

# MATEMATICĂ 1

ALEXANDRU NEGRESCU



# Cuprins

<b>Cuprins</b>	<b>3</b>
<b>1 Integrale multiple</b>	<b>5</b>
1.1 Integrale duble pe dreptunghiuri . . . . .	5
1.2 Integrale duble pe regiuni oarecare . . . . .	7
1.3 Integrale duble în coordonate polare . . . . .	10
1.4 Integrale triple . . . . .	13
1.5 Integrale triple în coordonate sferice . . . . .	15
1.6 Integrale triple în coordonate cilindrice . . . . .	17
1.7 Miscelaneu . . . . .	20



# Capitolul 1

## Integrale multiple

### 1.1 Integrale duble pe dreptunghiuri

1. Calculați valoarea integralei  $\iint_D (x-1)y^3 dA$ , unde  $D = [0, 3] \times [1, 4]$ .

*Soluție.* Vom avea grija ca pentru prima integrală să punem, drept capete, valorile extreme ale lui  $y$  iar pentru a doua integrală să punem, drept capete, valorile extreme ale lui  $x$ :  $\int_1^4 \int_0^3 (x-1)y^3 dx dy$ . Observăm că expresia de sub integrală se poate scrie ca produsul a două funcții:  $f(x) = x - 1$  și  $g(y) = y^3$  (care depind numai de variabila  $x$ , respectiv  $y$ ). Atunci integrala noastră se scrie ca produsul a două integrale:

$$\begin{aligned} \int_1^4 \int_0^3 (x-1)y^3 dx dy &= \int_0^3 (x-1) dx \cdot \int_1^4 y^3 dy = \left( \frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_0^3 \cdot \frac{y^4}{4} \Big|_1^4 = \\ &= \left( \frac{3^2}{2} - 3 \right) \cdot \left( \frac{4^4}{4} - \frac{1^4}{4} \right) = \frac{765}{8}. \end{aligned}$$

**Pauză de Fortificare Intelectuală.** Noțiunea de *integrală dublă* a fost introdusă în anul 1769 de către matematicianul elvețian **Leonhard Euler** (1707-1783) în lucrarea *De formulis integralibus duplicat*.

2. Calculați valoarea integralei  $\iint_D (x+2y)^3 dA$ , unde  $D = [0, 2] \times [0, 1]$ .

*Soluție.* Fiind atenți la capetele de integrare, scriem:

$$\iint_D (x+2y)^3 dA = \int_0^1 \int_0^2 (x+2y)^3 dx dy.$$

Neputând face vreun truc de genul celui din problema precedentă, trebuie să o calculăm în maniera „standard”, și anume să evaluăm integrala din interior (după  $x$ ) și apoi pe cea de-a doua (după  $y$ ). Așadar,

$$\int_0^2 (x+2y)^3 dx = \frac{(x+2y)^4}{4} \Big|_0^2 = \frac{(2+2y)^4}{4} - \frac{(2y)^4}{4} = 4(1+y)^4 - 4y^4,$$

am avut grijă ca, integrând după  $x$ , să îl privesc pe  $y$  ca o constantă. Acum, substituind ceea ce am calculat în integrala noastră, am redus-o la

$$\int_0^1 [4(1+y)^4 - 4y^4] dy = 4 \frac{(1+y)^5}{5} \Big|_0^1 - 4 \frac{y^5}{5} \Big|_0^1 = 4 \left( \frac{2^5}{5} - \frac{1}{5} \right) - 4 \cdot \frac{1}{5} = 24.$$

- 3.** Calculați valoarea integralei  $\iint_D \frac{xy^2}{x^2+1} dA$ , unde  $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 2; -2 \leq y \leq 2\}$ .

*Soluție.* Observăm că expresia de sub integrală se poate scrie ca produsul a două funcții:  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$  și  $g(y) = y^2$  (care depind numai de variabila  $x$ , respectiv  $y$ ). Atunci integrala noastră se scrie ca produsul a două integrale, astfel:

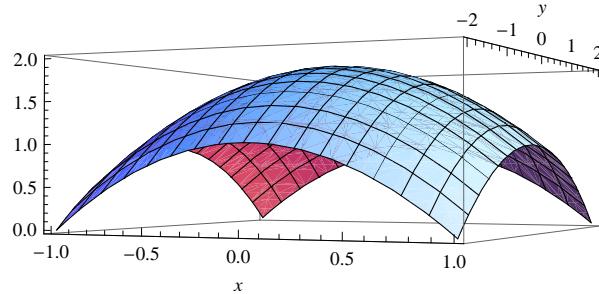
$$\iint_D \frac{xy^2}{x^2+1} dA = \int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx \cdot \int_{-2}^2 y^2 dy,$$

care pot fi calculate elementar:

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{xy^2}{x^2+1} dA &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx \cdot \int_{-2}^2 y^2 dy = \\ &= \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \Big|_0^2 \cdot \frac{y^3}{3} \Big|_{-2}^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln 5 \cdot \left( \frac{8}{3} - \frac{(-2)^3}{3} \right) = \frac{8 \ln 5}{3}. \end{aligned}$$

- 4.** Calculați volumul corpului situat sub paraboloidul elliptic  $z = 2 - x^2 - \frac{y^2}{4}$  și deasupra dreptunghiului  $D = [-1, 1] \times [-2, 2]$ .

