

*Catatan Kuliah **

FI-3104 FISIKA KUANTUM 1

oleh:

Prof. Freddy P. Zen, D. Sc (fpzen@fi.itb.ac.id)

Laboratorium Fisika Teoretik, FMIPA-ITB

*terakhir diperbaharui pada 6 Januari 2010.

Daftar Isi

Daftar Isi	ii
Daftar Gambar	iii
1 Gejala Kuantum	1
1.1 Radiasi Benda Hitam	1
1.1.1 Gejala radiasi termal	1
1.1.2 Hukum Stefan	1
1.1.3 Hukum Raleygh-Jeans	3
Model osilator harmonik	3
Energi rata-rata osilator	4
Rapat jumlah osilator	4
Kerapatan energi radiasi	6
1.1.4 Teori kuantum radiasi Planck	6
1.2 Efek Fotolistrik	8
1.3 Efek Compton (1922)	9
1.4 Hipotesis de Broglie (1924)	10
2 Dasar-dasar Kuantum	12
2.1 Perbedaan Fisika Klasik dan Kuantum	12
2.2 Fungsi Gelombang	13
2.3 Operator	13
2.3.1 Sifat-sifat operator	14
2.3.2 Operator Hermitian	15
2.4 Pengukuran Serentak dan Berurutan	15

3	Persamaan Schrödinger	17
3.1	Arus Rapat Probabilitas	17
3.2	Kasus Stasioner	18
3.3	Partikel Bebas	19
3.4	Partikel dalam kotak potensial takhingga (1 dimensi).	19
3.5	Partikel dalam Sumur Potensial Berhingga	21
3.6	Partikel dalam Daerah dengan Potensial Tangga	22
3.7	Partikel dalam Daerah dengan Potensial Penghalang	24
3.8	Osilator Harmonik	26
4	Atom Hidrogen	31
4.1	Postulat Bohr tentang Atom Hidrogen	31
4.2	Teori Kuantum tentang Atom Hidrogen	32
	Daftar Pustaka	38

Daftar Gambar

1.1	Kurva intensitas radiasi termal per satuan panjang gelombang	2
1.2	Perbandingan antara hasil yang didapat hukum Raleygh-Jeans dan Teori Kuantum Planck	7
1.3	Skema efek Compton	9
3.1	Grafik $\tan y = \frac{\sqrt{\lambda-y^2}}{y}$ dan $-\cot y = \frac{\sqrt{\lambda-y^2}}{y}$	23

Bab 1

Gejala Kuantum

1.1 Radiasi Benda Hitam

1.1.1 Gejala radiasi termal

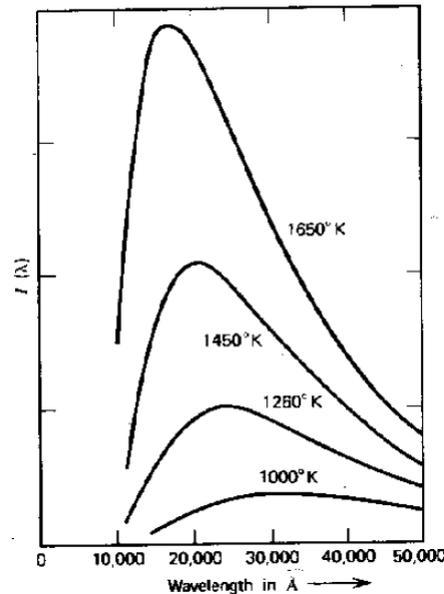
Kajian tentang radiasi benda hitam bertujuan menjelaskan fenomena yang terkait dengan intensitas radiasi (daya emisi) suatu benda pada temperatur tertentu. Pada tahun 1792, T. Wedgwood mendapati bahwa sifat universal dari sebuah objek yang dipanaskan tidak bergantung pada komposisi dan sifat kimia, bentuk, dan ukuran benda. Selanjutnya, pada tahun 1859 G. Kirchoff membuktikan sebuah teorema yang didasarkan pada sifat termodinamika benda bahwa pada benda dalam kesetimbangan termal, *daya emisi* (*pancar*) dan *daya absorpsi* (*serap*) sama besar. Ide Kirchoff dinyatakan dalam sebuah persamaan

$$e_f = J(f, T) A_f, \quad (1.1)$$

dengan e_f adalah daya emisi per frekuensi cahaya tiap satuan luas, f adalah frekuensi cahaya, T suhu mutlak benda, dan A_f daya absorpsi (yaitu fraksi daya masuk yang diserap per frekuensi tiap satuan luas). *Benda hitam* didefinisikan sebagai benda yang [definisi](#) menyerap semua radiasi elektromagnetik yang mengenainya, sehingga benda tersebut [benda](#) menjadi berwarna hitam, atau pada persamaan (1.1) berlaku $A_f = 1$ sehingga $e_f =$ [hitam](#) $J(f, T)$ (daya emisi per frekuensi per satuan luas hanya bergantung pada f dan T saja).

1.1.2 Hukum Stefan

Pada tahun 1879, J. Stefan menemukan (secara eksperimental) bahwa daya total tiap satuan luas yang dipancarkan oleh benda padat pada semua frekuensi bergantung pada



Gambar 1.1 Kurva intensitas radiasi termal per satuan panjang gelombang. Jumlah radiasi yang dipancarkan (luas daerah di bawah kurva) bertambah seiring dengan naiknya temperatur. (Gambar diambil dari [1])

pangkat empat dari suhu (T^4), atau

$$e_{\text{total}} = \int_0^{\infty} e_f(f, T) df = a\sigma T^4, \quad (1.2)$$

dengan $0 < a \leq 1$ merupakan koefisien serap dan $\sigma = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{T}^{-4}$ adalah tetapan Stefan-Boltzman.

■ **Contoh.** Hukum Stefan dapat diterapkan untuk memperkirakan suhu di permukaan bintang. Sebagai contoh, kita akan memperkirakan suhu di permukaan matahari. Diketahui jejari matahari adalah $R_S = 7,0 \times 10^8 \text{ m}$, jarak rata-rata matahari ke bumi adalah $R = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$, dan fluks (daya per satuan luas) energi matahari yang terukur di permukaan bumi adalah $1400 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Seluruh energi yang dipancarkan matahari dapat dianggap berasal dari reaksi nuklir yang terjadi di dalamnya, bukan berasal pantulan dari radiasi yang mengenainya (seluruh radiasi yang mengenai matahari dianggap terserap sempurna). Sehingga, matahari dapat dianggap sebagai benda hitam ($a = 1$). Energi radiasi total yang mengenai bumi dan titik-titik lain di alam semesta yang berjarak R dari matahari adalah $e_t(R) 4\pi R^2$, sedangkan energi total yang meninggalkan permukaan matahari adalah $e_t(R_S) 4\pi R_S^2$. Menurut hukum kekekalan energi, besar kedua energi tersebut haruslah sama, sehingga

$$e_t(R) 4\pi R^2 = e_t(R_S) 4\pi R_S^2 \Rightarrow e_t(R_S) = e_t(R) \frac{R^2}{R_S^2}. \quad (1.3)$$

Lalu, menurut hukum Stefan $e_t(R_S) = \sigma T^4$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} T &= \left(\frac{e_t(R)R^2}{\sigma R_S^2} \right)^{1/4} \\ &= \left(\frac{(1400 \text{ W m}^{-2}) (1,5 \times 10^{11} \text{ m})^2 (R)R^2}{(5,67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.T^{-4}) (7,0 \times 10^8 \text{ m})^2} \right)^{1/4} \\ &\approx 5800 \text{ K}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Berdasarkan persamaan (1.1), untuk benda hitam akan berlaku $e_f = J(f, T)$. Selanjutnya, didefinisikan besaran *kerapatan spektrum energi per satuan volume per satuan frekuensi* $u(f, T)$, sehingga untuk cahaya (kecepatannya c) akan diperoleh

$$J(f, T) = u(f, T) \frac{c}{4}. \quad (1.5)$$

Berdasarkan kurva spektrum radiasi benda hitam, Wien membuat tebakan bentuk fungsi kerapatan spektrum energi tersebut sebagai $u(f, T) = Af^3 e^{-\frac{\beta f}{T}}$. Ternyata bentuk fungsi tersebut dikonfirmasi secara eksperimental oleh Paschen untuk $\lambda = 1 - 4 \mu\text{m}$ (infra merah) dan $T = 400 - 1.600 \text{ K}$ (hasil eksperimen untuk λ lebih besar menyimpang dari prediksi Wien).

1.1.3 Hukum Raleygh-Jeans

Model osilator harmonik

Bentuk kurva spektrum pancar benda hitam juga coba dijelaskan melalui *hukum Rayleigh-Jeans*. Menurut hukum tersebut, benda hitam dimodelkan sebagai sebuah rongga, dan cahaya yang memasukinya membentuk gelombang berdiri. Energi radiasi per satuan volume per satuan frekuensi merupakan moda dari osilator-osilator harmonik per satuan volume dengan frekuensi yang terletak pada selang f dan $f + df$. Sehingga, kerapatan energi dapat dinyatakan sebagai

$$u(f, T)df = \bar{E} \mathcal{N}(f)df \quad (1.6)$$

dengan $\mathcal{N}(f)$ menyatakan *rapat jumlah osilator per satuan volume per satuan frekuensi*. Benda hitam dianggap berada pada kesetimbangan termal, sehingga terbentuk gelombang elektromagnetik berdiri di dalam rongga (gelombang berdiri EM ekuivalen dengan osilator satu dimensi).

Fungsi probabilitas osilator klasik memenuhi fungsi distribusi Maxwell-Boltzmann,

$$P(\epsilon) = P_0 e^{-\frac{(\epsilon - \epsilon_0)}{k_B T}}, \quad (1.7)$$

dengan ϵ_0 adalah energi dasar (terendah) osilator, ϵ energi osilator, $P_0 = P(\epsilon_0)$ merupakan peluang osilator memiliki energi sebesar ϵ_0 , k_B konstanta Boltzmann, dan T suhu mutlak sistem (dalam hal ini rongga).

