CATATAN KULIAH
FUNGSI KOMPLEKS

oleh

Dr. Wuryansari Muharini Kusumawinahyu, M.Si.

PROGRAM STUDI MATEMATIKA

JURUSAN MATEMATIKA

FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM

2014

Daftar Isi

Bab 1

Bilangan Kompleks

Himpunan bilangan kompleks, dilambangkan sebagai $\mathbb{C}$, adalah himpunan semua bilangan yang dapat dinyatakan sebagai $a + bi$ atau $a + ib$, dengan $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$. Secara formal, $\mathbb{C} = \{z = a + bi|\ a, b \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$. Di sini a disebut bagian real z dan dinotasikan sebagai $a = Re(z)$, sedangkan b disebut bagian imajiner z dan dinotasikan dengan $b = Im(z)$. Jika $Re(z) = 0$ maka z dikatakan sebagai bilangan kompleks imajiner murni, sedangkan jika $Im(z) = 0$ maka z merupakan bilangan real.
Dua bilangan kompleks dikatakan sama jika bagian real bilangan pertama sama dengan bagian real bilangan ke dua dan bagian imajiner bilangan pertama sama dengan bagian imajiner bilangan ke dua. Menggunakan notasi matematika dapat dituliskan sebagai berikut. Misalkan $z_1 = a_1 + ib_1$ dan $z_2 = a_2 + ib_2$.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ dan } b_1 = b_2$$

1.1 Sifat Aljabar Bilangan Kompleks

Seperti pada himpunan biangan real $\mathbb{R}$, pada himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ dapat pula didefinisikan operasi-operasi aljabar biner seperti penjumlahan dan perkalian. Misalkan $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. Hasil penjumlahan bilangan kompleks z_1 dengan z_2 adalah bilangan kompleks $z_3 = z_1 + z_2$ yang didefinisikan sebagai $z_3 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$.

2. Hasil kali bilangan kompleks z_1 dengan z_2 adalah bilangan kompleks $z_3 = z_1 z_2$ yang didefinisikan sebagai $z_3 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$.

Seperti yang berlaku pada himpunan real, operasi penjumlahan dan perkalianpun membentuk *field* dengan aksioma-aksioma berikut. $\forall z = x + yi, z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ di $\mathbb{C}$ berlaku:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ dan $z_1z_2 = z_2z_1$ (sifat komutatif)
2. $z + (z_1 + z_2) = (z + z_1) + z_2$ dan $z(z_1z_2) = (zz_1)z_2$ (sifat asosiatif)
3. terdapat bilangan kompleks $0 = 0 + 0i$ dan $1 = 1 + 0i$ yang memenuhi $z + 0 = 0 + z = z$ dan $z(1 + 0i) = (1 + 0i)z = z$ (eksistensi elemen identitas penjumlahan dan perkalian)
4. terdapat bilangan kompleks $-z = -x - yi$ dan $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$ sedemikian sehingga $z + (-z) = (-z) + z = 0$ dan $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$ (eksistensi elemen invers penjumlahan dan invers perkalian)
5. $z(z_1 + z_2) = zz_1 + zz_2$ (sifat distributif)

Dengan adanya elemen invers terhadap operasi penjumlahan maupun perkalian, maka dapat didefinisikan operasi pengurangan dan pembagian sebagai berikut. Untuk setiap bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ maka

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

dan

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1z_2^{-1} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}i.$$

Berbeda dari himpunan real, selain keempat operasi biner tersebut, pada himpunan bilangan kompleks dapat pula didefinisikan suatu operasi uner, yaitu operasi sekawan (*conjugation*), yang didefinisikan sebagai berikut. Jika $z = x + yi$ maka sekawan (conjugate) dari z, dinotasikan sebagai $\overline{z}$, adalah $\overline{z} = x - yi$. Operasi sekawan bersama operasi-operasi biner penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian memiliki sifat-sifat berikut. Untuk setiap bilangan kompleks $z = x + iy, z_1,$ dan z_2 maka

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ dan $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

2. $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$ dan $\overline{\frac{z_1}{z_2}} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

3. $\overline{\overline{z}} = z$

4. $z\overline{z} = x^2 + y^2$

5. $z + \overline{z} = 2\ Re(z)$

6. $z - \overline{z} = 2i\ Im(z)$

1.2 Aspek Geometri Bilangan Kompleks

Secara aljabar bilangan kompleks $z = x+yi$ dapat dibayangkan sebagai pasangan terurut dua bilangan real (x, y) yang terletak di bidang Euclides atau bidang Argan $\mathbb{R}^2$, sehingga secara geometri himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ dapat pula dinyatakan sebagai suatu bidang, yang disebut bidang kompleks atau bidang-z. Pada bidang kompleks, sumbu x disebut sumbu real sedangkan sumbu y disebut sumbu imajiner. Dengan demikian, suatu bilangan kompleks $z = a + bi$ dapat dinyatakan sebagai titik di bidang kompleks dengan koordinat (a, b) dan $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$. Selain itu, suatu bilangan kompleks $z = a + bi$ dapat dinyatakan pula sebagai vektor di bidang kompleks dengan titik pangkal $(0, 0)$ dan titik ujung (a, b).

Jika pada $\mathbb{R}^2$ kita dapat menyatakan suatu titik dalam koordinat kutub (polar) maka demikian pula pada $\mathbb{C}$, dengan mendefinisikan **modulus** dan **argumen** dari z. Pada $\mathbb{R}^2$, modulus kita kenal sebagai panjang atau norm vektor (x, y), sedangkan argumen kita kenal sebagai arah vektor (x, y). Modulus dari $z = a+bi$, dinotasikan sebagai $|z|$ didefinisikan sebagai

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2},$$

sedangkan argumen dari z, dinotasikan sebagai $arg(z)$, didefinisikan sebagai suatu sudut θ yang memenuhi

$$\cos\theta = \frac{a}{|z|} \text{ dan } \sin\theta = \frac{b}{|z|}.$$

Karena sifat fungsi sinus dan cosinus yang periodik, maka nilai $arg(z)$ tidak tunggal. Oleh karena itu $\forall z \in \mathbb{C}$ perlu dipilih suatu $arg(z)$ yang disebut sebagai **argumen utama** dari z, dinotasikan sebagai $Arg(z)$, adalah $arg(z)$ yang berada pada selang $(-\pi, \pi]$.
Sekarang kita siap mendefinisikan bentuk kutub (polar form) bilangan kompleks secara umum. Misalkan $z = x + iy, r = |z|$, dan $\theta = Arg(z)$ maka jelas bahwa

$$x = r\cos\theta \text{ dan } y = r\sin\theta$$

sehingga

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta \text{ atau sering ditulis } z = r\ cis\ \theta.$$

Sifat-sifat Modulus Bilangan Kompleks:

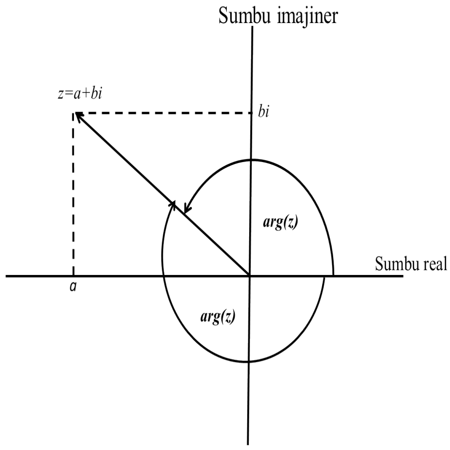
Untuk setiap bilangan kompleks z dan w, berlaku:

1. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$
2. $|z - w| = |w - z|$
3. $|z|^2 = |z^2| = z\overline{z}$. Jadi jika $z \neq 0$ maka $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$
4. $|zw| = |z|\,|w|$
5. $\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$, asalkan $w \neq 0$.
6. $|z + w| \leq |z| + |w|$
7. $||z| - |w|| \leq |z - w|$
8. $|z| - |w| \leq |z + w|$

Pada sifat ke dua, $|z - w|$ menyatakan jarak antara z dan w. Sifat ke 6 dikenal sebagai ketaksamaan segitiga. Perhatikan bahwa sifat-sifat tersebut sama dengan sifat nilai mutlak pada sistem bilangan real, maupun sifat norm di $\mathbb{R}^2$.

Pada Gambar 1.1 diberikan ilustrasi mengenai modulus dan argumen suatu bilangan kompleks $z = a + bi$

Teorema berikut menyatakan sifat perkalian dan pembagian dua buah bilangan kompleks bila dinyatakan dalam bentuk kutubnya.



Gambar 1.1: Modulus dan argumen di bidang kompleks

Teorema:

Jika $z_1 = r_1 \; cis \; t_1$ dan $z_2 = r_2 \; cis \; t_2$ maka

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 \; cis \; (t_1 + t_2)$$

dan

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \; cis \; (t_1 - t_2).$$

Teorema berikut merupakan perumuman teorema sebelumnya, yang dapat dibuktikan dengan mudah menggunakan induksi matematika.

Teorema de Moivre: Jika $z = r \; cis \; t$ maka $z^n = r^n \; cis \; nt, \forall n$ bilangan bulat tak negatif

Perhatikan bahwa pada kedua teorema tersebut, penyajian bilangan kompleks dalam koordinat polar memiliki sifat yang sama dengan fungsi eksponen natural, yaitu

$$e^a e^b = e^{a+b} \text{dan } \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}.$$

Oleh karena itu bilangan kompleks dalam bentuk polar dapat pula dituliskan sebagai berikut.

$$z = r\cos\theta + ir\sin\theta = r \; cis \; \theta = re^{i\theta}.$$

Dengan demikian, kedua teorema tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk eksponen sebagai berikut.
Jika $z_1 = r_1\ e^{i\ t_1}$ dan $z_2 = r_2\ e^{i\ t_2}$ maka

1. $z_1 z_2 = r_1\ e^{i\ t_1} r_2\ e^{i\ t_2} = r_1 r_2\ e^{i\ (t_1+t_2)}$
2. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\ e^{i\ t_1}}{r_2\ e^{i\ t_2}} = \frac{r_1}{r_2}\ e^{i\ (t_1-t_2)}$
3. $z^n = r^n\ e^{i\ nt}, \forall n$ bilangan bulat tak negatif.

Kesamaan dua bilangan kompleks dalam bentuk kutub dinyatakan dalam definisi berikut, yang dapat dimanfaatkan untuk menentukan akar bilangan kompleks.
Definisi: $r\ cis\ t = \rho\ cis\ \theta$ jika dan hanya jika $r = \rho$ dan $t = \theta + 2k\pi$

Akar bilangan kompleks

Jika c adalah bilangan kompleks, akan ditentukan $\sqrt[n]{c} = c^{\frac{1}{n}}$.
Misalkan $z = \sqrt[n]{c}$ dan $c = \rho\ cis\ \theta$ maka akan ditentukan z yang memenuhi $z^n = c$.
Misalkan $z = r\ cis\ t$ maka $z^n = r^n\ cis\ nt = c = \rho\ cis\ \theta$. Berdasarkan definisi kesamaan dua bilangan kompleks dalam bentuk kutub maka diperoleh

$$r^n = \rho \text{ dan } nt = \theta + 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}.$$

Dengan demikian

$$r = \rho^{\frac{1}{n}} \text{ dan } t_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n},\ \ k = 0, 1, \ldots n-1.$$

Jadi diperoleh sebanyak n akar dari c, yaitu

$$z_k = \rho^{\frac{1}{n}}\ cis\ \frac{\theta + 2k\pi}{n},\ \ k = 0, 1, \ldots n-1.$$

Contoh: Tentukan $\sqrt[3]{i}$.
Di sini akan kita tentukan z yang memenuhi $z^3 = i$. Kita nyatakan z dan i dalam bentuk kutub. Bentuk kutub untuk i adalah $1\ cis\ \frac{\pi}{2}$. Misalkan $z = r\ cis\ t$. Dari persamaan $z^3 = i$ diperoleh $z^3 = r^3\ cis\ 3t = 1\ cis\ \frac{\pi}{2}$, sehingga

$$r^3 = 1 \text{ dan } 3t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \ k = 0, 1, 2.$$

Akibatnya,

$$r = 1 \text{ dan } t = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3},\ k = 0, 1, 2.$$

Untuk $k = 0 \Rightarrow z = r\ cis\ t_0 = 1\ cis\ \frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{6} i \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$,
untuk $k = 1 \Rightarrow z = r\ cis\ t_1 = 1\ cis\ \frac{5v\pi}{6} = \cos\frac{5\pi}{6} i \sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$,
dan untuk $k = 2 \Rightarrow z = r\ cis\ t_2 = 1\ cis\ \frac{3\pi}{2} = \cos\frac{3\pi}{2} i \sin\frac{3\pi}{2} = 0 - i = -i$.
Jadi, telah diperoleh tiga akar dari i, yaitu $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, dan $z_2 = -i$.

1.3 Tempat Kedudukan Titik di Bidang Kompleks

Untuk menyatakan himpunan titik-titik di bidang kompleks pada suatu tempat kedudukan dapat digunakan suatu persamaan atau pertaksamaan. Sebagai contoh, akan ditentukan kedudukan titik-titik di bidang kompleks yang memenuhi persamaan $|z + i| = 2$. Misalkan $z = x + iy$. Dari persamaan tersebut diperoleh $|x + iy + i| = |x + i(y + 1)| = 2$. Berdasarkan definisi modulus bilangan kompleks diperoleh persamaan:

$$\sqrt{x^2 + (y + 1)^2} = 2,$$

yang ekivalen dengan persamaan

$$x^2 + (y + 1)^2 = 4.$$

Persamaan terakhir merupakan persamaan lingkaran berpusat di $(0, -1)$ berjari-jari 2. Jadi titik-titik di bidang kompleks yang memenuhi persamaan $|z + i| = 2$ berkedudukan di lingkaran berpusat di $z = -i$ berjari-jari 2.

Dengan demikian, **pertaksamaan** $|z + i| < 2$ menyatakan titik-titik di bidang kompleks yang berada di **dalam** lingkaran tersebut.

Secara umum, pertaksamaan $|z - z_0| < r$ menyatakan titik-titik di bidang kompleks yang berada di **dalam** lingkaran berpusat di z_0 berjari-jari r.

Contoh:

Tentukan tempat kedudukan titik-titik di bidang kompleks yang memenuhi persamaan

$$|z - 2i| = |z + 2|\,.$$

Secara geometri, titik-titik yang memenuhi persamaan tersebut adalah titik-titik z yang jaraknya dengan $z = 2i$ sama dengan jaraknya terhadap $z = -2$. Sebagai contoh, titik $(0, 0)$ berjarak 2, baik terhadap $z = -2i$ maupun terhadap $z = -2$. Selain itu, titik yang terletak di tengah ruas garis yang menghubungkan $z = 2i$ dan $z = -2$ juga merupakan titik yang dimaksud. Secara umum, dapat kita bayangkan bahwa titik-titik yang terletak pada garis yang melalui $(0, 0)$ dan titik tengah kedua titik tersebut akan berjarak sama terhadap kedua titik tersebut. Dengan membuat sedikit ilustrasi geometris kita peroleh bahwa garis yang dimaksud adalah garis $y = -x$. Sekarang, akan kita perlihatkan secara aljabar bahwa dugaan kita benar. Misalkan $z = x + iy$. Jika kita substitusikan z ke persamaan tersebut diperoleh

$$\begin{aligned}
|z - 2i| &= |z + 2| \\
|x + iy - 2i| &= |x + iy + 2)| \\
|x + i(y - 2)| &= |(x + 2) + iy)| \\
\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} &= \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} \\
x^2 + (y - 2)^2 &= (x + 2)^2 + y^2 \\
x^2 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 + 4x + 4 + y^2 \\
-4y &= 4x,
\end{aligned}$$

yang ekivalen dengan persamaan

$$y = -x.$$

Jadi, titik-titik di bidang kompleks yang memenuhi persamaan $|z - 2i| = |z + 2|$ terletak pada garis $y = -x$.

1.4 Latihan Soal

1. Nyatakan bilangan kompleks berikut dalam bentuk $a + bi$.

   (a) $(5 - 2i) + (2 + 3i)$

   (b) $(2 + 3i)(4 - i)$

   (c) $i\bar{i}$

   (d) $\frac{1}{3-2i}$

   (e) $\frac{3+2i}{3-2i}$

   (f) $\frac{i}{1-i} + \frac{1-i}{i}$

   (g) $\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$

   (h) $i^{123} - 4i^9 - 4i$

2. Jika ada, tentukanlah bilangan kompleks z yang memenuhi sifat berikut.

   (a) $z^{-1} = z$

   (b) $\bar{z} = -z$

   (c) $\bar{z} = z^{-1}$

3. Buktikan bahwa $\forall z \in \mathbb{C}$ berlaku:

$$Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \text{ dan } Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2}$$

4. Buktikan: $z = \bar{z}$ jika dan hanya jika z adalah bilangan real

5. Buktikan: $z^2 = (\bar{z})^2$ jika dan hanya jika z adalah bilangan real atau z adalah bilangan kompleks imajiner murni.

6. Nyatakan bilangan-bilangan $3+4i$, $1-i$, $-1+i$, 2, $-3i$, $e+\pi i$, dan $-2+\sqrt{3}$ sebagai titik-titik di bidang kompleks

7. Berapakah jarak antara $2+i$ dan $3-i$?

8. Nyatakan bilangan kompleks -1, $-2+2i$, $1-i$, 3, $-4i$, $\sqrt{3}i$, $2-3i$, dan $-\sqrt{27}-3i$ dalam bentuk kutub.

9. Tentukan tempat kedudukan titik-titik di bidang kompleks yang memenuhi persamaan atau pertaksamaan berikut.

    (a) $|z-5| \leq 6$

    (b) $Re(z+2) > -1$

    (c) $|z+i| < |z-i|$

    (d) $|z+3| - |z+1| = 1$

    (e) $Im(i\bar{z}) \geq 4$

    (f) $0 < Im(z+1) \leq 2\pi$

    (g) $-2 \leq Re(z) < 1$

    (h) $arg(z) = \frac{\pi}{4}$

    (i) $0 \leq arg(z) < \pi$

    (j) $Im(2\bar{z}+i) = 0$

    (k) $|z-2| \leq |z|$

10. Tentukan semua z yang memenuhi persamaan $z^3+8=0$

11. Selesaikan persamaan $z^2+i=0$ kemudian gunakan hasil yang diperoleh untuk menyelesaikan persamaan $z^4+2iz^2-1=0$

12. Jika $|z|=1$ buktikan bahwa $|z-w| = |1-\bar{w}z|, \forall w \in \mathbb{C}$

13. Jika $|z|<1$ buktikan bahwa $Re(z+1)>0$

14. Tentukan enam bilangan kompleks yang memenuhi persamaan $z^6 - \frac{1-i}{\sqrt{3}+i} = 0$.

15. Jika $z = \ cis\ t$ buktikan bahwa $z^n + z^{-n} = 2\cos nt$ dan $z^n - z^{-n} = 2\sin nt$

16. Jika $z_0 = a + bi$, perlihatkan bahwa persamaan $z\bar{z} - z\overline{z_0} - z_0\bar{z} = r^2 - a^2 - b^2$ menyatakan lingkaran berpusat di z_0 berjari-jari r.

