Deuxième partie

MÉCANIQUE

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

DESCRIPTION DU MOUVEMENT D'UN POINT MATÉRIEL

La mécanique est la partie de la physique qui étudie les mouvement des corps en tenant compte des causes.
Dans notre programme on s'interesse à la mécanique classique (ou Newtonnienne) qui s'interesse aux mouvements des corps ayant une vitesse très faible devant celle de la lumière .
On admet les postulats de la mécanique classique :

Les postulats de la mécanique classique

- Le temps est absolu : c'est à dire que le temps ne dépend pas du référentiel.
- L'existence des référentiels galiléens.
- La trajectoire est déterministe.

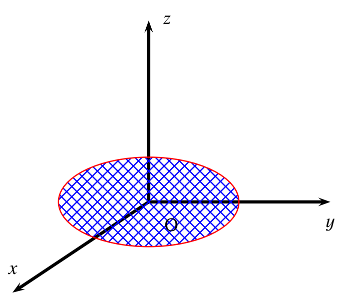
1.1 Repères d'espace et du temps. Référentiel

1.1.1 Repérage dans l'espace

Pour se repérer dans l'espace ,il faut choisir un corps **solide** de référence S auquel on attache des axes de coordonnées Ox, Oy, Oz ; O étant l'origine des axes.
L'ensemble de tous les systèmes d'axes de coordonnées liées à un même solide de référence constitue le repère lié à S .

Remarque

*Dans notre cours de mécanique ,on utilise toujours des **repères orthonormés***



▶ $\| \overrightarrow{e_x} \| = \| \overrightarrow{e_y} \| = \| \overrightarrow{e_z} \| = 1$ ▶ $\overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_y}.\overrightarrow{e_z} = 0$

▶ $\mathcal{R}$ est direct, en effet :

$$\overrightarrow{e_x} \wedge \overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_z} \quad ; \quad \overrightarrow{e_y} \wedge \overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{e_x} \quad ; \quad \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{e_y}$$

1.1.2 Repérage dans le temps

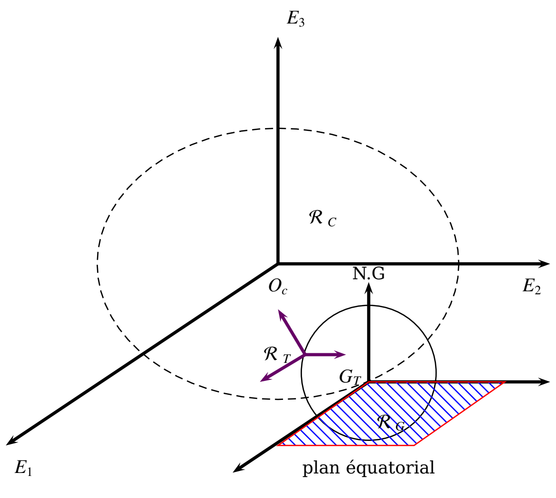
- La mesure du temps suppose une orientation conventionnel du temps : du passé vers le futur , du à l'irréversibilité de l'évolution.
- Le temps se mesure à l'aide d'une horloge, son unité est la seconde depuis 1967.
- Le repère du temps est constitué d'un instant considéré comme origine des dates et une unité des temps (la seconde).

1.1.3 Référentiel

L'ensemble d'un repère spatial lié à un solide de référence S et d'un repère de temps constituent un référentiel $\mathcal{R}$.

Exemples

- *Référentiel de Copérnic $\mathcal{R}_C$:centré au centre du système solaire et les trois axes se dirigent vers des étoiles fixes.*
- *Référentiel Géocentrique $\mathcal{R}_G$:centré au centre de la terre G le plan Gxy forment l'équateur et l'axe Gz se dirige vers nord géographique, en translation par rapport au référentiel de Copérnic.*
- *Référentiel terrestre $\mathcal{R}$:centré au point O quelconque et les trois axes se dirigent vers trois directions .*



1.2 Cinématique du point matériel

La cinématique est la partie de la mécanique qui s'interesse aux mouvements des corps sans tenir compte des causes (Forces).

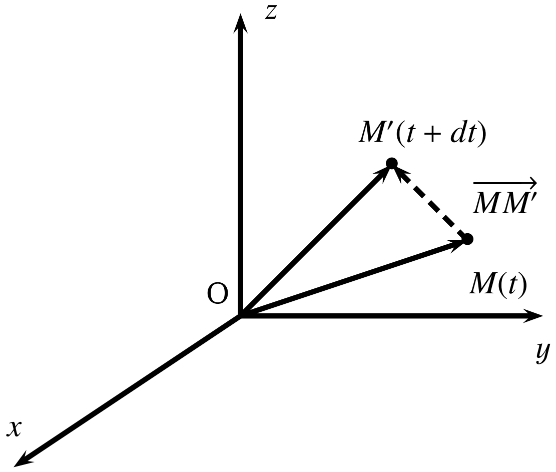
1.2.1 Définition du point matériel

Définition

On appelle point matériel tout corps solide de dimension négligeable devant une distance caractéristique (longueur d'un pendule ; distance terre-soleil,.....)

