

CARACTERIZACIÓN DINÁMICA DE CHUMACERAS HIDRODINÁMICAS MEDIANTE PERTURBACIONES.

¹Ignacio Ramírez Vargas, ²Alberto Antonio García, ¹Carlos De La Rosa Gutiérrez

¹Instituto Tecnológico de Pachuca. División de Estudios de Posgrado e Investigación.
Carretera México-Pachuca Km 87.5, Col. Venta Prieta, Pachuca de Soto, Hidalgo. MEXICO.
Teléfono (771) 711 3140, extensión 139.

²Instituto de Electrónica y Computación, Universidad Tecnológica de la Mixteca
Huajuapán de León, Oaxaca, MEXICO, CP 69000
ramirez.ignacio@itesm.mx, agarcia@mixteco.utm.mx, carlos.delarosa@gmail.com

RESUMEN.

En el presente trabajo se presenta un método alternativo para caracterizar una chumacera hidrodinámica. Partiendo de la ecuación general de la lubricación de Reynolds, se realiza una perturbación en el centro del muñón que permite encontrar presiones parciales, con la intención de poder manipularlas para determinar los coeficientes dinámicos de rigidez y amortiguamiento. Se realiza el cálculo para un caso clásico y se generaliza para situaciones que involucren excitaciones externas. Se obtienen los coeficientes dinámicos en forma analítica y se presentan los gráficos de estos como función de la excentricidad de equilibrio. La metodología presentada es de gran valor; pues se puede adaptar fácilmente a los estudios de chumaceras intermedias y largas; así como a problemas que contengan excitaciones externas como inyección de lubricante o bien desalineamiento. Esta adaptación permitirá obtener algoritmos numérico-analíticos para obtener soluciones satisfactorias con menor tiempo de cómputo en las respuestas.

ABSTRACT.

In this paper, an alternative method to characterize a hydrodynamic bearing is presented. Based on the Reynolds' general lubrication equation, a perturbation is made on the center of the journal in order to partial pressures, so that be able to manage them to determine both the stiffness and damping dynamic coefficients. It is done the calculation for a classical case and it is generalized to situations that involve external excitations. The dynamic coefficients are gotten in an analytical way and they are plotted as a function of the balance eccentricity. The methodology presented in this document is of great value because it can

be adapted for complex cases to get quite acceptable numerical solutions.

INTRODUCCIÓN.

Las ecuaciones de movimiento de un sistema rotor-chumaceras contienen coeficientes que corresponden a los de la película del lubricante. Estos parámetros cambian con la posición que tenga el eje respecto al centro de la chumacera, así como con la velocidad de rotación. Es por eso que el comportamiento dinámico siempre es fuertemente influenciado por los valores que puedan tomar estos coeficientes. Se encuentra en la literatura que a medida que la velocidad de operación aumenta, uno de los coeficientes de rigidez puede tomar valores negativos y dependiendo de su magnitud el sistema puede llegar a la inestabilidad [1].

Para estudiar el comportamiento del fluido en las chumaceras hidrodinámicas se utiliza la ecuación de Reynolds, la cual es una simplificación de las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos de tipo newtoniano. La ecuación de Reynolds relaciona la presión del fluido en la chumacera con las coordenadas circunferencial y axial, de tal forma que es posible obtener el campo de presiones. No es posible resolver analíticamente la ecuación de Reynolds, pero se pueden obtener aproximaciones dependiendo de la relación longitud/diámetro de la chumacera (L/D). Sin embargo, es posible determinar la condición dinámica de la película de lubricante atendiendo el comportamiento lineal del campo de presión y las fuerzas a lo largo de ella. El perturbar la posición de equilibrio del muñón permite encontrar incrementos de presión que modifican las propiedades dinámicas del soporte y que resaltan el efecto de rigidez y amortiguamiento de la película de aceite.

NOMENCLATURA

- C: Claro radial de la chumacera.
- c_{ij} : Coeficientes de amortiguamiento
- D: Diámetro de la chumacera.
- e: Excentricidad.
- H: Espesor de la película de lubricante.
- h: Espesor de película adimensional.
- k_{ij} : Coeficientes de rigidez.
- L: Longitud de la chumacera.
- N: Velocidad de operación, rev/s
- p: Presión de la película de lubricante.
- S: Número de Sommerfeld.
- z: Coordenada cartesiana axial.
- ϕ : Ángulo de actitud.
- θ : Coordenada circunferencial de la chumacera.
- ε : Excentricidad adimensional, $\varepsilon=e/C$
- ω : Velocidad de operación.
- μ : Viscosidad dinámica o absoluta.

DESARROLLO.