17. Jika z, w, dan v terletak pada garis yang sama, buktikan bahwa $Im\left(\frac{v-z}{w-z}\right) = 0$

18. Jika $z + \frac{1}{z}$ adalah bilangan real, buktikan bahwa $Im(z) = 0$ atau $|z| = 1$

Bab 2

Fungsi Elementer

Pada bab ini dibahas berbagai fungsi elementer yang memetakan suatu titik di $\mathbb{C}$ menjadi suatu titik di $\mathbb{C}$ pula. Analog dengan pendefinisian fungsi real, fungsi kompleks f adalah suatu aturan yang memetakan atau mentransformasikan suatu bilangan $z = x + iy \in \mathbb{C}$ menjadi suatu bilangan kompleks $w = u + iy \in \mathbb{C}$ sehingga fungsi kompleks disebut pula sebagai **transformasi**. Fungsi kompleks biasa dinotasikan sebagai $w = f(z)$ atau $w = u(x, y) + iv(x, y) = f(x, y)$. Secara geometris, fungsi f merupakan transformasi yang memetakan titik di bidang-z ke bidang-w. Dengan demikian, fungsi kompleks dapat dipandang sebagai fungsi dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}^2$ yang memetakan (x, y) menjadi (u, v). Fungsi yang dibahas di sini meliputi fungsi linear, fungsi resiprokal, fungsi bilinear, fungsi pangkat, fungsi eksponen, fungsi logaritma, fungsi trigonometri, dan fungsi hiperbolik.

2.1 Fungsi Linear

Fungsi linear memiliki bentuk umum

$$w = f(z) = az + b,$$

dengan $a, b \in \mathbb{C}$. Jika $a = 0$ maka fungsi linear berubah menjadi fungsi konstan. Jika $a = 1$ dan $b = 0$ maka fungsi linear merupakan fungsi identitas.

Untuk mempelajari bagaimana fungsi linear mentransformasikan suatu titik z di bidang-z menjadi w di bidang z, perhatikan bahwa fungsi linear dapat dipandang sebagai komposisi dua transformasi, yaitu

$$w_1 = az \text{ dan } w = w_1 + b = az + b.$$

Misalkan $z = rcist = |z|\, cis \arg z$ dan $a = \rho cis\theta = |a|\, cis \arg a$ maka

$$w_1 = az = r\rho\ cis\ (t + \theta) = |a|\,|z|\, cis(\arg a + \arg z).$$

Oleh karena itu, transformasi $w_1 = az$ menghasilkan

$$|w_1| = |a|\,|z| \text{ dan } \arg w_1 = \arg a + \arg z.$$

Hal tersebut dapat diartikan bahwa transformasi w_1 mengakibatkan modulus z memanjang atau memendek dengan faktor $|a|$ dan z terotasi sejauh $\arg a$. Jika $|a| < 1$ maka modulus z memendek, jika $|a| > 1$ maka modulus z memanjang, dan modulus z tetap jika $|a| = 1$.
Selanjutnya, jika dimisalkan $b = b_1 + ib_2$ maka w_1 mengalami pergeseran horisontal sejauh b_1 dilanjutkan pergeseran vertikal sejauh b_2 untuk menghasilkan $w = w_1 + b$.
Jadi oleh **transformasi linear** $w = az + b$, titik z mengalami **penskalaan sebesar** $|a|$**, rotasi sejauh** $\arg a$ **dan pergeseran sejauh** b.

2.2 Fungsi Resiprokal

Fungsi resiprokal adalah fungsi berbentuk

$$w = f(z) = \frac{1}{z},$$

dengan $z \neq 0$.

Misalkan $z = rcist, r \neq 0$ maka

$$w = f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} cis(-t).$$

Secara geometris, hal ini dapat diartikan bahwa transformasi resiprokal terhadap z menghasilkan bilangan kompleks yang panjangnya $|z|^{-1}$ dan sudutnya $-\arg z$.

Jika $|z| < 1$ maka $|w| > 1$ dan sebaliknya. Artinya, titik-titik di dalam lingkaran satuan $|z| = 1$ akan ditransformasikan menjadi titik-titik di luar lingkaran, dan sebaliknya. Sedangkan titik-titik pada lingkaran akan tetap berada pada lingkaran namun posisinya dicerminkan terhadap sumbu x, sebab sudutnya adalah $-t$. Hal yang menarik dari fungsi resiprokal adalah bahwa fungsi ini dapat mentransformasikan garis dan lingkaran menjadi garis atau lingkaran seperti diperlihatkan berikut ini.

Perhatikan bahwa jika $z = x + iy$ maka

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{1}{x+iy}\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Di sini $w = u(x, y) + iv(x, y)$ dengan

$$u = \frac{x}{x^2+y^2} \text{ dan } v = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Pandang persamaan garis atau lingkaran di bidang-z yang secara umum dinyatakan sebagai

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0. \tag{2.1}$$

Perhatikan bahwa jika $a \neq 0$ maka diperoleh persamaan lingkaran sedangkan jika $a = 0$ maka diperoleh persamaan garis. Dari rumus u dan v maka diperoleh

$$u^2 + v^2 = \frac{1}{x^2+y^2}.$$

Jika kedua ruas persamaan (2.1) dibagi dengan $x^2 + y^2$ maka diperoleh

$$a + b\frac{x}{x^2+y^2} + c\frac{y}{x^2+y^2} + d\frac{1}{x^2+y^2} = 0.$$

Substitusi u dan v ke persamaan terakhir akan menghasilkan

$$a + bu - cv + d(u^2 + v^2) = 0,$$

yang merupakan persamaan lingkaran atau garis.

Jadi, secara umum, transformasi resiprokal memetakan garis atau lingkaran di bidang z dengan persamaan

$$a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$$

menjadi garis atau lingkaran di bidang w dengan persamaan

$$a + bu - cv + d(u^2 + v^2) = 0.$$

Sebagai contoh, lingkaran di bidang z berpusat di $z = -i$ berjari-jari 2 yang dinyatakan oleh persamaan

$$x^2 + (y + 1)^2 = 4$$

ekivalen dengan

$$x^2 + y^2 + 2y - 3 = 0,$$

sehingga di sini $a = 1, b = 0, c = 2$, dan $d = -3$. Oleh fungsi resiprokal, lingkaran tersebut ditransformasikan menjadi

$$1 - 2v - 3(u^2 + v^2) = 0,$$

yang ekivalen dengan persamaan

$$u^2 + v^2 + \frac{2}{3}v - \frac{1}{3} = 0.$$

Dengan melakukan manipulasi aljabar sederhana, persamaan tersebut dapat dinyatakan sebagai

$$u^2 + (v + \frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9},$$

yang merupakan persamaan lingkaran berpusat di $z = -\frac{1}{3}i$ berjari-jari $\frac{2}{3}$.

2.3 Fungsi Bilinear

Fungsi berbentuk

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots a_n z^n,$$

dengan n bilangan bulat tak negatif dan $a_0, a_1, \ldots a_n$ konstanta kompleks, disebut **polinom**.

Misalkan $p(z)$ dan $q(z)$ adalah polinom. Fungsi berbentuk

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

yang terdefinisi untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ dengan $q(z) \neq 0$, disebut **fungsi rasional**.

Salah satu fungsi rasional yang menarik adalah fungsi bilinear, yang sering disebut pula sebagai **transformasi Moebius**, yaitu fungsi kompleks berbentuk

$$w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d},$$

dengan $z \neq -\frac{d}{c}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ dan $ad - bc \neq 0$. Jelas bahwa jika $c = 0$ maka fungsi bilinear merupakan fungsi linear yang sudah dibahas pada sub bab sebelumnya. Oleh karena itu, pembahasan fungsi bilinear dibatasi untuk $c \neq 0$.

Perhatikan bahwa fungsi bilinear dapat dinyatakan sebagai

$$\begin{aligned} w = f(z) &= \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}(cz+d) + b - \frac{ad}{c}}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} - \frac{bc-ad}{c}\frac{1}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{ad-bc}{c}\frac{1}{cz+d} \\ &= A + B\frac{1}{cz+d} \end{aligned}$$

dengan $A = \frac{a}{c}$ dan $B = \frac{ad-bc}{c} \neq 0$.

Oleh karena itu, fungsi bilinear akan mentransformasikan suatu bilangan kompleks z di bidang kompleks z menjadi w melalui beberapa proses berikut.

Transformasi linear Mula-mula z dikenai transformasi linear menjadi $w_1 = cz + d$

Transformasi resiprokal Selanjutnya w_1 dikenai transformasi resiprokal yang menghasilkan

$$w_2 = \frac{1}{w_1} = \frac{1}{cz+d}$$

Transformasi linear Akhirnya, w diperoleh dari w_2 melalui transformasi linear

$$w = A + Bw_2 = A + B\frac{1}{cz+d}.$$

Dengan demikian, fungsi bilinear dapat dipandang sebagai komposisi fungsi linear dan resiprokal.

2.4 Fungsi Pangkat

Fungsi pangkat yang didefinisikan untuk setiap bilangan kompleks z adalah fungsi berbentuk

$$f(z) = z^n,$$

dengan $n \in \mathbb{N}$.

2.5 Fungsi Eksponen

Fungsi eksponen pada bilangan kompleks $z = x + iy$ didefinisikan sebagai

$$f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \left(\cos y = i \sin y\right).$$

Fungsi eksponen pada bilangan kompleks e^z memiliki sifat-sifat berikut, yang serupa dengan sifat fungsi eksponen pada bilangan real.

1. $e^z \neq 0$
2. $e^0 = 1$
3. $e^{z+w} = e^z e^w$
4. $e^{z-w} = \frac{e^z}{e^w}$
5. $e^{\overline{z}} = \overline{e^z}$
6. $e^z = e^{z+2\pi i}$
7. $|e^z| = e^x$ dan $Arg(e^z) = y$.

2.6 Fungsi Logaritma

Fungsi logaritma pada himpunan bilangan kompleks didefinisikan sebagai berikut. Misalkan $z = re^{it}$ maka

$$\log z = lnr + it = ln\,|z| + iarg(z).$$

Perlu diperhatikan bahwa fungsi $\log z$ hanya terdefinisi untuk $z \neq 0$.
Karena sifat periodik fungsi sinus dan cosinus maka $arg(z)$ memiliki tak berhingga banyaknya nilai, sehingga untuk suatu z diperoleh tak berhingga banyaknya nilai $\log z = ln\,|z| + i(Arg(z) = 2k\pi), k \in \mathbb{Z}$, dengan $-\pi < Arg(z) \leq \pi$ adalah argumen utama. Oleh karena itu fungsi logaritma kompleks merupakan suatu fungsi bernilai banyak atau *multivalued function.* Oleh karena itu perlu didefinisikan fungsi logaritma yang bernilai tunggal, yaitu

$$Logz = ln\,|z| + iArg(z) = lnr + it,$$

dengan $-\pi < t \leq \pi$. Dengan pendefinisian tersebut jelas bahwa

$$\log z = Logz + 2k\pi i =, k \in \mathbb{Z}.$$

Dengan memanfaatkan sifat fungsi logaritma natural pada bilangan real, dapat dibuktikan bahwa fungsi logaritma pada bilangan kompleks memenuhi sifat-sifat berikut.

1. $\log(zw) = \log z + \log w$

2. $\log \frac{z}{w} = \log z - \log w$

3. $\log e^z = z$

4. $e^{\log z} = z$

5. $\log\left(z^p\right) = p \log z$

2.7 Fungsi Trigonometri dan Hiperbolik

Perhatikan bahwa berdasarkan rumus Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ dan $e^{ix} = \cos x - i \sin x$, diperoleh

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ dan } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

Oleh karena itu, fungsi sinus dan cosinus pada bilangan kompleks didefinisikan sebagai berikut.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \text{ dan } \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},$$

sedangkan fungsi trigonometri yang lain didefinisikan sebagai

$$\tan z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \cot z = \frac{\cos z}{\sin z},\ \sec z = \frac{1}{\cos z},\ \csc z = \frac{1}{\sin z}.$$

Sifat-sifat fungsi trigonometri:

1. $\sin z = 0$ jika dan hanya jika $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
2. $\cos z = 0$ jika dan hanya jika $z = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
3. $\sin(-z) = -\sin z$
4. $\cos(-z) = \cos z$
5. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
6. $\sin(z + w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z$
7. $\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin w \sin z$

Fungsi sinus dan cosinus hiperbolik pada himpunan bilangan kompleks didefinisikan sebagai berikut.

$$\sinh z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2} \text{ dan } \cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Fungsi trigonometri hiperbolik yang lain didefinisikan seperti fungsi trigonometri, yaitu

$$\tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z},\ \coth z = \frac{\cosh z}{\sinh z},\ sechz = \frac{1}{\cosh z},\ cschz = \frac{1}{\sinh z}.$$

Bab 3

Fungsi Analitik

Pembahasan pada bab ini ditujukan untuk memperkenalkan konsep keanalitikan suatu fungsi kompleks. Konsep keanalitikan memerlukan konsep keterdiferensialan suatu fungsi kompleks yang memerlukan pula konsep limit dan kekontinuan. Oleh karena itu, pada bab ini dibahas konsep-konsep limit dan kekontinuan, diferensial, dan keanalitikan suatu fungsi. Sebelum membahas konsep limit dan kekontinuan perlu dipelajari berbagai terminologi mengenai topologi di bidang kompleks yang mendasari pembahasan konsep-konsep tersebut.

3.1 Topologi di Bidang Kompleks

Definisi Persekitaran: *Misalkan* $z_0 \in \mathbb{C}$. ϵ *- Neighbourhood dari* z_0 *adalah suatu himpunan* $N_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} |\ \|z - z_0\| < \epsilon\}$. *Himpunan* $N_\epsilon(z_0)$ *sering pula disebut* ***persekitaran atau bola buka atau cakram buka*** *dari* z_0 *berjari-jari* ϵ. Jelas bahwa $z_0 \in N_\epsilon(z_0)$. Jika $z_0 \notin N_\epsilon(z_0)$ maka diperoleh **cakram buka tanpa pusat** dari z_0 berjari-jari ϵ atau ϵ - *Deleted Neighbourhood* dari z_0, yaitu $N^*_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} |\ 0 < \|z - z_0\| < \epsilon\}$.

Contoh:

1. $N_1(i) = \{z \in \mathbb{C} |\ \|z - i\| < 1\}$ adalah daerah di dalam lingkaran berpusat di $z = i$ berjari-jari 1.

2. $N_2^*(-1) = \{z \in \mathbb{C} |\ 0 < \|z + 1\| < 2\}$ adalah daerah di dalam lingkaran berpusat di $z = -1$ berjari-jari 2 yang tidak memuat $z = -1$.

Definisi Titik Interior: *Misalkan* $A \subseteq \mathbb{C}$ *dan* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Titik* z_0 *disebut* ***titik interior*** *dari* A *jika* $\exists\ N_\epsilon(z_0)$ *sehingga* $N_\epsilon(z_0) \subseteq A$. *Himpunan semua titik interior dari* A *dinotasikan sebagai* $Int\,(A) = \{z_0 \in \mathbb{C} | z_0 \text{ titik interior dari} A\}$.

Definisi Titik Limit: *Misalkan* $A \subseteq \mathbb{C}$ *dan* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Titik* z_0 *disebut* ***titik limit*** *dari* A *jika* $\forall\ N_\epsilon(z_0)$ *berlaku* $N_\epsilon^*(z_0) \cap A \neq \emptyset$. *Himpunan semua titik limit dari* A *dinotasikan sebagai* $A^0 = \{z_0 \in \mathbb{C} | z_0 \text{ titik limit dari} A\}$ *dan himpunan* $\bar{A} = A \cup A^0$ *disebut* ***penutup*** *dari* A.

Definisi Titik Batas: *Misalkan* $A \subseteq \mathbb{C}$ *dan* $z_0 \in \mathbb{C}$. *Titik* z_0 *disebut* ***titik batas*** *dari* A *jika* $\forall\ N_\epsilon(z_0)$ *berlaku* $N_\epsilon^*(z_0) \cap A \neq \emptyset$ *dan* $N_\epsilon^*(z_0) \cap A^c \neq \emptyset$. *Di sini* A^c *menyatakan* ***komplemen dari A***, *yaitu* $A^c = \{z \in \mathbb{C} |\ z \notin A\}$. *Himpunan semua titik batas dari* A *disebut* ***batas*** *dari* A.

Definisi Himpunan (ter)buka (Open Set): *Himpunan* $A \subseteq \mathbb{C}$ *disebut himpunan buka jika* $A = Int(A)$.

Definisi Himpunan (ter)tutup (Closed Set): *Himpunan* $A \subseteq \mathbb{C}$ *disebut himpunan tutup jika* $A = \bar{A}$.

Definisi Himpunan terbatas: *Himpunan* $A \subseteq \mathbb{C}$ *disebut himpunan terbatas jika* $\exists M \in \mathbb{R} \ni A \subseteq N(0, M)$.

Contoh:

1. Jika $A = \{z \in \mathbb{C} |\ \|z\| < 2\}$ maka
   $A^c = \{z \in \mathbb{C} |\ \|z\| \geq 2\}$, $Int(A) = A$, $A^0 = \{z \in \mathbb{C} |\ \|z\| \leq 2\}$, dan Batas dari $A = \{z \in \mathbb{C} |\ \|z\| = 2\}$.

A terbatas sebab $\exists M = 2 \in \mathbb{R} \ni A \subseteq N(0, M)$ dan A adalah himpunan buka sebab $Int(A) = A$.