1.2.2 Vecteurs position,vitesse et accélération

Soit un référentiel $\mathcal{R}\,(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ un référentiel et M un point matériel se déplaçant dans $\mathcal{R}$:



On suppose que le mobile à l'instant t au point M et à l'instant $t+dt$ au point M' On appelle :

Définitions

- *Vecteur position :* $\overrightarrow{OM}$
- *Vecteur déplacement élémentaire :*

$$\boxed{\overrightarrow{dOM} = \lim_{M\to M'} \overrightarrow{MM'} = \lim_{M\to M'} (\overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM})}$$

- *Vitesse du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$:*

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{\overrightarrow{dOM}}{dt}/\mathcal{R}}$$

- *Accélération du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$:*

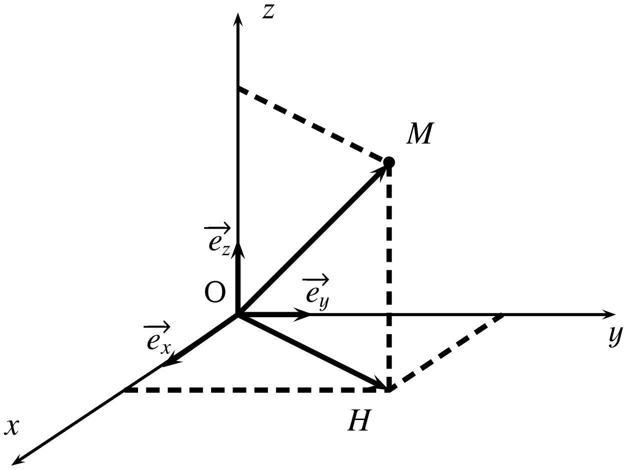
$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{d\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})}{dt}_{/\mathcal{R}} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}_{/\mathcal{R}}}$$

Remarque

Dériver dans $\mathcal{R}$ par rapport au temps c'est à dire considérer les vecteurs de bases de $\mathcal{R}$ comme des vecteurs constants dans le temps.

1.2.3 Exemples de bases de projection

1.2.3.1 Coordonnées cartésiennes



1.2.3.1.1 Vecteur déplacement élémentaire .

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} \Longrightarrow$

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}}$$

(x, y, z) représentent les coordonnées cartésiennes du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$.
Donc le vecteur déplacement élémentaire $\overrightarrow{dOM}$ s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{dOM} = dx\,\overrightarrow{e_x} + dy\,\overrightarrow{e_y} + dz\,\overrightarrow{e_z}}$$

1.2.3.1.2 Vecteur vitesse .

On a $\overrightarrow{dOM} = dx\,\overrightarrow{e_x} + dy\,\overrightarrow{e_y} + dz\,\overrightarrow{e_z} \Longrightarrow \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{dx}{dt}\,\overrightarrow{e_x} + \dfrac{dy}{dt}\,\overrightarrow{e_y} + \dfrac{dz}{dt}\,\overrightarrow{e_z}$

On pose :

- $\dfrac{dx}{dt} = V_x = \dot{x}$: composante de la vitesse sur l'axe des x.
- $\dfrac{dy}{dt} = V_y = \dot{y}$: composante de la vitesse sur l'axe des y.
- $\dfrac{dz}{dt} = V_z = \dot{z}$: composante de la vitesse sur l'axe des z.

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = V_x\,\overrightarrow{e_x} + V_y\,\overrightarrow{e_y} + V_z\,\overrightarrow{e_z} = \dot{x}\,\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{e_z}}$$

1.2.3.1.3 Vecteur accélération .

On a :$\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{x}\,\overrightarrow{e_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{e_y} + \dot{z}\,\overrightarrow{e_z}$ donc

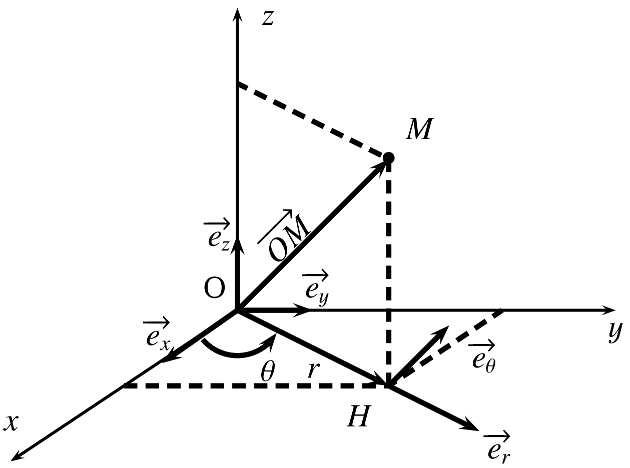
$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = a_x\,\overrightarrow{e_x} + a_y\,\overrightarrow{e_y} + a_z\,\overrightarrow{e_z} = \ddot{x}\,\overrightarrow{e_x} + \ddot{y}\,\overrightarrow{e_y} + \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}}$$

Avec :

- $\dfrac{d^2x}{dt^2} = a_x = \ddot{x}$: composante de l'accélération sur l'axe des x.
- $\dfrac{d^2y}{dt^2} = a_y = \ddot{y}$: composante de l'accélération sur l'axe des y.
- $\dfrac{d^2z}{dt^2} = a_z = \ddot{z}$: composante de l'accélération sur l'axe des z.

1.2.3.2 Coordonnées cylindriques

1.2.3.2.1 Définitions .



Les coordonnées cylindriques sont :

- $r = OH \quad r \geqslant 0$
- $\theta = (\widehat{\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{OH}}) \in [0, 2\pi]$
- $z \in \mathbb{R}$:la côte du point M.