El modelo que describe la función de presión en chumaceras hidrodinámicas es la ecuación de Reynolds, tal ecuación puede escribirse de manera general como [2]:

$$\frac{1}{R_1^2} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{H^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{H^3}{12\mu} \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \frac{\omega}{2} \frac{\partial H}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (1)$$

Esta ecuación se puede escribir en forma adimensional utilizando los siguientes parámetros:

$$H = Ch = C[1 + \varepsilon \cos(\tilde{\theta} - \phi)] \quad (2)$$

$$z = \frac{L}{2} \tilde{z}, \quad p = \mu N \left(\frac{R_1}{C} \right)^2 \tilde{p}, \quad \omega = 2\pi N \quad (3)$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (1) se obtiene en forma adimensional como:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h^3 \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{z}} \right) = 12\pi \frac{\partial h}{\partial \tilde{\theta}} + \frac{24\pi}{\omega} \frac{\partial h}{\partial t} \quad (4)$$

con las condiciones de frontera:

$$p = 0 \text{ para } z = \pm L/2 \text{ y } \left(\frac{\partial p}{\partial z} \right) = 0 \text{ para } z = 0.$$

Nótese que: $\tilde{\theta} = \theta + \phi$, $h = 1 + \varepsilon \cos(\tilde{\theta} - \phi)$.

En la figura 1 se ilustra una posición dada del rotor (muñón en la chumacera), aquí se muestran los parámetros incluidos en la ecuación de Reynolds.

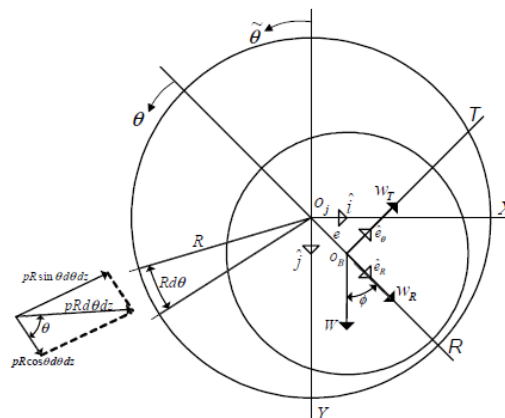


Figura 1. Posición instantánea del rotor dentro de la chumacera.

La metodología propuesta se lleva a cabo realizando pequeñas perturbaciones alrededor de la posición de equilibrio. El hecho de solo considerar pequeñas perturbaciones es necesario porque las ecuaciones de movimiento de un sistema rotor-chumaceras son altamente no lineales. Por ejemplo, considérese el caso de un rotor de masa 2M soportado por dos chumaceras idénticas y bien alineadas. Las ecuaciones de movimiento son [1]:

$$\begin{Bmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{Bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{Bmatrix} a \cos \phi \\ a \sin \phi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} W \cos \phi_t \\ W \sin \phi_t \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_Y \\ F_X \end{Bmatrix} \quad (5)$$

donde F_X y F_Y son las fuerzas de reacción en las chumaceras. Estas ecuaciones son altamente no lineales aun cuando se conozcan W y ϕ_t como funciones del tiempo. El método que se usa para tratar con este tipo de ecuaciones es linealizar las fuerzas de reacción de las chumaceras alrededor de su posición de equilibrio. La figura 2 describe el efecto que producen los cambios de la carga sobre la posición del eje en la chumacera. El subíndice cero en la figura se refiere a la posición de estado estable y Δx , Δy indican los desplazamientos del eje alrededor de su posición de equilibrio o pequeños desplazamientos de perturbación. Calculando el cambio de estas pequeñas perturbaciones con respecto al tiempo obtenemos las velocidades de perturbación $\Delta \dot{x}$ y $\Delta \dot{y}$ [3].

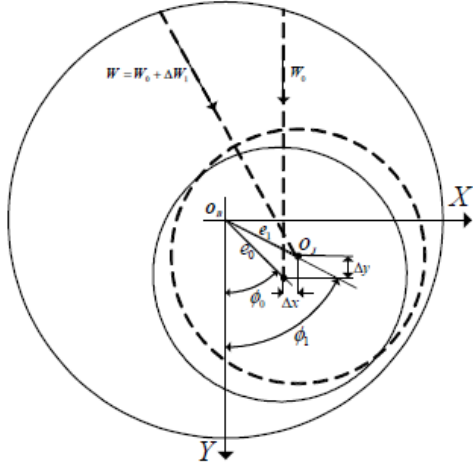


Figura 2 Cambio de posición del rotor por perturbaciones realizadas.