2. Jika $A = \{z \in \mathbb{C} | \ 1 \leq Im(z) \leq 3\}$ maka
   $A^c = \{z \in \mathbb{C} | \ Im(z) < 1 \vee Im(z) > 3\}$, $Int(A) = \{z \in \mathbb{C} | \ 1 < Im(z) < 3\}$,
   $A^0 = \{z \in \mathbb{C} | \ 1 \leq Im(z) \leq 3\}$, dan Batas dari $A = \{z \in \mathbb{C} | \ Im(z) = 1 \vee Im(z) = 3\}$.
   A **tidak terbatas** sebab tidak terdapat $M \in \mathbb{R} \ni A \subseteq N(0, M)$. Perhatikan bahwa A memuat semua titik batasnya, namun A tak terbatas. A adalah himpunan tutup sebab $\bar{A} = A$.

3. Jika $A = \{z \in \mathbb{C} | \ 1 < \|z - 1\| \leq 3\}$ maka
   $A^c = \{z \in \mathbb{C} | \ \|z - 1\| \leq 1 \vee \|z - 1\| > 3\}$, $Int(A) = \{z \in \mathbb{C} | \ 1 < \|z - 1\| < 3\}$,
   $A^0 = \{z \in \mathbb{C} | \ 1 \leq \|z - 1\| \leq 3\}$, Batas dari $A = \{z \in \mathbb{C} | \ \|z - 1\| = 1 \vee \|z - 1\| = 3\}$.
   A adalah himpunan terbatas sebab $\exists M = 5 \in \mathbb{R} \ni A \subseteq N(0, M)$, A **bukan himpunan buka** sebab $Int(A) \neq A$, dan A **juga bukan himpunan tutup** sebab $\bar{A} \neq A$. Perhatikan bahwa meskipun A tidak memuat semua titik batasnya, namun A terbatas.

4. Jika $A = \{z \in \mathbb{C} | \ Re(z) \geq -1\}$ maka
   $A^c = \{z \in \mathbb{C} | \ Re(z) < -1\}$, $Int(A) = \{z \in \mathbb{C} | \ Re(z) > -1\}$, $A^0 = \{z \in \mathbb{C} | \ Re(z) \geq -1\}$, dan Batas dari $A = \{z \in \mathbb{C} | \ Re(z) = -1\}$.
   A **tidak terbatas** sebab tidak terdapat $M \in \mathbb{R} \ni A \subseteq N(0, M)$ dan A adalah himpunan tutup sebab $\bar{A} = A$.

Berdasarkan contoh tersebut dapat dilihat bahwa konsep titik batas tidak memiliki hubungan sama sekali dengan konsep himpunan terbatas dan terdapat himpunan yang sekaligus tidak buka dan tidak tutup. Jadi **tidak benar** bahwa suatu himpunan yang tidak buka pasti tutup.

3.2 Limit dan Kekontinuan

Karena fungsi kompleks dapat dipandang sebagai fungsi dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}^2$ maka konsep limit dan kekontinuan pada fungsi kompleks pun serupa dengan konsep tersebut pada fungsi dari $\mathbb{R}^2$ ke $\mathbb{R}^2$.

Definisi Limit: *Misalkan $f(z)$ adalah fungsi kompleks dengan daerah asal (domain) $D_f \subseteq \mathbb{C}$, dan $z_0 \in \mathbb{C}$, dengan z_0 adalah titik limit dari D_f. Limit $f(z)$ mendekati L jika z mendekati z_0 didefinisikan dan dinotasikan sebagai berikut.*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni \ |f(z) - L| < \epsilon \textit{ bila } 0 < |z - z_0| < \delta.$$

Definisi tersebut dapat pula dinyatakan dalam 'bahasa' persekitaran sebagai berikut.

Misalkan $f(z)$ adalah fungsi kompleks dengan daerah asal (domain) $D_f \subseteq \mathbb{C}$, dan $z_0 \in \mathbb{C}$, dengan z_0 adalah titik limit dari D_f.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = L \iff \forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 \ni \ f(z) \in N_\epsilon(L) \textit{ bila } z \in N^*_\delta(z_0).$$

Sifat-sifat limit:

1. Jika $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ ada maka nilainya tunggal

2. Jika $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$, dan $L = L_1 + iL_2$ maka $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L = L_1 + iL_2 \iff \lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x,y) = L_1$ dan $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x,y) = L_2$.

3. Jika $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = L$ dan $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = M$ maka
   a. $\lim\limits_{z \to z_0} (f(z) + g(z)) = L + M$
   b. $\lim\limits_{z \to z_0} (kf(z)) = kL, \forall k \in \mathbb{C}$
   c. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)g(z) = LM$
   d. $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{L}{M}$ asalkan $M \neq 0$

4. Jika $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = 0$ maka $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = 0$.

Contoh:

1. Bila ada, tentukan $\lim\limits_{z \to 3-4i} \frac{iRe(z^2)}{|z|}$

   Jawab:

$$\begin{aligned}
\lim_{z \to 3-4i} \frac{iRe(z^2)}{|z|} &= \lim_{(x,y) \to (3,-4)} \frac{iRe(x^2 + y^2 + 2xyi)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\
&= \lim_{(x,y) \to (3,-4)} \frac{i(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{i(9 + 16)}{\sqrt{9 + 16}} = 5i
\end{aligned}$$

2. Bila ada, tentukan $\lim\limits_{z\to 0}\frac{iRe(z^2)}{|z|}$

   Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\frac{iRe(z^2)}{|z|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{iRe(x^2+y^2+2xyi)}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{i(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} i\sqrt{x^2+y^2} = 0.\end{aligned}$$

3. Bila ada, tentukan $\lim\limits_{z\to 3i}\frac{z^2+9}{z-3i}$

   Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 3i}\frac{z^2+9}{z-3i} &= \lim_{z\to 3i}\frac{(z+3i)(z-3i)}{z-3i}\\ &= \lim_{z\to 3i} z+3i = 6i.\end{aligned}$$

4. Bila ada, tentukan $\lim\limits_{z\to -i}\frac{z+i}{z^2+1}$

   Jawab:

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -i}\frac{z+i}{z^2+1} &= \lim_{z\to -i}\frac{z+i}{(z+i)(z-i)}\\ &= \lim_{z\to -i}\frac{1}{z-i} = \frac{1}{-2i} = \frac{1}{2}i.\end{aligned}$$

5. Bila ada, tentukan $\lim\limits_{z\to 0}\frac{x^2}{z}$.

   Jawab:

   Karena $|z| = \sqrt{x^2+y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$ maka

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \left|\frac{x^2}{z}\right| = \frac{|x^2|}{|z|}\\ &= \frac{|x|^2}{|z|} \leq \frac{|x|^2}{|x|} = |x| \leq |z|.\end{aligned}$$

   Berdasarkan hasil tersebut maka $\lim\limits_{z\to 0}|f(z)| \leq \lim\limits_{z\to 0}|z| = 0$. Akibatnya $\lim\limits_{z\to 0} f(z) = 0$.

6. Jika $f(z) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + i\frac{x^2}{y+1}$, tentukan $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ bila ada.

   Jawab:

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2xy}{x^2+y^2} + i\frac{x^2}{y+1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)+iv(x,y).$$

Dalam penentuan nilai $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2}$ kita menghadapi bentuk $\frac{0}{0}$ sehingga perlu kita periksa nilai limitnya bila (x,y) mendekati $(0,0)$ dari berbagai arah. Bila pendekatan dari dua arah yang berbeda menghasilkan nilai limit yang berbeda maka nilai limit tidak ada.

a. Jika (x,y) mendekati $(0,0)$ melalui sumbu x, yaitu sepanjang garis $y = 0$ maka diperoleh

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x)\to(0)} \frac{0}{x^2+0^2} = 0$$

b. Jika (x,y) mendekati $(0,0)$ melalui garis $y = x$ maka diperoleh

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2xy}{x^2+y^2} = \lim_{(x)\to(0)} \frac{2x^2}{x^2+x^2} = 1$$

Karena diperoleh nilai limit yang tidak sama maka $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)$ tidak ada.

Meskipun $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} v(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{y+1} = \frac{0^2}{0+1} = 0$ (ada), namun $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ tidak ada sebab $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} u(x,y)$ tidak ada.

Definisi Kekontinuan: *Misalkan $f(z)$ adalah fungsi kompleks dengan daerah asal (domain) $D_f \subseteq \mathbb{C}$, dan $z_0 \in \mathbb{C}$, dengan $z_0 \in D_f$. Fungsi $f(z)$ dikatakan* ***kontinu di*** z_0 *jika*

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0),$$

dan fungsi $f(z)$ dikatakan **kontinu di suatu himpunan** $A \subseteq \mathbb{C}$ jika $f(z)$ kontinu di setiap $z \in A$.

Dalam definisi tersebut tersirat adanya tiga syarat yang harus dipenuhi agar suatu fungsi $f(z)$ kontinu di z_0, yaitu:

1. $f(z_0)$ harus terdefinisi
2. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)$ harus ada
3. $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Sifat-sifat fungsi kontinu:

1. Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dan $z_0 = x_0 + iy_0 \in D_f$. $f(z)$ kontinu di z_0 jika dan hanya jika $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u(x_0,y_0)$ dan $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0)$.

2. Jika $f(z)$ dan $g(z)$ kontinu di z_0 maka demikian pula halnya yang berikut ini.

   a. $f(z) + g(z)$

   b. $kf(z), \forall k \in \mathbb{C}$

   c. $f(z)g(z)$

   d. $\frac{f(z)}{g(z)}$ asalkan $g(z_0) \neq 0$

   e. $(f \circ g)(z)$, asalkan $f(z)$ kontinu di $g(z_0)$.

Contoh:

1. Bila $f(z)$ didefinisikan sebagai

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^2+9}{z-3i}, & \text{jika} z \neq 3i, \\ 2i, & \text{jika} z = 3i, \end{cases}$$

   periksalah apakah $f(z)$ kontinu di $z = 3i$.

   Jawab:

   Telah diketahui pada contoh sebelumnya bahwa $\lim_{z\to 3i} \frac{z^2+9}{z-3i} = 6i$, sedangkan $f(-3i) = 2i$, sehingga $f(z)$ tidak kontinu di $z = 3i$.

2. Bila $f(z)$ didefinisikan sebagai

$$f(z) = \begin{cases} \frac{iRe(z)}{|z|}, & \text{jika} z \neq 0, \\ 0, & \text{jika} z = 0, \end{cases}$$

   periksalah apakah $f(z)$ kontinu di $z = 3 - 4i$ dan di $z = 0$.

   Jawab:

$$\begin{aligned} \lim_{z\to 3-4i} \frac{iRe(z)}{|z|} &= \lim_{(x,y)\to(3,-4)} \frac{iRe(x+yi)}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{(x,y)\to(3,-4)} \frac{ix}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3i}{\sqrt{9+16}} = \frac{3}{5}i \end{aligned}$$

   Jelas bahwa $f(3-4i) = \frac{3}{5}i$ sehingga $f(z)$ kontinu di $z = 3 - 4i$. Sekarang akan diselidiki apakah $f(z)$ kontinu di $z = 0$ dengan memeriksa eksistensi nilai limitnya terlebih dahulu.

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0}\frac{iRe(z)}{|z|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{iRe(x+yi)}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ix}{\sqrt{x^2+y^2}}.\end{aligned}$$

Jika (x, y) mendekati $(0, 0)$ melalui sumbu x, atau garis $y = 0$, maka diperoleh

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ix}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{ix}{\sqrt{x^2}} = i.$$

Jika (x, y) mendekati $(0, 0)$ melalui sumbu y, atau garis $x = 0$, maka diperoleh

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ix}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{y\to 0}\frac{0i}{\sqrt{y^2}} = 0.$$

Karena kedua pendekatan tersebut menghasilkan nilai limit yang berbeda maka dapat disimpulkan bahwa $\lim\limits_{z\to 0}\frac{iRe(z)}{|z|}$ tidak ada. Akibatnya, $f(z)$ tidak kontinu di $z = 0$.

3. Bila $f(z)$ didefinisikan sebagai

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z+i}{z^2+1}, & \text{jika} z \neq -i, \\ a, & \text{jika} z = -i, \end{cases}$$

tentukanlah nilai a agar $f(z)$ kontinu di $z = -i$.

Jawab: Telah diketahui bahwa $\lim\limits_{z\to -i}\frac{z+i}{z^2+1} = \frac{1}{2}i$, sehingga $f(z)$ akan kontinu di $z = -i$ jika $\lim\limits_{z\to -i}\frac{z+i}{z^2+1} = \frac{1}{2}i = f(-i) = a$. Jadi $a = \frac{1}{2}i$.

4. Jika $f(z) = \frac{2xy}{x^2+y^2} + i\frac{x^2}{y+1}$, untuk $z \neq 0$, apakah $f(z)$ kontinu di $z = 0$ dan di $z = -i$?

Jawab: Berapapun nilai $f(0)$ didefinisikan, $f(z)$ tidak mungkin kontinu di $z = 0$ sebab $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$ tidak ada. Sekarang akan kita periksa terlebih dahulu apakah $\lim\limits_{z\to -i} f(z)$ ada.

$$\begin{aligned}\lim_{z\to -i} f(z) &= \lim_{z\to -i}\frac{2xy}{x^2+y^2} + i\frac{x^2}{y+1}\\ &= \lim_{(x,y)\to(0,-1)}\frac{2xy}{x^2+y^2} + i\frac{x^2}{y+1} = 0.\end{aligned}$$

Jadi $f(z)$ akan kontinu di $z = -i$ asalkan $f(-i) = 0$.

3.3 Diferensial

Definisi Keterdiferensialan: *Misalkan $f(z)$ adalah fungsi kompleks dengan daerah asal (domain) $D_f \subseteq \mathbb{C}$, dan $z_0 \in Int(D_f)$. Fungsi $f(z)$ dikatakan **terdiferensialkan / dapat diturunkan / memiliki turunan di** z_0 jika*

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad \text{ADA},$$

dengan $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Jika nilai limit tersebut ada, maka nilai limit tersebut dinotasikan sebagai $f'(z_0)$ dan disebut sebagai turunan f di z_0.

Jika $f(z)$ terdiferensialkan di setiap titik z pada suatu himpunan $A \subseteq \mathbb{C}$ maka diperoleh $f'(z), \forall z \in A$, sehingga dapat didefinisikan fungsi baru yang disebut fungsi turunan dari $f(z)$, yaitu

$$\begin{aligned} f' \ &: \ A \longrightarrow \mathbb{C} \\ & \quad\ z \longrightarrow f'(z), \end{aligned}$$

dengan

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Contoh:

1. Jika $f(z) = 1$ maka secara umum, $\forall z \in \mathbb{C}$ diperoleh

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1 - 1}{\Delta z} = 0,$$

   sehingga diperoleh fungsi turunan dari $f(z) = 1$ adalah $f'(z) = 0$.

2. Jika $f(z) = z$ dan $z_0 = i$ maka

$$\begin{aligned} f'(z_0) = \acute{(f)}(i) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(i + \Delta z) - f(i)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{i + \Delta z - i}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1. \end{aligned}$$

Secara umum, $\forall z \in \mathbb{C}$ berlaku

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z + \Delta z - z}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta z} = 1,
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh fungsi turunan dari $f(z) = z$ adalah $f'(z) = 1$.

3. Jika $f(z) = z^2$ maka secara umum, $\forall z \in \mathbb{C}$ diperoleh

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} 2z + \Delta z = 2z,
\end{aligned}$$

sehingga diperoleh fungsi turunan dari $f(z) = z^2$ adalah $f'(z) = 2z$.

4. Jika $f(z) = e^z$ maka secara umum, $\forall z \in \mathbb{C}$ diperoleh

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^z e^{\Delta z} - e^z}{\Delta z} \\
&= e^z \lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{\Delta z} - 1}{\Delta z} \\
&= e^z \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{e^{\Delta x + i\Delta y} - 1}{\Delta x + i\Delta y}
\end{aligned}$$

Jika $(\Delta x, \Delta y)$ mendekati $(0,0)$ melalui garis $\Delta x = 0$ maka

$$\begin{aligned}
f'(z) &= e^z \lim_{\Delta y \to 0} \frac{e^{i\Delta y} - 1}{i\Delta y} = e^z \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\cos \Delta y + i \sin \Delta y - 1}{i\Delta y} \\
&= e^z \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-\sin \Delta y + i \cos \Delta y}{i} = e^z.1 = e^z
\end{aligned}$$

Jika $(\Delta x, \Delta y)$ mendekati $(0,0)$ melalui garis $\Delta y = 0$ maka

$$f'(z) = e^z \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^z \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x}}{1} = e^z.1 = e^z$$

Jika $(\Delta x, \Delta y)$ mendekati $(0,0)$ melalui garis $\Delta y = k\Delta y$ maka

$$\begin{aligned} f'(z) &= e^z \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{\Delta x + ik\Delta x} - 1}{\Delta x + ik\Delta x} \\ &= e^z \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{(1+ik)\Delta x} - 1}{(1+ik)\Delta x} \\ &= e^z \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(1+ik)e^{(1+ik)\Delta x}}{1+ik} = e^z.1 = e^z \end{aligned}$$

sehingga diduga bahwa fungsi turunan dari $f(z) = e^z$ adalah $f'(z) = e^z$. Dengan menggunakan teorema yang akan dibahas berikut ini, yang dikenal sebagai **teorema Cauchy - Riemann**, dapat diperlihatkan bahwa fungsi turunan dari $f(z) = e^z$ adalah $f'(z) = e^z$.

5. Jika $f(z) = \overline{z}$ maka secara umum, $\forall z \in \mathbb{C}$ diperoleh

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z + \Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{z} + \overline{\Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} \\ &= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta x - i\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} \end{aligned}$$

Jika $(\Delta x, \Delta y)$ mendekati $(0,0)$ melalui garis $\Delta y = 0$ maka

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1.$$

Jika $(\Delta x, \Delta y)$ mendekati $(0,0)$ melalui garis $\Delta x = 0$ maka

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{-i\Delta x}{i\Delta y} = -1.$$

Karena dengan dua pendekatan yang berbeda diperoleh nilai limit yang berbeda maka $f'(z)$ tidak ada, sehingga fungsi $f(z) = \overline{z}$ tidak terdiferensialkan $\forall z \in \mathbb{C}$.