*Soluție.* Corpului situat sub paraboloidul elliptic  $z = 2 - x^2 - \frac{y^2}{4}$  și deasupra dreptunghiului  $D = [-1, 1] \times [-2, 2]$  este reprezentat în figura ...



Reamintim că volumul corpului situat sub suprafața  $z = f(x, y) \geq 0$  și deasupra dreptunghiului  $D$  este dat de relația

$$V = \iint_D f(x, y) dA.$$

Așadar, volumul corpului nostru este egal cu

$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^2 \int_{-1}^1 \left( 2 - x^2 - \frac{y^2}{4} \right) dx dy = \int_{-2}^2 \left( 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{4} x \right) \Big|_{-1}^1 dy = \\ &= \int_{-2}^2 \left( 4 - \frac{2}{3} - \frac{y^2}{2} \right) dy = \left( \frac{10}{3}y - \frac{y^3}{6} \right) \Big|_{-2}^2 = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

**Pauză de Fortificare Intelectuală.** *Paraboloidul eliptic* este suprafața cromatică ce este caracterizată de ecuația

$$\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

unde  $a, b, c$  sunt numere reale.

## 1.2 Integrale duble pe regiuni oarecare

1. Calculați  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin y} x \cos y dx dy$ .

*Soluție.* Chiar dacă expresia de sub integrală se scrie ca produsul a două funcții, care depind numai de variabila  $x$ , respectiv  $y$ , nu putem aplica această strategie deoarece capetele integralelor nu au valori numerice. Vom calcula pornind de la integrala din interiorul expresiei:

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \int_0^{\sin y} x \cos y dx \right) dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \frac{x^2}{2} \cos y \right) \Big|_0^{\sin y} dy = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 y \cos y dy. \end{aligned}$$

În această ultimă integrală, privindu-l pe  $\cos y$  ca  $(\sin y)'$ , observăm că

$$\sin^2 y \cos y = \left( \frac{\sin^3 y}{3} \right)'.$$

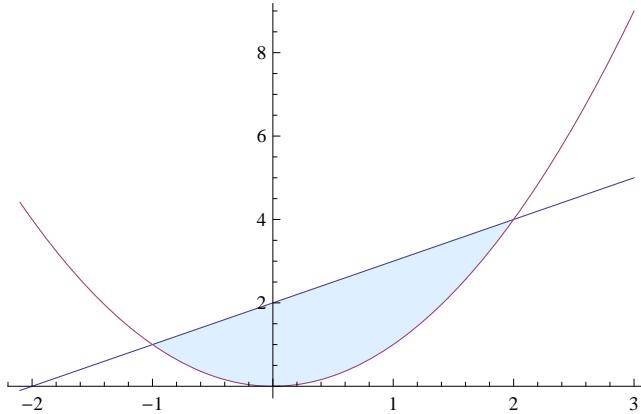
Atunci

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\sin y} x \cos y \, dx \, dy = \frac{1}{2} \left( \frac{\sin^3 y}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{24}.$$

- 2.** Calculați  $\iint_D (xy + 2) \, dA$ , unde  $D$  este regiunea plană mărginită de dreapta  $y = x + 2$  și parabola  $y = x^2$ .

*Soluție.* Pentru început, să determinăm punctele de intersecție a dreptei cu parabola. Rezolvăm ecuația  $x + 2 = x^2$ , adică  $x^2 - x - 2 = 0$ , de unde obținem că ele se intersectează în punctele  $(-1, 1)$  și  $(2, 4)$ . Așadar, regiunea  $D$  este descrisă de:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x + 2\}.$$



Pentru  $x \in [-1; 2]$ , arcul parabolei  $y = x^2$  este margine inferioară pentru  $D$  iar segmentul de pe dreapta  $y = x + 2$  este margine superioară. Atunci:

$$\begin{aligned} \iint_D (xy + 2) \, dA &= \int_{-1}^2 \int_{x^2}^{x+2} (xy + 2) \, dy \, dx = \int_{-1}^2 \left( \frac{xy^2}{2} + 2y \right) \Big|_{x^2}^{x+2} \, dx = \\ &= \int_{-1}^2 (4x + 4) \, dx = (2x^2 + 4x) \Big|_{-1}^2 = 18. \end{aligned}$$

- 3.** Calculați  $\iint_D x \, dA$ , unde  $D$  este regiunea din primul cadran mărginită de  $xy = 1$ ,  $y = 2x$  și  $y = 3x$ .