Energi rata-rata osilator

Energi rata-rata osilator dihitung dengan memanfaatkan fungsi probabilitas (1.7),

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{\epsilon} \epsilon P(\epsilon)}{\sum_{\epsilon} P(\epsilon)}, \quad (1.8)$$

atau untuk nilai energi yang sinambung (kontinyu), notasi jumlah (\sum) berubah menjadi integral. Lalu dengan mengingat persamaan (1.7), diperoleh

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon P_0 e^{-\frac{(\epsilon-\epsilon_0)}{k_B T}} d\epsilon}{\int_0^{\infty} P_0 e^{-\frac{(\epsilon-\epsilon_0)}{k_B T}} d\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} d\epsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} d\epsilon}. \quad (1.9)$$

Pembilang dan penyebut pada persamaan terakhir dapat dihitung dengan cara sebagai berikut. Misalkan $\beta = (k_B T)^{-1}$, maka penyebut persamaan terakhir menjadi

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon &= -\frac{1}{\beta} e^{-\beta\epsilon} \Big|_{\epsilon=0}^{\infty} \\ &= \frac{1}{\beta}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Lalu, dengan memanfaatkan hubungan tersebut, dapat diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\beta} \left(\int_0^{\infty} e^{-\beta\epsilon} d\epsilon \right) &= \frac{d}{d\beta} \left(\frac{1}{\beta} \right) \\ \Leftrightarrow \int_0^{\infty} \frac{d}{d\beta} (e^{-\beta\epsilon}) d\epsilon &= -\frac{1}{\beta^2} \\ \Leftrightarrow - \int_0^{\infty} \epsilon e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} d\epsilon &= -\frac{1}{\beta^2} \\ \Leftrightarrow \int_0^{\infty} \epsilon e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} d\epsilon &= \frac{1}{\beta^2}. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Sehingga, energi rata-rata osilator adalah

$$\bar{\epsilon} = \frac{\int_0^{\infty} \epsilon e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} d\epsilon}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} d\epsilon} = \frac{\beta^{-2}}{\beta^{-1}} = \frac{1}{\beta} = k_B T. \quad (1.12)$$

Rapat jumlah osilator

Tinjau sebuah kubus dengan panjang rusuk L yang di dalamnya terdapat gelombang elektromagnetik stasioner. Berdasarkan persamaan Maxwell, diperoleh persamaan gelombang stasioner untuk medan elektromagnetik berbentuk

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad (1.13)$$

dengan $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$, $\vec{E} = \vec{E}(E_x, E_y, E_z)$, serta E_x , E_y , dan E_z masing-masing merupakan fungsi dari koordinat x, y, z . Dengan menganggap berlakunya *separasi variabel* pada tiap komponen medan \vec{E} , misalnya $E_x(x, y, z) \equiv u(x)v(y)w(z)$, dan $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ diperoleh

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k_x^2u = 0, \quad (1.14)$$

$$\frac{d^2v}{dy^2} + k_y^2v = 0, \quad (1.15)$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} + k_z^2w = 0, \quad (1.16)$$

dengan solusi

$$u(x) = B_x \cos(k_x x) + C_x \sin(k_x x), \quad (1.17)$$

$$v(y) = B_y \cos(k_y y) + C_y \sin(k_y y), \quad (1.18)$$

$$w(z) = B_z \cos(k_z z) + C_z \sin(k_z z). \quad (1.19)$$

Selanjutnya, diterapkan syarat batas bahwa $u = v = w = 0$ pada $x = y = z = 0$ dan $x = y = z = L$, sehingga $B_x = B_y = B_z = 0$ dan $k_{x,y,z} = n_{x,y,z}\pi/L$ dengan $n_{x,y,z}$ merupakan bilangan bulat positif. Dengan demikian, diperoleh

$$u(x) = C_x \sin(k_x x), \quad (1.20)$$

$$v(y) = C_y \sin(k_y y), \quad (1.21)$$

$$w(z) = C_z \sin(k_z z), \quad (1.22)$$

yang memberikan solusi untuk komponen E_x

$$E_x(x, y, z) = A \sin(k_x x) \sin(k_y y) \sin(k_z z), \quad (1.23)$$

dan berlaku pula

$$k^2 = \frac{\pi^2}{L^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) = \frac{n^2 \pi^2}{L^2}, \quad (1.24)$$

dengan n menyatakan jumlah osilator dalam kotak.

Sebuah kotak dalam ruang k (dimensi/satuannya m^{-1}) dengan volume $(\frac{\pi}{L})^3$ berisi satu buah gelombang berdiri. Sebuah elemen volum berbentuk kulit bola berjari k yang terletak pada sebuah kotak dengan rusuk k memiliki volum $\frac{1}{8} \times 4\pi k^2 dk$ (karena kotak berusuk k menempati satu *oktan*/perdelapan dari sebuah bola berjari k). Lalu, diperoleh $N(k)$ yaitu rapat jumlah gelombang berdiri dengan bilangan gelombang terletak antara k dan dk ,

$$N(k)dk = \frac{\frac{1}{8} \times 4\pi k^2 dk}{(\frac{\pi}{L})^3} = \frac{L^3 k^2}{2\pi^2} dk. \quad (1.25)$$

Dengan mengingat bahwa terdapat dua keadaan polarisasi untuk setiap modus gelombang EM, diperoleh jumlah gelombang berdiri tiap satuan volume ($V = L^3$) sebesar

$$\mathcal{N}(k)dk \equiv \frac{N(k)dk}{V} = 2 \times \frac{k^2 dk}{2\pi^2}, \quad (1.26)$$

atau dengan memanfaatkan hubungan besaran-besaran gelombang EM $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ dan $c = \lambda f$ diperoleh

$$\mathcal{N}(f)df = \frac{8\pi f^2}{c^3}df \Leftrightarrow \mathcal{N}(\lambda)d\lambda = -\frac{8\pi}{\lambda^4}d\lambda. \quad (1.27)$$

Kerapatan energi radiasi

Berdasarkan hasil untuk \bar{E} dan $\mathcal{N}(f)$ seperti di atas, diperoleh nilai kerapatan energi radiasi

$$u(f, T)df = \frac{8\pi f^2}{c^3}k_B T df \Leftrightarrow u(\lambda, T)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}k_B T d\lambda. \quad (1.28)$$

Hasil ini memungkinkan terjadinya *bencana ultraviolet*, bahwa rapat energi untuk cahaya [bencana](#) dengan panjang gelombang kecil (atau frekuensi besar) dapat bernilai takhingga. Dan [UV](#) ini bertentangan dengan hasil eksperimen.

1.1.4 Teori kuantum radiasi Planck

Untuk mengatasi masalah yang timbul pada hukum Rayleigh-Jeans, Max Planck mempostulatkan bahwa energi osilator adalah sebanding dengan frekuensi gelombang, $\epsilon_n =$ [postulat](#) nhf (n bilangan bulat positif dan h konstanta Planck). Penerapan postulat ini ke persamaan untuk energi rata-rata menurut statistik Maxwell-Boltzman (persamaan 1.8) memberikan

$$\bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nhf e^{-\frac{nhf}{k_B T}}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{nhf}{k_B T}}}. \quad (1.29)$$

Dengan mengingat rumus jumlah pada deret geometri,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} \quad |r| < 1, \quad (1.30)$$

maka penyebut persamaan energi rata-rata tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{hf}{k_B T}} \right)^n = \frac{1}{1 - e^{-\frac{hf}{k_B T}}} \quad (1.31)$$

Bagian pembilang dihitung seperti pada persamaan (1.11). Misalkan $\alpha = \frac{hf}{k_B T}$, maka

$$\begin{aligned} \sum_n n e^{-\alpha n} &= -\frac{d}{d\alpha} \sum_n e^{-\alpha n} \\ &= -\frac{d}{d\alpha} \left(\frac{1}{1 - e^{-\frac{hf}{k_B T}}} \right) \\ &= \frac{e^{-\alpha}}{(1 - e^{-\alpha})^2}. \end{aligned} \quad (1.32)$$

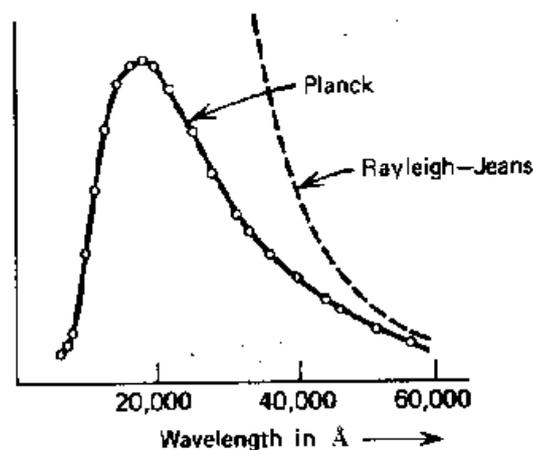
Jadi, diperoleh energi rata-rata

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= \frac{hf \left(1 - e^{-\frac{hf}{k_B T}} \right) e^{-\frac{hf}{k_B T}}}{\left(1 - e^{-\frac{hf}{k_B T}} \right)^2} \\ &= \frac{hf e^{-\frac{hf}{k_B T}}}{1 - e^{-\frac{hf}{k_B T}}} \\ &= \frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Selanjutnya, diperoleh rapat energi radiasi

$$u(f, T) df = \frac{8\pi f^2}{c^3} \left(\frac{hf}{e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1} \right) df \Leftrightarrow u(\lambda, T) d\lambda = \frac{8\pi hc d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1 \right)}. \quad (1.34)$$

Terlihat bahwa postulat Planck mampu mengatasi masalah yang muncul pada hukum Rayleigh-Jeans. Bahkan, hasil ini sesuai dengan data eksperimen (Gambar ??). Postulat



Gambar 1.2 Kurva intensitas radiasi termal menurut hukum Rayleigh-Jeans dan Teori Kuantum Planck. Terlihat bahwa teori Planck sesuai dengan hasil eksperimen (yang dinyatakan oleh titik), sedangkan hukum Rayleigh-Jeans hanya sesuai untuk daerah panjang gelombang besar. (Gambar diambil dari [1])

Planck juga mampu menjelaskan hukum Stefan-Boltzman. Substitusi persamaan rapat energi radiasi ke persamaan untuk radiasi total, menghasilkan

$$\begin{aligned}
 e_t &= \frac{c}{4} \int_{\lambda=0}^{\infty} u(\lambda, T) d\lambda \\
 &= \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{8\pi hc d\lambda}{\lambda^5 \left(e^{\frac{hf}{k_B T}} - 1 \right)}. \tag{1.35}
 \end{aligned}$$

Ambil $x \equiv \frac{hc}{\lambda k_B T}$ sehingga $dx = -\frac{hc}{\lambda^2 k_B T} d\lambda$ atau $d\lambda = -\frac{\lambda^2 k_B T}{hc} dx = -\frac{hc}{k_B T} \frac{dx}{x^2}$, sehingga

$$\begin{aligned}
 e_t &= -\frac{k_B T}{hc} 2\pi hc^2 \int_{x=\infty}^0 \frac{\frac{hc}{k_B T} \frac{dx}{x^2}}{\left(\frac{hc}{x k_B T} \right)^5 (e^x - 1)} \\
 &= \frac{2\pi k_B^4 T^4}{h^3 c^2} \underbrace{\int_{x=0}^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{=\frac{\pi^4}{15}} \\
 &= \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} T^4 \\
 &= \sigma T^4, \tag{1.36}
 \end{aligned}$$

dengan

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} \approx 5,67 \times 10^{-9} \text{ W.m}^{-2} \text{ K}^{-4} \tag{1.37}$$

merupakan konstanta Stefan-Boltzmann.

Soal Latihan

1. Turunkan hukum pergeseran Wien, $\lambda_m T = C$, dengan memaksimumkan $u(\lambda, T)$.

1.2 Efek Fotolistrik

Tugas 1 (28 Agustus 2009)

Gejala Kuantum: Efek Fotolistrik

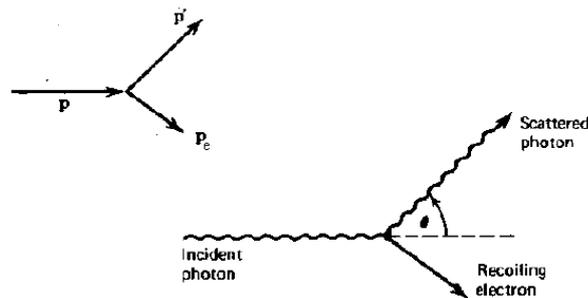
(dikumpulkan sebelum Jum'at, 4 September 2009)

1. Beri penjelasan tentang efek fotolistrik yang menganggap bahwa cahaya berbentuk kuantum (partikel)!
2. Hitung kecepatan *photoelectron* yang dilepas dari bahan seng (*zinc*, dengan *stopping potential* 4,3 eV) yang diberi cahaya ultraviolet. Dibanding kecepatan cahaya, berapa persen besar kecepatan tersebut?