6. Jika $f(z) = |z|^2$ maka secara umum, $\forall z \in \mathbb{C}$ diperoleh

$$\begin{aligned}
f'(z) &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|z+\Delta z|^2 - |z|^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)(\overline{z+\Delta z}) - z\overline{z}}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)(\overline{z}+\overline{\Delta z}) - z\overline{z}}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{z} + z\overline{\Delta z} + \Delta z\overline{z} + \Delta z\overline{\Delta z} - z\overline{z}}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\overline{\Delta z} + \Delta z\overline{z} + \Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z}
\end{aligned}$$

Jika $(\Delta x, \Delta y)$ mendekati $(0,0)$ melalui garis $\Delta y = 0$ maka $\Delta z = \overline{\Delta z}$, sehingga

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\Delta z + \Delta z\overline{z} + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} z + \overline{z} + \Delta z = z + \overline{z} = 2x.$$

Jika $(\Delta x, \Delta y)$ mendekati $(0,0)$ melalui garis $\Delta x = 0$ maka $\Delta z = -\overline{\Delta z}$, sehingga

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{-z\Delta z + \Delta z\overline{z} - (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} -z + \overline{z} - \Delta z = -z + \overline{z} = -2iy.$$

Jika $z \neq 0$ maka dua pendekatan tersebut menghasilkan nilai limit yang berbeda sehingga $f'(z)$ tidak ada $\forall z \neq 0$. Sekarang akan diselidiki $f'(z)$ ada untuk $z = 0$.

$$f'(0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(0+\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta z|^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta z\overline{\Delta z}}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \overline{\Delta z} = 0.$$

Karena $f'(z)$ tidak ada $\forall z \neq 0$ dan $f'(0) = 0$ maka dapat disimpulkan bahwa fungsi $f(z) = |z|^2$ hanya terdiferensialkan di $z = 0$.

Untuk memeriksa apakah suatu fungsi terdiferensialkan tentu tidak praktis jika selalu hanya menggunakan definisi saja. Oleh karena itu telah dibuktikan beberapa sifat atau teorema yang dapat membantu kita untuk memeriksa keterdiferensialan suatu fungsi kompleks dengan lebih mudah, seperti yang disajikan berikut ini.

Sifat-sifat fungsi terdiferensial

Jika $f(z)$ dan $g(z)$ terdiferensial pada suatu himpunan $A \subseteq \mathbb{C}$ dan $k \in \mathbb{C}$ adalah konstanta, maka demikian pula halnya dengan $(f+g)(z), (kf)(z),\ (fg)(z),\ \left(\frac{f}{g}\right)(z)$, dan $(f \circ g)(z)$, yang dapat ditentukan dengan cara berikut.

1. $(f+g)'(z) = f'(z) + g'(z)$

2. $(kf)'(z) = kf'(z)$

3. $(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$

4. $\frac{f}{g}'(z) = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$

5. $(f \circ g)'(z) = f'(g(z))g'(z)$

Dengan memanfaatkan sifat-sifat tersebut dapat ditentukan turunan fungsi-fungsi lain seperti fungsi polinom, fungsi rasional, fungsi trigonometri, dan fungsi hiperbolik.

Contoh:

1. Akan diperlihatkan bahwa jika $f(z) = z^n$ maka $f'(z) = nz^{n-1}, \forall n \in \mathbb{Z}$.

   (a) Akan dibuktikan dengan menggunakan induksi matematika bahwa jika $f(z) = z^n$ maka $f'(z) = nz^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$, sebagai berikut.

   - Sifat jelas berlaku untuk $n = 1$ sebab telah diperlihatkan dengan menggunakan definisi bahwa $f'(z) = 1$ jika $f(z) = z$

   - Andaikan sifat berlaku untuk $n = k$, yaitu $f'(z) = kz^{k-1}$ jika $f(z) = z^k$,

- harus dibuktikan bahwa sifat berlaku untuk $n = k + 1$. Menggunakan sifat turunan perkalian dua fungsi maka $f(z) = z^{(k+1)} = zz^k$ sehingga

$$f'(z) = z^k + zkz^{k-1} = z^k + kz^k = (k+1)z^k$$

Jadi telah terbukti bahwa jika $f(z) = z^n$ maka $f'(z) = nz^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

(b) Berikut ini dibuktikan bahwa jika $f(z) = z^n$ maka $f'(z) = nz^{n-1}, \forall n$ bilangan bulat negatif pula.
Misalkan n bilangan bulat negatif. Misalkan $m = -n$. Oleh karena itu $m \in \mathbb{N}$ dan $f(z) = z^n = z^-m = \frac{1}{z^m} = \frac{1}{g(z)}$, dengan $g(z) = z^m$. Karena $m \in \mathbb{N}$ maka $g'(z) = mz^{m-1} = -nz^{-n-1}$. Dengan menggunakan sifat turunan hasil bagi dua fungsi diperoleh

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{0.g(z) - 1.g'(z)}{(g(z))^2} = \frac{-g'(z)}{(g(z))^2} \\ &= \frac{-mz^{m-1}(z)}{z^{2m}} = -mz^{-m-1} = nz^{n-1} \end{aligned}$$

Dengan demikian telah dibuktikan bahwa jika $f(z) = z^n$ maka $f'(z) = nz^{n-1}, \forall n \in \mathbb{Z}$.

2. Jika $f(z) = \sin(z) = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$ maka $f'(z) = \frac{ie^{iz}+ie^{-iz}}{2i} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \cos(z)$.

3. Jika $f(z) = \sinh(z) = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$ maka $f'(z) = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2} = \cosh(z)$.

Teorema Cauchy-Riemann 1: *Misalkan fungsi kompleks $f(z)$ dinyatakan sebagai $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Jika $u(x, y), v(x, y), u_x, u_y, v_x,$ dan v_y kontinu pada persekitaran $N_\epsilon(z_0)$ dari suatu titik z_0 dan pada z_0 berlaku*

$$u_x = v_y \text{ dan } u_y = -v_x,$$

maka $f'(z_0)$ ada dan

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0),$$

dengan $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}, v_x = \frac{\partial v}{\partial x},$ dan $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ berturut-turut adalah turunan parsial dari u dan v terhadap x dan y.

Teorema Cauchy-Riemann 2: *Jika fungsi kompleks* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *memiliki turunan di* z_0 *maka .*

$$f'(z_0) = u_x(z_0) + iv_x(z_0) = v_y(z_0) - iu_y(z_0),$$

sehingga pada z_0 *berlaku*

$$u_x = v_y \text{ dan } u_y = -v_x.$$

Contoh:

1. Pandang fungsi $f(z) = z^2 = (x+iy)^2 = x^2-y^2+2xyi = u(x, y)+v(x, y)i$. Di sini $u(x, y) = x^2 - y^2$ dan $v(x, y) = 2xy$, sehingga $u_x = 2x, u_y = -2y, v_x = 2y$, dan $v_y = 2x$. Jelas bahwa u, v, u_x, u_y, v_x, dan v_y adalah fungsi-fungsi yang kontinu. Perhatikan bahwa $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x, \forall(x, y)$. Berdasarkan teorema Cauchy-Riemann 1 maka $f'(z)$ ada untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ dan $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = 2x + 2yi = 2(x + yi) = 2z$. Hasil ini sesuai dengan hasil yang diperoleh dengan menggunakan definisi turunan fungsi kompleks.

2. Pandang fungsi $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y = u(x, y) + v(x, y)i$. Di sini $u(x, y) = e^x \cos y$ dan $v(x, y) = e^x \sin y$, sehingga $u_x = e^x \cos y, u_y = -e^x \sin y, v_x = e^x \sin y$, dan $v_y = e^x \cos y$. Jelas bahwa u, v, u_x, u_y, v_x, dan v_y adalah fungsi-fungsi yang kontinu. Perhatikan bahwa $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x, \forall(x, y)$. Berdasarkan teorema Cauchy-Riemann 1 maka $f'(z)$ ada untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ dan $f'(z) = u_x(z)+iv_x(z) = e^x \cos y+ie^x \sin y = e^z$. Hasil ini membenarkan dugaan pada contoh sebelumnya bahwa turunan dari e^z adalah e^z.

3. Pandang fungsi $f(z) = |z|^2 = x^2 + y^2 = u(x, y) + v(x, y)i$. Di sini $u(x, y) = x^2 + y^2$ dan $v(x, y) = 0$, sehingga $u_x = 2x, u_y = 2y, v_x = 0$, dan $v_y = 0$. Jelas bahwa u, v, u_x, u_y, v_x, dan v_y adalah fungsi-fungsi yang kontinu. Perhatikan bahwa persamaan $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$ hanya berlaku untuk $(x, y) = (0, 0)$. Berdasarkan teorema Cauchy-Riemann 1 dan 2 maka $f'(z)$

hanya ada untuk $z = 0$ dan $f'(0) = u_x(0)+iv_x(0) = 0+0i = 0$. Hasil inipun sesuai dengan hasil yang telah kita peroleh pada contoh sebelumnya.

4. Pandang fungsi $f(z) = \overline{z} = x - yi = u(x, y) + v(x, y)i$. Di sini $u(x, y) = x$ dan $v(x, y) = -y$, sehingga $u_x = 1, u_y = 0, v_x = 0,$ dan $v_y = -1$. Jelas bahwa u, v, u_x, u_y, v_x, dan v_y adalah fungsi-fungsi yang kontinu. Perhatikan bahwa persamaan $u_x \neq v_y, \forall x + iy \in \mathbb{C}$. Berdasarkan teorema Cauchy-Riemann 2 maka $f'(z)$ tidak ada untuk setiap $z \in \mathbb{C}$. Jadi f tidak terdiferensialkan.

5. Pandang fungsi $f(z) = y - xi = u(x, y) + v(x, y)i$. Di sini $u(x, y) = y$ dan $v(x, y) = -x$, sehingga $u_x = 0, u_y = 1, v_x = -1,$ dan $v_y = 0$. Jelas bahwa u, v, u_x, u_y, v_x, dan v_y kontinu dan $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x, \forall(x, y)$. Berdasarkan teorema Cauchy-Riemann 1 maka $f'(z)$ ada dan $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = -i$.

Perhatikan bahwa teorema Cauchy-Riemann 2 bukan sepenuhnya merupakan kebalikan teorema Cauchy-Riemann 1 sebab teorema Cauchy-Riemann 2 tidak menjamin kekontinuan u, v, u_x, u_y, v_x, dan v_y. Teorema Cauchy-Riemann 1 berguna untuk menentukan himpunan bilangan kompleks z di mana $f(z)$ terdiferensialkan, sedangkan teorema Cauchy-Riemann 2 berguna untuk menentukan himpunan bilangan kompleks z di mana $f(z)$ TIDAK terdiferensialkan.
Jadi, sejauh ini kita dapat memeriksa eksistensi dan menentukan turunan suatu fungsi kompleks $f(z)$ dengan menggunakan:

- definisi fungsi turunan fungsi kompleks, yaitu

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

,

- operasi fungsi terdiferensialkan, seperti penjumlahan, perkalian, pembagian, dan komposisi dua fungsi

- persamaan Cauchy-Riemann, yaitu

$$u_x = v_y \text{ dan } u_y = -v_x,$$

dan

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z).$$

Di antara ketiga cara tersebut, cara terakhir merupakan cara termudah jika $f(z)$ dinyatakan sebagai fungsi dengan variabel bebas (x, y) dalam koordinat Cartesius. Namun, bila $f(z)$ dinyatakan dalam koordinat polar maka kita akan mengalami kesulitan dalam menggunakan cara ke tiga. Sebagai contoh, ketiga cara tersebut tidak dapat digunakan untuk menentukan turunan fungsi logaritma yang didefinisikan sebagai $\log z = lnr + it = ln|z| + i\arg(z)$, untuk $z = re^{it}$. Namun, jika kita dapat menyatakan persamaan Cauchy-Riemann dalam koordinat polar, kita dapat menentukan turunan fungsi logaritma. Berikut ini dibahas bagaimana menyatakan persamaan Cauchy-Riemann dalam koordinat polar dan rumus $f'(z)$ dalam koordinat polar.
Jika $z = x + iy = re^{it}$ dan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = u(r, t) = iv(r, t)$ dengan $x = r\cos t, y = r\sin t$, maka dengan menggunakan aturan rantai, diperoleh

$$\begin{aligned} u_r &= u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos t + u_y \sin t, \\ u_t &= u_x x_t + u_y y_t = -u_x r\sin t + ru_y \cos t, \\ v_r &= v_x x_r + v_y y_r = v_x \cos t + v_y \sin t, \\ v_t &= v_x x_t + v_y y_t = -v_x r\sin t + rv_y \cos t. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Berdasarkan persamaan Cauchy-Riemann maka persamaan (3.1) yang ke empat menjadi

$$v_t = u_y r\sin t + ru_x \cos t = ru_x \cos t + ru_y \sin t.$$

Jika persamaan pertama dikalikan dengan r maka diperoleh

$$ru_r = ru_x \cos t + ru_y \sin t = v_t.$$

Jadi diperoleh

$$ru_r = v_t \text{ atau } u_r = \frac{1}{r}v_t, \forall r \neq 0.$$

Berdasarkan persamaan Cauchy-Riemann maka dari persamaan (3.1) yang ke tiga diperoleh

$$rv_r = -ru_y \cos t + ru_x \sin t = -(-u_x r \sin t + ru_y \cos t) = -u_t.$$

Jadi diperoleh

$$rv_r = -u_t \text{ atau } v_r = -\frac{1}{r}u_t, \forall r \neq 0.$$

Dengan demikian, **persamaan Cauchy-Riemann dalam koordinat polar** adalah

$$u_r = \frac{1}{r}v_t \text{ dan } v_r = -\frac{1}{r}u_t, \forall r \neq 0.$$

Selanjutnya, untuk menentukan $f'(z)$ maka $u_x, u_y, v_x,$ dan v_y perlu dinyatakan dalam $u_r, u_t, v_r,$ dan v_t. Perhatikan bahwa dari ke empat persamaan di atas diperoleh dua sistem persamaan linear berturut-turut dalam u_x, u_y dan v_x, v_y, yaitu

$$\begin{aligned} (\cos t)u_x + (\sin t)u_y &= u_r \\ (-r \sin t)u_x + (r \cos t)u_y &= u_t, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} (\cos t)v_x + (\sin t)v_y &= v_r \\ (-r \sin t)v_x + (r \cos t)v_y &= v_t. \end{aligned}$$

Dengan melakukan eliminasi atau menggunakan aturan Cramer untuk menyelesaikan kedua sistem persamaan linear tersebut maka diperoleh

$$\begin{aligned} u_x &= u_r \cos t - \frac{u_t}{r} \sin t, \\ u_y &= u_r \sin t + \frac{u_t}{r} \cos t, \\ v_x &= v_r \cos t - \frac{v_t}{r} \sin t, \end{aligned}$$

dan

$$v_y = v_r \sin t + \frac{v_t}{r} \cos t.$$

Dengan menggunakan persamaan Cauchy-Riemann dalam koordinat polar maka

$$u_x = u_r \cos t + v_r \sin t,$$

$$u_y = u_r \sin t - v_r \cos t,$$

$$v_x = v_r \cos t - u_r \sin t,$$

dan

$$v_y = v_r \sin t + u_r \cos t.$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned} f'(z) &= u_x + iv_x = u_r \cos t + v_r \sin t + i(v_r \cos t - u_r \sin t) \\ &= \frac{ru_r \cos t + rv_r \sin t}{r} + i\frac{v_r \cos t - u_r \sin t}{r} \\ &= \frac{u_r(r \cos t - ri \sin t)}{r} + i\frac{v_r(r \cos t - ri \sin t)}{r} \\ &= \frac{u_r r\text{cis}(-t) + iv_r r\text{cis}(-t)}{r} \\ &= \frac{r\text{cis}(-t)(u_r + iv_r}{r} = \frac{\overline{z}}{r}(u_r + iv_r). \end{aligned}$$

Jadi turunan $f(z)$ jika dinyatakan dalam koordinat polar adalah

$$f'(z) = \frac{\overline{z}}{r}(u_r + iv_r).$$

Pada fungsi logaritma, $u(r,t) = \ln(t)$ dan $v(r,t) = t$, sehingga turunan fungsi logaritma adalah

$$f'(z) = \frac{\overline{z}}{r}(u_r + iv_r) = \frac{\overline{z}}{r}(\frac{1}{r} + 0i) = \frac{\overline{z}}{r^2} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z}.$$

Diperoleh bahwa, serupa dengan yang diperoleh pada fungsi real,

$$\frac{d}{dz}\log z = \frac{1}{z}.$$

3.4 Fungsi Analitik

Pada sub bab ini dibahas suatu sifat fungsi kompleks yang terkait dengan eksistensi turunan, yaitu fungsi analitik, yang didefinisikan berikut ini.

Definisi fungsi analitik: *Misalkan $f(z)$ fungsi kompleks dengan daerah definisi D_f dan $z \in Int(D_f)$. Fungsi f dikatakan ANALITIK di z_0 jika $f'(z)$ ada di semua z yang terletak pada suatu persekitaran $N_\epsilon(z_0)$ dari z_0.*

Fungsi yang analitik di seluruh bidang kompleks disebut ***entire function*** atau ***holomorphic function***. Titik z_0 disebut **titik singular** jika $f(z)$ tidak analitik di z_0 namun setiap persekitaran dari z_0 memuat sedikitnya satu titik z di mana $f(z)$ analitik. Fungsi yang merupakan hasil bagi dua entire function disebut ***meromorphic function***.
Jelas bahwa **jika f analitik di z_0 maka f terdiferensialkan di z_0, namun sifat sebaliknya belum tentu benar**.

Karena keanalitikan berkaitan erat dengan turunan maka sifat operasi fungsi yang berlaku pada fungsi yang terdiferensialkan pun berlaku pada fungsi analitik, seperti dinyatakan dalam sifat berikut.

Sifat fungsi analitik
Jika $f(z)$ dan $g(z)$ analitik di $z_0 \in \int D_f \cap \int D_g$ dan $k \in \mathbb{C}$ adalah konstanta, maka $(f+g)(z), (kf)(z),\ (fg)(z),\ \left(\frac{f}{g}\right)(z)$, dan $(f \circ g)(z)$ juga analitik di z_0. Untuk keanalitikan fungsi komposisi $(f \circ g)(z)$ di z_0 diperlukan syarat tambahan, yaitu $g(z)$ harus analitik di $f(z_0)$.

Contoh:

1. Jika $f(z) = x^2 - iy^2$ maka $u(x,y) = x^2$ dan $v(x,y) = -y^2$ sehingga $u_x = 2x, u_y = 0, v_x = 0$, dan $v_y = -2y$. Agar $f'(z)$ ada haruslah $u_x = v_y$ yang mengakibatkan $y = -x$. Jadi $f'(z)$ hanya ada untuk setiap (x,y) yang terletak pada garis $y = -x$. Jika kita pandang sebarang titik (x_0, y_0) pada garis tersebut maka kita tidak mungkin memperoleh persekitaran dari (x_0, y_0) sedemikian sehingga $f'(z)$ ada untuk setiap z pada persekitaran tersebut. Dengan demikian $f(z)$ tidak analitik pada garis $y = -x$. Akibatnya

$f(z)$ tidak analitik di seluruh bidang kompleks. Pada contoh ini terlihat bahwa meskipun $f(z)$ terdiferensialkan di setiap titik pada garis $y = -x$ namun $f(z)$ tidak analitik pada garis tersebut.