*Soluție.* Deoarece domeniul  $D$  nu este atât de accesibil ca la problemele anterioare, îl vom împărți în domenii mai mici. Cum le găsim? Să aflăm, pentru început, punctele de intersecție a celor trei grafice.

Pentru intersecția dreptelor  $y = 2x$  și  $y = 3x$ , rezolvăm ecuația  $2x = 3x$  și găsim punctul  $(0, 0)$ .

Pentru intersecția dreptei  $y = 2x$  cu  $xy = 1$ , rezolvăm ecuația  $2x = \frac{1}{x}$  și găsim punctul  $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$ .

Pentru intersecția dreptei  $y = 3x$  cu  $xy = 1$ , rezolvăm ecuația  $3x = \frac{1}{x}$  și găsim punctul  $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right)$ .

Acum putem să spunem cum împărțim domeniul  $D$ : alegem  $D_1$  ca fiind regiunea cuprinsă între dreptele  $y = 2x$ ,  $y = 3x$  și  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ , iar pe  $D_2$  ca fiind regiunea cuprinsă între  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $y = 2x$  și  $y = \frac{1}{x}$ .

Atunci:

$$\begin{aligned} \iint_D x \, dA &= \iint_{D_1} x \, dA + \iint_{D_2} x \, dA = \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \int_{2x}^{3x} x \, dy \, dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_{2x}^{\frac{1}{x}} x \, dy \, dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} (xy) \Big|_{2x}^{3x} \, dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (xy) \Big|_{2x}^{\frac{1}{x}} \, dy \, dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} x^2 \, dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} (1 - 2x^2) \, dx = \\ &= \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \left. \left( x - 2\frac{x^3}{3} \right) \right|_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{9}. \end{aligned}$$

- 4.** Calculați valoarea integralei  $\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} \, dx \, dy$ .

*Soluție.* Deoarece nu există niciun mod elementar de a calcula primitiva lui  $e^{x^2}$ , părem a fi fără putere în fața acestei integrale. Însă o strategie, ce va da roade aici, este schimbarea ordinii de integrare. Domeniul de integrare, care este un triunghi, se scrie:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq 1 \right\}.$$

Însă, putem privi acest triunghi și altfel:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2x \right\}.$$

Așadar,

$$\begin{aligned} \int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} dx dy &= \int_0^1 \int_0^{2x} e^{x^2} dy dx = \int_0^1 e^{x^2} \cdot y \Big|_0^{2x} dx = \\ &= \int_0^1 2xe^{x^2} dx = \int_0^1 e^{x^2} \cdot (x^2)' dx = \\ &= e^{x^2} \Big|_0^1 = e - 1. \end{aligned}$$

### 1.3 Integrale duble în coordonate polare

*Sistemul de coordonate polare* este un sistem de coordonate de dimensiune 2, în care fiecare punct  $P$  din plan este determinat de distanța  $r$  față de un punct fixat  $O$  (numit *pol* sau *origine*) și un unghi  $t$ , format cu o direcție fixată. Punctul  $P$  îi asociem perechea ordonată  $(r, t)$ <sup>1</sup> iar  $r$  și  $t$  se numesc *coordonate polare*.

Pentru un punct  $P$  din plan, coordonatele sale carteziene  $x$  și  $y$  se pot scrie astfel:

$$x = r \cos t \quad \text{și} \quad y = r \sin t.$$

Domeniile maxime pentru coordonatele polare sunt:

$$r \in [0, \infty) \quad \text{și} \quad t \in [0, 2\pi).$$

Când trecem din coordonatele carteziene în coordonatele polare să nu uităm să înmulțim cu factorul  $J = r$ , numit *iacobianul transformării*!

Un lucru ce merită evidențiat este că

$$x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t = r^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) = r^2.$$

---

<sup>1</sup>Se poate nota și cu  $(\rho, \theta)$ . E de preferat ca ambele caractere să aparțină aceluiași alfabet.

