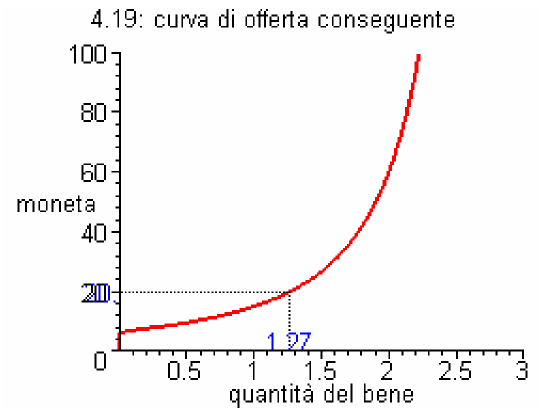
[30] Formalmente l'area in questione è data dall'integrale di ($q =$) $\sqrt{(60/p)} - 3$ definito tra $p = 4$ e $p = 6+⅔$. Questo integrale è uguale all'espressione $\sqrt{(60p)} - 3p$ valutata tra $p = 4$ e $p = 6+⅔$, il che restituisce un risultato di 1.02. Non è essenziale comprendere questi passaggi matematici.

4.6: L'offerta

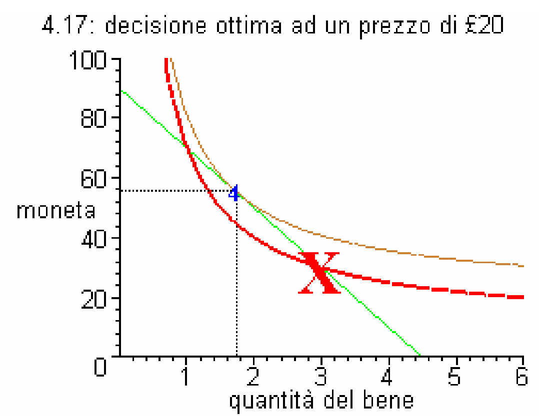
La curva di offerta è stata già ricavata implicitamente. Infatti, abbiamo già stabilito che l'individuo partecipa al mercato come venditore del bene per prezzi di mercato sufficientemente alti, ovvero, se il prezzo è maggiore di 6⅔. Dall'equazione (4.5) risulta che se $p > 6⅔$, la combinazione ottima *(q,m)* include una quantità di bene minore di quella detenuta inizialmente e, di conseguenza, una parte del bene viene venduta. L'offerta netta si ottiene dalla differenza tra la dotazione iniziale di bene (3 unità) e la quantità q definita dall'espressione (4.5). Per $p > 6⅔$, dunque, la funzione di offerta (netta) è data dalla equazione (4.7):

$$q = 3 - \sqrt{(60/p)} \qquad (4.7)$$

L'offerta netta, figura 4.19, è crescente nel livello del prezzo, ed è quindi inclinata positivamente.

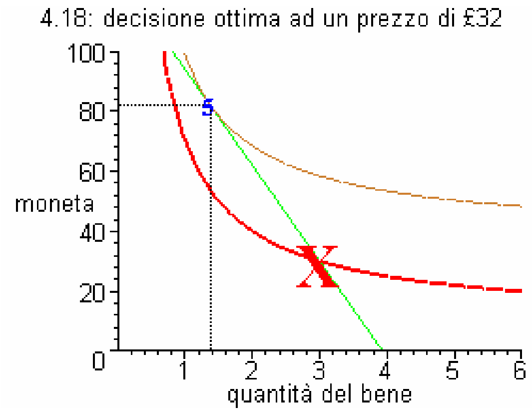


Deriviamo il livello di offerta netta corrispondente ad un valore di prezzo unitario di 20 euro. Per *p=20 euro*, il vincolo di bilancio ha un'inclinazione di -20 euro. La combinazione ottima (1.73, 55.4) è indicata con 4 nella figura 4.17, in corrispondenza del punto dove il vincolo di bilancio è alla sua distanza massima (10.72 euro) dalla curva di indifferenza passante per la dotazione iniziale. Spostarsi dalla dotazione iniziale al punto (1.73, 55.4), implica la vendita di 1.27 unità del bene in cambio di 25.4 euro e un incremento nel benessere dell'individuo di 10.72 euro, pari alla misura della distanza verticale tra la nuova curva di indifferenza e quella iniziale.