2. Fungsi polinom terdiferensialkan di setiap $z \in \mathbb{C}$ sehingga polinom merupakan *entire function.*

3. Fungsi rasional $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, dengan $p(z)$ dan $q(z)$ polinom, adalah fungsi yang analitik di seluruh bidang kompleks kecuali pada z yang membuat $q(z) = 0$. Fungsi rasional merupakan salah satu contoh meromorphic function.

4. Fungsi bilinear $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ tidak analitik di $z = -\frac{d}{c}$ karena $f(z)$ merupakan fungsi rasional dengan $q(z) = cz+d$. Titik $z = -\frac{d}{c}$ merupakan titik singular.

5. Berdasarkan contoh sebelumnya, maka fungsi $f(z) = |z|^2$ tidak analitik di seluruh bidang kompleks, sebab $f(z)$ hanya terdiferensialkan di $z = 0$ sehingga tidak analitik di $z = 0$.

6. Fungsi eksponen $f(z) = e^z$ merupakan *entire function.*

Berdasarkan persamaan Cauchy - Riemann, sifat keanalitikan fungsi dapat dikaitkan dengan suatu sifat fungsi, yaitu keharmonikan. Sebelum membahas kaitan di antara keduanya, perlu didefinisikan apa yang dimaksud dengan fungsi yang harmonik.

Definisi: Fungsi harmonik *Suatu fungsi REAL dua variabel $f(x, y)$ disebut fungsi harmonik bila $f(x, y)$ memenuhi persamaan diferensial parsial*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Persamaan diferensial partial tersebut dikenal sebagai ***Persamaan Laplace.***

Teorema: *Jika $f(z)$ analitik maka bagian real dan imajiner dari $f(z)$ adalah fungsi-fungsi harmonik.*

Bukti: Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Akan dibuktikan bahwa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ dan } \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Karena $f(z)$ analitik maka $f(z)$ terdiferensialkan di setiap $z \in \mathbb{C}$, sehingga berlaku persamaan Cauchy-Riemann, yaitu

$$u_x = v_y \text{ dan } u_y = -v_x.$$

Perhatikan bahwa $u_{xx} = v_{xy} = v_{yx} = -u_{yy}$, sehingga diperoleh $u_{xx} = -u_{yy}$ atau

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Dengan cara yang sama diperoleh $v_{xx} = -u_{xy} = -u_{yx} = -v_{yy}$, sehingga diperoleh pula

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Jadi teorema telah terbukti. Dalam hal ini $v(x,y)$ disebut **harmonik sekawan** dari $u(x,y)$.

Perhatikan bahwa sifat sebaliknya belum tentu benar, yaitu jika $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ adalah fungsi-fungsi harmonik maka tidak dijamin bahwa $f(z)$ analitik.

Contoh

1. Jika $f(z) = \bar{z} = x - iy$ maka $u_x = 1, u_{xx} = 0, u_y = 0, u_{yy} = 0, v_x = 0, v_{xx} = 0, v_y = -1$, dan $v_{yy} = 0$. Perhatikan bahwa $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ memenuhi persamaan Laplace namun $f(z)$ tidak memenuhi persamaan Cauchy-Riemann. Dengan demikian $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ adalah fungsi-fungsi harmonik namun $f(z)$ tidak analitik.

2. Jika $f(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$ maka $u_x = \cos x \cosh y, u_y = \sin x \sinh y, v_x = -\sin x \sinh y, v_y = \cos x \cosh y, u_{xx} = -\sin x \cosh y, u_{yy} = \sin x \cosh y, v_{xx} = -\cos x \sinh y, v_{yy} = \cos x \sinh y$ sehingga $u_{xx} + u_{yy} = 0$ dan $v_{xx} + v_{yy} = 0$. Jadi $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ adalah fungsi harmonik.

Bab 4

Integral Fungsi Kompleks

4.1 Lintasan di Bidang Kompleks

Definisi Kurva:

Kurva C di bidang kompleks dapat dinyatakan secara parametrik sebagai daerah hasil fungsi dari suatu selang di $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{C}$, yaitu

$$\begin{array}{rcl} \rho & : & [a,b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & & t \qquad\quad \longmapsto z(t) = x(t) + iy(t), \end{array}$$

sedemikian sehingga $\rho(t) \in C$.

Kurva C disebut kurva mulus (*smooth curve*) jika $x'(t)$ dan $y'(t)$ ada dan kontinu $\forall t \in [a,b]$. Pada definisi tersebut, $\rho(a)$ disebut **titik awal** (*initial point*), sedangkan $\rho(b)$ disebut **titik akhir** (*terminal point*).

Contoh:

1. Persamaan lingkaran di bidang kompleks yang dinyatakan sebagai

   $$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

   dapat dinyatakan dalam beberapa persamaan kurva terparametrisasi berikut ini.

   $C_1 : x = r\cos t + a, y = r\sin t + b, t \in [0, 2\pi]$ atau

   $C_2 : x = r\cos t + a, y = r\sin t + b, t \in [-\pi, \pi]$ atau

$C_3 : x = r\cos 2t + a, y = r\sin 2t + b, t \in [0, \pi]$.

Dengan demikian, persamaan lingkaran di bidang kompleks dapat dinyatakan secara parametrik sebagai

$$\begin{aligned} z &= x + iy = (r\cos t + a) + i(r\sin t + b) = r(\cos t + i\sin t) + (a + ib) \\ &= rcist + z_0 = re^{it} + z_0, \end{aligned}$$

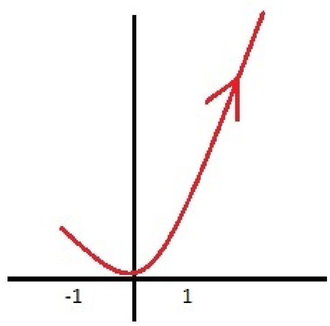
atau $\qquad z - z_0 = re^{it}, t \in [0, 2\pi]$.

Selain itu, persamaan lingkaran di bidang kompleks dapat pula ditulis sebagai

$$\|z - z_0\| = r,$$

atau dengan perkataan lain z merupakan titik-titik di bidang kompleks yang berjarak r dari z_0.

2. Parametrisasi kurva berbentuk parabola $y = x^2$ dari titik (-1,1) ke (2,4) dapat dinyatakan sebagai $\rho\,(t) = x\,(t) + iy\,(t) = t + it^2, \quad t \in [-1, 2]$.

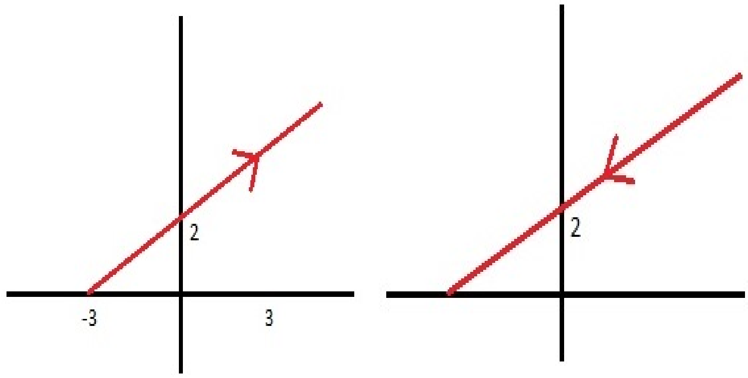


3. Kurva C yang merupakan ruas garis yang menghubungkan $z = -3$ dan $z = 3 + 2i$ merupakan bagian dari garis yang memiliki persamaan

$$y = \frac{1}{3}x + 1,$$

sehingga secara parametrik kurva tersebut dapat dinyatakan sebagai

$C : x\,(t) = t, y\,(t) = \frac{1}{3}t + 1, \quad t \in [-3, 3]$.



4. Sebaliknya, ruas garis yang berasal dari $z = 3 + 2i$ dan berakhir di $z = -3$ dapat dinyatakan secara parametrik sebagai $C : x(t) = -t, y(t) = \frac{1}{3}t + 1, \quad t \in [-3, 3]$.

Jika C adalah kurva dengan parameterisasi $\rho(t) = x(t) + iy(t)$ di mana $t \in [a, b]$, maka panjang kurva C adalah :

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

Definisi Lintasan:

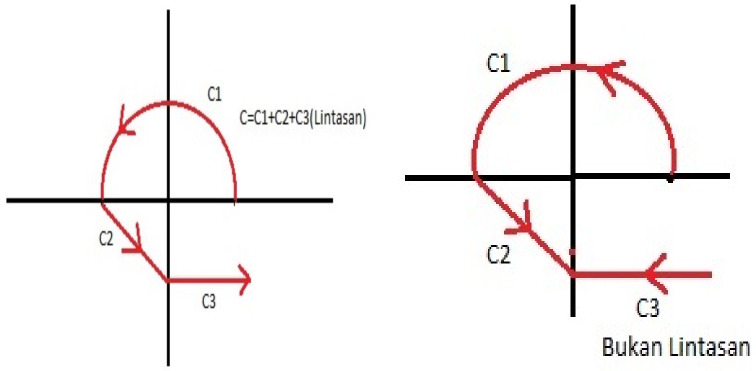
Suatu kurva C disebut lintasan (*path*) jika C dapat dinyatakan sebagai sejumlah berhingga kurva mulus yang sambung menyambung, yaitu

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + ... + C_n,$$

sedemikian sehingga **titik awal** dari C_{k+1} sama dengan **titik akhir** dari C_k. Titik awal lintasan C adalah titik awal dari C_1, sedangkan titik akhir dari C adalah titik akhir dari C_n.

Lintasan dapat dibedakan menjadi lintasan terbuka dan lintasan tertutup.

1. Lintasan C disebut lintasan terbuka jika titik awal lintasan tidak berimpit dengan titik akhir lintasan.



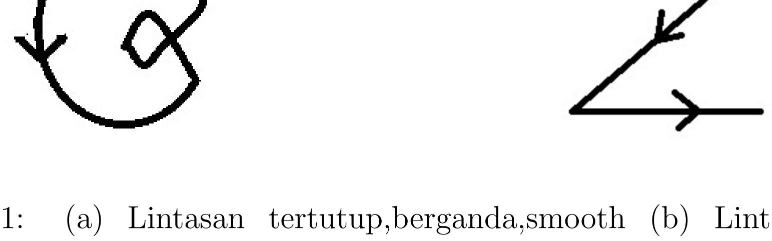
2. Lintasan C disebut lintasan tertutup jika titik awal lintasan berimpit dengan titik akhir lintasan.

Selain itu, lintasan dibedakan pula menjadi lintasan sederhana dan lintasan berganda.

1. Lintasan C disebut lintasan sederhana (*simple*) jika C tidak pernah memotong dirinya sendiri.

2. Lintasan C disebut lintasan berganda (*multiple*) jika C memotong dirinya sendiri.

Agar terminologi-terminologi tersebut mudah dipahami, pada Gambar 4.1 diberikan contoh lintasan mulus yang tertutup dan berganda dan lintasan terbuka yang sederhana namun tidak mulus.



Gambar 4.1: (a) Lintasan tertutup,berganda,smooth (b) Lintasan terbuka,simple,tidak smooth

Teorema Jordan:

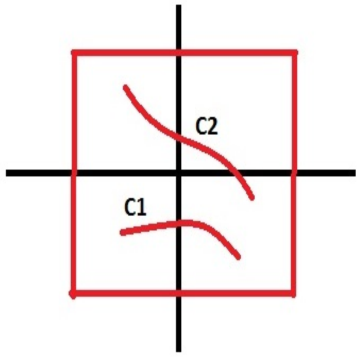
Lintasan tertutup sederhana C membagi bidang kompleks menjadi 3 bagian yang saling asing, yaitu: lintasan C itu sendiri, Interior dari C yang dilambangkan sebagai $Int\,(C)$, dan Eksterior dari C yang dinotasikan dengan $Ext\,(C)$.

Definisi Orientasi Lintasan:

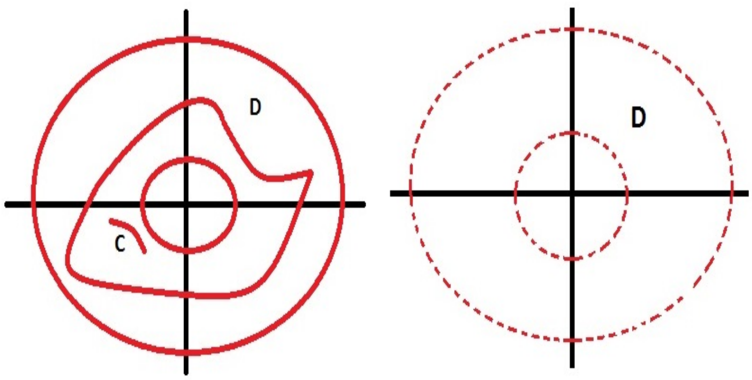
Lintasan **tertutup sederhana** C dikatakan berorientasi positif jika $Int\,(C)$ berada di sebelah kiri kita manakala kita menjalani C. Pada lintasan terbuka, yang dimaksud sebagai orientasi positif adalah arah dari titik awal ke titik akhir. Lintasan yang sama dengan C namun berlawanan orientasi dengan C dinotasikan sebagai lintasan $-C$

4.2 Daerah Terhubung Sederhana

Suatu daerah $D \subseteq \mathbb{C}$ disebut **daerah terhubung** jika setiap dua titik di D dapat dihubungkan oleh suatu lintasan C yang seluruhnya termuat di dalam D. Suatu daerah $D \subseteq C$ disebut **daerah terhubung sederhana** (*simply connected*) jika setiap lintasan **tertutup sederhana** yang termuat di D memiliki *interior* yang seluruhnya termuat di D juga. Daerah yang **tidak terhubung sederhana** disebut **terhubung berganda** (*multiply connected*). Pada Gambar 4.2 diberikan ilustrasi mengenai daerah yang terhubung dan terhubung sederhana. Mudah dilihat bahwa setiap dua titik di D dapat dihubungkan oleh suatu lintasan yang seluruhnya terletak di D dan setiap lintasan yang terletak di D maka interiornya termuat di D pula. Sedangkan pada Gambar 4.3 disajikan contoh daerah yang terhubung, namun tidak terhubung sederhana, dan salah satu contoh daerah tak terhubung sederhana namun terhubung yang berupa circular annulus. Dengan demikian tidak ada hubungan sebab akibat antara daerah terhubung dan daerah terhubung sederhana karena suatu daerah yang terhubung belum tentu terhubung sederhana dan sebaliknya. Keduanya merupakan konsep yang berbeda meskipun keduanya menggunakan kata terhubung.



Gambar 4.2: Daerah terhubung, terhubung sederhana



Gambar 4.3: Daerah terhubung, terhubung berganda, circular anulus

4.3 Integral Fungsi Kompleks sebagai Integral Garis

Misalkan C adalah lintasan di bidang kompleks dan fungsi $f(z) = u(z) + i\ v(z)$ terdefinisi di lintasan C. Akan ditentukan $\int\limits_C f(z)\ dz$ dan sifat-sifatnya.

Definisi Integral Fungsi Kompleks:

Pendefinisian integral fungsi kompleks serupa dengan pendefinisian integral fungsi real, yaitu dengan mengganti selang pengintegralan oleh suatu lintasan. Misalkan

C adalah lintasan yang menghubungkan z_0 dan z^* dan $f(z)$ terdefinisi di C. Integral fungsi $f(z)$ sepanjang lintasan C didefinisikan sebagai

$$\int_C f(z)\ dz = \lim_{\mu \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k$$

dengan μ menyatakan panjang maksimum dari busur $z_k - z_{k-1}$ dari partisi yang didefinisikan pada C, yaitu $z_O,\ z_1,\ z_2 ...,\ z_n = z^*$, dan ζ_k adalah sebarang bilangan kompleks yang terletak pada busur $z_k - z_{k-1}$.
Jika limit tersebut ada, maka dikatakan $f(z)$ terintegralkan sepanjang lintasan pengintegralan C. Teorema berikut menyatakan syarat yang harus dipenuhi oleh $f(z)$ agar terintegralkan dan bagaimana cara menghitung nilai integralnya.

Teorema Eksistensi Integral Fungsi Kompleks:

Jika $f(z) = u(x, y) + i\ v(x, y)$ kontinu di setiap titik pada kurva mulus $C : x = \psi(t), y(t) = \xi(t), t \in [a, b]$ maka $\int_C f(z)\ dz$ ada dan $\int_C f(z)\ dz = \int_C u\ dx - \int_C v\ dy + i\int_C u\ dy + i\int_C v\ dx = \int_a^b (ux' - vy' + i(vx' + uy'))dt$

Sifat - sifat Integral Kompleks:

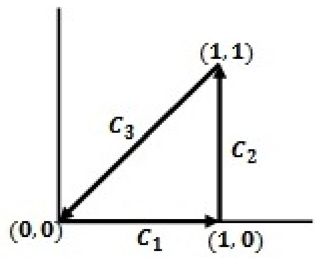
Misalkan k adalah sebarang konstanta kompleks, $C + K$ adalah lintasan yang terdiri dari dua kurva mulus C dan K, dan $f(z)$ maupun $g(z)$ terintegralkan sepanjang kurva C dan K. Maka

1. $\int_C kf(z)\ dz = k\ \int_C f(z)\ dz$
2. $\int_C (f(z) + g(z))\ dz = \int_C f(z)\ dz + \int_C g(z)\ dz$
3. $\int_{C+K} f(z)\ dz = \int_C f(z)\ dz + \int_K f(z)\ dz$
4. $\int_{-C} f(z)\ dz = -\int_C f(z)\ dz$
5. Jika $f(z)$ terbatas di C, yaitu terdapat $M \in \mathbb{R}$ sehingga $|f(z)| \le M, \forall z \in C$ dan jika panjang lintasan C adalah L maka

$$\left| \int_C f(z)dz \right| \le ML.$$

Contoh 1.

Hitung $\int\limits_C f(z)\ dz$ jika $f(z) = \ x$, dan $C = C_1 + C_2 + C_3$, dengan C_1 adalah ruas garis dari $(0,0)$ ke $(1,0)$, C_2 adalah ruas garis dari $(1,0)$ ke $(1,1)$, dan C_3 adalah ruas garis dari $(1,1)$ ke $(0,0)$ seperti diberikan pada Gambar 4.4.