**1.** Calculați  $\iint_D \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dA$ , unde  $D$  este discul unitate.

*Soluție.* Trecând la coordonate polare,  $1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - \sqrt{r^2} = 1 - r$ , unde  $r \in [0; 1]$  și  $t \in [0, 2\pi]$ . Atunci:

$$\begin{aligned} \iint_D \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dA &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1 - r) r dr dt = \\ &= \int_0^{2\pi} dt \cdot \int_0^1 (1 - r) r dr = \\ &= t \Big|_0^{2\pi} \cdot \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3}\right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

**2.** Calculați valoarea integralei  $\iint_D \sin(x^2 + y^2) dA$ , unde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9, y \geq 0\}.$$

*Soluție.* Transformând în coordonate polare,  $\sin(x^2 + y^2) = \sin(r^2)$ , unde  $r^2 = x^2 + y^2 \in [4, 9]$ , adică  $r \in [2; 3]$ , și  $t \in [0, \pi]$ , deoarece  $y$  (fiind nenegativ) se află în cadranele I și II. Atunci:

$$\begin{aligned} \iint_D \sin(x^2 + y^2) dA &= \int_0^\pi \int_2^3 \sin(r^2) \cdot r dr dt = \\ &= \int_0^\pi dt \cdot \int_2^3 \sin(r^2) \cdot r dr = \left(\text{scriem } r = \frac{1}{2}(r^2)'\right) \\ &= \pi \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_2^3 \sin(r^2) \cdot (r^2)' dr = \frac{\pi}{2} \cdot (-\cos(r^2)) \Big|_2^3 = \\ &= \frac{\pi(\cos 4 - \cos 9)}{2}. \end{aligned}$$

**3.** Calculați valoarea integralei  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA$ , unde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 2y, x \geq 0, y \geq 0\}.$$

*Soluție.* Prezența expresiei  $x^2 + y^2$  ne sugerează să utilizăm coordonatele polare. Încercăm! Inegalitățile din domeniul  $D$  se transcriu:  $r^2 \cos^2 t + r^2 \sin^2 t \leq 2r \sin t$ , adică  $r \leq 2 \sin t$ , și  $\cos t \geq 0, \sin t \geq 0$ . Așadar:

$$t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \quad r \in [0, 2 \sin t],$$

și integrala devine

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \sin t} \sqrt{r^2} \cdot r dr dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^{2 \sin t} dt = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt. \end{aligned}$$

Cum  $\sin(3x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$ , obținem că

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dA &= \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \sin t - \sin(3t)) dt = \\ &= \frac{2}{3} \cdot \left( -3 \cos t + \frac{\cos(3t)}{3} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16}{9}. \end{aligned}$$

4. Calculați valoarea integralei  $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$ .

*Soluție.* Aparent, această problemă nu are nicio legătură cu subiectul nostru. Este o integrală grea.  $e^{x^2}$  nu ne lasă să îi găsim primitiva. Însă coordonatele polare ne vor surprinde cu o frumoasă aplicație aici. Nu vedem nicio integrală dublă în enunț, dar ce ar fi dacă ne-am crea noi una? Să îl observăm pe  $I^2$ :

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy.$$

Acum, să privim acest produs de integrale de la  $-\infty$  la  $\infty$  ca o integrală dublă pe  $\mathbb{R}^2$ . E delicată extinderea integralelor duble pe domenii nemărginite, dar să o privim în aceeași manieră ca integralele improprii, studiindu-le la limită. Atunci:

$$I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dA = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA.$$

De acum, transformarea în coordonate polare este evidentă:  $e^{-(x^2+y^2)} = e^{-r^2}$ ,  $r \in [0; \infty)$ ,  $t \in [0, 2\pi]$ , și integrala devine

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \cdot r dr dt = \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} \cdot (-2r) dr dt = \left( \text{privim } e^{-r^2} \cdot (-2r) = (e^{-r^2})' \right) \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (e^{-r^2}) \Big|_0^{\infty} dt = -\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (-1) dt = \pi. \end{aligned}$$



Atunci  $I = \sqrt{\pi}$ .

**Pauză de Fortificare Intelectuală.**  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$  este cunoscută sub numele *integrala lui Gauss* (*Gaussiană*). Este numită după matematicianul german **Carl Friedrich Gauss** (1777-1855), foto stânga, considerat unul dintre cei mai mari matematicieni ai tuturor timpurilor, supranumit *Princeps Mathematicorum* (Prințul Matematicii). Această integrală are o gamă largă de aplicații: teoria probabilităților, mecanica cuantică, etc.

Deoarece  $e^{-x^2}$  este o funcție pară pe multimea  $\mathbb{R}$ , avem că  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  și prin schimbarea de variabilă  $x = \sqrt{t}$ , ea va fi egală cu  $\int_0^{\infty} e^{-t} t^{-\frac{1}{2}} dt = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ .