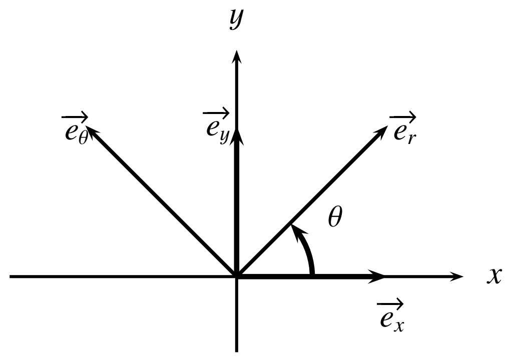
(r, θ, z) : sont les coordonnées cylindriques.
On définit le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ par :

$$\boxed{\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OH}}{r} = \cos\theta\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_y} \in (Oxy)}$$

$\| \overrightarrow{e_r} \| = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{e_r}$ est un vecteur unitaire,on tire donc que $\overrightarrow{OH} = r\,\overrightarrow{e_r}$ et par conséquent :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r} + z\,\overrightarrow{e_z}}$$

On définit le vecteur $\overrightarrow{e_\theta}$ par rotation de $\overrightarrow{e_r}$ de $\dfrac{\pi}{2}$ **dans le sens de** θ c'est à dire :
$\overrightarrow{e_\theta} = \cos(\theta + \pi/2)\,\overrightarrow{e_x} + \sin(\theta + \pi/2)\,\overrightarrow{e_y} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y}$



Dérivons $\overrightarrow{e_r}$ par rapport à θ dans le repère $\mathcal{R}$:
$\dfrac{d\,\overrightarrow{e_r}}{d\theta}\Big|_{/\mathcal{R}}$: c'est à dire dériver $\overrightarrow{e_r}$ en considérant les vecteurs de bases de $\mathcal{R}$ $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ comme des vecteurs constants.
$\dfrac{d\,\overrightarrow{e_r}}{d\theta}\Big|_{/\mathcal{R}} = -\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{e_\theta}$

$$\boxed{\frac{d\,\overrightarrow{e_r}}{d\theta}\Big|_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{e_\theta} \quad ; \quad \frac{d\,\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta}\Big|_{/\mathcal{R}} = -\,\overrightarrow{e_r} \quad ; \quad \frac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt}\Big|_{/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} \quad ; \quad \frac{d\,\overrightarrow{e_\theta}}{dt}\Big|_{/\mathcal{R}} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_r}}$$

Remarque

Dériver un vecteur de module constant dans le repère par rapport à l'angle de rotation θ revient à le faire tourner de $\dfrac{\pi}{2}$ dans le même sens que θ

En effet : soit $\overrightarrow{A}$ un vecteur dont le module est constant c'et à dire $\| \overrightarrow{A} \| = cte \Longrightarrow \overrightarrow{A}.\overrightarrow{A} = cste$.

Dérivons par rapport à θ; on trouve $\overrightarrow{A}.\dfrac{d\overrightarrow{A}}{d\theta} = 0$ c'est à dire $\overrightarrow{A}$ et $\dfrac{d\overrightarrow{A}}{d\theta}$ sont perpendiculaire.

La base$(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ est dite base locale en coordonnées cylindriques .
$(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ est un trièdre direct.

1.2.3.2.2 Vecteur déplacement élémentaire :

On a :$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r} + z\,\overrightarrow{e_z} \Longrightarrow \overrightarrow{dOM}_{/R} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\,\overrightarrow{e_r} + dz\,\overrightarrow{e_z}$
Or $d\,\overrightarrow{e_r} = d\theta\,\overrightarrow{e_\theta}$ donc

$$\boxed{\overrightarrow{dOM} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + dz\,\overrightarrow{e_z} \qquad \text{Formule à connaître}}$$

Remarque

Si $z = cte (= 0)$ le mouvement est plan (r, θ) : dites coordonnées polaires

1.2.3.2.3 Vecteur vitesse .

On a : $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}_{/\mathcal{R}} \Longrightarrow \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{d}{dt}_{/\mathcal{R}}(dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + dz\,\overrightarrow{e_z})$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{e_z}}$$

Remarque

Il faut bien faire la différence entre le repère d'étude et celui de projection.

1.2.3.2.4 Vecteur accélération .

On a $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{d\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})}{dt}_{/\mathcal{R}}$ donc :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{e_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\overrightarrow{e_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}}$$

On pose :

- $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$: accélération radiale.
- $a_t = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$: accélération orthoradiale.

Remarque

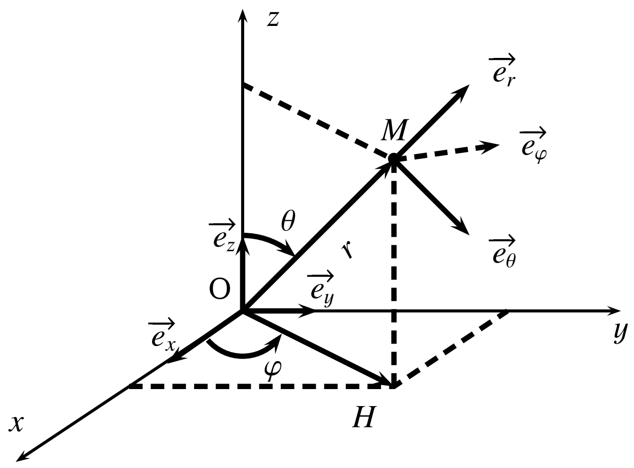
On peut écrire l'accélération orthoradiale a_t comme

$$\boxed{a_t = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt}}$$

On appelle les coordonnées polaires la restriction des coordonnées cylindriques dans le plan (Oxy) nommé le plan polaire (cad $z = cte = 0$)

1.2.3.3 Coordonnées sphériques

1.2.3.3.1 Définitions .



Les coordonnées sphériques sont :

- $r = OM \quad r \geqslant 0$:rayon vecteur
- $\theta = (\widehat{\overrightarrow{e_z}, \overrightarrow{OM}}) \in [0, \pi]$:colatitude
- azimut ;$\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

On définit le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ par :

$$\boxed{\overrightarrow{e_r} = \frac{\overrightarrow{OM}}{r} = \sin\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \sin\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{e_y} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_z}}$$

$\| \overrightarrow{e_r} \| = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{e_r}$ est un vecteur unitaire,on tire donc que

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}}$$

On a : $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ se déduit de $\overrightarrow{e_r}$ par simple rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ dans le plan meridian (OMH).

$$\boxed{\overrightarrow{e_\theta} = \frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial\theta}_{/\mathcal{R}} = \cos\theta\cos\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\sin\varphi\,\overrightarrow{e_y} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_z}}$$

On définit

$$\boxed{\overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_r} \wedge \overrightarrow{e_\theta} = \sin\theta(-\sin\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_y})}$$

On conclut que

$$\boxed{\overrightarrow{e_\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \overrightarrow{e_r}}{\partial\varphi}_{/\mathcal{R}} = -\sin\varphi\,\overrightarrow{e_x} + \cos\varphi\,\overrightarrow{e_y} \in (Oxy)}$$

$(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$:trièdre local en coordonnées sphériques .