Gambar 4.4: Lintasan C

JAWABAN:

Berdasarkan cara merumuskan lintasan C, soal ini dapat dikerjakan dengan beberapa cara. Di sini diberikan tiga cara yang menghasilkan nilai yang sama.

Cara 1

$C_1:\ x = t,\ y = 0,\ t \in [0,1] \Rightarrow x' = 1, y' = 0$

$C_2:\ x = 1,\ y = t,\ t \in [0,1] \Rightarrow x' = 0, y' = 1$

$C_3:\ x = -t,\ y = -t,\ t \in [-1,0] \Rightarrow x' = -1, y' = -1$

$$\begin{aligned}
\int\limits_C f(z)\ dz &= \int\limits_{C_1} f(z)\ dz + \int\limits_{C_2} f(z)\ dz + \int\limits_{C_3} f(z)\ dz \\
&= \int\limits_0^1 x\ (x' + iy')\ dt + \int\limits_0^1 x\ (x' + iy')\ dt + \int\limits_{-1}^0 x\ (x' + iy')\ dt \\
&= \int_0^1 t\ (1+0)\ dt + \int_0^1 1(0+i)\ dt + \int_{-1}^0 -t\ (-1-i)\ dt \\
&= \int_0^1 (t+i)\ dt + (1+i) \int_{-1}^0 t\ dt \\
&= (\frac{1}{2}\ t^2 + i\ t)\ |_0^1 + ((1+i)\frac{1}{2}\ t^2)\ |_{-1}^0 \\
&= \frac{1}{2} + i\ - (\frac{1+i}{2}) = \frac{i}{2}
\end{aligned}$$

Cara 2

$C_1: \ x = t, \ y = 0, \ t \in [0,1]$

$C_2: \ x = 1, \ y = t, \ t \in [0,1]$

$C_3: \ x = 1 - t, \ y = 1 - t, \ t \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
\int_C f(z)\ dz &= \int_{C_1} f(z)\ dz + \int_{C_2} f(z)\ dz + \int_{C_3} f(z)\ dz \\
&= \int_0^1 x\ (x' + iy')\ dt + \int_0^1 x\ (x' + iy')\ dt + \int_0^1 x\ (x' + iy')dt \\
&= \int_0^1 t\ (1 + 0)\ dt + \int_0^1 1(0 + i)\ dt + \int_0^1 (1 - t)\ (-1 - i)\ dt \\
&= \int_0^1 (t + i)\ dt - \int_0^1 (1 - t)\ (1 + i)\ dt \\
&= (\frac{1}{2}\ t^2 + i\ t)\ |_0^1 - (1 + i) \int_0^1 (1 - t)\ dt \\
&= (\frac{1}{2} + i)\ \ - (1 + i)[t - \frac{1}{2} t^2\ |_0^1\ ] \\
&= (\frac{1}{2} + i) - (1 + i)(1 - \frac{1}{2}) \\
&= (\frac{1}{2} + i) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ i = \frac{i}{2}
\end{aligned}
$$

Cara 3

$C_1: \ y = 0, \ x \in [0,1]$

$C_2: \ x = 1, \ y \in [0,1]$

$-C_3: \ y = x, \ x \in [0,1]$

$$
\begin{aligned}
\int\limits_C f(z)\ dz &= \int\limits_{C_1} f(z)\ dz + \int\limits_{C_2} f(z)\ dz - \int\limits_{-C_3} f(z)\ dz \\
&= \int\limits_0^1 x\ (x' + iy')\ dt + \int\limits_0^1 1\ (x' + iy')\ dt - \int\limits_0^1 x\ (x' + iy')\ dt \\
&= \int\limits_0^1 x\ (dx\ \ + i \cdot 0\ dt) + \int\limits_0^1 1\ (0\ dt + i\ dy) - \int\limits_0^1 x\ (dx\ \ +\ \ idx) \\
&= \int\limits_0^1 x\ dx + i\ \int\limits_0^1 dy - \int\limits_0^1 x\ (1 + i)\ dx \\
&= \frac{1}{2}\ x^2\ \ |_0^1 + i \cdot y\ \ |_0^1 - (1 + i)\ \frac{1}{2}\ x^2\ \ |_0^1
\end{aligned}
$$

$$= (\frac{1}{2} + i) - (\frac{1+i}{2}) = \frac{i}{2}$$

Contoh Soal 2:

Jika C adalah lingkaran berpusat di z_0 berjari-jari r yang berorientasi positif. Hitunglah $\int\limits_C \frac{dz}{z-z_0}$

JAWAB:

Cara 1

Parametrisasi : Misalkan $z_0 = a+ib$ maka $x = r\cos t + a, y = r\sin t + b, t \in [0, 2\pi]$.

Jadi

$$\begin{aligned}
\int \frac{dz}{z-z_0} &= \int_0^{2\pi} \frac{(x' + iy')dt}{(r\cos t + a + (r\sin t + b)i - (a+ib)} \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{(-r\sin t + ir\cos t)dt}{(r\cos t + ir\sin t)} \\
&= \int_0^{2\pi} i\frac{(ir\ sin\ t +\ r\ cos\ t)dt}{r\ cos\ t + i\ r\ sin\ t} \\
&= \int_0^{2\pi} i\ dti\ t\ |_0^{2\pi} = 2\pi i.
\end{aligned}$$

Cara 2 Lintasan C dapat dinyatakan pula sebagai $C : z = z_0 + r\ e^{it}, t \in [0, 2\pi]$ sehingga $z - z_0 = r\ e^{it}$ dan $dz = i\ re^{it}dt$. Akibatnya

$$\int\limits_C \frac{dz}{z-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{i\ r\ e^{it}}{r\ e^{it}}\ dt = \int_0^{2\pi} i\ dt = i\ t\ |_0^{2\pi} = 2\pi\ i.$$

Jadi, jika C adalah lingkaran berpusat di z_0 berorientasi positif (+), maka $\int\limits_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi\ i$.

Contoh soal 3: Jika C adalah lingkaran berpusat di $z = i$ berorientasi **negatif** maka $\int\limits_C \frac{dz}{z-i} = -2\pi\ i$

4.4 Latihan Soal

1. Gambarlah kurva yang diberikan sebagai persamaan parameter:

(a) $x = t^2 - 1, y = t, -1 \le t \le 1$

(b) $x = 3\cos t, y = 2\sin t, 0 \le t \le \pi$

(c) $z = -i + e^{it}, -\pi \le t \le \pi$

(d) $x = e^{-t}, y = t + 1, t \in [0, 1]$

(e) $z = -1 + i + 2e^{-it}, \frac{-\pi}{2} \le t \le \pi$

2. Gambarlah Lintasan $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ dengan
$C_1 : x = -\sin t, y = \cos t, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
$C_2 : x = t, y = -t - 1, t \in [-1, 0]$
$C_3 : x = 2t + 2, y = t, t \in [-1, 0]$
$C_4 : z = 1 + e^{it}, t \in [0, \pi]$

3. Tentukan persamaan parametrik untuk lintasan berikut.

(a) ruas garis dari $z_1 = 1 + i$ ke $z = -3 - i$

(b) lingkaran berjari-jari 2 berpusat di $1 + i$ berorientasi positif

(c) hiperbola $y^2 - x^2 = 4$ dari 2 ke $2 + 2\sqrt{2}i$

(d) seperempat keliling lingkaran satuan di kuadran 3 dari $-i$ ke -1

4. Jika C adalah lintasan yang terdiri dari ruas garis dari $(0, 0)$ ke $(1, 1)$ dan ruas garis dari $(1, 1)$ ke $(1, 0)$, perlihatkan bahwa $\int_C |z|^2 \, dz = \frac{2}{3}$

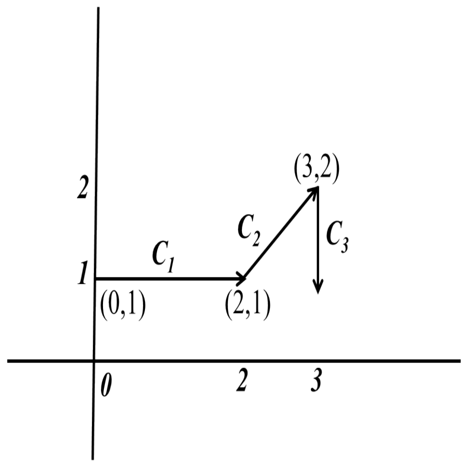
5. Jika $C : x = t^2, y = \frac{1}{t}, 1 \le t \le 3$, hitunglah $\int_C (x^2 + y^2) \, dz$

6. Jika $C = C_1 + C_2 + C_3$ seperti diperlihatkan pada Gambar 4.5, hitunglah $\int_C \bar{z} dz$

7. Hitunglah $\int_C e^z dz$ sepanjang lintasan $y = 2x$ dari $(-1, -2)$ sampai dengan $(1, 2)$

8. Integralkan fungsi $f(z) = (\bar{z})^2$ sepanjang lintasan $y = x^2$ dari $(0, 0)$ ke $(1, 1)$

9. Hitunglah integral fungsi $f(z) = \frac{2z-3}{z}$ dari $z_1 = -2$ ke $z_2 = 2$ melalui tiga lintasan berikut.



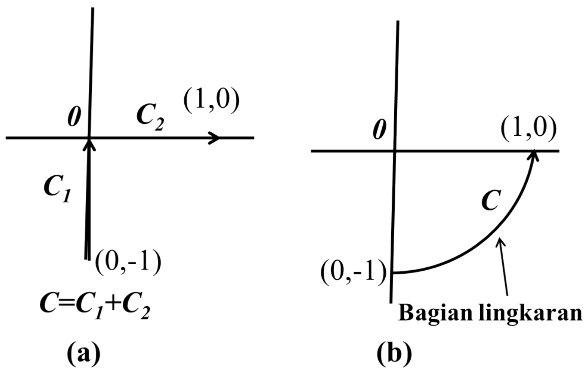
Gambar 4.5: Lintasan $C = C_1 + C_2 + C_3$

C berupa ruas-ruas garis dari $(-2, 0)$ ke $(-2, -1)$ ke $(2, -1)$ ke $(2, 0)$

C berupa setengah bagian bawah suatu lingkaran

C berupa setengah bagian atas suatu lingkaran

10. Hitunglah $\int\limits_C z dz$ melalui dua lintasan pada Gambar 4.6



Gambar 4.6: Lintasan C

11. Hitunglah integral fungsi $f(z) = i \sin z$ melalui garis lurus dari $-i$ sampai i

Bab 5

Teori Integrasi Cauchy

5.1 Teorema Integral Cauchy

Pada sub bab ini dibicarakan pengintegralan dari fungsi yang analitik dan sifat-sifatnya, yang didasari oleh teorema integrasi Cauchy. Sifat penting yang disajikan dalam sub bab ini adalah kebebasan perhitungan integral terhadap lintasan dan teorema dasar pengintegralan seperti yang berlaku pada pengintegralan fungsi real.

Teorema Integral Cauchy:

Misalkan D adalah daerah terhubung sederhana di bidang kompleks dan C adalah lintasan tertutup yang terletak seluruhnya di D. Jika $f(z)$ analitik di D maka $\int\limits_C f(z)dz = 0$.

Bukti:

Misalkan $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ dan $f(z)$ analitik pada D. Jadi $f'(z)$ ada untuk setiap $z \in D$ dan $f'(z) = u_x(x,y) + iv_x(x,y) = v_y(x,y) - iu_y(x,y)$. Menurut teorema Green

$$\int\limits_C (udx - vdy) + i\int\limits_C (vdx + udy) = \int\!\!\int\limits_{Int(C)} (-v_x - u_y)dxdy + i\int\!\!\int\limits_{Int(C)} (u_x - v_y)dxdy.$$

Karena $f(z)$ analitik di D maka $f(z)$ analitik di $Int(C)$ sehingga u dan v memenuhi persamaan Cauchy Riemann pada $Int(C)$. Akibatnya integral lipat dua di ruas kanan bernilai nol, sedangkan ruas kiri adalah rumus untuk $\int\limits_C f(z)dz$ sehingga $\int\limits_C f(z)dz = 0$. $\square$

Teorema Kebebasan Lintasan

Misalkan $D \subseteq \mathbb{C}$ adalah daerah terhubung sederhana, z_1 dan z_2 adalah dua titik di D. Jika $f(z)$ analitik di D maka $\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ dapat dihitung sebagai $\int\limits_C f(z)dz$, dengan C adalah sebarang lintasan di D yang menghubungkan z_1 dan z_2.

Teorema Dasar Pengintegralan Kompleks

Misalkan $D \subseteq \mathbb{C}$ adalah daerah terhubung sederhana, z_1 dan z_2 adalah dua titik di D. Jika $f(z)$ analitik di D dan $\Phi(z)$ adalah fungsi primitif (anti turunan) dari $f(z)$ maka

$$\frac{d}{d\zeta}\int\limits_{z_1}^{\zeta} f(z)dz = f(\zeta), \forall \zeta \in D$$

dan

$$\int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1).$$

5.2 Teorema Annulus

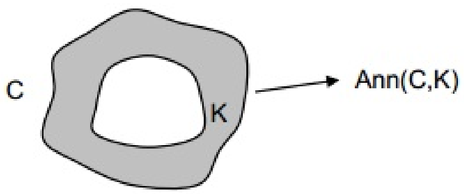
Pada sub bab ini dibicarakan pengintegralan dari fungsi yang analitik pada suatu lintasan yang interiornya memuat titik singularitas dari fungsi tersebut. Pengintegralan dilakukan dengan menggunakan teorema annulus tunggal maupun ganda. Untuk itu perlu dipahami terlebih dahulu definisi annulus

Definisi Annulus:

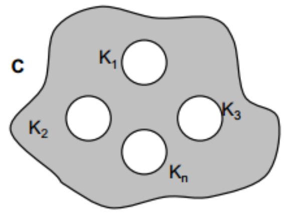
1. Misalkan C dan K dua lintasan tertutup sederhana dengan $Int(K) \subseteq Int(C)$. Annulus yang ditentukan oleh C dan K dinotasikan dengan $Ann(C, K) = Int(C) \cap Ext(K)$ adalah himpunan semua titik yang terletak di antara C dan K. Dalam hal ini $Ann(C, K)$ disebut annulus tunggal.

2. Diberikan $C, K_1, K_2, ...K_n$ adalah $(n+1)$ lintasan tertutup sederhana dengan $Int(K_i) \subseteq Int(C), \forall i = 1, 2, 3, ..., n$ dan $K_i \subset Ext(K_j), \forall i \neq j$. Annulus yang ditentukan oleh $C, K_1, K_2, ..., K_n$, dinotasikan dengan $Ann(C, K_1, K_2, ...K_n)$ adalah himpunan semua titik yang terletak di dalam C dan di luar $K_1, K_2, ..., K_n$. Dengan perkataan lain, $Ann(C, K_1, K_2, ...K_n) = Int(C) \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} Ext(K_i) \right)$. Dalam hal ini $Ann(C, K_1, K_2, ...K_n)$ disebut annulus ganda (multiple annulus).

Pada Gambar 5.2 diilustrasikan annulus tunggal dan annulus ganda.



Gambar 5.1: Annulus tunggal



Annulus Ganda

Teorema Annulus Tunggal

Jika C dan K dua lintasan tertutup sederhana dan $f(z)$ analitik pada annulus tertutup $C \cup K \cup Ann(C, K)$, maka

$$\oint_C f(z)dz = \oint_K f(z)dz$$

asalkan C dan K berorientasi sama.

Bukti

Perhatikan Gambar 5.2. Misalkan lintasan C dan K berturut-turut dinyatakan sebagai $C = C_1 + C_2$ dan $K = K_1 + K_2$. Perhatikan dua lintasan tertutup sederhana $C_1 + r_1 - K_1 - r_2$ dan $C_2 + r_2 - K_2 - r_1$. Menurut Teorema Cauchy

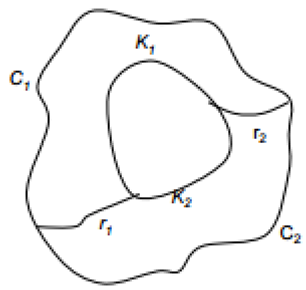
$$\int_{c_1+r_1-K_1-r_2} f(z)dz + \int_{c_2+r_2-K_2-r_1} f(z)dz = 0.$$

Karena r_1 dan r_2 dijelajahi dalam kedua arah, maka dari integrasi di atas tidak memberikan arti apa apa, sehingga

$$\int_{c_1-K_1} -f(z)dz + \int_{c_2-K_2} f(z)dz = 0$$

$$\int_{c_1+c_2} f(z)dz - \int_{K_1-K_2} f(z)dz = 0$$

$$\int_C f(z)dz = \int_K f(z)dz = 0. \quad \square$$



Gambar 5.2: Teorema Annulus Tunggal

Teorema Annulus Ganda

Jika $f(z)$ analitik pada annulus ganda tertutup $C \bigcup_{i=1}^{n} K_i \bigcup Ann(C, K_1, K_2, ...K_n)$, maka

$$\oint_C f(z)dz = \oint_{K_1} f(z)dz + \oint_{K_2} f(z)dz + \ldots + \oint_{K_n} f(z)dz$$

asalkan $C, K_1, K_2, ...K_n$ berorientasi sama.

5.3 Rumus Integrasi Cauchy dan Teorema Morera

Pada yang diberikan di sub bab 4.3 kita telah mempelajari bahwa $\int_C \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi\ i$, jika C adalah lingkaran berpusat di z_0 berorientasi positif (+). Rumus integrasi

Cauchy memberikan sifat yang lebih umum, yaitu $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ diperumum menjadi $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$ dan lintasan C tidak harus berupa lingkaran berpusat di z_0.