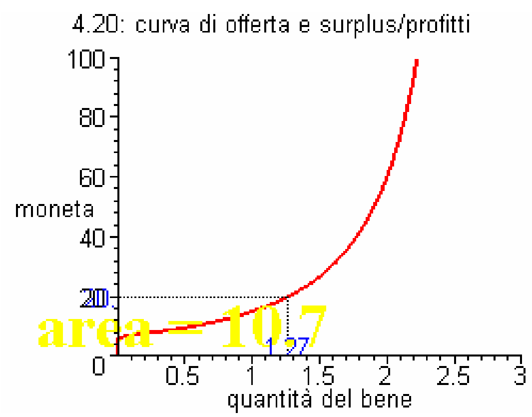
La quantità dell'offerta netta, ad un prezzo unitario di 20 euro, è mostrata lungo la curva di offerta rappresentata nella figura 4.17 ed è pari a 1.27.

Assumiamo ora un prezzo unitario di 32 euro, al quale corrisponde un vincolo di bilancio con un valore dell'inclinazione di -32 euro.



La combinazione ottima (1.37, 82.16) è indicata con 5 in figura 4.18 ed è raggiungibile vendendo 1.63 unità del bene in cambio di 52.16 euro. Naturalmente, in base alle proprietà del punto di ottimo, il punto 5 si trova al di sopra della curva di indifferenza iniziale.

Verifichiamo, infine, la validità delle proprietà grafiche del surplus del venditore. Al prezzo unitario di 20 euro, figura 4.20, il venditore offre una quantità del bene pari a 1.27.



Dalla figura 4.20 risulta che l'area compresa tra la retta del prezzo di 20 euro e la curva di offerta è di poco più grande dell'area del triangolo con base 1.27 e altezza 13.3333 (= 20 – 6.6666). L'area di questo triangolo (0.5 x 1.27 x 13.3333 = 8.47) è minore della misura corretta del surplus (10.72 euro)[31]. Il lettore può provare a calcolare il valore del surplus in corrispondenza di un prezzo unitario pari a 32 euro e verificare che il risultato corretto è 28.36.

4.7: Considerazioni conclusive

Riguardo l'impiego degli esempi numerici, valgono le considerazioni svolte nel capitolo precedente. Si è voluta preservare l'agilità della trattazione ed evitare la necessità di utilizzare calcoli matematici complessi. Il capitolo ha perseguito la finalità di estendere i risultati ottenuti nel capitolo 3 al caso di un bene perfettamente divisibile. Ricordiamo i più importanti di questi risultati:

7) L'ipotesi di preferenze quasi lineari permette di misurare in maniera non ambigua i guadagni dallo scambio. In presenza di preferenze quasi lineari è possibile quantificare esattamente il surplus ottenuto da compratori e venditori del bene.
8) Il valore dell'inclinazione del vincolo di bilancio nello spazio *(q,m)* è *sempre* uguale a *(meno) il valore del prezzo di scambio*.

[31] Formalmente l'area in questione è data dall'integrale *(q =) 3 - √(60/p)* definito tra *p = 6+⅔* a p = 20. Questo integrale è uguale all'espressione *3p - √(60p)* valutata tra *p = 6⅔* e *p = 20*, che corrisponde ad un valore di 10.72.

9) Dato un certo vincolo di bilancio, il punto nello spazio *(q,m)* in corrispondenza del quale l'individuo desidera posizionarsi, deve trovarsi alla maggiore distanza verticale possibile dalla curva di indifferenza passante per la curva di indifferenza iniziale.
10) Se la proprietà al punto 3 è soddisfatta, diventa possibile individuare la migliore strategia possibile per l'individuo e determinare la domanda lorda del bene per ogni possibile livello di prezzo.
11) Se la domanda lorda è maggiore della dotazione iniziale, l'individuo desidera incrementare la propria disponibilità iniziale del bene e la *domanda netta* è positiva. La curva di domanda si ottiene rappresentando graficamente i livelli di domanda netta in corrispondenza di ogni livello di prezzo. L'area compresa tra il prezzo effettivamente pagato e la curva di domanda misura il surplus ottenuto dall'individuo in seguito all'acquisto del bene sul mercato, ovvero, l'innalzamento di benessere conseguente dallo scambio.
12) Se la domanda lorda è inferiore alla dotazione iniziale, l'individuo desidera vendere parte del bene: l'*offerta netta* è positiva. La curva di offerta si ottiene rappresentando graficamente i livelli di offerta netta per ogni dato livello di prezzo. L'area compresa tra il prezzo effettivamente ricevuto e la curva di offerta misura il surplus ottenuto dall'individuo in seguito alla vendita del bene sul mercato, ovvero il miglioramento in termini di benessere derivante dallo scambio.