La fuerza de reacción resultante $F = W$ de la figura 2 tiene componentes F_X y F_Y . Realizando desarrollos en series de Taylor de primer orden de estas componentes se obtiene:

$$F_x = (F_x)_0 + \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}}\right)_0 \Delta \dot{x} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}}\right)_0 \Delta \dot{y} \quad (6)$$

$$F_y = (F_y)_0 + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}}\right)_0 \Delta \dot{x} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}\right)_0 \Delta \dot{y} \quad (7)$$

La dirección del eje Y se ha elegido de tal manera que $(F_x)_0 = 0$. Nótese que las derivadas parciales de las fuerzas respecto de la posición y velocidad, respectivamente, representan las rigideces y amortiguamientos en la película de lubricante; luego entonces se puede escribir:

$$\begin{aligned} k_{xx} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}\right)_0 & k_{xy} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)_0 \\ k_{yx} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial x}\right)_0 & k_{yy} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial y}\right)_0 \\ c_{xx} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{x}}\right)_0 & c_{xy} &= \left(\frac{\partial F_x}{\partial \dot{y}}\right)_0 \\ c_{yx} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{x}}\right)_0 & c_{yy} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial \dot{y}}\right)_0 \end{aligned}$$

Lo anterior permite que las ecuaciones (6) y (7) puedan escribirse como:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ (F_y)_0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \dot{x} \\ \Delta \dot{y} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Por lo tanto, una vez que las ecuaciones de movimiento son linealizadas, se pueden resolver fácilmente después de determinar los coeficientes linealizados k_{ij} y c_{ij} .

En el sistema cartesiano de coordenadas, las fuerzas en la película de lubricante quedan escritas como [4]:

$$F_x = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\tilde{\theta}_1}^{\tilde{\theta}_2} pR \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} dz \quad (9)$$

$$F_y = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{\tilde{\theta}_1}^{\tilde{\theta}_2} pR \cos \tilde{\theta} d\tilde{\theta} dz \quad (10)$$

En forma adimensional es posible escribir:

$$\bar{F}_x = \frac{F_x}{\mu NLD(R/C)^2} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\tilde{\theta}_1}^{\tilde{\theta}_2} \bar{p} \sin \tilde{\theta} d\tilde{\theta} dz \quad (11)$$

$$\bar{F}_y = \frac{F_y}{\mu NLD(R/C)^2} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\tilde{\theta}_1}^{\tilde{\theta}_2} \bar{p} \cos \tilde{\theta} d\tilde{\theta} dz \quad (12)$$

Para introducir el efecto de la perturbación, nótese que en la figura 2 se relaciona la posición del muñón en estado estable y la posición cuando existe una pequeña perturbación. Lo anterior puede cuantificarse como:

$$\begin{aligned} e_0 \sin \phi_0 + \Delta x &= e \sin \phi \\ e_0 \cos \phi_0 + \Delta y &= e \cos \phi \end{aligned} \quad (13)$$

Sustituyendo las expresiones anteriores en la ecuación del espesor de película (2) y considerando que $\varepsilon = e/C$ y $h = H/C$ se obtiene el espesor de película adimensional.

$$h = h_0 + \Delta X \sin \tilde{\theta} + \Delta Y \cos \tilde{\theta} \quad (14)$$

donde:

$$h_0 = 1 + \varepsilon_0 \cos(\tilde{\theta} - \phi_0), \quad X = x/C \quad \text{y} \quad Y = y/C.$$

Derivando la ecuación (14) con respecto al tiempo se obtiene:

$$\frac{dh}{dt} = \omega(\Delta X' \sin \tilde{\theta} + \Delta Y' \cos \tilde{\theta}) \quad (15)$$

Nótese que $\tau = \omega t$ y las primas indican el cambio con respecto a τ . Así, para calcular las condiciones de equilibrio y los coeficientes de la película del lubricante, es necesario resolver la ecuación de Reynolds (4), sujeta a las condiciones de frontera dadas y perturbar con (14) y (15).