## 1.4 Integrale triple

1. Calculați  $\iiint_D xyz^2 dV$ , unde

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid -2 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3\}.$$

*Soluție.* Este o integrală simplă, capetele sunt numerice, trebuie doar să fim atenți la calcule:

$$\begin{aligned} \iiint_D xyz^2 dV &= \int_0^3 \int_0^2 \int_{-2}^3 xyz^2 dx dy dz = \int_0^3 \int_0^2 \left( \int_{-2}^3 xyz^2 dx \right) dy dz = \\ &= \int_0^3 \int_0^2 \left( yz^2 \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_{x=-2}^{x=3} dy dz = \frac{5}{2} \int_0^3 \left( \int_0^2 yz^2 dy \right) dz = \\ &= \frac{5}{2} \int_0^3 \left( z^2 \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=0}^{y=2} dz = 5 \int_0^3 z^2 dz = 5 \left( \frac{z^3}{3} \right) \Big|_{z=0}^{z=3} = 45. \end{aligned}$$

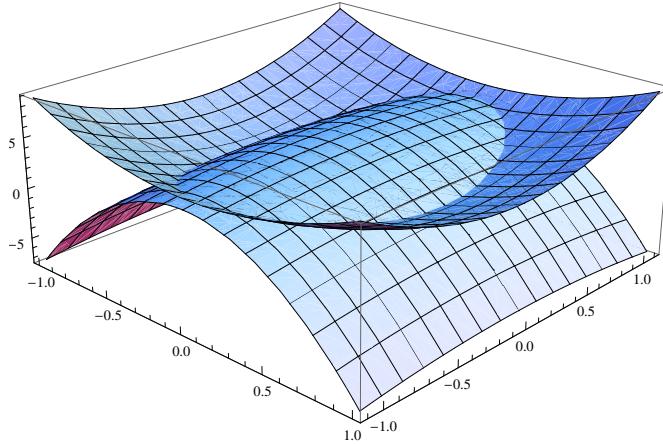
2. Calculați volumul corpului mărginit de paraboloidii  $z = 4x^2 + 4y^2$  și  $z = 5 - 11x^2 - y^2$ .

*Soluție.* Ideea este să proiectăm corpul nostru pe cel mai convenabil plan, în cazul nostru pe  $xOy$ . Să vedem cum se intersectează paraboloidii: sistemul

$$\begin{cases} z = 4x^2 + 4y^2 \\ z = 5 - 11x^2 - y^2 \end{cases}$$

implică  $4x^2 + 4y^2 = 5 - 11x^2 - y^2$ , adică  $3x^2 + y^2 = 1$ . Deci paraboloidii se intersectează după elipsa  $\frac{x^2}{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1$ , a cărei proiecție pe planul  $xOy$

are aceeași ecuație. Deci proiecția corpului  $K$  pe planul  $xOy$  este mulțimea  $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x^2 + y^2 \leq 1\}$ , adică interiorul elipsei găsite mai sus.



Ne amintim că volumul corpului  $K$ , căutat de noi, este

$$\text{Vol}(K) = \iiint_K dV.$$

Diferența  $(5 - 11x^2 - y^2) - (4x^2 + 4y^2) = 5 - 15x^2 - 5y^2 = 5 - 5(3x^2 + y^2) \geq 0$  este nenegativă, așa că  $z$  variază de la cantitatea mai mică,  $z = 4x^2 + 4y^2$ , la cea mai mare,  $z = 5 - 11x^2 - y^2$ , putem scrie că

$$\text{Vol}(K) = \iint_E \left( \int_{4x^2+4y^2}^{5-11x^2-y^2} dz \right) dA.$$

Așadar:

$$\text{Vol}(K) = \iint_E z|_{z=4x^2+4y^2}^{z=5-11x^2-y^2} dA = \iint_E [5 - 5(3x^2 + y^2)] dA.$$

Să vedem cum îl abordăm pe  $E$ .

Elipsa  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  se scrie în coordonate polare:

$$x = ar \cos t, \quad y = br \sin t$$

iar iacobianul transformării este  $J = abr$ , unde  $r \in [0, 1]$  și  $t \in [0, 2\pi]$ .