1.2.3.3.2 Vecteur déplacement élémentaire .

On a :$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r} \Longrightarrow d\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = d(r\,\overrightarrow{e_r})_{/\mathcal{R}} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\,\overrightarrow{e_r}$
Or $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_r}(\theta,\varphi)$, donc :

$$d\,\overrightarrow{e_r} = \frac{\partial\,\overrightarrow{e_r}}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\,\overrightarrow{e_r}}{\partial\varphi}d\varphi = d\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + \sin\theta\,\overrightarrow{e_\varphi}d\varphi$$

$$\boxed{d\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\,\overrightarrow{e_\varphi} \qquad \text{Formule à connaître}}$$

1.2.3.3.3 Vecteur vitesse .

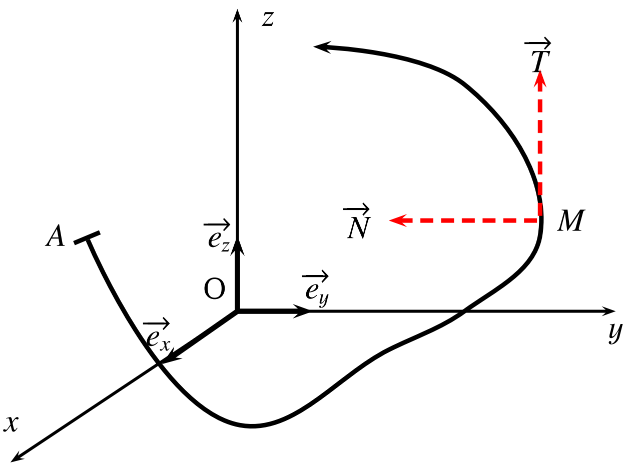
On a :$d\overrightarrow{OM}_{/\mathcal{R}} = dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta\,\overrightarrow{e_\varphi} \Longrightarrow$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\overrightarrow{e_\varphi}}$$

1.2.3.4 Coordonnées curvilignes

1.2.3.4.1 Définitions .

Soit (C) une courbe d'origine A et $M \in (C)$.



On appelle coordonnées curviligne la mesure algébrique de l'arc $\widehat{AM}$;on la note

$$S(M) = \widehat{AM} \in \mathbb{R}$$

Pour un déplacement élémentaire on a :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = ds\overrightarrow{T}(M)}$$

avec :$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$; et $\overrightarrow{T}(M)$:le vecteur unitaire tangent à (C) au point M ;
Puisque :
$\| d\overrightarrow{OM} \| = |ds| \, \| \overrightarrow{T}(M) \| \Longrightarrow \| \overrightarrow{T}(M) \| = 1$

On a : $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \left.\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \dfrac{ds}{dt}\overrightarrow{T}(M)$

$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = v\overrightarrow{T}(M)}$$

ce qui en déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{T}(M) = \frac{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})}{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{ds}}$$

$\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{d\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})}{dt} = \dfrac{d(v\overrightarrow{T}(M))}{dt} \Longrightarrow \overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{dv}{dt}\overrightarrow{T}(M) + v\left.\dfrac{\overrightarrow{T}(M)}{dt}\right|_{/\mathcal{R}}$

Or :$\left.\dfrac{d\overrightarrow{T}(M)}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \left.\dfrac{d\overrightarrow{T}(M)}{ds}\right|_{/\mathcal{R}} \dfrac{ds}{dt}$

Comme :
$v = \dfrac{ds}{dt}$

et : $\left.\dfrac{d\overrightarrow{T}(M)}{ds}\right|_{/\mathcal{R}} = \dfrac{d\overrightarrow{T}}{d\alpha}\dfrac{d\alpha}{ds} = \overrightarrow{N}.\dfrac{1}{\rho_c}$

avec :$\overrightarrow{N}$:vecteur unitaire qui se déduit de $\overrightarrow{T}$ par rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ qui se toujours vers la concavité de la trajectoire si $\rho_c > 0$:rayon de courbure au point M.D'où :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \frac{dv}{dt}\overrightarrow{T}(M) + \frac{v^2}{\rho_c}\overrightarrow{N}}$$

Le plan $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$: plan osculateur .
On pose :$\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{N}$: La binormale .

Définition

$(M, \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \overrightarrow{B})$ *:La base intrinsèque ou base de Frenet.*

On pose :
- $\overrightarrow{a_T} = \left.\dfrac{dv}{dt}\right|_{/\mathcal{R}}\overrightarrow{T}(M)$: accélération tangentielle .
- $\overrightarrow{a_N} = \dfrac{v^2}{\rho_c}\overrightarrow{N}(M)$: accélération normale

Remarques

1-Le repère de Frenet est un repère de projection et non pas un repère d'étude.
2-$\dfrac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \dfrac{\overrightarrow{N}}{\rho_c}$

1.2.3.4.2 Expression du rayon de courbure .

Sachant que : $\overrightarrow{B}(M) = \overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{N}$, le produit vectoriel $\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{a}$ permet d'établir l'expression générale de ρ_c :

$\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{a} = v\overrightarrow{T} \wedge (\frac{dv}{dt}\overrightarrow{T}(M) + \frac{v^2}{\rho_c}\overrightarrow{N}) = \frac{v^3}{\rho_c}\overrightarrow{B}$

$$\boxed{\rho_c = \frac{v^3}{\|\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{a}\|}}$$

Activité

Rayon de courbure du mouvement parabolique.