METODOLOGÍA GENERAL

Ahora se realizará la descripción de la metodología utilizada en la solución de la Ecuación de Reynolds mediante perturbaciones. Como el análisis es lineal, la presión en la película de lubricante la podemos expresar como:

$$p = (p)_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0 \Delta y + \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{x}}\right)_0 \Delta \dot{x} + \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{y}}\right)_0 \Delta \dot{y} \quad (16)$$

haciendo:

$$(p)_0 = p_0, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 = p_x, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0 = p_y, \\ \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{x}}\right)_0 = p_{\dot{x}}, \quad \left(\frac{\partial p}{\partial \dot{y}}\right)_0 = p_{\dot{y}}$$

Las componentes de la fuerza en las chumaceras se encuentran mediante la integración de la presión sobre el área de la chumacera, por lo que se puede escribir:

$$\begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \end{Bmatrix} = \iint_{z, \tilde{\theta}} (p_0 + p_x \Delta x + p_y \Delta y + p_{\dot{x}} \Delta \dot{x} + p_{\dot{y}} \Delta \dot{y}) \begin{Bmatrix} \sin \tilde{\theta} \\ \cos \tilde{\theta} \end{Bmatrix} R_1 d\tilde{\theta} dz \quad (17)$$

Los términos de perturbación Δx , Δy , $\Delta \dot{x}$ y $\Delta \dot{y}$ son independientes de las variables de integración, por lo tanto, de (17):

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ (F_y)_0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \iint_{z, \tilde{\theta}} p_0 \sin \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \\ \iint_{z, \tilde{\theta}} p_0 \cos \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{Bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \iint_{z, \tilde{\theta}} p_x \sin \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} & \iint_{z, \tilde{\theta}} p_y \sin \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \\ \iint_{z, \tilde{\theta}} p_x \cos \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} & \iint_{z, \tilde{\theta}} p_y \cos \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

$$\begin{Bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \iint_{z, \tilde{\theta}} p_{\dot{x}} \sin \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} & \iint_{z, \tilde{\theta}} p_{\dot{y}} \sin \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \\ \iint_{z, \tilde{\theta}} p_{\dot{x}} \cos \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} & \iint_{z, \tilde{\theta}} p_{\dot{y}} \cos \tilde{\theta} R_1 dz d\tilde{\theta} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Para determinar los coeficientes k_{ij} y c_{ij} , es necesario obtener primero las perturbaciones del campo de presión. Sustituyendo las ecuaciones de la película perturbada (14), (15) y (16) en la ecuación de Reynolds (4) se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left[(h_0 + \Delta X \sin \tilde{\theta} + \Delta Y \cos \tilde{\theta})^3 \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} (\bar{p}_0 + \bar{p}_x \Delta X + \bar{p}_y \Delta Y + \bar{p}_{\dot{x}} \Delta \dot{x} + \bar{p}_{\dot{y}} \Delta \dot{y}) \right] + \\ + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[(h_0 + \Delta X \sin \tilde{\theta} + \Delta Y \cos \tilde{\theta})^3 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\bar{p}_0 + \bar{p}_x \Delta X + \bar{p}_y \Delta Y + \bar{p}_{\dot{x}} \Delta \dot{x} + \bar{p}_{\dot{y}} \Delta \dot{y}) \right] \\ = 12\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} (h_0 + \Delta X \sin \tilde{\theta} + \Delta Y \cos \tilde{\theta}) + 24\pi (\Delta X' \sin \tilde{\theta} + \Delta Y' \cos \tilde{\theta}) \quad (21)$$

Desarrollando el término $(h_0 + \Delta X \sin \tilde{\theta} + \Delta Y \cos \tilde{\theta})^3$ y eliminado los términos de orden superior, se obtiene la ecuación de Reynolds con solo términos de primer orden.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left[(h_0^3 + 3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \Delta X + 3h_0^2 \cos \tilde{\theta} \Delta Y) \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} (\bar{p}_0 + \bar{p}_x \Delta X + \bar{p}_y \Delta Y + \bar{p}_{\dot{x}} \Delta \dot{x} + \bar{p}_{\dot{y}} \Delta \dot{y}) \right] + \\ + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left[(h_0^3 + 3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \Delta X + 3h_0^2 \cos \tilde{\theta} \Delta Y) \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} (\bar{p}_0 + \bar{p}_x \Delta X + \bar{p}_y \Delta Y + \bar{p}_{\dot{x}} \Delta \dot{x} + \bar{p}_{\dot{y}} \Delta \dot{y}) \right] \\ = 12\pi \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} (h_0 + \Delta X \sin \tilde{\theta} + \Delta Y \cos \tilde{\theta}) + 24\pi (\Delta X' \sin \tilde{\theta} + \Delta Y' \cos \tilde{\theta}) \quad (22)$$

Reuniendo términos del mismo orden se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones.