Rumus Integrasi Cauchy:

Jika C adalah lintasan tertutup sederhana berorientasi positif, $g(z)$ analitik di C dan di $Int(C)$, dan $z_0 \in Int(C)$ maka:

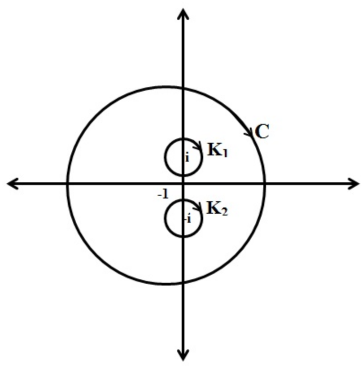
$$\int\limits_C \frac{g(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i g(z_0),$$

atau

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{g(z)}{z-z_0} dz.$$

Contoh: Jika $C : |z+1| = 6$ lintasan berorientasi negatif, hitunglah $\int\limits_C \frac{2iz^3}{z^2+1} dz$

Jawab: Soal ini dapat diselesaikan dengan menggunakan dua cara. Cara pertama tidak menggunakan rumus integrasi Cauchy, sedangkan cara ke dua menggunakan rumus integrasi Cauchy. Kedua cara tersebut memanfaatkan teorema annulus ganda sebab $f(z)$ tidak analitik di $z = i$ dan $z = -i$ seperti diilustrasikan pada Gambar 5.3. Jika dibentuk annulus ganda $Ann(C, K_1, K_2)$, dengan $K_1 : |z-i| < \frac{1}{2}$ dan $K_2 : |z+i| < \frac{1}{2}$ keduanya berorientasi negatif, maka $f(z)$ analitik di annulus tersebut.



Gambar 5.3: Lintasan C Dilengkapi Annulus Berganda

Cara 1:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_C \frac{2iz^3}{z^2+1}dz &= 2i\int\limits_C \frac{z^3+z-z}{z^2+1}dz \\
&= 2i\int\limits_C z\frac{z^2+1-1}{z^2+1}dz \\
&= 2i\int\limits_C z\left(1-\frac{1}{z^2+1}\right)dz \\
&= 2i\int\limits_C (z-\frac{z}{(z-i)(z+i)})dz \\
&= 2i\left(\int\limits_C zdz - \int\limits_C (\frac{\frac{1}{2}}{(z-i)}+\frac{\frac{1}{2}}{(z+i)})dz\right) \\
&= 2i\left(0-\left(\int\limits_{K_1}(\frac{\frac{1}{2}}{(z-i)}+\frac{\frac{1}{2}}{(z+i)}\right)dz+\int\limits_{K_2}\left(\frac{\frac{1}{2}}{(z-i)}+\frac{\frac{1}{2}}{(z+i)})dz\right)\right) \\
&= 2i\left(0-\left((-\frac{1}{2}2\pi i+0)+(0-\frac{1}{2}2\pi i)\right)\right) = -4\pi
\end{aligned}
$$

Cara 2:

$$
\begin{aligned}
\int\limits_C \frac{2iz^3}{z^2+1}dz &= 2i\int\limits_C \frac{z^3}{z^2+1}dz \\
&= 2i\int\limits_C \frac{z^3}{(z+i)(z-i)}dz \\
&= 2i\left(\int\limits_{K_1} \frac{z^3}{(z+i)(z-i)}dz+\int\limits_{K_2} \frac{z^3}{(z+i)(z-i)}dz\right) \\
&= 2i\left(\int\limits_{K_1} \frac{\frac{z^3}{z+i}}{z-i}dz+\int\limits_{K_2} \frac{\frac{z^3}{z-i}}{z+i}dz\right) \\
&= 2i\left(-2\pi i\frac{z^3}{z+i}\bigg|_{z=i}+(-2\pi i)\frac{z^3}{z-i}\bigg|_{z=-i}\right) \\
&= 2i\left(-2\pi i\frac{i^3}{i+i}+(-2\pi i)\frac{(-i)^3}{-i-i}\right) \\
&= 2i\left(-2\pi i\frac{i^3}{2i}+(-2\pi i)\frac{(-i)^3}{-2i}\right) \\
&= 2i(\pi i+\pi i) = -4\pi
\end{aligned}
$$

Rumus Integrasi Cauchy yang Diperumum:

Jika C lintasan tertutup sederhana berorientasi (+), $g(z)$ analitik di C dan di $Int(C)$ dan $z_0 \in Int(C)$ maka:

$$g^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

atau

$$\int\limits_C \frac{g(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = 2\pi i \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Contoh: Jika $C : |z+1| = 6$ adalah lintasan berorientasi negatif, hitunglah $\int\limits_C \frac{2iz^3}{(z^2+1)^2} dz$

Jawab:

$$\int\limits_C \frac{2iz^3}{(z^2+1)^2} dz = 2i \int\limits_C \frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} dz$$

Seperti pada soal sebelumnya, soal ini dapat diselesaikan menggunakan teorema annulus berganda dengan $K_1 : |z-i| = 0.5$ dan $K_2 : |z+i| = 0.5$, dimana K_1 dan K_2 berorientasi negatif. Namun di sini digunakan Rumus Integrasi Cauchy yang Diperumum karena pangkat penyebut lebih dari 1, sehingga dalam rumus integrasi Cauchy di sini $n = 1$, $z_0 = -i$, dan $z_0 = i$.

$$\begin{aligned}
2i \int\limits_C \frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} dz &= 2i \left(\int\limits_{K_1} \frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} dz + \int\limits_{K_2} \frac{z^3}{(z-i)^2(z+i)^2} dz \right) \\
&= 2i \left(\int\limits_{K_1} \frac{\frac{z^3}{(z+i)^2}}{(z-i)^2} dz + \int\limits_{K_2} \frac{\frac{z^3}{(z-i)^2}}{(z+i)^2} dz \right) \\
&= 2i \left((-2\pi i) \frac{\frac{3z^2(z+i)^2 - 2z^3(z+i)}{(z+i)^4}}{1!} \Bigg|_{z=i} + (-2\pi i) \frac{\frac{3z^2(z-i)^2 - 2z^3(z-i)}{(z-i)^4}}{1!} \Bigg|_{z=-i} \right) \\
&= 2i \left((-2\pi i) \frac{-3(-4) - (-i)(4i)}{16.1} + (-2\pi i) \frac{-3(-4) - (-i)(-4i)}{16.1} \right) \\
&= 2i \left((-2\pi i) \frac{12-4}{16} - 2\pi i \frac{12+4}{16} \right) \\
&= 2i(-2\pi i) \left(\frac{8}{16} + \frac{16}{16} \right) \\
&= 6\pi
\end{aligned}$$

Teorema berikut ini, yaitu teorema Morera, seolah-olah merupakan kebalikan dari teorema integral Cauchy, namun jika diperhatikan secara seksama hipotesisnya, hal itu tidak benar.

Teorema Morera:

Jika $f(z)$ kontinu pada suatu daerah terhubung sederhana D dan $\int\limits_C f(z)dz = 0$ **untuk setiap** lintasan tertutup sederhana C di D maka $f(z)$ analitik di D.

Teorema Morera digunakan untuk memeriksa keanalitikan $f(z)$ pada daerah terhubung sederhana D dengan menggunakan dua sifat $f(z)$, yaitu kontinu pada D dan nilai integralnya nol untuk sebarang lintasan pengintegralan C yang tertutup sederhana. Tidak mudah untuk memeriksa sifat ke dua karena harus berlaku untuk setiap lintasan C, sehingga teorema ini jarang digunakan. Lebih mudah memeriksa keanalitikan suatu fungsi dengan menggunakan persamaan Cauchy-Riemann.

5.4 Latihan Soal

Hitunglah $\int\limits_C f(z)dz$ jika $f(z)$ dan C diberikan sebagai berikut.

1. $f(z) = z^3 - 1$, $C : |z - 1| = 1$, orientasi positif.

2. $f(z) = z^3 - iz + 3i$, $C : |z + i| = 2$, orientasi negatif

3. $f(z) = \frac{z}{z^2-1}$, $C : |z - \pi| = 1$, orientasi positif.

4. $f(z) = \frac{3}{z} - \frac{2}{z-2i}$, $C : |z - 2i| = 1$, orientasi positif.

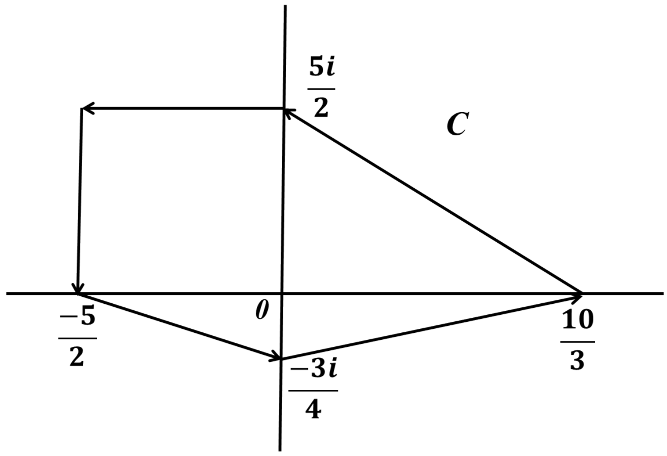
5. $f(z) = \frac{z^2}{z-2}$, C berupa segitiga dengan titik-titik sudut -1, 0, dan $2i$, orientasi negatif

6. $f(z) = e^z - z^{-2}$, C setengah keliling lingkaran bagian bawah dari lingkaran satuan yang berorientasi negatif

7. $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$, $C : |z + 2i| = 1$, orientasi positif.

8. $f(z) = \frac{2}{z^2-1}$, $C : |z-1| = \frac{1}{2}$, orientasi negatif.

9. $f(z) = \frac{1}{z-i}$, C diberikan pada Gambar 5.4



Gambar 5.4: Lintasan C

10. $f(z) = \frac{4}{z+1} + \frac{3}{z+2i}$, $C : |z| = 4$ berorientasi positif

11. $f(z) = \frac{2i}{z^2+1}$, $C : |z-1| = 6$ berorientasi positif

12. $z^2 + 3 + \frac{4}{z}$, $C : |z| = 4$ berorientasi negatif

13. $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$, $C : z = -i + 5e^{it}, -\pi \leq t \leq \pi$

14. $f(z) = \ln\left(\frac{z}{2}\right) + \frac{i}{z-3}$, $C : |z-2| = \frac{3}{2}$

15. $f(z) = \frac{3z^4}{z-6i}$, $C : |z| = 10$, orientasi positif.

16. $f(z) = \frac{1}{(z+i)z^4}$, $C : |z-i| = \frac{3}{2}$, orientasi negatif.

17. $f(z) = \frac{(e^{2z}-z^2}{(z-2)^3}$, $C : |z-1| = 3$, orientasi negatif.

18. $f(z) = \frac{\sin z}{(z-1)^2}$, $C : |z| = 2$, orientasi positif.

19. $f(z) = \frac{z^2}{(z-i)(z+2)^3}$, $C : |z-1| = 2$, orientasi negatif.

20. $f(z) = \frac{z^3-8}{z^2-4z+4}$, $C : |z-1| = 8$, orientasi negatif.

21. $f(z) = \frac{\ln(z-i)}{z+i}$, $C : |z+2i| = 2$, orientasi positif.

Bab 6

Deret Pangkat Kompleks

6.1 Barisan Bilangan Kompleks

Misalkan A adalah himpunan tak kosong. Barisan di A adalah fungsi yang memasangkan setiap bilangan asli dengan unsur-unsur di A. Jika $A = \mathbb{C}$ maka diperoleh barisan bilangan kompleks, yaitu

$$\begin{aligned} f: \quad N &\longrightarrow \mathbb{C} \\ k &\longmapsto f(k) = z_k \end{aligned}$$

Notasi barisan : $\{z_k\}$, $\{z_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, (z_k).

Definisi :

Suatu barisan $\{z_k\}$ dikatakan konvergen jika terdapat suatu $z^* \in \mathbb{C}$ sehingga $\forall\epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}$ sehingga $z_k \in N_\epsilon(z^*), \forall k \geq K$ dimana $N_\epsilon(z^*) = \{z \in C| \, \|z - z^*\| < \epsilon\}$. Dalam definisi ini dikatakan bahwa barisan $\{z_k\}$ konvergen ke z^* dan dinotasikan dengan $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z^*$.

Contoh:

Jika $z_k = \frac{i^k}{k}$ maka $\{z_k\} = i, -\frac{1}{2}, \frac{-i}{3}, \frac{1}{4}, \frac{i}{5}, -\frac{1}{6}, \ldots$

Perhatikan bahwa jika k membesar maka z_k akan mendekati 0 sehingga patut diduga bahwa barisan $\{z_k\}$ konvergen ke $z^* = 0$. Berikut ini diperlihatkan bagaima-

na kita membuktikan dugaan tersebut dengan menggunakan definisi konvergensi barisan $\{z_k\}$. Untuk itu, ambil sebarang $\epsilon > 0$, harus ditentukan $K \in \mathbb{N}$ agar $z_k \in N_\epsilon(z^*) = N_\epsilon(0), \forall k \geq K$, yaitu: $z_k \in \{z \in \mathbb{C} | \, \|z - 0\| = \|z\| < \epsilon\}, \forall k \geq K$.
$z_k \in N_\epsilon(0)$ jika $\|z_k\| = \left\| \frac{i^k}{k} \right\| < \epsilon$
$\left\| \frac{i^k}{k} \right\| < \epsilon \Leftrightarrow \frac{\|i^k\|}{k} = \frac{\|i\|^k}{k} = \frac{1^k}{k} = \frac{1}{k} < \epsilon \Leftrightarrow k > \frac{1}{\epsilon}$. Pilih $K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $K > \frac{1}{\epsilon}$.
Jadi terdapat $z^* = 0 \in \mathbb{C}$ sehingga $\forall \epsilon > 0, \exists K \in \mathbb{N}$ dengan $K > \frac{1}{\epsilon}$, sehingga $z_k \in N_\epsilon(z^*)$, $\forall k \geq K$. $\square$

Teorema:

Misalkan $\{z_k\}$ barisan bilangan kompleks dengan $z_k = x_k + iy_k$. $\{z_k\}$ konvergen $\Leftrightarrow \{x_k\}$ dan $\{y_k\}$ konvergen.

Contoh:

$z_k = (ki)^3 = k^3 i^3 = -k^3 i$. Berarti $x_k = 0$ dan $y_k = -k^3$.
Jelas bahwa $\{x_k\}$ konvergen ke 0 dan $\{y_k\}$ divergen sehingga $\{z_k\}$ divergen.

Teorema:

Jika barisan $\{z_k\}$ konvergen maka barisan $\{z_k\}$ terbatas, yaitu $\exists M \in \mathbb{R}$ sehingga $|z_k| \leq M, \forall k \in \mathbb{N}$.

Teorema Konvergensi Cauchy:

$\{z_k\}$ konvergen jika $\forall \ \epsilon > 0 \ \exists \ K \in \mathbb{N}$ sehingga $\|z_m - z_n\| < \epsilon$, $\forall \ m, n \geq K$.

6.2 Deret Bilangan Kompleks

Jika $\{z_k\}$ barisan bilangan kompleks, pandang barisan baru yang dibentuk dari $\{z_k\}$ yaitu $\{S_n\} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} z_k\right\}$. Deret bilangan kompleks adalah :

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} z_k = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$$

Jika $\lim_{n\to\infty} S_n$ ada dan berhingga maka dikatakan bahwa deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergen.

Contoh :

1. $\{z_k\}$=$\{\frac{3i}{2^k}\}$

$$\begin{aligned}
S_1 &= z_1 = \frac{3i}{2} \\
S_2 &= z_1 + z_2 = \frac{3i}{2} + \frac{3i}{4} = \frac{9i}{4} \\
S_3 &= z_1 + z_2 + z_3 = \frac{3i}{2} + \frac{3i}{4} + \frac{3i}{8} = \frac{21i}{8} \\
&\vdots \\
S_n &= \frac{3i}{2} + \frac{3i}{4} + \frac{3i}{8} + \cdots + \frac{3i}{2^n} \\
&= 3i\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = 3i\left(\frac{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}^n\right)}{\frac{1}{2}}\right) = 3i\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)
\end{aligned}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 3i(1-0) = 3i$

Jadi, deret $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3i}{2^k}$ konvergen ke-$z = 3i$, notasi: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{3i}{2^k} = 3i$.

2. $z_k = i^k$

$$\begin{aligned}
S_1 &= 1 \\
S_2 &= i - 1 \\
S_3 &= i - 1 - i = -1 \\
S_4 &= i - 1 - i + 1 = 0 \\
S_5 &= i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_6 &= i-1 \\ S_7 &= i-1-i=-1 \\ S_8 &= i-1-i+1=0 \end{aligned}$$

$\{S_n\} = \{i, i-1, -1, 0, i, i-1, -1, 0, i, \cdots\}$. Jelas bahwa barisan S_n divergen, sehingga deret $\sum_{k=1}^{\infty} i^k$ divergen.

Teorema:

Misalkan $z_k = x_k + iy_k$. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergen jika dan hanya jika $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ dan $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ konvergen.

Teorema:

Jika $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergen maka $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$

Definisi :

Deret $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ disebut:

1. Konvergen mutlak jika $\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\|$ konvergen
2. Konvergen bersyarat jika $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergen tetapi $\sum_{k=1}^{\infty} \|z_k\|$ tidak konvergen

Teorema:

Jika $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergen mutlak maka $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ konvergen.

Contoh:

Periksalah konvergensi deret $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + i\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$. Di sini

$\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ konvergen sebab merupakan deret geometri dengan ratio $\frac{1}{2}$.

dan $\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

Perhatikan bahwa $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = \lim\limits_{k\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln 1 = 0$ sehingga kekonvergenan $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ belum dapat disimpulkan. Dengan demikian kekonvergenan $\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ harus diperiksa dengan cara lain, yaitu dengan menggunakan definisi deret. Dari barisan $\{y_k\} = \left\{\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}$ kita bangun barisan $\{S_n\} = \left\{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right\}$ sebagai berikut.

$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum\limits_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k]$

$S_1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$

$S_2 = z_1 + z_2 = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 = \ln 3$

$\vdots$

$S_n = \ln(n+1)$

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$

Jadi, $\{S_n\}$ divergen sehingga $\sum\limits_{k=1}^{\infty} y_k$ divergen. Akibatnya, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} + i\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)\right)$ divergen.

6.3 Deret Pangkat Kompleks (Complex Power Series)

Bentuk umum Deret Pangkat Kompleks berpusat di $z = c$ adalah

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k, c \in \tag{6.1}$$

Perhatikan bahwa pada persamaan (6.1) kita akan memperoleh deret bilangan kompleks jika z diganti oleh suatu bilangan kompleks, sehingga untuk z yang berbeda akan diperoleh deret yang berbeda dengan sifat kekonvergenan yang berbeda pula. Oleh karena itu muncul pertanyaan berikut. Untuk nilai z berapakah deret (6.1) konvergen?

Jelas bahwa, jika $z = c$ maka diperoleh deret yang konvergen karena $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k 0 = 0$. Jadi, jika $A = \left\{z \in \mathbb{C} | \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k \text{ konvergen}\right\}$ maka jelas bahwa $c \in A$. Selain $z = c$, ada lagikah anggota A?