Le vecteur position d'un point M en coordonnées cartésiennes est :

$$\overrightarrow{OM} = (V_o t)\,\overrightarrow{e_x} + (\frac{1}{2}gt^2)\,\overrightarrow{e_y} + 0\,\overrightarrow{e_z}$$

Déterminer le rayon de courbure au point O(0,0,0).

Correction

On a :

$$\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} V_o t \\ \frac{1}{2}gt^2 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \begin{vmatrix} V_o \\ gt \\ 0 \end{vmatrix} \qquad \overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = \begin{vmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{vmatrix}$$

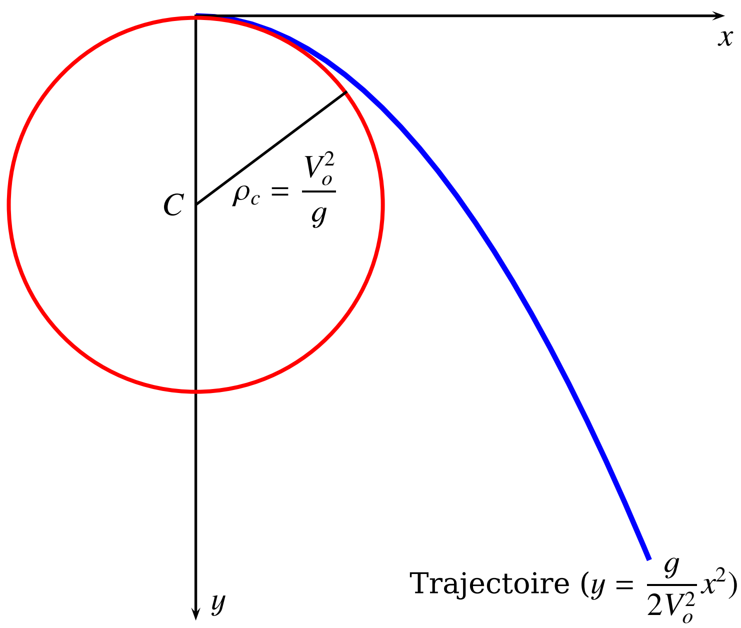
Donc : $\|\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})\| = \sqrt{V_o^2 + (gt)^2}$ et $\|\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{a}\| = V_o g$ donc $\rho_c = \frac{V^3}{\|\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{a}\|}$ ce qui donne :

$$\boxed{\rho_c = \frac{(\sqrt{V_o^2 + (gt)^2})^3}{V_o g}}$$

Au point O on a $t = 0$ donc

$$\boxed{\rho_c(O) = \frac{V_o^2}{g}}$$

Représentation graphique



Activité

***Rayon de courbure du mouvement elliptique*.**

Considérons une ellipse droite , situé dans le plan xOy, d'équations paramétriques :

$x = a\cos\omega t,\ \ y = b\sin\omega t$; *a et b le grand et petit axe et ω la pulsation .*

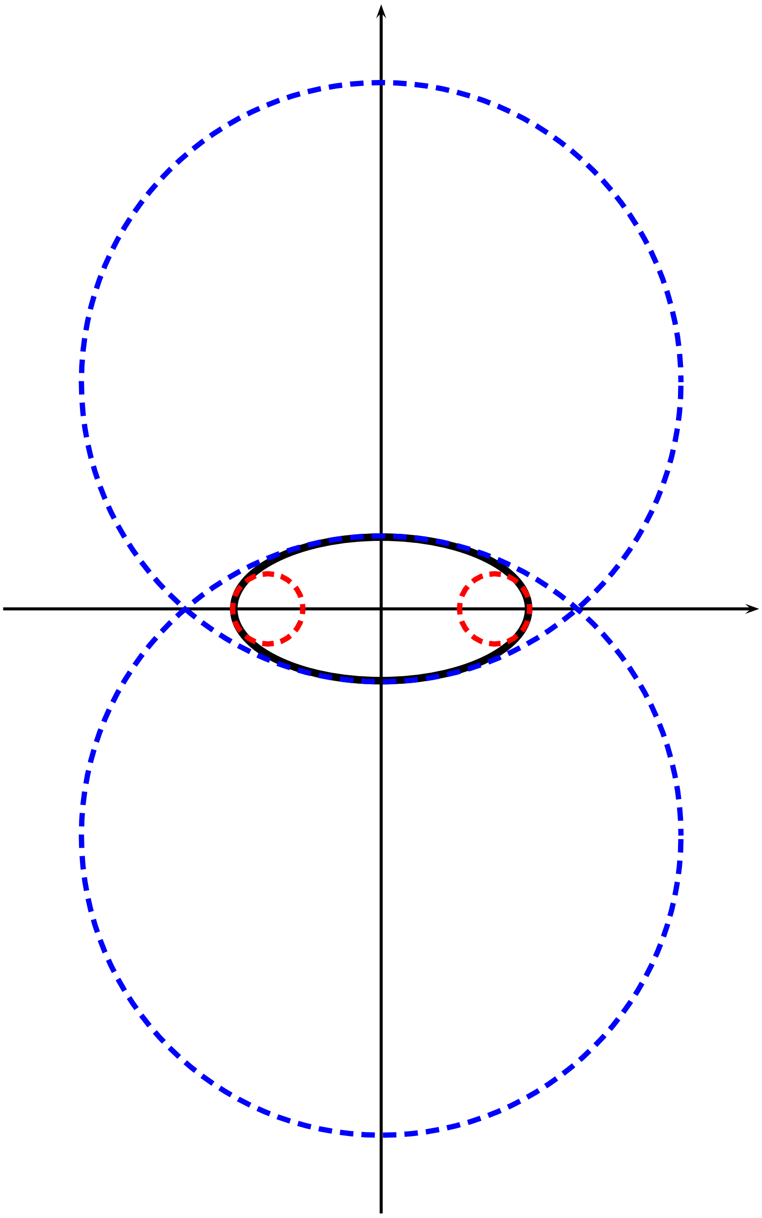
Déterminer l'expression du rayon de courbure aux points remarquables de l'ellipse. Faire une représentation graphique.