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) = 12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial \tilde{z}} \right) = \\ = 12\pi \cos \tilde{\theta} - \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) - \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial \tilde{z}} \right) = \\ = -12\pi \sin \tilde{\theta} - \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(3h_0^2 \cos \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) - \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(3h_0^2 \cos \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{\dot{x}}}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{\dot{x}}}{\partial \tilde{z}} \right) = 24\pi \sin \tilde{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{\dot{y}}}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{\dot{y}}}{\partial \tilde{z}} \right) = 24\pi \cos \tilde{\theta} \quad (23)$$

El segundo y tercer términos del lado derecho de la segunda de las ecuaciones precedentes se puede escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) \\ = \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(3h_0^3 \frac{\sin \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(3h_0^3 \frac{\sin \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) \\ = \frac{3 \sin \tilde{\theta}}{h_0} \left[\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) \right] + 3h_0^2 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{\sin \tilde{\theta}}{h_0} \right)$$

Por lo tanto:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(3h_0^2 \sin \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) = \\ = 12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{3 \sin \tilde{\theta}}{h_0} \right) + 3h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{\sin \tilde{\theta}}{h_0} \right)$$

Igual para el segundo y tercer términos del lado derecho de la tercera de las ecuaciones precedentes:

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(3h_0^2 \cos \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \right) + \left(\frac{D}{L}\right)^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(3h_0^2 \cos \tilde{\theta} \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{z}} \right) = \\ = 12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{3 \cos \tilde{\theta}}{h_0} \right) + 3h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \tilde{\theta}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\theta}} \left(\frac{\cos \tilde{\theta}}{h_0} \right)$$

De esta manera, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones para obtener el campo de presión

de estado estable y los gradientes del campo de presión.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{z}} \right) &= 12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial \bar{z}} \right) &= \\ = 12\pi \left(\cos \tilde{\theta} - \frac{3 \sin \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} \right) - 3h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\sin \tilde{\theta}}{h_0} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial \bar{z}} \right) &= \\ = -12\pi \left(\sin \tilde{\theta} + \frac{3 \cos \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} \right) - 3h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\cos \tilde{\theta}}{h_0} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{x'}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{x'}}{\partial \bar{z}} \right) &= 24\pi \sin \tilde{\theta} \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{y'}}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{y'}}{\partial \bar{z}} \right) &= 24\pi \cos \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (24)$$

Las condiciones de frontera asociadas al sistema de ecuaciones dado por (24) serán:

$$p_l = 0 \text{ en } z = \pm L/2; \text{ donde } l = 0, x, y, \dot{x}, \dot{y}$$

$$\frac{\partial p_l}{\partial z} = 0 \text{ en } z = 0; \text{ donde } l = 0, x, y, \dot{x}, \dot{y}$$

Es importante notar que para obtener los coeficientes rotodinámicos por medio de los gradientes p_x , p_y , $p_{\dot{x}}$ y $p_{\dot{y}}$, es necesario calcular primero la presión de estado estable p_0 . La precisión al calcular p_0 conducirá a la exactitud de los valores de los coeficientes dinámicos.

CASO DE ANÁLISIS. Chumacera Corta.

Para comprobar que las perturbaciones del campo de presión conducen a resultados numéricos correctos, se calcularán los coeficientes dinámicos para el caso de chumaceras infinitamente cortas.

Considérense las dos suposiciones para chumaceras cortas hechas por Dubios y Ocvirk [5]. Primero, los gradientes de presión en la dirección x o θ son despreciables si se comparan con los gradientes de presión en la dirección z (dirección axial). Segundo, solo la presión en la región convergente del claro ($0 < \theta < \pi$) se considera para la evaluación de las fuerzas de la película del lubricante. Por lo tanto, para el caso de chumaceras cortas, las ecuaciones (24) se reducen a las siguientes expresiones.

$$\left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_0}{\partial \bar{z}} \right) = 12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \theta}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_x}{\partial \bar{z}} \right) &= 12\pi \left(\cos \tilde{\theta} - \frac{3 \sin \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} \right) \\ \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_y}{\partial \bar{z}} \right) &= -12\pi \left(\sin \tilde{\theta} + \frac{3 \cos \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} \right) \\ \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{x'}}{\partial \bar{z}} \right) &= 24\pi \sin \tilde{\theta} \\ \left(\frac{D}{L} \right)^2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(h_0^3 \frac{\partial \bar{p}_{y'}}{\partial \bar{z}} \right) &= 24\pi \cos \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (25)$$