3. Cahaya dengan intensitas $1,0 \mu\text{W}/\text{cm}^2$ jatuh pada permukaan besi seluas $1,0 \text{ cm}^2$. Anggap bahwa besi memantulkan 96% cahaya yang mengenainya dan hanya 3% dari energi yang terserap terletak pada daerah ultraviolet.
- Hitunglah intensitas yang dipakai untuk menghasilkan efek fotolistrik!
 - Jika panjang gelombang sinar ultraviolet adalah 250 nm, hitunglah banyaknya elektron yang diemisikan tiap detik!
 - Hitunglah besar arus yang ditimbulkan pada efek fotolistrik!
 - Jika frekuensi *cut off* $f_0 = 1,1 \times 10^{15} \text{ Hz}$, carilah fungsi kerja ϕ_0 untuk besi!

1.3 Efek Compton (1922)

Efek Compton adalah gejala yang timbul jika radiasi (sinar x) berinteraksi dengan partikel (elektron). Foton sinar x bersifat sebagai partikel dengan momentum $p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$. Skema efek Compton diberikan pada gambar 1.3. Efek Compton dapat dijelaskan meng-



Gambar 1.3 Skema efek Compton. Foton datang dengan momentum p dan menumbuk elektron yang diam. Lalu foton terhambur dengan momentum p' dan elektron terhambur dengan momentum p_e . Sudut hamburan foton θ dihitung terhadap arah datangnya. (Gambar diambil dari [1])

gunakan konsep momentum dan tumbukan. Tumbukan dianggap bersifat lenting sempurna, sehingga berlaku hukum kekekalan energi,

$$E + m_e c^2 = E' + E_e \Leftrightarrow E_e = hf - hf' + m_e c^2. \quad (1.38)$$

dengan E adalah energi foton sebelum tumbukan, $m_e c^2$ energi elektron sebelum tumbukan (berupa energi diam), E' energi foton setelah tumbukan, dan E_e energi elektron setelah tumbukan. Seperti kasus tumbukan pada umumnya, pada peristiwa efek Compton juga berlaku kekekalan momentum.

- Pada arah sumbu x (searah dengan arah datang foton)

$$p = p' \cos \theta + p_e \cos \phi \Leftrightarrow p^2 + p'^2 \cos^2 \theta - 2pp' \cos \theta = p_e^2 \cos^2 \phi \quad (1.39)$$

dengan p momentum foton sebelum tumbukan, p' momentum foton setelah tumbukan, p_e momentum elektron setelah tumbukan, dan ϕ sudut hambur elektron (dihitung terhadap arah foton datang).

- Pada arah sumbu y (tegak lurus arah datang foton)

$$p' \sin \theta = p_e \sin \phi \Leftrightarrow p'^2 \sin^2 \theta = p_e^2 \sin^2 \phi. \quad (1.40)$$

Jumlah dari kedua persamaan terakhir menghasilkan

$$p^2 + p'^2 - 2pp' \cos \theta = p_e^2. \quad (1.41)$$

Dengan mengingat hubungan antara momentum dengan frekuensi, persamaan terakhir dapat ditulis menjadi

$$p_e^2 = \left(\frac{hf'}{c}\right)^2 + \left(\frac{hf}{c}\right)^2 - \frac{2h^2ff'}{c^2} \cos \theta. \quad (1.42)$$

Di lain pihak, elektron memenuhi persamaan energi relativistik,

$$E_e^2 = (p_e c)^2 + (m_e c^2)^2. \quad (1.43)$$

Substitusi persamaan (1.38) dan (1.42) ke persamaan terakhir, menghasilkan

$$(hf - hf' + m_e c^2)^2 = \left[\left(\frac{hf'}{c}\right)^2 + \left(\frac{hf}{c}\right)^2 - \frac{2h^2ff'}{c^2} \cos \theta \right]^2 + (m_e c^2)^2 \quad (1.44)$$

Setelah disederhanakan, persamaan tersebut menghasilkan

$$\begin{aligned} -f' m_e c^2 + f m_e c^2 &= h f f' - h f f' \cos \theta \\ \Leftrightarrow m_e c^2 \left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'} \right) &= \frac{h c^2}{\lambda \lambda'} (1 - \cos \theta) \\ \Leftrightarrow \lambda' - \lambda &= \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta), \end{aligned} \quad (1.45)$$

yang menyatakan hubungan antara panjang gelombang foton terhambur (λ') dan sudut hamburannya (θ) dengan panjang gelombang foton datang (λ) dan massa diam elektron (m_e). Persamaan tersebut telah sesuai dengan hasil percobaan.

1.4 Hipotesis de Broglie (1924)

Pada kasus radiasi benda hitam, efek fotolistrik, dan efek Compton telah ditunjukkan bahwa cahaya (yang sebelumnya dikenal sebagai gelombang) ternyata memiliki sifat partikel. Berdasarkan kenyataan tersebut, de Broglie membuat hipotesis bahwa partikel

pun dapat memiliki sifat gelombang. Panjang gelombang dari sebuah partikel bergantung pada momentumnya, dengan hubungan yang sama seperti pada gelombang

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \quad (1.46)$$

dengan m massa partikel dan p kecepataannya.

Bab 2

Dasar-dasar Kuantum

Terdapatnya gejala-gejala fisis yang tidak dapat dijelaskan menggunakan hukum-hukum fisika yang telah ada mendorong para ilmuwan untuk menyadari akan perlunya cara pandang baru dalam memahami dan menjelaskan gejala fisis.

2.1 Perbedaan Fisika Klasik dan Kuantum

Perbedaan antara Fisika klasik dan kuantum dapat dipandang dari dua sisi: formulasi dan pengamatan. Pada tingkat perumusan (formulasi), dinamika partikel dalam Fisika klasik digambarkan oleh hukum dinamika Newton,

$$\sum \vec{F} = m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (2.1)$$

dengan solusi berupa ruang fasa $\{\vec{r}, \vec{p}\}$. Sedangkan pada fisika kuantum, dinamika sistem digambarkan oleh persamaan Schrödinger,

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t) \right) \Psi(\vec{r}, t) = E\Psi(\vec{r}, t), \quad (2.2)$$

dengan solusi $\Psi(\vec{r}, t)$ disebut *fungsi gelombang*, *vektor keadaan*, atau *amplitudo probabilitas*. Fungsi $\Psi(\vec{r}, t)$ tidak memiliki makna fisis, namun informasi fisis bisa didapatkan darinya.

Pada tingkat pengamatan, hasil pengamatan berupa $\{\vec{r}, \vec{p}\}$ pada fisika klasik sama persis dengan prediksi yang diberikan oleh formulasi. Dengan demikian, menurut fisika klasik pengukuran sama sekali tidak mengganggu keadaan sistem. Sementara itu, pada fisika kuantum pengukuran akan mengganggu sistem, sehingga hasil pengukuran selalu mengandung ketidakpastian terhadap nilai sesungguhnya. Nilai $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$ menyatakan fungsi probabilitas (sesuai interpretasi Born), dan antarvariabel konjugat memenuhi keti-

Tabel 2.1: Operator dalam kuantum.

dakpastian Heisenberg,

$$\Delta r \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.3)$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (2.4)$$

2.2 Fungsi Gelombang

Agar dapat menggambarkan sistem fisis secara mudah, fungsi gelombang Ψ haruslah memenuhi syarat-syarat berikut:

1. Invarian (tidak berubah) terhadap perkalian dengan sebuah skalar, sehingga Ψ dan $a\Psi$ ($a \in \mathbb{C}$) menggambarkan keadaan kuantum yang sama.
2. Invarian terhadap pergeseran fasa, sehingga $e^{i\delta}\Psi$ ($\delta \in \mathbb{R}$) bermakna fisis sama dengan Ψ .
3. Memenuhi $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |\Psi|^2 = 0$, atau Ψ konvergen pada $|x| \rightarrow \infty$.
4. Sinambung (kontinyu) dan mulus (*smooth*) pada seluruh ruang.

2.3 Operator

Dalam kuantum, besaran-besaran fisis diperoleh dengan menerapkan *operator-operator* kepada fungsi gelombang Ψ . Contoh operator dalam kuantum dan besaran yang bersesuaian dengannya pada fisika klasik diberikan pada tabel 2.1.

Operator bekerja secara serial kepada fungsi gelombang, sehingga menghasilkan observabel fisis. Karena bekerja secara serial, maka pada umumnya hasil pengukuran dua observabel fisis yang dilakukan berurutan akan bergantung pada urutan pengukuran, $\hat{A}\hat{B}\Psi \neq \hat{B}\hat{A}\Psi$.

Contoh. Operator posisi dan momentum masing-masing dinyatakan sebagai $\hat{x} = x$ dan $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ atau (atau dalam satu dimensi $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$). Bekerjanya kedua operator tersebut kepada Ψ menghasilkan:

$$\hat{p}\hat{x}\Psi(x) = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}(x\Psi) = -i\hbar\left(\Psi + x\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) \quad (2.5)$$

$$\hat{x}\hat{p}\Psi(x) = x\left(-i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right) = -i\hbar\left(x\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right). \quad (2.6)$$

Selisih kedua persamaan tersebut adalah

$$(\hat{p}\hat{x} - \hat{x}\hat{p})\Psi(x) = -i\hbar\Psi(x), \quad (2.7)$$

sehingga diperoleh *hubungan komutasi*

$$[\hat{p}, \hat{x}] = i\hbar, \quad (2.8)$$

dengan $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$.

Nilai rata-rata dari suatu observabel dinyatakan oleh

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \hat{A} \Psi(x) dx, \quad (2.9)$$

misalnya nilai rata-rata operator momentum pada ruangwaktu adalah

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x) dx, \quad (2.10)$$

atau dalam ruang momentum-energi

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(p) p \Psi(p) dp. \quad (2.11)$$

2.3.1 Sifat-sifat operator

$$[A, B] = AB - BA = -[B, A], \quad (2.12)$$

$$[A, \alpha] = 0 \quad \text{dengan } \alpha \text{ bilangan kompleks}, \quad (2.13)$$

$$[\alpha A, B] = \alpha [A, B] = [A, \alpha B], \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} [AB, C] &= ABC - CAB \\ &= ABC - ACB + ACB - CAB \\ &= A(BC - CB) + (AC - CA)B \\ &= A[B, C] + [A, C]B, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C, \quad (2.16)$$

$$[AB, CD] = AC[B, D] + A[B, C]D + C[A, D]B + [A, C]DB. \quad (2.17)$$

Dengan memanfaatkan hubungan aljabar di atas dan hubungan komutasi operator posisi dan momentum, diperoleh hubungan yang bermanfaat berikut:

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}] &= i\hbar, \\ [\hat{x}, \hat{p}^2] &= \hat{p}[\hat{x}, \hat{p}] + [\hat{x}, \hat{p}]\hat{p} \\ &= 2i\hbar\hat{p}, \\ [\hat{x}, \hat{p}^3] &= [\hat{x}, \hat{p}^2\hat{p}] \\ &= \hat{p}^2 i\hbar \end{aligned} \quad (2.18)$$

Berdasarkan hubungan di atas, diperoleh hubungan yang lebih umum berupa

$$[\hat{x}, \hat{p}^n] = ni\hbar\hat{p}^{n-1} = i\hbar\frac{d\hat{p}^n}{d\hat{p}}. \quad (2.19)$$

2.3.2 Operator Hermitian

Suatu matriks H dikatakan *hermitian* jika berlaku $H^\dagger = H$, dengan tanda \dagger menyatakan konjugat transpos. Nilai eigen dari sebuah matriks hermitian bersifat riil. Dalam mekanika kuantum, nilai observabel fisis diberikan oleh nilai eigen dari operator yang berkaitan. Agar memiliki makna fisis, nilai eigen dari matriks operator tersebut haruslah bernilai riil. Sehingga, representasi matriks dari operator-operator dalam mekanika kuantum haruslah berupa matriks hermitian.