Elipsa noastră se scrie:  $x = \frac{1}{\sqrt{3}}r \cos t$ ,  $y = r \sin t$  iar iacobianul transformării este  $J = \frac{1}{\sqrt{3}}r$ . Valoarea expresiei  $5 - 5(3x^2 + y^2)$  este  $5 - 5r^2$ . Așadar volumul nostru a devenit:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K) &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (5 - 5r^2) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}r dr dt = \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (5r - 5r^3) dr dt = \\ &= \frac{5}{\sqrt{3}} \int_0^{2\pi} dt \cdot \int_0^1 (r - r^3) dr = \frac{10\pi}{\sqrt{3}} \left( \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_{r=0}^{r=1} = \frac{5\pi\sqrt{3}}{6}. \end{aligned}$$

## 1.5 Integrale triple în coordonate sferice

*Sistemul de coordonate sferice* este un sistem de coordonate cu trei dimensiuni, în care fiecare punct  $P$  din spațiu este determinat de: distanța (notată cu  $\rho$ ) dintre punctul  $P$  și o origine fixată ( $O$ ), unghiul *zenit* (notat cu  $\varphi$ ) format de  $OP$  cu axa pozitivă  $z$  și unghiul *azimut* (notat cu  $\theta$ ) format de proiecția lui  $OP$  pe planul  $xOy$  cu axa pozitivă  $x$ .

Astfel, coordonatele carteziene ale unui punct  $P$  din plan se scriu:

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi.$$

Domeniile maxime pentru coordonatele sferice sunt:

$$\rho \in [0, \infty), \quad \varphi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Când trecem din coordonatele carteziene în coordonatele sferice să nu uităm să înmulțim cu iacobianul transformării,  $J = \rho^2 \sin \varphi$ !

Un lucru ce merită evidențiat este că

$$x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2.$$

Secțiunea aceasta o vom dedica unor calcule „practice”:

**1. Fotbal trigonometric.** Aflați volumul corpului închis de mingea „trigonometrică” de fotbal.

*Soluție.* Amuzant, nu? Cum am putea descrie corpul nostru? Drept mulțimea  $K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ . Așa cum am văzut mai devreme, volumul lui este

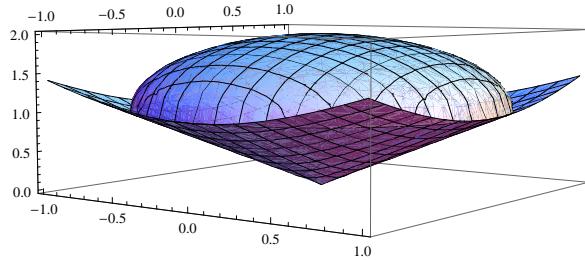
$$\text{Vol}(K) = \iiint_K dV.$$

Și acum intervin coordonatele sferice (doar mingea e o sferă, nu?):  $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ , deci  $\rho \in [0, 1]$ , iar

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 \rho^2 \sin \varphi \, d\rho \, d\varphi \, d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^\pi \sin \varphi \, d\varphi \cdot \int_0^1 \rho^2 \, d\rho = \\ &= 2\pi \cdot (-\cos \varphi) \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi} \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_{\rho=0}^{\rho=1} = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

**2. Problema cornetului cu înghețată.** Aflați volumul corpului situat în interiorul sferei  $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$  și în interiorul conului  $z^2 = x^2 + y^2$ .

*Soluție.*



Ecuația sferei se poate scrie  $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 1)^2 = 1$ , ceea ce ne spune că ea are centrul în punctul de coordonate  $(0, 0, 1)$  și raza egală cu 1, deci se află deasupra planului  $xOy$ , așa că ne va interesa doar interiorul conului  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Transcriem ecuația sferei în coordonate sferice:

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 = 2z = 2\rho \cos \varphi,$$

de unde putem caracteriza interiorul sferei ( $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 + (z - 1)^2 \leq 1$ ) prin  $\rho^2 \leq 2\rho \cos \varphi$ , adică  $\rho \leq 2 \cos \varphi$ . Conul, în coordonate sferice, se scrie:

$$\rho^2 \cos^2 \varphi = z^2 = x^2 + y^2 = \rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \varphi \sin^2 \theta = \rho^2 \sin^2 \varphi,$$

de unde  $\cos^2 \varphi = \sin^2 \varphi$ , adică  $\operatorname{tg}^2 \varphi = 1$  și, cum  $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  (deoarece suntem deasupra planului  $xOy$ ), rezultă că  $\varphi = \frac{\pi}{4}$ . Astfel, interiorul conului este

caracterizat de  $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ . Grație acestor rezultate, putem reveni la volumul corpului nostru,  $K$ , și scrie:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\cos \varphi} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left( \sin \varphi \cdot \frac{\rho^3}{3} \Big|_{\rho=0}^{\rho=2\cos \varphi} \right) d\varphi d\theta = \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi \cos^3 \varphi d\varphi d\theta = \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4 \cos^3 \varphi \cdot (\cos \varphi)' d\varphi d\theta = \\ &= -\frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \cos^4 \varphi \Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{4}} d\theta = -\frac{2}{3} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{3}{4}\right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi. \end{aligned}$$

## 1.6 Integrale triple în coordonate cilindrice

*Sistemul de coordonate cilindrice* este un sistem de coordonate cu trei dimensiuni, în care fiecare punct  $P$  din spațiu este determinat de: lungimea proiecției (notată cu  $\rho$ ) a segmentului  $OP$  pe planul  $xOy$ , unghiul *azimut* (notat cu  $\theta$ ) format de proiecția lui  $OP$  pe planul  $xOy$  cu axa pozitivă  $x$ .