Correction

- $\dot{x} = -a\omega\sin\omega t \Longrightarrow \ddot{x} = -a\omega^2\cos\omega t$
- $\dot{y} = b\omega\cos\omega t \Longrightarrow \ddot{y} = -b\omega^2\sin\omega t$

$$\boxed{\rho_C = \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|} = \frac{(a^2\sin^2\omega t + b^2\cos^2\omega t)^{3/2}}{ab}}$$

$R_A = \dfrac{b^2}{a}$ [au point $A(t=0)$], $R_B = \dfrac{a^2}{b}$ [au point $B(t = \dfrac{\pi}{2\omega})$]



1.2.4 Exemples de mouvement

1.2.4.1 Mouvement rectiligne à accélération constante

Un point matériel M se déplace sur un axe ox avec une accélération $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = a\,\overrightarrow{e_x}$ avec $a > 0$.

1- Déterminer le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$ sachant que $V(t=0) = V_o > 0$.

2- Déterminer le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ sachant que $x(t=0) = x_o$

3- Montrer que :$V^2 - V_o^2 = 2a(x - x_o)$(Relation indépendante du temps)

4- Quelle est la condition que doit vérifier $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{V}$ pour que le mouvement soit uniformément accéleré ?retardé ?

Correction

1- Le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = (at + V_o)\,\overrightarrow{e_x}$

2- Le vecteur position $\overrightarrow{OM} = (\frac{1}{2}at^2 + V_ot + x_o)\,\overrightarrow{e_x}$

3- Montrons que :$V^2 - V_o^2 = 2a(x - x_o)$(Relation indépendante du temps)

On a $t = \dfrac{V - V_o}{a} \Longrightarrow x - x_o = \dfrac{1}{2}a(\dfrac{V - V_o}{a})^2 + V_o(\dfrac{V - V_o}{a})$ après simplification on obtient le résultat.

Remarque : Cette relation valable uniquement lorsque le mouvement est rectiligne avec $a = cte$.

4- Le mouvement est uniformément :

- accéléré si $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{a} > 0$
- retardé si $\overrightarrow{V}.\overrightarrow{a} < 0$

1.2.4.2 Mouvement rectiligne sinusoidal

L'équation horaire du mouvement d'un point matériel sur un axe ox s'écrit sous la forme :

$$X(t) = X_o + X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

1- Donner l'interpretation de chaque termes.

2- On pose $x = X - X_o$ que représente x.

3- Si on appelle T la période du mouvement , montrer que $T\omega = 2\pi$.

4- Déterminer les composantes du vecteur vitesse et accélération du point M.

5- Tracer dans le même graphes les courbes représentatives de l'élongation $x(t)$, vitesse $v_x(t)$ et accélération $a_x(t)$ dans le cas ou $\omega > 1$;conclure.

6- Déterminer l'équation entre $x(t)$ et $v_x(t)$ indépendante du temps et la représenter dans le plan (x, v)(une telle courbe s'appelle trajectoire de phase)

Correction

1- L'interpretation de chaque termes.

- $X(t)$: l'élongation
- X_o : L'abscisse de la position d'équilibre
- X_m : L'amplitude (>0)
- ω : pulsation
- $\omega t + \varphi$: La phase
- φ : la phase à l'origine

2- $x = X - X_o$ représente l'élongation du point M repéré à partir de la position d'équilibre

3- T est la période du mouvement donc

$$x = X_m \cos(\omega t + \omega T + \varphi) = X_m \cos(\omega t + \varphi + 2\pi)$$

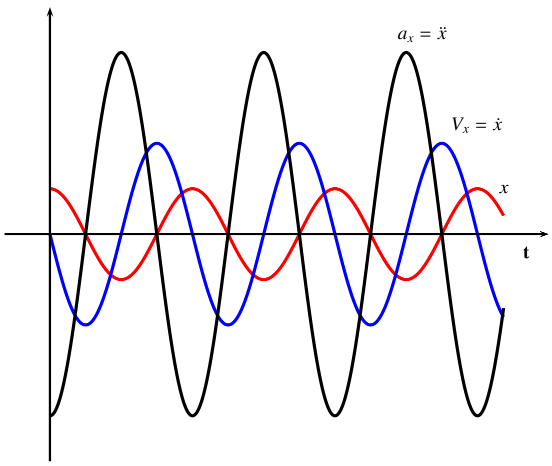
Donc $T\omega = 2\pi$ c'est à dire

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}}$$

4- Les composantes du vecteur vitesse et accélération du point M

- $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$
- $V_x = \dot{x} = -\omega X_m \sin(\omega t + \varphi)$
- $a_x = \ddot{x} = -\omega^2 X_m \cos(\omega t + \varphi)$