Contoh. Operator posisi $\hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ merupakan operator Hermitian, karena nilai rata-ratanya riil. Bukti untuk pernyataan ini adalah sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi dx \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} dx \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d|\Psi|^2}{dx} - \frac{d\Psi^*}{dx} \Psi \right) dx \\ &= -i\hbar |\Psi|^2 \Big|_{-\infty}^{\infty} + i\hbar \left(-i\hbar\frac{d\Psi}{dx} \right)^* \Psi dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{p}\Psi)^* \Psi dx \\ &= \langle \hat{p}^\dagger \rangle. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Dengan cara yang sama dapat dibuktikan pula bahwa operator energi $\hat{E} = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$ juga hermitian.

2.4 Pengukuran Serentak dan Berurutan

Pada dasarnya, karena operator kuantum bekerja secara serial, maka dua pengukuran atau lebih hanya dapat dilakukan secara berurutan, dan tidak dapat dilakukan secara serentak. Akan tetapi, selang waktu antarpengukuran dapat dibuat sangat singkat sehingga keadaan sistem belum banyak berubah dan pengukuran dua besaran atau lebih dapat dianggap serentak.

Ketidakpastian dari dua pengukuran serentak \hat{Q}_1 dan \hat{Q}_2 diberikan oleh

$$\Delta\hat{Q}_1\Delta\hat{Q}_2 \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{Q}_1, \hat{Q}_2] \rangle \right|. \quad (2.21)$$

Pada fisika klasik, selalu didapatkan $[\hat{Q}_1, \hat{Q}_2] = 0$ (karena operator \hat{Q} merupakan skalar) sehingga $\Delta\hat{Q}_1\Delta\hat{Q}_2 = 0$. Dengan demikian, dalam fisika klasik dua pengukuran dapat dilakukan tanpa ketidakpastian (kecuali ketidakpastian yang disebabkan karena kekurangan pada alat atau pengukur).

Bab 3

Persamaan Schrödinger

Dinamika sisten kuantum dinyatakan oleh persamaan Schrödinger, yang merupakan persamaan gerak untuk $\Psi(\vec{r}, t)$,

$$\hat{H}\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}, \quad (3.1)$$

dengan \hat{H} adalah operator energi total. Pada fisika klasik telah diketahui bahwa energi total adalah jumlah dari energi kinetik ($K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$) dan energi potensial ($V = V(\vec{r}, t)$). Dengan menuliskan besaran momentum p dan potensial V dalam bentuk operator, diperoleh operator energi total

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{(-i\hbar\vec{\nabla})^2}{2m} + \hat{V}(\vec{r}, t) \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{V}(\vec{r}, t), \end{aligned} \quad (3.2)$$

dengan \hat{V} adalah operator energi potensial. Dengan demikian, persamaan Schrödinger dituliskan sebagai

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + \hat{V}(\vec{r}, t)\right)\Psi(\vec{r}, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(\vec{r}, t)}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Dengan diketahuinya \hat{V} , akan diperoleh solusi persamaan diferensial untuk Ψ yang menggambarkan dinamika sistem kuantum.

3.1 Arus Rapat Probabilitas

Rapat probabilitas menemukan partikel di titik x pada saat t adalah

$$P(x, t) = |\Psi(x, t)|^2. \quad (3.4)$$

Maka rapat probabilitas menemukan partikel pada daerah $a \leq x \leq b$ adalah

$$P(a \leq x \leq b, t) \equiv \int_a^b P(x, t)dx \leq 1. \quad (3.5)$$

Sehingga, perubahan P terhadap t dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [P(a \leq x \leq b, t)] &= \frac{d}{dt} \int_a^b P(x, t) dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_a^b \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx \\ &= \int_a^b \left(\frac{d\Psi^*(x, t)}{dt} \Psi(x, t) + \Psi^*(x, t) \frac{d\Psi(x, t)}{dt} \right) dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Dengan mengingat kembali persamaan Sechrödinger satu dimensi untuk partikel bebas ($V = 0$),

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad \text{dan} \quad \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} = -\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2}, \quad (3.7)$$

serta memperhatikan

$$\frac{d}{dx} \left(\Psi^* \frac{d\Psi}{dx} \right) = \frac{\left| \frac{d\Psi}{dx} \right|^2}{\frac{d\Psi^*}{dx} \frac{d\Psi}{dx}} + \Psi^* \frac{d^2\Psi}{dx^2} \Rightarrow \Psi^* \frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\Psi^* \frac{d\Psi}{dx} \right) - \left| \frac{d\Psi}{dx} \right|^2, \quad (3.8)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{d\Psi^*}{dx} \Psi \right) = \frac{d^2\Psi^*}{dx^2} \Psi + \frac{\left| \frac{d\Psi}{dx} \right|^2}{\frac{d\Psi^*}{dx} \frac{d\Psi}{dx}} \Rightarrow \Psi \frac{d^2\Psi^*}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\Psi \frac{d\Psi^*}{dx} \right) - \left| \frac{d\Psi}{dx} \right|^2, \quad (3.9)$$

maka arus probabilitas dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [P(a \leq x \leq b, t)] &= \int_a^b \left(-\frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} \Psi + \frac{i\hbar}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \Psi^* \right) dx \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_a^b \left(-\frac{d}{dx} \left(\Psi \frac{d\Psi^*}{dx} \right) + \left| \frac{d\Psi}{dx} \right|^2 + \frac{d}{dx} \left(\Psi^* \frac{d\Psi}{dx} \right) - \left| \frac{d\Psi}{dx} \right|^2 \right) dx \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \int_a^b \left(\frac{d}{dx} \left(\Psi^* \frac{d\Psi}{dx} \right) - \frac{d}{dx} \left(\Psi \frac{d\Psi^*}{dx} \right) \right) dx \\ &= \frac{i\hbar}{2m} \left[\Psi^* \frac{d\Psi}{dx} - \Psi \frac{d\Psi^*}{dx} \right]_{x=a}^b. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Akhirnya, secara umum didefinisikan besaran rapat arus probabilitas sebagai

$$j(x, t) \equiv \frac{dP(x, t)}{dt} = \frac{i\hbar}{2m} \left[\Psi^*(x, t) \frac{d\Psi(x, t)}{dx} - \Psi(x, t) \frac{d\Psi^*(x, t)}{dx} \right]. \quad (3.11)$$

definisi
rapat arus
probabili-
tas

3.2 Kasus Stasioner

Pada kasus gelombang $y(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$, gelombang berdiri/stasioner dinyatakan oleh fungsi $y(x, t) = A \sin kx \cos \omega t$. Terlihat bahwa fungsi gelombang dapat dipisahkan (*separable*) menurut variabel-variabel yang menyusunnya. Dengan demikian, kasus stasioner pada kuantum digambarkan oleh

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r})T(t). \quad (3.12)$$

Substitusi persamaan ini ke persamaan Schrödinger menghasilkan

$$\begin{aligned} T(t) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + \hat{V}(\vec{r}, t) \right) \psi(\vec{r}) &= i\hbar \psi(\vec{r}) \frac{\partial T(t)}{\partial t} \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) \right) \frac{1}{\psi(\vec{r})} &= \frac{i\hbar}{T(t)} \frac{\partial T(t)}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Terlihat bahwa ruas kiri dari persamaan di atas hanya merupakan fungsi dari posisi sedangkan ruas kanannya hanya fungsi dari waktu. Sehingga kedua ruas haruslah bernilai konstan, misal E , dengan dimensi energi. Sehingga diperoleh dua persamaan terpisah,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(\vec{r}) + V(\vec{r}) \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}), \quad (3.14)$$

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{i}{\hbar} T(t) E \Rightarrow T(t) \propto e^{-iEt/\hbar}. \quad (3.15)$$

Sehingga solusi persamaan Schrödinger ditulis sebagai $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}$, dengan $\psi(\vec{r})$ akan ditentukan oleh $V(\vec{r})$.

3.3 Partikel Bebas

Pada partikel bebas adalah partikel yang berada pada daerah dengan potensial $V = 0$. Untuk kasus ini, persamaan Schrödinger bebas waktu menjadi berbentuk

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = E \psi(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x). \quad (3.16)$$

Solusi persamaan diferensial tersebut adalah $\psi(x) \propto e^{\lambda x}$ dengan $\lambda^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$ atau $\lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$. Sehingga solusi umum persamaan Schrödinger untuk partikel bebas ini adalah

$$\begin{aligned} \psi(x) &= A e^{i \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x} + B e^{-i \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x} \\ &= A (\cos kx + i \sin kx) + B (\cos kx - i \sin kx); \quad k \equiv \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \\ &= (A + B) \cos kx + i(A - B) \sin kx \\ &= C \cos kx + D \sin kx. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Karena tidak ada syarat batas apapun, nilai k_n dapat bernilai berapapun (asal riil dan berhingga), sehingga energi E pun dapat bernilai berapapun (riil dan berhingga).

3.4 Partikel dalam kotak potensial takhingga (1 dimensi).

Sebuah partikel berada dalam daerah dengan potensial

$$V(x) = \begin{cases} 0, & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ \infty, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (3.18)$$

Pada daerah $x < -\frac{L}{2}$ dan $x > \frac{L}{2}$, nilai potensial menuju takhingga sehingga persamaan Schrödinger untuk daerah ini adalah

$$\lim_{V \rightarrow \infty} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V \right) \psi(x) \approx \lim_{V \rightarrow \infty} V\psi(x) = E\psi(x). \quad (3.19)$$

Karena nilai E berhingga, maka haruslah $\psi(x) = 0$.