Astfel, coordonatele carteziene ale unui punct  $P$  din plan se scriu:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z.$$

Domeniile maxime pentru coordonatele sferice sunt:

$$\rho \in [0, \infty), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}.$$

Când trecem din coordonatele carteziene în coordonatele cilindrice să nu uităm să înmulțim cu iacobianul transformării,  $J = \rho$ !

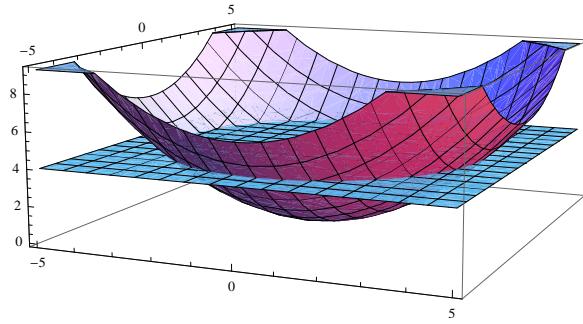
Un lucru ce merită evidențiat este că

$$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \theta + \rho^2 \sin^2 \theta = \rho^2.$$

1. Calculați valoarea integralei  $\iiint_K (x^2 + y^2) dV$ , unde  $K$  este regiunea mărginită de paraboloidul  $x^2 + y^2 = 4z$  și de planul  $z = 4$ .

*Soluție.* Planul  $z = 4$  „taie” paraboloidul după un cerc de rază 4. Observăm că regiunea  $K$  este un „vârf” de paraboloid, pe care îl proiectăm pe planul  $xOy$  în:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 16\}.$$



Trecem la coordonatele cilindricice:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z.$$

Atunci  $\rho^2 = x^2 + y^2 \leq 16$ , deci  $\rho \in [0, 4]$ , iar ecuația paraboloidului devine  $\rho^2 = 4z$ , adică  $z = \frac{\rho^2}{4}$ . Așadar,  $z \in \left(\frac{\rho^2}{4}, 4\right)$  și  $\theta \in [0, 2\pi]$ , iar integrala noastră devine:

$$\begin{aligned} \iiint_K (x^2 + y^2) dV &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\rho^2}{4}}^4 \rho^2 \cdot \rho dz d\theta d\rho = \\ &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \left( \int_{\frac{\rho^2}{4}}^4 \rho^3 dz \right) d\theta d\rho = \\ &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \left( \rho^3 \cdot z \Big|_{z=\frac{\rho^2}{4}}^{z=4} \right) d\theta d\rho = \\ &= \int_0^4 \int_0^{2\pi} \left( 4\rho^3 - \frac{\rho^5}{4} \right) d\theta d\rho = \\ &= \int_0^4 \left( \left( 4\rho^3 - \frac{\rho^5}{4} \right) \cdot \theta \Big|_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \right) d\rho = \\ &= 2\pi \cdot \int_0^4 \left( 4\rho^3 - \frac{\rho^5}{4} \right) d\rho = \\ &= 2\pi \left( \rho^4 - \frac{\rho^6}{24} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=4} = \frac{512\pi}{3}. \end{aligned}$$

**2.** Calculați momentul de inerție al unui con circular drept, omogen, în raport cu axa  $z$ . (Conul are raza bazei  $R$ , înălțimea  $H$ , masa  $m$ .)

*Soluție.* Momentul de inerție al conului  $K$ , în raport cu axa  $z$ , este dat de formula

$$I_z = \iiint_K \gamma(x, y, z) \cdot (x^2 + y^2) dV.$$

Deoarece conul este omogen, atunci densitatea  $\gamma(x, y, z) = \gamma_0$  este aceeași în fiecare punct și

$$I_z = \gamma_0 \iiint_K (x^2 + y^2) dV.$$

Trecem la coordonate cilindrice:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z.$$

Ecuată generală a unui con este

$$x^2 + y^2 = a^2 z^2.$$

Să vedem cine este  $a$ . Deoarece, când  $x = R$  și  $y = 0$ , avem că  $z = H$ , obținem că  $R^2 = a^2 H^2$ , deci  $a = \frac{R}{H}$  și ecuația conului se scrie:

$$x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2.$$

În coordonate sferice,  $\rho^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2$ , deci  $z = \frac{H}{R} \rho$ . Așadar,

$$\rho \in [0, R], \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad z \in \left[ \frac{H}{R} \rho, H \right].$$