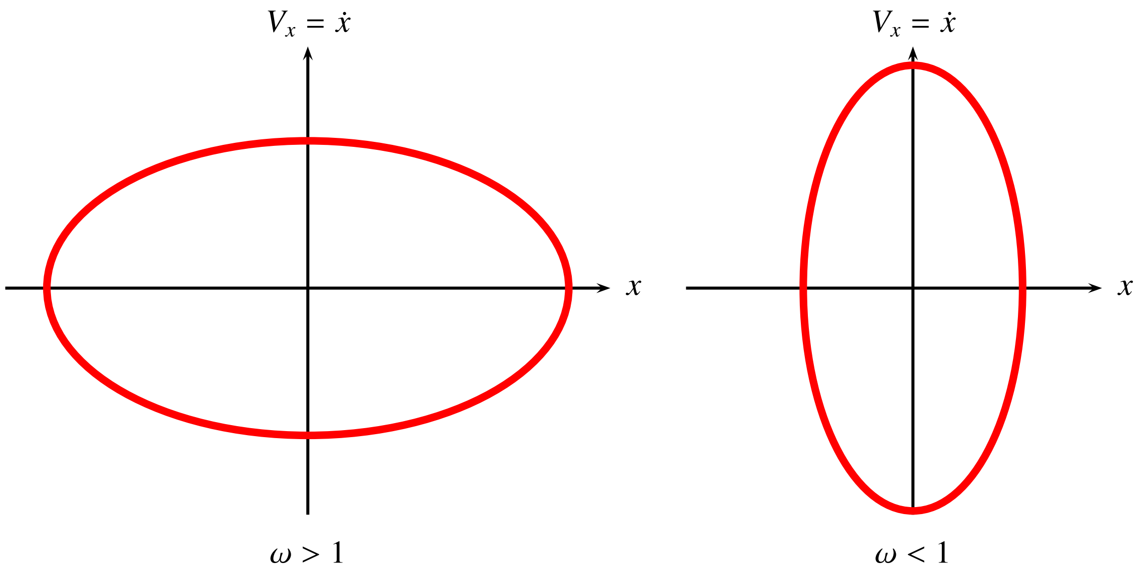
5- Les courbes représentatives de l'élongation $x(t)$, vitesse $v_x(t)$ et accélération $a_x(t)$ dans le cas ou $\omega = 2 > 1$ et $X_m = 1$



6- L'équation entre $x(t)$ et $v_x(t)$ indépendante du temps

$$\boxed{\frac{x^2}{X_m^2} + \frac{\dot{x}^2}{(X_m\omega)^2} = 1}$$

C'est l'équation d'un ellipse.
Représentation dans le plan (x, v) :



1.2.4.3 Mouvement circulaire

Un point matériel se déplace sur une trajectoire circulaire de rayon r et de centre O dans un référentiel $\mathcal{R}\,(O, x, y, z, t)$, le circle est situé dans le plan (Oxy)
On utilise les coordonnées polaires (r, θ) pour décrire le mouvement de M.

1- Rappeler les expressions des vecteurs $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$ et $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R})$ en coordonnées polaires ,puis les simplifier si le rayon est constant $r = R$.

2- On suppose que le mouvement est circulaire uniforme
Le mouvement est circulaire uniforme si la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega_o = cte$.

2.1- Établir l'expression de $\theta(t)$ ainsi l'abscisse curviligne s avec $s(\theta = 0) = 0$

2.2- Déterminer les vecteurs vitesse $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$ et accélération $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R})$.

2.3- Représenter les vecteurs vitesse $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$ et accélération $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R})$ pour $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$ .Conclure.

3- On suppose que le mouvement est circulaire uniformément varié
Le mouvement est uniformément varié si $\ddot{\theta} = \alpha = cte$.

3.1- Déterminer les lois horaires $\dot{\theta}(t)$ et $\theta(t)$

3.2- En déduire la relation indépendante du temps.

3.3- Représenter le vecteurs vitesse $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$ et accélération $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R})$ pour $\theta = 0, \frac{\pi}{2}$.

On prend les constantes d'integrations nulles

Correction

1- L'expression de :

▸ Vecteur position :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \rho\,\overrightarrow{e}_\rho}$$

- Vecteur vitesse :

$$\boxed{\overrightarrow{V} = \dot{\rho}\overrightarrow{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}}$$

- Vecteur accélération :

$$\boxed{\overrightarrow{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\overrightarrow{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\,\overrightarrow{e_\varphi}}$$

- Pour $\rho = R = cte$ alors $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$ ce qui donne :
- Vecteur position :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = R\overrightarrow{e}_\rho}$$

- Vecteur vitesse :

$$\boxed{\overrightarrow{V} = R\dot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}}$$

- Vecteur accélération :

$$\boxed{\overrightarrow{a} = -R\dot{\varphi}^2\overrightarrow{e}_\rho + R\ddot{\varphi}\,\overrightarrow{e_\varphi}}$$

2- Mouvement circulaire uniforme

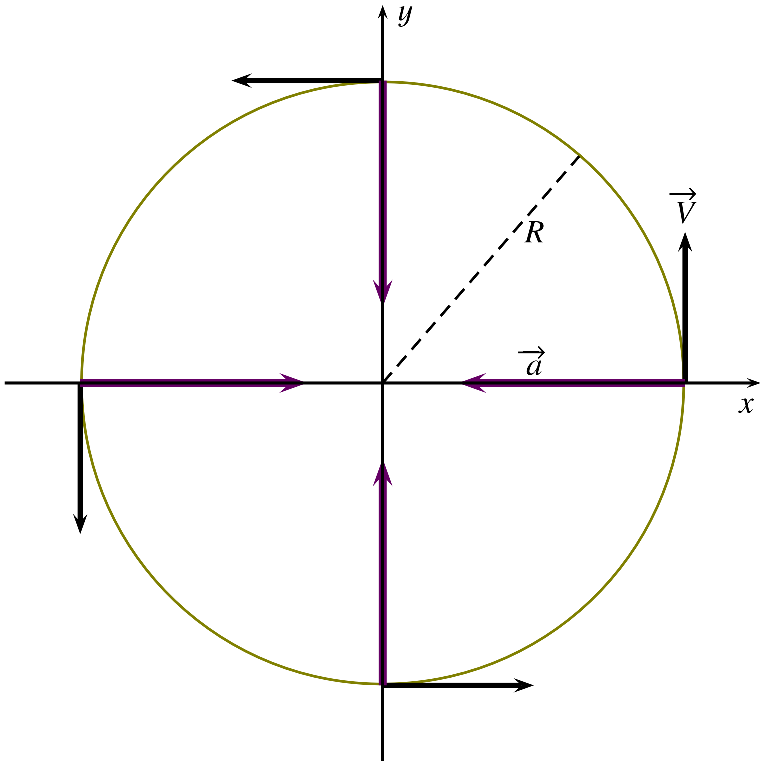
2.1- $\dot{\varphi} = \omega = cte \Longrightarrow \varphi = \omega t + \varphi_o$ et $s = R\varphi = R(\omega t + \varphi_o)$
Comme $s(t = 0) = 0 \Longrightarrow s_o = R\varphi_o = 0$ ce qui donne :