Pada daerah $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$, $V = 0$ sehingga persamaan Schrödinger untuk daerah ini adalah

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2mE}{\hbar^2}\psi(x). \quad (3.20)$$

Serupa dengan kasus partikel bebas, solusi umum persamaan Schrödinger untuk daerah dalam kotak potensial ini adalah

$$\begin{aligned} \psi(x) &= Ae^{i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x} + Be^{-i\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}x} \\ &= C \cos kx + D \sin kx. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Selanjutnya, diterapkan syarat batas kesinambungan fungsi gelombang pada titik batas $x = -\frac{L}{2}$ dan $x = \frac{L}{2}$, bahwa $\psi(-\frac{L}{2}) = \psi(\frac{L}{2}) = 0$ sebagai berikut

$$\psi\left(-\frac{L}{2}\right) = C \cos\left(\frac{kL}{2}\right) - D \sin\left(\frac{kL}{2}\right) = 0 \quad (3.22)$$

$$\psi\left(\frac{L}{2}\right) = C \cos\left(\frac{kL}{2}\right) + D \sin\left(\frac{kL}{2}\right) = 0. \quad (3.23)$$

Sehingga, dapat dipilih dua kasus khusus:

- $C = 0$ dan $D \neq 0$, sehingga $\sin\left(\pm\frac{kL}{2}\right) = 0$ atau $k = \frac{2n\pi}{L}$, dengan $n = 1, 2, 3, \dots$
- $C \neq 0$ dan $D = 0$, sehingga $\cos\left(\pm\frac{kL}{2}\right) = 0$ atau $k = \frac{(2n-1)\pi}{L}$, dengan $n = 1, 2, 3, \dots$

Dengan demikian, solusi lengkap persamaan Schrödinger terdiri atas solusi ganjil (berupa fungsi cos yang genap) dan solusi genap (berupa fungsi sin yang ganjil) sebagai berikut

$$\psi(x) = \begin{cases} C \cos(k_n x), & n \text{ ganjil,} \\ D \sin(k_n x), & n \text{ genap.} \end{cases} \quad (3.24)$$

Lalu berdasarkan nilai k yang diperoleh di atas, didapatkan nilai eigen energi

$$E = \frac{\pi^2 \hbar^2}{mL^2} n^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (3.25)$$

Nilai konstanta C dan D diperoleh dari normalisasi fungsi gelombang $\psi(x)$ sebagai

nilai eigen energi partikel dalam kotak potensial

berikut

$$\begin{aligned}
 1 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} |C|^2 \cos^2(k_n x) dx \\
 &= \frac{|C|^2}{k_n} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \left(\frac{\cos(2k_n x) + 1}{2} \right) d(k_n x) \\
 &= \frac{|C|^2}{2k_n} \left(\frac{\sin(2k_n x)}{2k_n} + k_n x \right) \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \\
 &= |C|^2 \frac{L}{2}.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

Sehingga diperoleh $C = \sqrt{\frac{2}{L}}$. Dengan cara yang sama diperoleh pula $D = \sqrt{\frac{2}{L}}$.

3.5 Partikel dalam Sumur Potensial Berhingga

Sebuah partikel berada dalam daerah dengan potensial

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & -\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2} \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \tag{3.27}$$

Untuk kasus energi partikel $-V_0 < E < 0$, penerapan syarat batas pada persamaan Schrödinger bebas waktu untuk partikel ini adalah:

- pada $x < -\frac{L}{2}$ dan $x > \frac{L}{2}$, $V(x) = 0$ sehingga,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -E\psi \Rightarrow \psi(x) = C_1 e^{Kx} + D_1 e^{-Kx}, \quad \text{dengan } K = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}. \tag{3.28}$$

Karena pada $x \rightarrow -\infty$ harus berlaku $\psi(x) \rightarrow 0$, maka haruslah $D_1 = 0$ sehingga $\psi(x) = C_1 e^{Kx}$.

- pada $-\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2}$, $V(x) = -V_0$ sehingga,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} - V_0\psi(x) = -E\psi(x) \Rightarrow \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\psi(x). \tag{3.29}$$

Karena $E < V$, maka solusi persamaan tersebut adalah $\psi(x) = A \cos qx + B \sin qx$, dengan $q = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$.

- pada $x > \frac{L}{2}$, $V(x) = 0$ sehingga diperoleh hasil mirip pada $x < -\frac{L}{2}$ namun dengan menerapkan syarat $\lim_{x \rightarrow \infty} \psi(x) = 0$, yaitu $\psi(x) = D_2 e^{-Kx}$.

Dengan demikian, diperoleh solusi lengkap

$$\psi(x) = \begin{cases} C_1 e^{Kx}, & x < -\frac{L}{2} \\ A \cos qx + B \sin qx, & -\frac{L}{2} < x < \frac{L}{2} \\ D_2 e^{-Kx}, & x > \frac{L}{2}. \end{cases} \tag{3.30}$$

Tetapan-tetapan yang ada pada solusi di atas ditentukan dengan menerapkan syarat batas kesinambungan fungsi dan turunannya pada daerah $x = \pm \frac{L}{2} = \pm a$.

- pada $x = -a$:

$$C_1 e^{-Ka} = A \cos qa - B \sin qa \quad (3.31)$$

$$C_1 K e^{-Ka} = q(A \sin qa + B \cos qa). \quad (3.32)$$

- pada $x = a$

$$D_2 e^{-Ka} = A \cos qa + B \sin qa \quad (3.33)$$

$$-D_2 K e^{-Ka} = q(-A \cos qa + B \sin qa). \quad (3.34)$$

Dengan membagi persamaan (3.32) dengan (3.31) serta (3.34) dengan (3.33), diperoleh

$$K = \frac{q(A \sin qa + B \cos qa)}{A \cos qa - B \sin qa} = -\frac{q(-A \sin qa + B \cos qa)}{A \cos qa + B \sin qa}. \quad (3.35)$$

Dengan menyelesaikan persamaan terakhir, akan diperoleh

$$AB = -AB. \quad (3.36)$$

Jadi, salah satu dari A dan B haruslah bernilai nol. Jika keduanya bernilai nol, maka akan diperoleh $\psi(x) = 0$ di daerah $(-a, a)$, dan ini tidak boleh terjadi.

Dengan demikian, solusi untuk daerah $(-a, a)$ adalah $\psi(x) = A \cos qa$ atau $\psi(x) = B \sin qa$. Substitusi hasil ini ke persamaan (3.35) akan menghasilkan $K = q \tan qa$ dan $K = -\cot qa$. Dengan memperkenalkan sebuah tetapan $\lambda = \frac{2mV_0 a^2}{\hbar^2}$ dan menuliskan $y = qa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} a$, maka untuk kedua solusi di atas dapat dituliskan $\tan y = \frac{K}{q} = \frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y}$ dan $-\cot y = \frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y}$. Selanjutnya, solusi untuk nilai y ditentukan dengan metode grafik (lihat gambar 3.1).

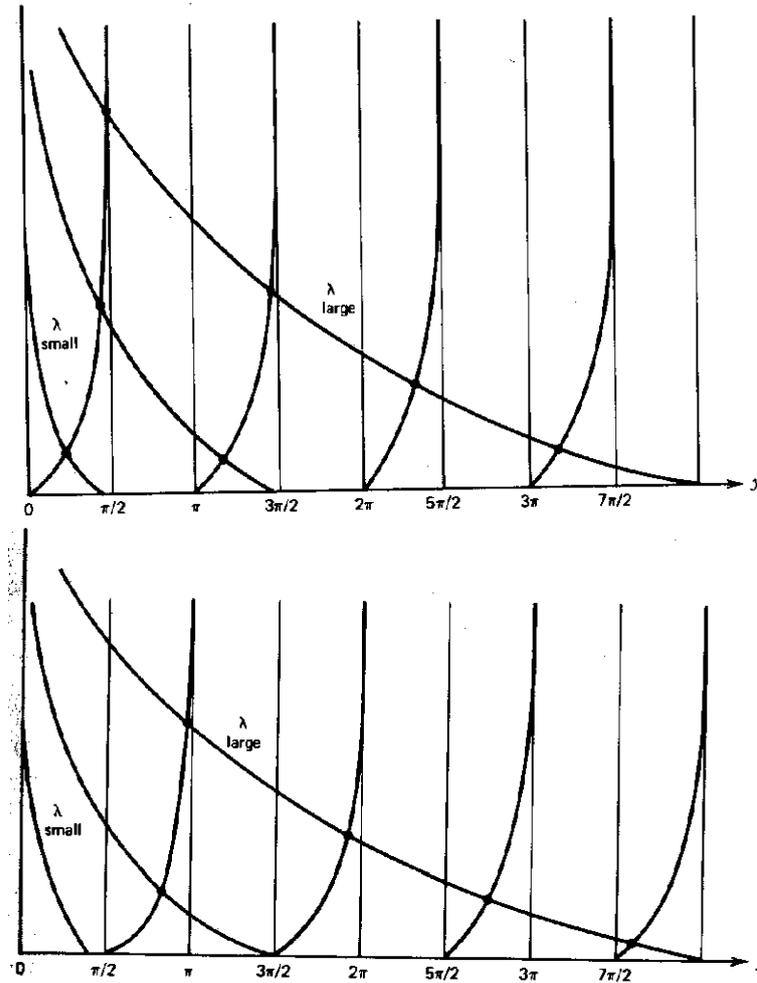
3.6 Partikel dalam Daerah dengan Potensial Tangga

Suatu partikel berada pada daerah dengan potensial

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ V_0, & x \geq 0. \end{cases} \quad (3.37)$$

Solusi persamaan Schrödinger bebas waktu untuk kasus ini adalah

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & x < 0, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \\ De^{-Kx}, & x \geq 0, \quad K = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}. \end{cases} \quad (3.38)$$



Gambar 3.1 Grafik $\tan y = \frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y}$ (atas) dan $-\cot y = \frac{\sqrt{\lambda - y^2}}{y}$ (bawah). Pada kedua grafik di atas, $\tan y$ dan $-\cot y$ sama-sama naik. Titik-titik potong pada kedua grafik di atas menyatakan nilai eigen diskrit untuk q (yang berkaitan dengan E).

Penerapan syarat batas pada $x = 0$ menghasilkan

$$A + B = D \quad \text{dan} \quad ik(A - B) = -KD. \quad (3.39)$$

Dari persamaan tersebut, diperoleh $\frac{B}{A} = \frac{ik+K}{ik-K}$. Substitusi hasil ini ke persamaan (3.39) menghasilkan $\frac{D}{A} = \frac{2k}{k+iK}$. Selanjutnya, nilai $|\frac{B}{A}|^2$ (dan $|\frac{D}{A}|^2$) menyatakan probabilitas partikel pantul (dan transmisi), dan disebut koefisien *reflektansi* (dan *koefisien transmisi*).

Dengan demikian, solusi lengkap untuk kasus potensial tangga adalah

$$\psi(x) = \begin{cases} A \left[e^{ikx} + \left(\frac{k-iK}{k+iK} \right) e^{-ikx} \right], & x < 0, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \\ A \left(\frac{2k}{k+iK} \right) e^{-Kx}, & x \geq 0, \quad K = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}. \end{cases} \quad (3.40)$$

Lalu, probabilitas partikel pantul untuk kasus ini adalah

$$|\psi_{\text{pantul}}(x)|^2 = A^* \left(\frac{k+iK}{k-iK} \right) e^{ikx} \cdot A \left(\frac{k-iK}{k+iK} \right) e^{-ikx} = |A|^2. \quad (3.41)$$

Sedangkan probabilitas gelombang transmisinya

$$|\psi_{\text{transmisi}}(x)|^2 = A^* \left(\frac{2k}{k-iK} \right) e^{-Kx} \cdot A \left(\frac{2k}{k+iK} \right) e^{-Kx} = \left(\frac{4k^2}{k^2 + K^2} \right) |A|^2 e^{-2Kx}. \quad (3.42)$$

Terlihat bahwa $\lim_{x \rightarrow \infty} |\psi_{\text{transmisi}}(x)|^2 = 0$. Selanjutnya, arus probabilitas pada tiap daerah adalah:

- pada $x < 0$

$$j_{\text{datang}} = -\frac{i\hbar}{2m} \left[|A|^2 ik - |A|^2 (ik) \right] = \frac{\hbar k}{m} |A|^2, \quad (3.43)$$

$$j_{\text{pantul}} = -\frac{\hbar k}{2m} |A|^2. \quad (3.44)$$

- pada $x \geq 0$

$$j_{\text{transmisi}} = 0. \quad (3.45)$$

Lalu, bagaimanakah jadinya jika $E > V_0$? Solusi umum untuk kasus ini akan berupa

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & x < 0, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \\ Ce^{iKx} + De^{-iKx}, & x \geq 0, \quad K = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}. \end{cases} \quad (3.46)$$