Inizialmente, le proprietà del surplus potrebbero sembrare poco chiare e, in effetti, una buona conoscenza della matematica è necessaria per comprenderle a pieno. In ogni caso, è sufficiente che il lettore possa ritenerle valide in base ai risultati degli esempi numerici fin qui illustrati e accettare per il momento che valgano in generale.

L'analisi grafica svolta nei capitoli 3 e 4 può essere replicata per un'altra mappa di preferenze quasi lineari. In questo caso, è sufficiente considerare un punto qualsiasi nello spazio *(q,m)* e disegnare la curva di indifferenza passante per tale punto. Tutte le altre curve di indifferenza della mappa saranno parallele alla prima in direzione verticale.

Un'ultima considerazione riguarda l'interpretazione del valore del prezzo di scambio di $6\frac{2}{3}$. In corrispondenza di questo livello di prezzo, l'individuo non desidera spostarsi dalla dotazione iniziale. Ma quando avviene che l'individuo non desidera comprare né vendere il bene? Quando tutti i punti appartenenti al vincolo di bilancio si trovano *al di sotto* della curva di indifferenza iniziale, ad eccezione della dotazione iniziale X. Ciò, naturalmente, si può verificare solo se il vincolo di bilancio è *tangente* alla curva di indifferenza iniziale nello stesso punto. In corrispondenza della dotazione iniziale, dunque, la curva di indifferenza e il vincolo di bilancio devono avere la stessa inclinazione. In conclusione, se è vero che l'inclinazione del vincolo di bilancio è $-p$, la condizione da soddisfare perché nessuno scambio si verifichi sul mercato è che l'inclinazione della curva di indifferenza calcolata nel punto di dotazione iniziale sia uguale a $-p$.

4.8: Riassunto

In questo capitolo ci siamo occupati dell'estensione dei concetti contenuti nel capitolo 3 al caso di un bene perfettamente divisibile, verificando come tutte le conclusioni ottenute per un bene discreto siano valide anche in questo contesto. Infatti, come nel capitolo 3:

Una curva di indifferenza è il luogo dei punti rispetto ai quali l'individuo si ritiene indifferente.

Abbiamo definito vincolo di bilancio definito. Un'importante proprietà del vincolo di bilancio è la seguente:

L'inclinazione del vincolo di bilancio nello spazio (q,m) è pari a (meno) il prezzo del bene.

Le curve di domanda e di offerta sono state determinate a partire dalle curve di indifferenza ed è stato dimostrato che:

In generale, la curva di domanda è inclinata negativamente.
In generale, la curva di offerta è inclinata positivamente.
L'individuo si comporta da compratore del bene se i prezzi sono sufficientemente bassi e da venditore se i prezzi sono sufficientemente alti.

La validità dei due concetti chiave ottenuti al capitolo 2 è stata confermata:

Il surplus del compratore è pari all'area compresa tra il prezzo effettivamente pagato e la curva di domanda.
Il surplus del venditore è pari all'area compresa tra il prezzo effettivamente ricevuto e la curva di offerta.

Infine, abbiamo richiamato la definizione delle preferenze quasi lineari:

Se le preferenze sono quasi lineari, le curve di indifferenza sono parallele in direzione verticale e i prezzi di riserva sono indipendenti dalla quantità di moneta detenuta dall'individuo.

4.9:Domande di verifica

1. Quali devono essere le proprietà del prezzo di riserva affinché la curva di domanda sia sempre decrescente e la curva di offerta sia sempre crescente?
2. Le curve di indifferenza possono intersecarsi?
3. Se il prezzo pagato da un compratore diminuisce che cosa succede al suo surplus? Se il prezzo pagato ad un venditore aumenta che cosa succede al suo surplus?
4. Che cosa fa di un individuo un compratore o un venditore di un bene del quale già possiede una certa quantità?