Hay que notar que el lado derecho de las ecuaciones anteriores es independiente de la presión de estado estable p_0 , como sí lo era en el sistema (24) para chumaceras generales. Integrando dos veces cada una de estas ecuaciones y utilizando las condiciones de frontera establecidas:

$$\begin{aligned} \bar{p}_0 &= \frac{(\bar{z}^2 - 1) \left(\frac{L}{D} \right)^2}{2h_0^3} \left[12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \theta} \right] \\ \bar{p}_x &= \frac{(\bar{z}^2 - 1) \left(\frac{L}{D} \right)^2}{2h_0^3} \left[12\pi \left(\cos \tilde{\theta} - \frac{3 \sin \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} \right) \right] \\ \bar{p}_y &= \frac{(\bar{z}^2 - 1) \left(\frac{L}{D} \right)^2}{2h_0^3} \left[-12\pi \left(\sin \tilde{\theta} + \frac{3 \cos \tilde{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \theta} \right) \right] \\ \bar{p}_{x'} &= \frac{(\bar{z}^2 - 1) \left(\frac{L}{D} \right)^2}{2h_0^3} \left[24\pi \sin \tilde{\theta} \right] \\ \bar{p}_{y'} &= \frac{(\bar{z}^2 - 1) \left(\frac{L}{D} \right)^2}{2h_0^3} \left[24\pi \cos \tilde{\theta} \right] \end{aligned} \quad (26)$$

Conocidos p_0 y los gradientes de presión, se calculan las fuerzas de reacción y los coeficientes dinámicos. En forma adimensional se puede escribir:

$$\begin{aligned} \bar{F}_x &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \bar{p}_0 \sin \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} & \bar{F}_y &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \bar{p}_0 \cos \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} \\ \bar{k}_{xx} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \bar{p}_x \sin \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} & \bar{k}_{yy} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \bar{p}_y \sin \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} \\ \bar{k}_{yx} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \bar{p}_x \cos \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} & \bar{k}_{yy} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \bar{p}_y \cos \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} \\ \bar{c}_{xx} &= \frac{\omega}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \bar{p}_{x'} \sin \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} & \bar{c}_{yy} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \bar{p}_{y'} \sin \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} \\ \bar{c}_{yx} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \bar{p}_{x'} \cos \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} & \bar{c}_{yy} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \bar{p}_{y'} \cos \tilde{\theta} d\theta d\bar{z} \end{aligned}$$

RESULTADOS

Evaluando cada una de estas integrales se obtiene para las fuerzas en el lubricante:

$$\begin{aligned}\bar{F}_X &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \frac{(\bar{z}^2 - 1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \bar{\theta}} \sin \bar{\theta} d\bar{\theta} d\bar{z} \\ &= -2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \frac{\partial h_0}{\partial \bar{\theta}} \frac{\sin \bar{\theta}}{h_0^3} d\bar{\theta} \\ &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \int_0^{\pi} \frac{\varepsilon \sin \theta}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^3} \sin(\theta + \phi) d\theta \\ &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{\pi \varepsilon}{2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \cos \phi - \frac{2\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \sin \phi \right] = 0\end{aligned}\quad (27)$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_Y &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \frac{(\bar{z}^2 - 1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 12\pi \frac{\partial h_0}{\partial \bar{\theta}} \cos \bar{\theta} d\bar{\theta} d\bar{z} \\ &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{-2\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} \cos \phi - \frac{\pi \varepsilon}{2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \sin \phi \right] \\ &= \frac{-\varepsilon \pi}{(1 - \varepsilon^2)^2} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)}\end{aligned}\quad (28)$$

Los coeficientes dinámicos de rigidez se obtienen como sigue:

$$\begin{aligned}\bar{k}_{xx} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \frac{(\bar{z}^2 - 1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[12\pi \left(\cos \bar{\theta} - \frac{3 \sin \bar{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \bar{\theta}} \right) \right] \sin \bar{\theta} d\bar{\theta} d\bar{z} \\ &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{2\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2} \cos^2 \phi - \frac{3\pi\varepsilon^2}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \sin \phi \cos \phi + \frac{4\varepsilon(1 + \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)^3} \sin^2 \phi \right] \\ &= \pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{4\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2} \frac{2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2}{16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)}\end{aligned}\quad (29)$$

$$\begin{aligned}\bar{k}_{yy} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \frac{(\bar{z}^2 - 1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[-12\pi \left(\sin \bar{\theta} + \frac{3 \cos \bar{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \bar{\theta}} \right) \right] \sin \bar{\theta} d\bar{\theta} d\bar{z} \\ &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{-\pi(1 + 2\varepsilon^2)}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \cos^2 \phi + \frac{2\varepsilon(1 + 3\varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)^3} \sin \phi \cos \phi - \frac{\pi}{2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \sin^2 \phi \right] \\ &= \pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{1}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \frac{\pi[-\pi^2 + 2\pi^2\varepsilon^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)}\end{aligned}\quad (30)$$