Untuk partikel yang datang dari arah kanan ke kiri, diperoleh $D = 0$. Lalu dengan menerapkan syarat batas seperti sebelumnya, akan diperoleh

$$\psi_E(x) = \begin{cases} A \left[e^{ikx} + \left(\frac{k-K}{k+K} \right) e^{-ikx} \right], & x < 0, \quad k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \\ A \left(\frac{2k}{k+K} \right) e^{iKx}, & x \geq 0, \quad K = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}. \end{cases} \quad (3.47)$$

Lalu, dengan menuliskan amplitudo probabilitas pantul $\rho \equiv \frac{B}{A}$ dan amplitudo probabilitas transmisi $\tau \equiv \frac{D}{A}$, diperoleh probabilitas pantul dan transmisi sebagai berikut:

$$|\rho|^2 = \left| \frac{k-K}{k+K} \right|^2 \equiv R = \left| \frac{j_{\text{pantul}}}{j_{\text{datang}}} \right| \neq 0, \quad (3.48)$$

$$|\tau|^2 = \frac{4kK}{(k+K)^2} \equiv T = \left| \frac{j_{\text{transmisi}}}{j_{\text{datang}}} \right| \neq 0. \quad (3.49)$$

3.7 Partikel dalam Daerah dengan Potensial Penghalang

Suatu partikel berada pada daerah dengan potensial penghalang berbentuk

$$V(x) = \begin{cases} V_0, & 0 \leq x \leq L \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad (3.50)$$

Solusi umum persamaan Schrödinger untuk kasus ini adalah

$$\psi(x) = \begin{cases} Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & x < 0 \\ Ce^{-Kx} + De^{Kx}, & 0 \leq x \leq L \\ Ee^{ikx} + Fe^{-ikx}, & x > L, \end{cases} \quad (3.51)$$

dengan $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ dan $K = \sqrt{\frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}}$. Jika dianggap partikel bergerak dari kiri ke kanan (dan tidak ada partikel yang bergerak dari kanan ke kiri), diperoleh $F = 0$. Lalu dengan menerapkan syarat kesinambungan fungsi dan turunannya di $x = 0$ dan $x = L$, diperoleh

$$A + B = C + D, \quad (3.52)$$

$$ik(A - B) = K(-C + D), \quad (3.53)$$

$$Ce^{-KL} + De^{KL} = Ee^{iKL} \quad (3.54)$$

$$K(-Ce^{-KL} + De^{KL}) = ikEe^{iKL}. \quad (3.55)$$

Jumlah dari persamaan (3.52) dan (3.53) serta (3.54) dan (3.55) akan menghasilkan

$$2ikA = C(ik - K) + D(ik + K), \quad (3.56)$$

$$2KDe^{KL} = (K + ik)Ee^{iKL} \quad (3.57)$$

Selisih persamaan (3.54) yang dikalikan dengan K dengan persamaan (3.55) adalah

$$C = \frac{K - ik}{2K} e^{(ik+K)L} E. \quad (3.58)$$

Substitusi (3.57) dan (3.58) ke (3.56) memberikan

$$\begin{aligned} \frac{E}{A} &= \frac{4ikK}{-(K - ik)^2 e^{(ik+K)L} + (K + ik)^2 e^{(ik-K)L}} \\ &= \frac{4ikKe^{-ikL}}{(K + ik)^2 e^{-KL} - (K - ik)^2 e^{KL}} \\ &= \frac{4ikKe^{-ikL}}{(K^2 - k^2 + 2iKk) e^{-KL} - (K^2 - k^2 - 2iKk) e^{KL}} \\ &= \frac{4ikKe^{-ikL}}{(K^2 - k^2)(e^{-KL} - e^{KL}) + 2iKk(e^{-KL} + e^{KL})} \\ &= \frac{2ikKe^{-ikL}}{(K^2 - k^2) \sinh KL + 2iKk \cosh KL}. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Dengan demikian, diperoleh koefisien transmisi

$$\begin{aligned}
 |\tau|^2 &= \left| \frac{E}{A} \right|^2 = \left| \frac{E}{A} \right| \left| \frac{E}{A} \right|^* \\
 &= \frac{(2kK)^2}{(K^2 - k^2)^2 \sinh^2 KL + 4K^2 k^2 \cosh^2 KL} \\
 &= \frac{(2kK)^2}{2K^2 k^2 (\cosh^2 KL - \sinh^2 KL) + 2K^2 k^2 \cosh^2 KL + (K^4 + k^4) \sinh^2 KL} \\
 &= \frac{(2kK)^2}{2K^2 k^2 + 2K^2 k^2 (1 + \sinh^2 KL) + (K^4 + k^4) \sinh^2 KL} \\
 &= \frac{(2kK)^2}{(2Kk)^2 + (K^2 + k^2)^2 \sinh^2 KL}, \tag{3.60}
 \end{aligned}$$

(ingat bahwa $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$). Terlihat bahwa nilai KL yang kecil, akan menyebabkan semakin besar kemungkinan partikel menembus potensial penghalang ($T \rightarrow 1$).

3.8 Osilator Harmonik

Fungsi potensial untuk kasus osilator harmonik berbentuk $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$, sehingga persamaan Schrödinger untuk kasus ini berbentuk

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi(x) = E\psi(x). \tag{3.61}$$

Solusi persamaan tersebut diambil berbentuk $\psi(x) \propto \phi(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ dengan $\phi(x)$ memenuhi persamaan diferensial Hermite

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - 2x \frac{d\phi}{dx} + (\lambda - 1)\phi = 0, \tag{3.62}$$

dengan nilai λ berkaitan dengan energi menurut $E = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega$. Solusi untuk $\phi(x)$ ditentukan melalui metode Frobenius. Misal $\phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha}$, dengan α tetapan yang akan dicari kemudian. Selanjutnya, diperoleh turunan pertama dan kedua dari $\phi(x)$ terhadap x sebagai berikut:

$$\phi'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k + \alpha) x^{k+\alpha-1} \tag{3.63}$$

$$\phi''(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (k + \alpha) (k + \alpha - 1) x^{k+\alpha-2}. \tag{3.64}$$

Dengan demikian, persamaan Hermite dapat dituliskan menjadi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ (k + \alpha) (k + \alpha - 1) a_k x^{k+\alpha-2} - [2(k + \alpha) - (\lambda - 1)] a_k x^{k+\alpha} \right\} = 0. \tag{3.65}$$

Untuk suku pertama ($k = 0$), diperoleh persamaan

$$\alpha(\alpha - 1)a_0x^{\alpha-2} - (2\alpha - \lambda + 1)a_0x^\alpha = 0, \quad (3.66)$$

yang hanya akan dipenuhi jika $\alpha = 0$ atau $\alpha = 1$ dan $2\alpha - \lambda + 1 = 0$. Lalu untuk memudahkan diambil solusi $\alpha = 0$, sehingga persamaan Hermite menjadi

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ k(k-1)a_kx^{k-2} - [2k - (\lambda - 1)]a_kx^k \right\} = 0. \quad (3.67)$$

Persamaan tersebut akan berlaku jika koefisien dari setiap suku dalam deret tersebut bernilai nol,

$$\text{suku } x^{-2} : a_0 \cdot 0(0-1) = 0 \Rightarrow a_0 = \text{tetapan sembarang,}$$

$$\text{suku } x^{-1} : a_1 \cdot 1(1-1) = 0 \Rightarrow a_1 = \text{tetapan sembarang,}$$

$$\text{suku } x^0 : a_2 \cdot 2(2-1) - a_0(0 - \lambda + 1) = 0 \Rightarrow a_2 = \frac{1 - \lambda}{2}a_0$$

$$\text{suku } x^1 : a_3 \cdot 3(3-1) - a_1(2 - \lambda + 1) = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{2 - (\lambda - 1)}{3 \cdot 2}a_1$$

$$\text{suku } x^2 : a_4 \cdot 4(4-1) - a_2(2 \cdot 2 - \lambda + 1) = 0 \Rightarrow a_4 = \frac{2 \cdot 2 - (\lambda - 1)}{4 \cdot 3}a_2$$

...

atau didapat rumus rekursif,

$$a_{k+2} = \frac{2k - (\lambda - 1)}{(k+2)(k+1)}a_k. \quad (3.68)$$

Dengan demikian $\phi(x)$ merupakan jumlah dari solusi ganjil (k ganjil) dan genap (k genap).

Selanjutnya dilakukan uji konvergensi dari solusi $\psi(x) \propto \phi(x)x^{-\frac{x^2}{2}}$. Karena $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\frac{x^2}{2}} = 0$ (artinya $e^{-\frac{x^2}{2}}$ konvergen), maka konvergensi dari $\psi(x)$ hanya ditentukan oleh $\phi(x)$. Uji perbandingan (*ratio test*) terhadap $\phi(x)$:

- pada $k \rightarrow \infty$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+2}x^{k+2}}{a_kx^k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k - (\lambda - 1)}{(k+2)(k+1)}x^2 = 0, \quad (3.69)$$

Jadi $\phi(x)$ pada kasus ini konvergen untuk semua x .

- pada $k \gg \lambda$:

$$\lim_{k \gg \lambda} \frac{a_{k+2}x^{k+2}}{a_kx^k} = \lim_{k \gg \lambda} \frac{2k - (\lambda - 1)}{(k+2)(k+1)}x^2 \approx \frac{2x^2}{k}. \quad (3.70)$$

Untuk menentukan konvergensi pada kasus ini, dipilih deret yang sifat konvergensinya mirip dengan $\frac{2x^2}{k}$, yaitu e^{x^2} (sebab $e^{x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(\frac{k}{2})!}$, dengan k genap).

Bukti untuk kemiripan sifat konvergensi kedua fungsi diberikan melalui uji perbandingan untuk e^{x^2} sebagai berikut.

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{a_{k+2}x^{k+2}}{a_kx^k} \approx \frac{x^{k+2}}{\left(\frac{k+2}{2}\right)!} \div \frac{x^k}{\left(\frac{k}{2}\right)!} = \frac{x^2}{\frac{k}{2} + 1}, \quad (3.71)$$

sehingga $\lim_{k \gg \lambda} \frac{U_{n+1}}{U_n} \approx \frac{2x^2}{k}$. Jadi, $\psi(x) = \phi(x)e^{-\frac{x^2}{2}} \approx e^{x^2}e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}}$. Dengan demikian $\psi(x)$ bersifat divergen dan tidak dapat berperan sebagai fungsi gelombang.