Contoh:

1. Pandang deret pangkat $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}(z-0)^k$. Di sini, $c = 0$ dan $a_k = \frac{1}{k^2}$

Jika $z = i$ maka diperoleh deret $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{i}{k^2}$. Apakah $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{i}{k^2}$ konvergen?
Jika diperiksa dengan menggunakan uji rasio, maka
$\lim_{k\to\infty} \frac{||a_{k+1}||}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{||i^{k+1}||}{(k+1)^2} \frac{k^2}{||i^k||} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2+2k+1} = 1$ sehingga uji gagal
Jika diperiksa dengan uji konvergensi mutlak maka diperoleh
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} ||\frac{i^k}{k^2}|| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ yang konvergen, karena merupakan deret p dengan $p = 2$ atau deret super harmonik. Karena $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k^2}$ konvergen mutlak maka $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{i^k}{k^2}$ konvergen. Jadi $z = i \in A$.

Secara umum, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$ konvergen jika:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} \frac{\left\|a_{k+1}(z-c)^{k+1}\right\|}{\left\|a_k(z-c)^k\right\|} &< 1 \\
\Leftrightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{\left\|a_{k+1}\right\|}{\left\|a_k\right\|} \|z-c\| &< 1 \\
\Leftrightarrow \|z-c\| \lim_{k\to\infty} \frac{\left\|a_{k+1}\right\|}{\left\|a_k\right\|} &< 1 \\
\Leftrightarrow \|z-c\| &< \lim_{k\to\infty} \frac{\|a_k\|}{\|a_{k+1}\|} = R.
\end{aligned}$$

Jadi, $A = \{z \in \mathbb{C} | \ |z-c| < R\}$, dengan

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{\|a_k\|}{\|a_k + 1\|}$$

disebut **Radius Konvergensi**, sedangkan $A \subseteq \mathbb{C}$ disebut daerah atau lingkaran konvergensi deret pangkat $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$. Perhatikan bahwa jika $R = 0$ maka deret pangkat $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$ konvergen hanya jika $z = c$, sebaliknya, jika $R = \infty$ maka $A = \mathbb{C}$ sehingga deret pangkat $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$ konvergen $\forall z \in \mathbb{C}$.

Pada soal tersebut,
$R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_k+1|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = 1$ sehingga $A = \{z \in \mathbb{C} | \ |z-0| < 1\} = \{z \in \mathbb{C} | \ |z| < 1\}$

Lalu bagaimana jika $\|z\| = 1$?

Jika $\|z\| = 1$ maka $\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{z^k}{k^2} \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ konvergen, sehingga $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ konvergen mutlak $\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ konvergen.

Jadi daerah konvergensi deret pangkat $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k^2}$ adalah $A = \{z \in \mathbf{C} | \, |z| \leq 1\}$ yang berupa lingkaran berpusat di $z = 0$ berjari-jari 1. Salah satu anggota A adalah $z = i$ seperti telah diperlihatkan sebelumnya.

2. Tentukan daerah konvergensi deret pangkat $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k}$

   Jawab :

   $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k}(z-0)^k$ sehingga $a_k = \frac{1}{k}$ dan $c = 0$

$$R = \lim_{k\to\infty} \frac{\|a_k\|}{\|a_k + 1\|} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\frac{k+1}{1} = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = 1$$

   Jadi daerah konvergensinya adalah $A = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1\}$.

3. Tentukan daerah konvergensi deret pangkat $\sum_{k=0}^{\infty} k!(z+i)^k$

   Jawab: Di sini $a_k = k!$ dan $c = -i$.

   $R = \sum_{k\to\infty} \frac{\|a_k\|}{\|a_k+1\|} = \frac{k!}{(k+1)!} = \frac{1}{k+1} = 0$

   Berarti $\sum_{k=0}^{\infty} k!(z+i)^k$ tidak konvergen dimana - mana kecuali di pusatnya, yaitu di $z = -i$

4. Tentukan daerah konvergensi deret pangkat $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(2k)!}$

   Jawab: Dalam soal ini $a = \frac{1}{(2k)!}$ dan $c = 0$

   $R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_k+1|} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2(k+1))!}{(2k)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)!}{(2k)!} = \lim_{k\to\infty} \frac{(2k+2)(2k+1)(2k)!}{(2k)!} = \lim_{k\to\infty} 4k^2 + 6k + 2 = \infty.$

   Jadi $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < \infty\}$ sehingga deret pangkat $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(2k)!}$ konvergen di seluruh bidang kompleks.

5. Tentukan daerah konvergensi deret pangkat $\sum_{k=0}^{\infty} e^k(z+2)^k$

   Jawab: Di sini $a_k = e^k$ dan $c = -2$

   $R = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_k+1|} = \lim_{k\to\infty} \frac{e^k}{e^{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{e} = \frac{1}{e}.$

   Jadi deret $\sum_{k=0}^{\infty} e^k(z+2)^k$ konvergen di $A = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| < \frac{1}{e}\right\}$. Untuk

$|z+2| = \frac{1}{e}$ maka $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|e^k(z+2)^k\right| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \left|e^k(e)^{-k}\right| = \sum\limits_{k=0}^{\infty} 1$ divergen. Tidak dapat disimpulkan apakah $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^k(z+2)^k$ konvergen. Jadi daerah konvergensi deret pangkat $\sum\limits_{k=0}^{\infty} e^k(z+2)^k$ adalah $A = \left\{z \in \mathbb{C} \mid |z+2| < \frac{1}{e}\right\}$.

6.4 Deret Pangkat Kompleks sebagai Fungsi Analitik

Pada sub bab ini kita memandang deret pangkat kompleks sebagai fungsi analitik di daerah konvergensinya sehingga deret tersebut analitik dan terintegralkan di daerah konvergensinya dan kita dapat mendiferensialkan maupun mengintegralkannya suku demi suku deret. Sifat-sifat tersebut disajikan dalam teorema berikut.

Teorema

Jika deret pangkat $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergen pada lingkaran C dengan radius konvergensi $R \geq 0$, maka:

1. deret $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergen ke suatu fungsi $f(z)$ yang analitik di setiap $z \in Int(C)$

2. deret tersebut dapat diintegralkan suku demi suku sepanjang sebarang lintasan K yang termuat di $Int(C)$, yaitu

$$\int_K f(z)dz = \int_K \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_K a_n z^n dz\right)$$

3. deret tersebut dapat didiferensialkan suku demi suku yaitu:

$$f'(z) = \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dz}(a_n z^n) = \sum_{n=1}^{\infty} naz^{n-1}$$

6.5 Fungsi Analitik sebagai Deret Pangkat Kompleks

Dalam sub bab ini kita mempelajari bagaimana suatu fungsi analitik dapat dinyatakan sebagai deret pangkat kompleks yang konvergen pada daerah konvergensinya. Seperti pada fungsi real, di sini digunakan pula deret Taylor untuk menyatakan fungsi analitik sebagai deret pangkat kompleks.

Teorema Taylor

Jika fungsi $f(z)$ analitik di suatu titik c di bidang kompleks, maka terdapat suatu deret pangkat

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-c)^n,$$

yang koefisiennya diberikan sebagai

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

dan konvergen ke $f(z)$, $\forall z$ di sekitar $z = c$ di mana $f(z)$ analitik, yaitu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n.$$

Deret pangkat pada teorema tersebut dinamakan *Deret Taylor* dari f di c. Jika $c = 0$ maka deret Taylor disebut deret *Mac Laurin*. Pada contoh-contoh berikut akan diperlihatkan bahwa radius konvergensi deret Taylor dari f di c adalah jarak antara titik c dengan titik singular dari f yang terdekat.

Contoh:

1. Misalkan $f(z) = \frac{1}{1-z}$, akan ditentukan deret Mac Laurin untuk $f(z)$. Mudah diperiksa bahwa turunan ke n dari $f(z)$ adalah

   $$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{(1-z)^{n+1}} \text{dan } f^{(n)}(0) = n!,$$

   sehingga $a_n = 1$ dan deret Mac Laurin dari $f(z)$ adalah

   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Jadi

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Perhatikan bahwa titik singularitas dari $f(z)$ adalah $z_0 = 1$, pusat deret adalah $c = 0$, dan $a_{(n+1)} = a_n = 1$, sehingga radius konvergensi deret pangkat tersebut adalah $R = 1$. Terlihat bahwa $R = |z_0 - c|$.

2. Jika $f(z) = \frac{1}{1+z}$ maka deret Mac Laurin untuk $f(z)$ dapat ditentukan dengan menggunakan deret Mac Laurin untuk $f(z) = \frac{1}{1-z}$ yang telah diperoleh sebelumnya dengan menggantikan peran z dengan $-z$, yaitu:

$$f(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-z)^n.$$

Jadi

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

Perhatikan bahwa titik singularitas dari $f(z)$ adalah $z_0 = -1$, pusat deret adalah $c = 0$, dan $a_{(n+1)} = -a_n$, sehingga radius konvergensi deret pangkat tersebut adalah $R = 1$. Terlihat bahwa $R = |z_0 - c|$.

3. Jika $f(z) = e^z$ maka jelas bahwa

$$f^{(n)}(z) = e^z \text{ dan } f^{(n)}(0) = 1,$$

sehingga

$$a_n = \frac{1}{n!}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Jadi deret Mac Laurin untuk $f(z)$ adalah

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Perhatikan bahwa radius konvergensi deret pangkat tersebut adalah $R = \infty$ dan $f(z)$ analitik di seluruh bidang kompleks sehingga tidak memiliki titik singularitas. Jadi jarak antara pusat deret $c = 0$ dan titik singularitas dianggap tak berhingga.

4. Dengan menggunakan deret Mac Laurin untuk e^z dapat ditentukan deret Mac Laurin untuk e^{z+1}, yaitu

$$e^{z+1} = ee^z = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}z^n.$$

5. Dengan menggunakan deret Mac Laurin untuk e^z dapat pula ditentukan deret Taylor untuk e^z berpusat di $c = 1$, yaitu

$$e^z = ee^{z-1} = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{e}{n!}(z-1)^n.$$

6. Mudah diperlihatkan bahwa deret Mac Laurin untuk $f(z) = \sin(z)$ adalah

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\ ,$$

sebab

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1},\ \text{untuk } n \text{ ganjil, dan } f^{(n)}(0) = 0,\ \text{untuk } n \text{ genap.}$$

Dapat pula diperiksa bahwa, seperti pada fungsi e^z, radius konvergensi deret pangkat untuk $\sin z$ adalah $R = \infty$ dan $\sin z$ juga analitik di seluruh bidang kompleks sehingga tidak memiliki titik singularitas.

7. Dengan menggunakan deret Mac Laurin untuk $f(z) = \frac{1}{1+z}$ yang telah diperoleh sebelumnya, dapat ditentukan deret Taylor untuk $f(z) = \frac{1}{1+z}$ di $c = i$, yaitu dengan melakukan sedikit manipulasi pada $f(z)$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+z} &= \frac{1}{(1+i)+(z-i)}\\ &= \frac{1}{(1+i)\left(1+\frac{z-i}{1+i}\right)} = \frac{1}{1+i}\frac{1}{1+\frac{z-i}{1+i}}\\ &= \frac{1}{1+i}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{z-i}{1+i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(1+i)^{n+1}}.\end{aligned}$$

Jadi

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(z-i)^n}{(1+i)^{n+1}}.$$

Perhatikan bahwa titik singularitas dari $f(z)$ adalah $z_0 = -1$, pusat deret adalah $c = i$, dan $a_n = \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}}$, sehingga radius konvergensi deret pangkat tersebut adalah

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = |1+i| = \sqrt{2}.$$

Terlihat bahwa $R = |c - z_0| = |i - (-1)|$. Menentukan deret Taylor dengan menggunakan deret Taylor yang sudah diketahui disebut *Prinsip Substitusi.*

8. Dengan menggunakan prinsip substitusi dapat ditentukan deret Mac Laurin untuk $f(z) = \frac{1}{2+4z}$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2+4z} &= \frac{1}{2(1+2z)}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{1+2z}\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2z)^n\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2)^n(z)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2)^{n-1}(z)^n.\end{aligned}$$

Mudah diperlihatkan bahwa $R = \frac{1}{2}$, yang sama dengan jarak antara titik singularitas $z_0 = -\frac{1}{2}$ dengan pusat deret $c = 0$.

9. Dengan menggunakan prinsip substitusi dapat ditentukan deret Taylor untuk $f(z) = \frac{1}{3-z}$ di $c = 2i$ sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3-z} &= \frac{1}{(3-2i)-(z-2i)}\\ &= \frac{1}{(3-2i)\left(1-\frac{z-2i}{3-2i}\right)}\\ &= \frac{1}{3-2i}\frac{1}{1-\frac{z-2i}{3-2i}}\\ &= \frac{1}{3-2i}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-2i}{3-2i}\right)^n\\ &= \frac{1}{3-2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2i)^n}{(3-2i)^n}\end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^n}{(3-2i)^{n+1}}.$$

Mudah diperlihatkan bahwa $R = |3 - 2i|| = \sqrt{13}$, yang sama dengan jarak antara titik singularitas $z_0 = 3$ dengan pusat deret $c = 2i$.

Selain menggunakan prinsip substitusi, deret Taylor suatu fungsi dapat pula ditentukan dengan menggunakan deret Taylor fungsi lain yang sudah diketahui, dengan melakukan operasi pendiferensialan atau pengintegralan suku demi suku. Namun perlu diperhatikan bahwa menurut teorema pada subbab 6.4, hal ini hanya berlaku di $IntC$, dengan C adalah lingkaran berpusat di c berjari-jari R. Dengan perkataan lain, operasi pengintegralan dan pendiferensialan tersebut hanya berlaku di daerah konvergensi deret Taylor fungsi yang telah diketahui.

Contoh

1. Deret Mac Laurin untuk $f(z) = \cos z$ dapat diperoleh dari deret pangkat untuk $\sin z$, yaitu

$$\begin{aligned}
\cos z &= \frac{d}{dz}\sin z \\
&= \frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{d}{dz}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.
\end{aligned}$$

   Dalam contoh ini, operasi pendiferensialan tersebut berlaku $\forall z \in \mathbb{C}$, sebab radius konvergensi deret Mac Laurin untuk $\sin z$ adalah $R = \infty$.

2. Deret Taylor untuk $f(z) = \frac{1}{z^2}$ berpusat di $c = -i$ dapat diperoleh dari deret Taylor untuk $\frac{1}{z}$ berpusat di $c = -i$. Jadi, mula-mula ditentukan terlebih dahulu deret Taylor untuk $\frac{1}{z}$ berpusat di $c = -i$ dengan menggunakan prinsip substitusi, yaitu

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z} &= \frac{1}{(z+i)-i} \\
&= \frac{1}{i\left(\frac{z+i}{i}-1\right)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{i}\frac{1}{\frac{z+i}{i}-1} \\
&= -i\left(-\frac{1}{1-\frac{z+i}{i}}\right) \\
&= i\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z+i}{i}\right)^n \\
&= i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{i^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{i^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Jadi

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{i^{n-1}}.$$

Perhatikan bahwa radius konvergensi deret pangkat tersebut adalah $R = 1$ sehingga daerah konvergensinya adalah $\mathbf{A} = \{z \in \mathbb{C} |\, |z+i| < 1\}$.

Selanjutnya, karena $f(z) = \frac{1}{z^2} = z^{-2} = -\frac{d}{dz}z^{-1} = -\frac{d}{dz}\frac{1}{z}$, maka

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{z^2} &= -\frac{d}{dz}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+i)^n}{i^{n-1}} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{d}{dz}\frac{(z+i)^n}{i^{n-1}} \\
&= -\left(\frac{d}{dz}\frac{1}{i^{-1}} + \frac{d}{dz}(z+i) + \frac{d}{dz}\frac{(z+i)^2}{i} + \frac{d}{dz}\frac{(z+i)^3}{i^2} + \frac{d}{dz}\frac{(z+i)^4}{i^3} + \ldots\right) \\
&= -\left(0 + 1 + 2\frac{z+i}{i} + 3\frac{(z+i)^2}{i^2} + 4\frac{(z+i)^3}{i^3} + \ldots\right) \\
&= -\sum_{n=1}^{\infty} n\frac{(z+i)^{n-1}}{i^{n-1}},
\end{aligned}
$$

dan pendiferensialan tersebut berlaku di $\mathbf{A}$

6.6 Latihan Soal

1. Periksalah konvergensi deret berikut (apakah konvergen, konvergen mutlak, atau divergen)

   (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2i}{n^3}$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^{2n}}{n}$

(c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} i^n$

(d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{i^{4n}}{(2n)!}$

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+i} - \frac{1}{n+1+i}\right)$

(f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n$

2. Tentukan radius konvergensi dan daerah konvergensi deret pangkat berikut.

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z-1)^n}{2^n}$

(b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+i)^n}{3^n}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n(z-i)^n}{n}$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!(z+\pi i)^n}{2^n}$

(e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} e^n(z+2)^n$

(f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)(z+e)^n}{n^2-2}$

(g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!(z+i)^n}{(n!)^2}$

(h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2n(z+1)^n}{2n-1}$

(i) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n^2(z-\pi)^n$

(j) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n!(z+\pi i)^n}{2^n}$

(k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n(z-2)^n}{n!}$

(l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(z-2i)^n}{2^n}$

(m) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!(z-2+i)^n}{n^n}$

3. Tentukan deret pangkat yang mewakili fungsi berikut dengan pusat c yang diberikan di sampingnya.

(a) $f(z) = \ln z, c = i$

(b) $f(z) = e^{z+1}, c = 1$

(c) $f(z) = \sinh z, c = 0$

(d) $f(z) = \frac{z}{1+z}, c = 1$

(e) $f(z) = \frac{1-z}{1+2z}, c = i$

(f) $f(z) = \frac{z^2}{2+z}, c = -2$

(g) $f(z) = \frac{1}{e^z}, c = -1$

Sumber Bacaan

1. Saff, E.B. & A.D. Snider, 1993, Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering, 2nd edition, Prentice Hall, Inc

2. Saff, E.B. & A.D. Snider, 2003, Fundamentals of complex analysis, with applications, 3ed edition, Prentice Hall. Inc.

3. Churchil, R.V, 2009, Complex Variable & Application 8th edition, Mc Graw-Hill.

4. Poliouras, J.D, 1990. Complex Variable for Scientists and Engineers, 2nd edition, Macmillan Coll Div.

5. Wunsch, A. D., 1994, Complex Variables with Applications, 2nd ed., Addison-Wesley