4.10: Appendice Matematica

Anche questa appendice è state motivata da uno scrupolo di completezza. Ora forniremo una analisi da un punto di vista più formale dei risultati e delle proprietà, che abbiamo ottenuto in questo capitolo, per le funzioni di domanda e di offerta e per il surplus. Questa appendice si rivolge a quei lettori che amano la matematica, ma non è indispensabile per la piena comprensione degli argomenti trattati nel capitolo.

Iniziamo verificando che la funzione di domanda lorda dell'individuo, date le preferenze usate in questo capitolo, è data dall'espressione (4.5). Si ricordi che il problema era quello di trovare il valore del prezzo p per cui l'individuo, dato il vincolo di bilancio, si collocasse sulla sua più alta curva di indifferenza. Sia $pq + m = 3p + 30$ il vincolo di bilancio come dalla equazione 4.1; si noti che il vincolo di bilancio passa per il punto (3, 30). L'equazione di una curva di indifferenza è data da $m - 60/q = constante$, dove più è alto il valore della costante più è alta la curva di indifferenza.

Metodo 1: soluzione per sostituzione. Due sono i metodi principali per risolvere questo problema di massimizzazione vincolata, ma forse quello più semplice consiste nel sostituire direttamente il vincolo nella funzione obiettivo. Più precisamente, dal vincolo di bilancio sappiamo che $m = 3p +$

$30 - pq$ quindi possiamo usare questa relazione per eliminare m dalla funzione obiettivo (la curva di indifferenza), e cercare il valore di q che massimizza la funzione:

$$E = 3p + 30 - pq - 60/q \qquad \text{(A4.1)}$$

Per trovare il valore di q non dobbiamo far altro che cercare dove la derivata di E rispetto a q si annulla. Quindi la condizione di ottimo è data da:

$$dE/dq = -p + 60/q^2 = 0 \qquad \text{(A4.2)}$$

risolvendo l'equazione (A4.2) si ottiene l'equazione cercata (A4.3)

$$q = \sqrt{(60/p)} \qquad \text{(A4.3)}$$

Metodo 2: soluzione con il metodo di Lagrange. Questo metodo di soluzione è stato descritto nel capitolo 1. Scriviamo la lagrangiana (la funzione obiettivo meno λ volte il vincolo):

$$L = (m - 60/q) - \lambda\,(pq + m - 3p - 30) \qquad \text{(A4.4)}$$

Se massimizziamo questa funzione rispetto a m, q e λ, otteniamo le seguenti tre equazioni ((A4.5), (A4.6) e (A4.7)).

$$dL/dm = 1 - \lambda = 0 \qquad \text{(A4.5)}$$

da cui $\lambda = 1$

$$dL/dq = 60/q^2 - \lambda p = 0 \qquad \text{(A4.6)}$$

da cui $q^2 = 60/\lambda p$ che per $\lambda = 1$ (equazione (A4.5)) diventa $q^2 = 60/p$ otteniamo così nuovamente l'equazione (4.5).

$$dL/d\lambda = 0 \qquad \text{(A4.7)}$$

Riscriviamo il vincolo di bilancio $pq + m - 3p - 30$, da cui possiamo ricavare il valore di m.

Più precisamente

$$\begin{aligned} m &= 3p + 30 - pq \\ &= 3p + 30 - p\sqrt{(60/p)} \\ &= 3p + 30 - \sqrt{(60p)}. \end{aligned}$$

Riassumendo: l'individuo inizia dal punto (3, 30) per raggiungere il punto $(\sqrt{(60/p)},\ 3p + 30 - \sqrt{(60p)}$.

Per verificare i risultati concernenti il surplus, cioè l'area compresa tra la linea del prezzo e le curve di domanda ed offerta dobbiamo ricorrere al concetto di integrale.

In generale l'area compresa tra un certo prezzo p e una curva di domanda $q = f(p)$ è data dall'integrale di $q = f(p)$ calcolato tra il prezzo p ed il prezzo per cui la domanda diventa zero.