Agar $\psi(x)$ konvergen, $\phi(x)$ dibuat konvergen dengan cara memotong nilai k hanya sampai nilai tertentu (berhingga). Dengan mengambil pangkat tertinggi pada deret untuk $\phi(x)$ sebagai k , maka $a_{k+2} = a_{k+4} = \dots = 0$. Lalu, berdasarkan persamaan (3.68) diperoleh $\lambda = 2k + 1$, sehingga akhirnya diperoleh nilai energi dari osilator harmonik berbentuk

$$E = \frac{1}{2}\lambda\hbar\omega = \left(k + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega. \quad (3.72)$$

Solusi lengkap dari persamaan Schrödinger bebas waktu untuk kasus osilator harmonik adalah berbentuk

$$\psi(x) = A_n\psi(x)e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (3.73)$$

dengan A_n adalah amplitudo (tetapan) yang diperoleh melalui normalisasi fungsi gelombang. Secara umum, fungsi Hermite $\phi(x)$ dapat dituliskan sebagai $H_n(x)$ yang memenuhi persamaan diferensial Hermite bentuk

$$\frac{d^2H_n(x)}{dx^2} - 2x\frac{dH_n(x)}{dx} + 2nH_n(x) = 0. \quad (3.74)$$

Selanjutnya, persamaan gelombang dapat dituliskan sebagai $\psi(x) = A_nH_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$. Normalisasi fungsi gelombang menghendaki

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x)\psi_n(x)dx = A_m^*A_n \int_{-\infty}^{\infty} H_m^*(x)H_n(x)e^{-x^2} = \delta_{mn}. \quad (3.75)$$

Fungsi pembangkit untuk fungsi Hermite berbentuk

$$g(x, h) = e^{2xh-h^2} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{h^n}{n!}, \quad (3.76)$$

dengan h sebuah parameter. Dengan memanfaatkan fungsi pembangkit tersebut, dapat diperoleh

$$e^{-x^2}g^2(x, h) = e^{-(x-2h)^2+2h^2} = \sum_n \sum_m e^{-x^2} H_m H_n \frac{h^{m+n}}{m!n!}. \quad (3.77)$$

Integrasi persamaan tersebut pada selang $(-\infty, \infty)$ memberikan

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-2h)^2+2h^2} dx &= \sum_n \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m H_n \frac{h^{m+n}}{m!n!} dx \\
 \Leftrightarrow e^{2h^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-2h)^2} d(x-2h) &= \sum_n \frac{h^{2n}}{(n!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2 dx \\
 \Leftrightarrow e^{2h^2} \sqrt{\pi} &= \sum_n \frac{h^{2n}}{(n!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2 dx \\
 \Leftrightarrow \sum_n \frac{(2h^2)^n}{n!} \sqrt{\pi} &= \sum_n \frac{h^{2n}}{(n!)^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2 dx \\
 \Leftrightarrow \sum_n 2^n h^{2n} \sqrt{\pi} &= \sum_n \frac{h^{2n}}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2 dx
 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2 dx = 2^n n! \sqrt{\pi}. \quad (3.78)$$

Substitusi hasil ini ke persamaan (3.75) memberikan

$$A_n^* A_n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2 dx = 1 \Rightarrow A_n = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.79)$$

Solusi total untuk kasus osilator harmonik adalah $\Psi(x, t) = A_n H_n e^{-\frac{x^2}{2}} e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$ dengan energi $E = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega$. Heisenberg mempelajari kasus osilator harmonik ini dengan menggunakan metode mekanika matriks, dan mendapatkan hasil yang sama. Heisenberg menyatakan fungsi gelombang sebagai vektor keadaan $|\psi_n\rangle$, dan mendapatkan nilai eigen energi dengan mengerjakan operator energi (Hamiltonian) yang dinyatakan dalam operator kreasi dan anihilasi osilator harmonik.

Cara Heisenberg (Mekanika Matriks) untuk Osilator Harmonik

Definisikan operator energi osilator harmonik

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} k \hat{x}^2, \quad (3.80)$$

dengan \hat{p} dan \hat{x} masing-masing menyatakan operator momentum dan posisi (kedua operator tersebut memenuhi hubungan komutasi $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar I$, I adalah matriks identitas). Jika \hat{H} dikerjakan pada fungsi gelombang $|\psi_E\rangle$ akan diperoleh $\hat{H} |\psi_E\rangle = E |\psi_E\rangle$.

Ambil $\hbar = k = m = 1$ sehingga $\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \hat{x}^2)$ dan $[\hat{x}, \hat{p}] = iI$. Definisikan operator

$$\hat{a} = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{p} - i\hat{x}) \quad \text{dan} \quad \hat{a}^\dagger = \frac{i}{\sqrt{2}} (\hat{p} + i\hat{x}), \quad (3.81)$$

sebagai operator anihilasi dan kreasi, serta

$$\hat{N} = \hat{a}^\dagger \hat{a} \quad (3.82)$$

sebagai operator jumlah (yang memenuhi $\hat{N}|n\rangle = n|n\rangle$). Hubungan komutasi antara operator-operator di atas adalah

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = I, \quad [\hat{N}, \hat{a}] = -\hat{a}, \quad [\hat{N}, \hat{a}^\dagger] = \hat{a}^\dagger. \quad (3.83)$$

Operator energi dapat dinyatakan sebagai

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a}) \equiv \frac{1}{2} \{\hat{a}, \hat{a}^\dagger\}, \quad (3.84)$$

(notasi $\{A, B\} \equiv AB + BA$ disebut *antikomutasi*). Dengan memanfaatkan hubungan komutasi antar operator di atas dan definisi operator jumlah, operator energi dapat dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} [(I + \hat{a}^\dagger\hat{a}) + \hat{a}^\dagger\hat{a}] \\ &= \frac{1}{2} (I + 2\hat{N}) \\ &= \hat{N} + \frac{I}{2}. \end{aligned} \quad (3.85)$$

Dengan hubungan terakhir ini, dapat diperoleh fakta bahwa operator energi dan jumlah saling linear dan saling komut, sehingga keduanya dapat memiliki vektor eigen yang sama ($|\psi_E\rangle = |n\rangle$). Selanjutnya, diperoleh

$$\begin{aligned} \hat{H}|\psi_E\rangle &= \left(\hat{N} + \frac{I}{2}\right)|n\rangle \\ \Leftrightarrow E|\psi_E\rangle &= \left(n + \frac{1}{2}\right)|n\rangle, \end{aligned}$$

atau

$$E_n = n + \frac{1}{2}. \quad (3.86)$$

Hasil ini sama persis dengan persamaan (3.72).

Bab 4

Atom Hidrogen

4.1 Postulat Bohr tentang Atom Hidrogen

Teori kuantum telah berhasil membuktikan postulat Planck tentang osilator harmonik. Pada bagian ini, akan diberikan pembuktianteorikuantum untuk postulat Bohr tentang atom hidrogen (bahwa tingkat-tingkat energi atom H adalah $E_n = -\frac{13,6}{n^2}$ eV).

Menurut postulat Bohr, elektron dalam atom hidrogen mengelilingi inti atom (proton) pada orbit stasioner berbentuk lingkaran (misal dengan jejari a). Pada orbit elektron, gaya Coulumb berperan sebagai gaya sentripetal, sehingga berlaku

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{a^2} = \frac{mv^2}{a} \Rightarrow mv^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{a}. \quad (4.1)$$

Sehingga energi kinetik elektron adalah

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{a}. \quad (4.2)$$

Postulat Bohr: keadaan stasioner sistem dikarakterisasi oleh momentum sudut

$$p_\phi = mva = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

Berdasarkan postulat tersebut, diperoleh $v = \frac{n\hbar}{ma}$. Substitusi nilai v tersebut ke persamaan gaya sentripetal menghasilkan

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{mZe^2} n^2 \approx 0,528n^2 \text{ \AA}. \quad (4.4)$$

Lalu, diperoleh energi total elektron

$$\begin{aligned} E &= K + V \\ &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{a} \\ &= -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{a} \\ &= \frac{13,6}{n^2} \text{ eV}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

4.2 Teori Kuantum tentang Atom Hidrogen

Atom hidrogen terdiri atas proton dan elektron. Misal posisi kedua partikel tersebut menurut suatu kerangka koordinat (kerangka lab) masing-masing \vec{r}_1 dan \vec{r}_2 . Operator energi (Hamiltonian) untuk sistem ini adalah

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \frac{\hat{p}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{p}_2^2}{2m_2} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m_1} \vec{\nabla}_1^2 - \frac{\hbar^2}{2m_2} \vec{\nabla}_2^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.\end{aligned}\quad (4.6)$$

Sehingga persamaan Schrödinger dituliskan sebagai

$$-\frac{\hbar^2}{2m_1} \vec{\nabla}_1^2 \Psi - \frac{\hbar^2}{2m_2} \vec{\nabla}_2^2 \Psi - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \Psi = E_{\text{total}} \Psi. \quad (4.7)$$

Persamaan diferensial di atas sulit untuk dipecahkan karena tercampurnya variabel posisi kedua partikel (\vec{r}_1 dan \vec{r}_2). Agar lebih mudah dipecahkan, persamaan tersebut dituliskan dalam sistem koordinat pusat massa (\vec{R}) dan relatif ($\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$) sebagai berikut:

$$\vec{R}(X, Y, Z) = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \quad (4.8)$$

$$\vec{r}(x, y, z) = \vec{r}_1 - \vec{r}_2. \quad (4.9)$$

Berdasarkan kedua hubungan tersebut, dapat diperoleh

$$\vec{r}_1 = \vec{R} + \frac{m_2 \vec{r}}{m_1} \quad (4.10)$$

$$\vec{r}_2 = \vec{R} - \frac{m_1 \vec{r}}{m_2}, \quad (4.11)$$

dengan $m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ adalah *massa tereduksi*. Lalu, operator diferensial juga dinyatakan dalam koordinat pusat massa. Dalam koordinat lab, operator diferensial dinyatakan sebagai

$$\vec{\nabla}_1 = \vec{e}_{x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_{y_1} \frac{\partial}{\partial y_1} + \vec{e}_{z_1} \frac{\partial}{\partial z_1} \quad (4.12)$$

$$\vec{\nabla}_2 = \vec{e}_{x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_{y_2} \frac{\partial}{\partial y_2} + \vec{e}_{z_2} \frac{\partial}{\partial z_2}. \quad (4.13)$$

Karena x_1, y_1, z_1 dan x_2, y_2, z_2 masing-masing merupakan fungsi dari X, Y, Z dan x, y, z , yaitu menurut persamaan (4.8) dan (4.9), maka

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial X}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial Y}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial x}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\partial}{\partial X} + 0 + 0 + \frac{\partial}{\partial x} + 0 + 0 = \frac{m}{m_2} \frac{\partial}{\partial X} + \frac{\partial}{\partial x}.\end{aligned}\quad (4.14)$$

Dengan cara yang sama akan diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial y_1} = \frac{m}{m_2} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1} = \frac{m}{m_2} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial z} \quad (4.16)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{m}{m_1} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\partial}{\partial x} \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial y_2} = \frac{m}{m_1} \frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial z_2} = \frac{m}{m_1} \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial z}. \quad (4.19)$$

Sehingga secara keseluruhan diperoleh

$$\vec{\nabla}_1 = \frac{m}{m_2} \vec{\nabla}_R + \vec{\nabla}_r, \quad \vec{\nabla}_2 = \frac{m}{m_1} \vec{\nabla}_R - \vec{\nabla}_r. \quad (4.20)$$

Lalu,

$$\begin{aligned} \nabla_1^2 &= \left(\frac{m}{m_2}\right)^2 \nabla_R^2 + \nabla_r^2 + 2 \frac{m}{m_2} \overbrace{\vec{\nabla}_R \cdot \vec{\nabla}_r}^0 \\ &= \left(\frac{m}{m_2}\right)^2 \nabla_R^2 + \nabla_r^2, \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\nabla_2^2 = \left(\frac{m}{m_1}\right)^2 \nabla_R^2 + \nabla_r^2, \quad (4.22)$$

($\vec{\nabla}_R \cdot \vec{\nabla}_r = 0$ karena koordinat R dan r saling bebas.)