$$\begin{aligned}\bar{k}_{yx} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \frac{(\bar{z}^2 - 1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[12\pi \left(\cos \bar{\theta} - \frac{3 \sin \bar{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \bar{\theta}} \right) \right] \cos \bar{\theta} d\bar{\theta} d\bar{z} \\ &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{\pi}{2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \cos^2 \phi + \frac{2\varepsilon(1 + 3\varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)^3} \sin \phi \cos \phi + \frac{\pi(1 + 2\varepsilon^2)}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \sin^2 \phi \right] \\ &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{\pi[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2} [16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]}\end{aligned}\quad (31)$$

$$\begin{aligned}\bar{k}_{xy} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \frac{(\bar{z}^2 - 1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[-12\pi \left(\sin \bar{\theta} + \frac{3 \cos \bar{\theta}}{h_0} \frac{\partial h_0}{\partial \bar{\theta}} \right) \right] \cos \bar{\theta} d\bar{\theta} d\bar{z} \\ &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{4\varepsilon(1 + \varepsilon^2)}{(1 - \varepsilon^2)^3} \cos^2 \phi + \frac{3\pi\varepsilon^2}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \sin \phi \cos \phi + \frac{2\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2} \sin^2 \phi \right] \\ &= \pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \frac{4\varepsilon[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)^3 [16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]}\end{aligned}\quad (32)$$

Los coeficientes de amortiguamiento serán:

$$\begin{aligned}\bar{c}_{xx} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \frac{(\bar{z}^2 - 1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 [24\pi \sin \bar{\theta}] \sin \bar{\theta} d\bar{\theta} d\bar{z} \\ &= 4\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{\pi}{2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \cos^2 \phi - \frac{4\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2} \sin \phi \cos \phi + \frac{\pi(1 + 2\varepsilon^2)}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \sin^2 \phi \right] \\ &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{\pi[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2} [16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]} \right]\end{aligned}\quad (33)$$

$$\begin{aligned}\bar{c}_{yy} &= \bar{c}_{yx} = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \frac{(\bar{z}^2 - 1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 [24\pi \cos \bar{\theta}] \sin \bar{\theta} d\bar{\theta} d\bar{z} \\ &= 4\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{-2\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2} \cos^2 \phi + \frac{3\pi\varepsilon^2}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \sin \phi \cos \phi + \frac{2\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2} \sin^2 \phi \right] \\ &= \pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{8\varepsilon[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{(1 - \varepsilon^2)^2 [16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]} \right]\end{aligned}\quad (34)$$

$$\begin{aligned}\bar{c}_{yy} &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 \int_{\phi}^{\phi+\pi} \frac{(\bar{z}^2 - 1)}{2h_0^3} \left(\frac{L}{D}\right)^2 [24\pi \cos \bar{\theta}] \cos \bar{\theta} d\bar{\theta} d\bar{z} \\ &= 4\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{\pi(1 + 2\varepsilon^2)}{2(1 - \varepsilon^2)^{5/2}} \cos^2 \phi + \frac{4\varepsilon}{(1 - \varepsilon^2)^2} \sin \phi \cos \phi + \frac{\pi}{2(1 - \varepsilon^2)^{3/2}} \sin^2 \phi \right] \\ &= 2\pi \left(\frac{L}{D}\right)^2 \left[\frac{\pi[\pi^2 + 2(24 - \pi^2)\varepsilon^2 + \pi^2\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)^{5/2} [16\varepsilon^2 + \pi^2(1 - \varepsilon^2)]} \right]\end{aligned}\quad (35)$$

Las tablas 1 y 2 presentan estos coeficientes en la forma $\tilde{k}_{ij} = (C/W)k_{ij}$ y $\tilde{c}_{ij} = (\omega C/W)c_{ij}$.

Tabla 1. Coeficientes dinámicos de Rigidez para una chumacera corta.

$\tilde{k}_{xx} = \frac{4[2\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{xy} = \frac{\pi[-\pi^2 + 2\pi^2\varepsilon^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yx} = \frac{\pi[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{k}_{yy} = \frac{4[\pi^2 + (32 + \pi^2)\varepsilon^2 + 2(16 - \pi^2)\varepsilon^4]}{(1 - \varepsilon^2)[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$

Tabla 2. Coeficientes dinámicos de Amortiguamiento para una chumacera corta.

$\tilde{c}_{xx} = \frac{2\pi(1 - \varepsilon^2)^{1/2}[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{\varepsilon[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{c}_{xy} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{c}_{yx} = \frac{8[\pi^2 + 2(\pi^2 - 8)\varepsilon^2]}{[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$
$\tilde{c}_{yy} = \frac{2\pi[\pi^2 + 2(24 - \pi^2)\varepsilon^2 + \pi^2\varepsilon^4]}{\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2}[\pi^2 + (16 - \pi^2)\varepsilon^2]^{3/2}}$

Es posible visualizar la conducta de estos coeficientes como función de la excentricidad de equilibrio. En las figuras 3 y 4 aparecen las variaciones de rigedeces y amortiguamientos; las curvas discontinuas corresponden a valores negativos del coeficiente.