Momentul de inerție devine:

$$\begin{aligned} I_z &= \gamma_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R \int_{\frac{H}{R}\rho}^H \rho^2 \cdot \rho dz d\rho d\theta = \gamma_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( \rho^3 \cdot z \Big|_{z=\frac{H}{R}\rho}^{z=H} \right) d\rho d\theta = \\ &= \gamma_0 \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( \rho^3 H - \rho^4 \frac{H}{R} \right) d\rho d\theta = \gamma_0 H \int_0^{2\pi} \int_0^R \left( \rho^3 - \frac{\rho^4}{R} \right) d\rho d\theta = \\ &= \gamma_0 H \int_0^{2\pi} \left( \frac{\rho^4}{4} - \frac{\rho^5}{5R} \right) \Big|_{\rho=0}^{\rho=R} d\theta = \gamma_0 H \int_0^{2\pi} \left( \frac{R^4}{4} - \frac{R^4}{5} \right) d\theta = \\ &= \frac{\pi}{10} \gamma_0 H R^4. \end{aligned}$$

Nu cunoaștem densitatea  $\gamma_0$ , dar cunoaștem masa  $m$  și volumul conului,  $V = \frac{\pi R^2 H}{3}$ . Așa că densitatea  $\gamma_0 = \frac{m}{V} = \frac{3m}{\pi R^2 H}$  și, grație acesteia, momentul de inerție este

$$I_z = \frac{\pi}{10} \cdot \frac{3m}{\pi R^2 H} \cdot H R^4 = \frac{3m R^2}{10}.$$

## 1.7 Miscelaneu

- 1.** Calculați valoarea integralei  $I = \int_0^\infty \frac{\arctg \pi x - \arctg x}{x} dx$ .

*Soluție.* Aparent, problema nu are nicio legătură cu integralele multiple, însă ideea este să privim expresia  $\frac{\arctg \pi x - \arctg x}{x}$  ca  $\frac{\arctg yx}{x} \Big|_{y=1}^{y=\pi}$ , iar funcția  $F(y) = \frac{\arctg yx}{x}$  este o primitivă a funcției  $f(y) = \frac{1}{1+x^2y^2}$  (se arată ușor folosind schimbarea de variabilă  $u = xy$ ). Deci

$$\frac{\arctg \pi x - \arctg x}{x} = \frac{\arctg yx}{x} \Big|_{y=1}^{y=\pi} = \int_1^\pi \frac{1}{1+x^2y^2} dy$$

și integrala noastră devine

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \int_1^\pi \frac{1}{1+x^2y^2} dy dx = \int_1^\pi \left( \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2y^2} dx \right) dy = \\ &= \int_1^\pi \left( \frac{\arctg xy}{y} \Big|_{x=0}^{x=\infty} \right) dy = \int_1^\pi \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\arctg xy}{y} \Big|_{x=0}^{x=t} \right) dy = \\ &= \int_1^\pi \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{\arctg ty}{y} - \frac{\arctg 0}{y} \right) dy = \\ &= \int_1^\pi \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\arctg ty}{y} dy = \left( \lim_{t \rightarrow \infty} \arctg ty = \frac{\pi}{2}, \text{ dacă } y > 0 \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \int_1^\pi \frac{1}{y} dy = \frac{\pi}{2} \ln y \Big|_{y=1}^{y=\pi} = \frac{\pi}{2} \ln \pi. \end{aligned}$$

- 2.** Aflați valoarea lui  $c$ , pentru care funcția

$$f(x, y) = \begin{cases} c(x+y), & \text{dacă } 0 < x < 5 \text{ și } x < y < x+2 \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

este densitatea comună de probabilitate a variabilelor aleatoare de tip continuu  $X$  și  $Y$ .

*Soluție.* Una dintre proprietățile esențiale ale densității comune de probabilitate este

$$\int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x, y) dx dy = 1.$$

În cazul nostru, privind domeniul de definiție a lui  $f(x, y)$ , avem

$$\int_0^5 \int_x^{x+2} c(x+y) dy dx = 1,$$

de unde rezultă că  $c \int_0^5 \int_x^{x+2} (x+y) dy dx = 1$ , adică  $c \int_0^5 \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_x^{x+2} dx = 1$  și obținem că  $c \int_0^5 (4x+2) dx = 1$ . Grație acestei ultime relații, deducem că  $c (2x^2 + 2x) \Big|_0^5 = 1$ , de unde găsim valoarea lui  $c = \frac{1}{60}$ . Cu acest  $c$  este verificată și nenegativitatea densității iar continuitatea sa este evidentă.