Selanjutnya, persamaan Schrödinger dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \left[-\frac{\hbar^2}{2m_1} \left(\frac{m^2}{m_2^2} \nabla_R^2 + \nabla_r^2 \right) - \frac{\hbar^2}{2m_2} \left(\frac{m^2}{m_1^2} \nabla_R^2 + \nabla_r^2 \right) - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \right] \Psi(\vec{R}, \vec{r}) &= E_{\text{total}} \Psi(\vec{R}, \vec{r}) \\ \left[-\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{m^2}{m_1 m_2^2} + \frac{m^2}{m_1^2 m_2} \right) \nabla_R^2 - \frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \nabla_r^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \right] \Psi(\vec{R}, \vec{r}) &= E_{\text{total}} \Psi(\vec{R}, \vec{r}). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Lalu, dengan mengingat definisi dari massa tereduksi $m \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, persamaan terakhir dapat diubah menjadi

$$\left[\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_R^2}_{E_{\text{PM}}} + \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_r^2 - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \right)}_{E_{\text{rel.}}} \right] \Psi(\vec{R}, \vec{r}) = E_{\text{total}} \Psi(\vec{R}, \vec{r}), \quad (4.24)$$

dengan $M = m_1 + m_2$ adalah massa total kedua partikel. Suku pertama pada ruas kiri menyatakan operator energi menurut kerangka pusat massa ("PM") sedangkan suku kedua menyatakan operator energi menurut kerangka relatif.

Persamaan Schrödinger terakhir dapat diselesaikan dengan metode pemisahan (separasi) variabel. Anggap $\Psi(\vec{R}, \vec{r}) \equiv \rho(\vec{R})\psi(\vec{r})$ sehingga persamaan Schrödinger dituliskan sebagai

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\vec{R}}^2 \rho(\vec{R}) \right) + \rho(\vec{R}) \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{r}}^2 \psi(\vec{r}) - \frac{\psi(\vec{r}) e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Psi(\vec{R}, \vec{r}) &= E_{\text{total}} \rho(\vec{R}) \psi(\vec{r}) \\ \frac{1}{\rho(\vec{R})} \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\vec{R}}^2 \rho(\vec{R}) \right) + \frac{1}{\psi(\vec{r})} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{r}}^2 \psi(\vec{r}) - \frac{\psi(\vec{r}) e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Psi(\vec{R}, \vec{r}) &= E_{\text{PM}} + E_{\text{rel.}}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

atau

$$\frac{1}{\rho(\vec{R})} \left(-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla_{\vec{R}}^2 \rho(\vec{R}) \right) = E_{\text{PM}} \quad (4.26)$$

$$\frac{1}{\psi(\vec{r})} \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_{\vec{r}}^2 \psi(\vec{r}) - \frac{\psi(\vec{r}) e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \Psi(\vec{R}, \vec{r}) = E_{\text{rel.}} \quad (4.27)$$

Solusi untuk ρ adalah

$$\rho(\vec{R}) \propto e^{i\vec{P}\cdot\vec{R}}, \quad \text{dengan } |\vec{P}| = \sqrt{\frac{2ME_{\text{PM}}}{\hbar^2}}. \quad (4.28)$$

Untuk mendapatkan solusi persamaan diferensial untuk ψ di atas, dilakukan separasi variabel $\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, \phi) = \mathcal{R}(r)\mathcal{Y}(\theta, \phi)$ (digunakan koordinat bola). Operator Laplacian dalam koordinat bola dinyatakan sebagai

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right]. \quad (4.29)$$

Sehingga, persamaan Schrödinger (4.27) dituliskan sebagai (untuk mempersingkat penulisan, selanjutnya digunakan satuan $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] + \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{r} + E \right) \psi &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\mathcal{Y}}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) + \frac{\mathcal{R}}{r^2} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\mathcal{Y}}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \mathcal{Y}}{d\phi^2} \right] + \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{r} + E \right) \mathcal{R}\mathcal{Y} &= 0 \end{aligned}$$

Atau,

$$\frac{1}{\mathcal{R}} \left[\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{r} + E \right) r^2 \mathcal{R} \right] = -\frac{1}{\mathcal{Y}} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\mathcal{Y}}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \mathcal{Y}}{d\phi^2} \right] \quad (4.30)$$

Ruas kiri persamaan di atas hanya merupakan fungsi dari r sementara ruas kanan fungsi dari θ dan ϕ saja. Dengan demikian, kedua ruas haruslah bernilai konstan. Ambil konstanta tersebut bernilai $l(l+1)$ dengan $l = 0, 1, 2, 3, \dots$, sehingga diperoleh

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\mathcal{R}}{dr} \right) + \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{r} + E \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \mathcal{R} = 0 \quad (4.31)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\mathcal{Y}}{d\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \mathcal{Y}}{d\phi^2} = -l(l+1)\mathcal{Y}. \quad (4.32)$$

Sehingga didapatkan persamaan radial dan sferis yang terpisah.

Persamaan radial

Dengan memisalkan $u = rR$, persamaan radial dapat dituliskan sebagai

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{2m}{\hbar^2} \left(\frac{e^2}{r} + E \right) - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0. \quad (4.33)$$

Karena elektron dan proton saling terikat, maka ditinjau keadaan $E < 0$. Pada keadaan asimtotik r sangat besar, persamaan tersebut tereduksi menjadi

$$\frac{d^2u}{dr^2} - \left(\frac{-2mE}{\hbar^2} \right) u \approx 0, \quad (4.34)$$

dengan solusi

$$u \propto \exp \left(-\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} r \right), \quad (4.35)$$

(solusi negatif pada eksponensial dipilih agar $\lim_{r \rightarrow \infty} u = 0$). Sehingga solusi umum untuk persamaan radial dapat dituliskan sebagai

$$u(r) = w(r) \exp \left(-\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} r \right). \quad (4.36)$$

Substitusi solusi ini ke (4.33) menghasilkan

$$\frac{d^2w}{dr^2} - 2\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} \frac{dw}{dr} + \left(\frac{me^2}{\hbar^2} \frac{2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) w = 0. \quad (4.37)$$

Anggap $w \propto r^\alpha$, sehingga persamaan diatas dapat menjadi

$$\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2} - 2\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} \alpha r^{\alpha-1} + \left(\frac{me^2}{\hbar^2} 2r^{\alpha-1} - l(l+1)r^{\alpha-2} \right) = 0. \quad (4.38)$$

Dengan memperhatikan koefisien untuk suku $r^{\alpha-2}$ didapat $\alpha(\alpha-1) = l(l+1)$ yang berlaku jika $\alpha = l+1$ atau $\alpha = -l$. Ambil solusi $\alpha = l+1 > 0$, sehingga secara umum w dapat dinyatakan sebagai deret pangkat

$$w(r) = \sum_{k=l+1}^{\infty} a_k r^k. \quad (4.39)$$

Substitusi nilai w tersebut ke persamaan (4.37) menghasilkan

$$\sum_{k=l+1}^{\infty} a_k \left[k(k-1)r^{k-2} - 2\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} kr^{k-1} + \left(\frac{me^2}{\hbar^2} 2r^{k-1} - l(l+1)r^{k-2} \right) \right] = 0. \quad (4.40)$$

Dengan menggunakan teknik seperti pada penentuan solusi persamaan gelombang untuk partikel pada kasus osilator harmonik (lihat kembali bagian 3.8), diperoleh persamaan rekursif untuk koefisien a_k sebagai berikut

$$a_{k+1} = \frac{2k\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} - \frac{2me^2}{\hbar^2}}{k(k+1) - l(l+1)} a_k, \quad \text{dengan } k > l. \quad (4.41)$$

Pada k yang sangat besar, berlaku

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \approx \frac{2\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}}{k+1} \approx \frac{2\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}}{k}. \quad (4.42)$$

Secara umum sifat dari fungsi $w(r)$ akan setara dengan $\exp\left(2\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}r\right)$. Seperti pada osilator harmonik, bukti kesamaan sifat konvergensi kedua fungsi diberikan melalui uji perbandingan,

$$\exp\left(2\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}r\right) = \sum_k \underbrace{\frac{\left(2\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}\right)^k}{(k+1)!}}_{a_k} r^k, \quad (4.43)$$

lalu

$$\begin{aligned} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \frac{\left(2\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}\right)^k}{(k+2)!} \div \frac{\left(2\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}\right)^k}{(k+1)!} \\ &= \frac{2\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}}{k+2} \\ &\approx \frac{2\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}}{k}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Sehingga, pada $k \rightarrow \infty$ diperoleh

$$\begin{aligned} u(r) &= w(r) \exp\left(-\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}r\right) \\ &\approx \exp\left(2\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}r\right) \cdot \exp\left(-\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}r\right) \\ &\exp\left(\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}}r\right), \end{aligned} \quad (4.45)$$

yang bersifat divergen untuk $r \rightarrow \infty$. Agar konvergen, maka deret untuk $w(r)$ diambil hingga nilai k tertentu saja (berhingga). Sehingga,

$$a_{k+1} = a_{k+2} = \dots = 0. \quad (4.46)$$

Berdasarkan rumus rekursif untuk a_k pada persamaan (4.41), diperoleh

$$2k\sqrt{\frac{-2mE}{\hbar^2}} - \frac{2me^2}{\hbar^2} = 0 \Leftrightarrow E = -\frac{me^4}{2\hbar^2} \frac{1}{k^2}, \quad (4.47)$$

dengan $k = l + 1, l + 2, \dots$ dan $l = 0, 1, 2, \dots$. Untuk atom hidrogen, karena massa proton ($m_1 = m_p$) jauh lebih besar dibanding massa elektron ($m_2 = m_e \approx \frac{m_p}{2000}$), massa besarnya massa tereduksi akan mendekati massa elektron,

$$m = \frac{m_p m_e}{m_p + m_e} \approx m_e. \quad (4.48)$$

Sehingga, besar energi atom hidrogen yang diperoleh melalui perumusan teori kuantum sama dengan model Bohr, $E_k = -\frac{13,6}{k^2}$ eV.

Persamaan sferis

Dilakukan separasi variabel untuk fungsi harmonik sferis, $\mathcal{Y}(\theta, \phi) = P(\theta)\Phi(\phi)$, sehingga persamaan sferis menghasilkan

$$\frac{\Phi}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \frac{P}{\sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = -l(l+1)P\Phi, \quad (4.49)$$

atau

$$\frac{1}{P} \left[\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) \right] + l(l+1) \sin^2 \theta = \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} = m^2, \quad (4.50)$$

dengan m konstanta (bukan massa terduksi!). Solusi untuk bagian ϕ adalah

$$\Phi(\phi) \propto e^{\pm im\phi}, \quad (4.51)$$

sedangkan bagian θ membentuk persamaan

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + l \left((l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) P = 0. \quad (4.52)$$

Dengan memisalkan $\mu = \cos \theta$ sehingga $\frac{d}{d\theta} = \frac{d\mu}{d\theta} \frac{d}{d\mu} = -\sin \theta \frac{d}{d\mu}$, persamaan terakhir dapat dituliskan sebagai

$$\frac{d}{d\mu} \left((1 - \mu^2) \frac{dP}{d\mu} \right) + \left(l(l+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right) P = 0. \quad (4.53)$$

Solusi persamaan tersebut berupa *associated Legendre function*,

$$P_{lm}(\mu) = \frac{(\sin \theta)^m}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{d\mu^{l+m}} (\mu^2 - 1)^l. \quad (4.54)$$

Bentuk akhir dari fungsi harmonik sferis adalah

$$\mathcal{Y}(\theta, \phi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} e^{im\phi} P_{lm}(\cos \theta). \quad (4.55)$$

Daftar Pustaka

- [1] S. Gasiorowicz, *Quantum Physics*, John Wiley and Sons, 1996.
- [2] J. J. Sakurai, *Modern Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, 1994.