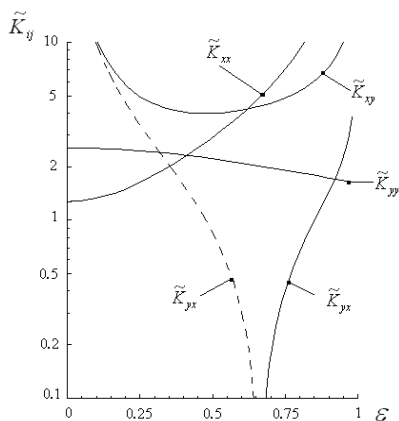


Fig. 3 Coeficientes rotodinámicos de rigidez para una chumacera corta.

$$L/D = 1/4.$$

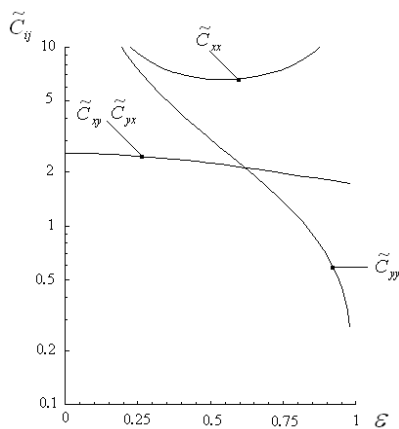


Fig. 4 Coeficientes rotodinámicos de amortiguamiento para una chumacera corta.

$$L/D = 1/4.$$

Como se puede notar, los coeficientes obtenidos para el caso clásico son los mismos que se encuentran con metodologías alternativas [3], [4], [10]; lo que significa que el método alterno produce resultados consistentes.

CONCLUSIONES

Después de mostrar la validez de esta alternativa de solución, es posible esperar que la técnica de perturbación pueda ser utilizada en análisis más complejos que pueden involucrar excitaciones externas en las chumaceras, el eterno problema de desalineamiento en los soportes, y una posible opción para abrir puertos de presurización externa de lubricante. Actualmente se tienen resultados aproximados en algunos de estos temas, pero la técnica de perturbación puede adaptarse para convertirse en una metodología numérico-analítica que permita encontrar coeficientes rotodinámicos como función del

desalineamiento y presurización externa en chumaceras de cualquier longitud.

REFERENCIAS

[1] Childs, D. (1993), "Turbomachinery Rotordynamics Phenomena, Modeling, and Analysis," A Wiley-Interscience Publication, John Wiley and Sons, Inc.

[2] Hamrock B. Fundamentals of Fluid Film Lubrication, Mc Graw Hill. 1994

[3] Antonio-García, Valery R. Nossov, Gómez-Mancilla J.C., (2001), "Comparación de Coeficientes Rotodinámicos de Chumaceras Hidrodinámicas Usando la Teoría de Chumaceras Largas, Cortas y Warner," 3er Congreso Internacional de Ingeniería Electromecánica y Sistemas, IM-D-21 pag. 106-111, Noviembre 2002, México, D.F.

[4] Szeri, A. Z., (1998) "Fluid Film Lubrication," Cambridge University Press.

[5] Dubois, G. B. and Ocvirk, E. W. (1953), "Analytical Derivation and Experimental Evaluation of Short Bearing Approximation for Full Journal Bearings," NACA Report 1157

[6] Tower, B. (1883), "Second Report on Friction Experiments," Proc. Inst. Mech. Engrs., Vol 36, pp. 58-70

[7] Reynolds, O. (1886), "On the Theory of Lubrication and its Application to Mr. Beauchamp Tower's Experiments, Including an Experimental Determination of the Viscosity of Olive Oil," Phil. Trans. Roy. Soc., London, Vol. 177, Part I, pp. 157-234.

[8] Harnoy, A. (2003), "Bearing Design in Machinery, Engineering Tribology and Lubrication," Marcel Dekker, Inc.

[9] Lund, J., and Sternlicht, B. (1962), "Rotor-Bearing Dynamics with Emphasis on Attenuation," ASME Trans. Journal of Basic Engineering, Ser. D, 84, 491-502.

[10] Ramírez Vargas, I. Teoría de chumaceras presurizadas con puertos puntuales. Caso de la chumacera corta. Instituto Politécnico Nacional, México D.F. 2007