Nel caso in cui la funzione di domanda è quella derivante dalle funzioni di preferenza che abbiamo utilizzato in questo capitolo, l'area che cerchiamo è data dall'integrale della funzione $\sqrt{(60/p)} - 3$ calcolato dal livello di prezzo p fino a $p = 6{,}67$ (prezzo per cui la domanda diventa zero). L'integrale di $\sqrt{(60/p)} - 3$ è $2\sqrt{(60p)} - 3p$. Sostituendo $p = 6{,}67$ nell'equazione $2\sqrt{(60p)} - 3p$ si ottiene come risultato 20. Quindi l'area sottostante la curva di domanda calcolata tra un generico p e $p = 6{,}67$ è data dall'espressione:

area fra un generico prezzo p e la curva di domanda = $20 - 2\sqrt{(60p)} + 3p$ (A4.8)

Per $p = 4$ quest'area è 1.02, come mostrato nel capitolo.

Ora applichiamo lo stesso procedimento per calcolare il surplus del venditore. In generale l'area fra un certo prezzo p e la curva di offerta $q = f(p)$ è l'integrale di $q = f(p)$ fra il prezzo per cui l'offerta è zero e il prezzo assunto.

Ora assumiamo che la funzione di offerta sia la stessa che abbiamo usato in questo capitolo, quindi l'area è data dall'integrale di $q = 3 - \sqrt{(60/p)}$ fra $p = 6.67$ (prezzo per cui l'offerta diventa zero) ed il prezzo p. L'integrale di $3 - \sqrt{(60/p)}$ è $3p -2\sqrt{(60p)}$, calcolato fra $p = 6.67$ e un generico prezzo p è $20 - 2\sqrt{(60p)} + 3p$. Si noti che questa è la stessa espressione che abbiamo ottenuto nel capitolo.
Così abbiamo:

area fra un generico prezzo p e la curva di offerta = $20 - 2\sqrt{(60p)} + 3p$ (A4.9)

Per $p = 20$ allora l'area è 10.72 come abbiamo detto nel capitolo.

Infine dobbiamo dimostrare che queste aree rappresentano il surplus. Come abbiamo visto, l'individuo inizialmente è situato nel punto (3, 30) e successivamente si sposta al punto $(\sqrt{(60/p)}, 3p + 30 - \sqrt{(60p)})$. Ricordando che la curva di indifferenza, che abbiamo usato nel capitolo, è data dall'equazione(4.4) $m - 60/q = constante$, dove il valore della costante rappresenta il livello di benessere dell'individuo; più alto è il valore della costante maggiore sarà il benessere dell'individuo. Notiamo che inizialmente l'individuo si trova nel punto $q = 3$ e $m = 30$, quindi la costante assume il seguente valore: $30 - 60/3 = 10$.
Dopo aver raggiunto la posizione di ottimo, che è data da $(\sqrt{(60/p)}, 3p + 30 - \sqrt{(60p)})$, il valore della costante diventa: $3p + 30 - \sqrt{(60p)} - 60/(\sqrt{(60/p)}) = 3p + 30 - 2\sqrt{(60p)}$. Quindi l'aumento di benessere è esattamente: $20 - 2\sqrt{(60p)} + 3p$. Questo valore è uguale all'area che abbiamo calcolato sopra.
Potrebbe essere interessante analizzare un caso più generale. Più precisamente si consideri una generica funzione di preferenza quasi-lineare, allora possiamo scrivere la funzione di utilità come
$U(q,m) = u(q) + m$ (A4.10)

quindi una curva di preferenza è data da
$u(q) + m = constante$ (A4.11)
Usando il uno dei due metodi possiamo trovare il punto di ottimo sul vincolo di bilancio $pq + m = pQ + M$ equazione(4.1) (dove Q indica la dotazione del bene e M la dotazione di moneta) quindi abbiamo che la quantità ottima di q si ottiene in corrispondenza di
$u'(q) = p$ (A4.12)
dove $u'(q)$ è la derivata di u rispetto a q. Da tutto ciò deriva che la curva di domanda del bene è data dall'equazione (A4.12). Si noti che tale equazione non dipende da M, quindi la dotazione di moneta è irrilevante per la funzione di domanda, cosa che avevamo già dimostrato per questo tipo di funzioni di preferenza.