$$\boxed{\varphi = \omega t \qquad et \qquad s = (R\omega)t}$$

2.2- L'expression du vecteur :
- vitesse : $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = R\omega\overrightarrow{e}_\varphi = R\omega\,\overrightarrow{T} \Longrightarrow V = R\omega$
- accélération : $\overrightarrow{a} = -R\omega^2\overrightarrow{e}_\rho = R\omega^2\,\overrightarrow{N}$

2.3-

Représentation graphique



3- Mouvement circulaire uniformément varié

3.1- Les lois horaires de :

- accélération angulaire : $\ddot{\theta} = \alpha = cte$
- vitesse angulaire :$\dot{\theta} = \alpha t + \dot{\theta}_o$
- abscisse angulaire : $\theta = \dfrac{1}{2}\alpha t^2 + \dot{\theta}_o t + \theta_o$
- abscisse curviligne : $s(M) = R\theta \Longrightarrow s(M) = R(\dfrac{1}{2}\alpha t^2 + \dot{\theta}_o t + \theta_o)$

3.2- La relation indépendante du temps :

$$\boxed{\dot{\varphi}^2 - \dot{\varphi}_o^2 = 2\alpha(\varphi - \varphi_o)}$$

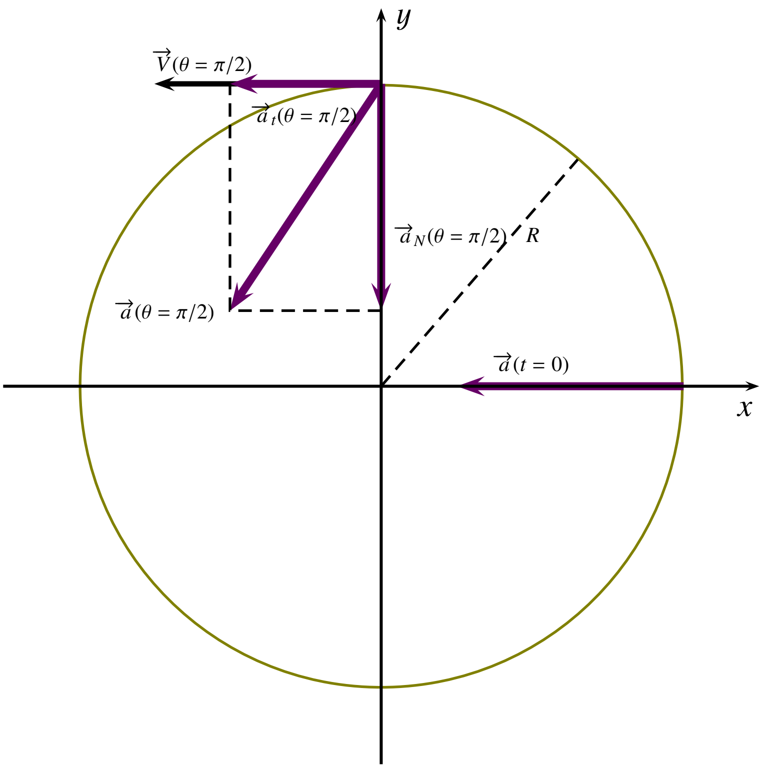
3.3- Conditions initiales nulles, donc :

$$\vec{V} = R\alpha t\,\vec{e_\theta} \qquad ; \qquad \vec{a} = R\alpha\,\vec{e_\theta} - R\alpha^2 t^2\,\vec{e_r}$$

3.4-

Représentation graphique

- Pour $\theta = 0 \Longrightarrow t = 0$ on a : $\vec{V} = \vec{0}$ et $\vec{a} = R\alpha\,\vec{e_\theta}$
- Pour $\theta = \pi/2 \Longrightarrow t = \dfrac{\pi}{\alpha}$ donc : $\vec{V} = R\sqrt{\pi\alpha}\,\vec{e_\theta}$ et $\vec{a} = R\alpha\,\vec{e_\theta} - R\pi\alpha\,\vec{e_r}$



1.2.4.4 Mouvement helicoidal

Un mobile est repéré dans la base cylindrique associée à un référentiel donné $\mathcal{R}$ par : $\rho = R$, $\varphi = \omega t$ et $z = a.t$; où a, ω et R sont des constantes positives. La trajectoire est une hélice enroulée sur un cylindre à base circulaire. Le pas h de l'hélice est, par définition, la distance qui sépare deux positions successives du mobile sur une même génératrice de l'hélice.

1- Faire une représentation graphique de la trajectoire de M dans $\mathcal{R}$.

2- Quelles sont les unités, dans le système international (S.I.), de ω et a ?Quelle relation lie a à h ainsi ω.

3- Déterminer les vecteurs vitesse et accélération en un point quelconque de la trajectoire :

3.1- Dans la base de coordonnées cartésiennes.

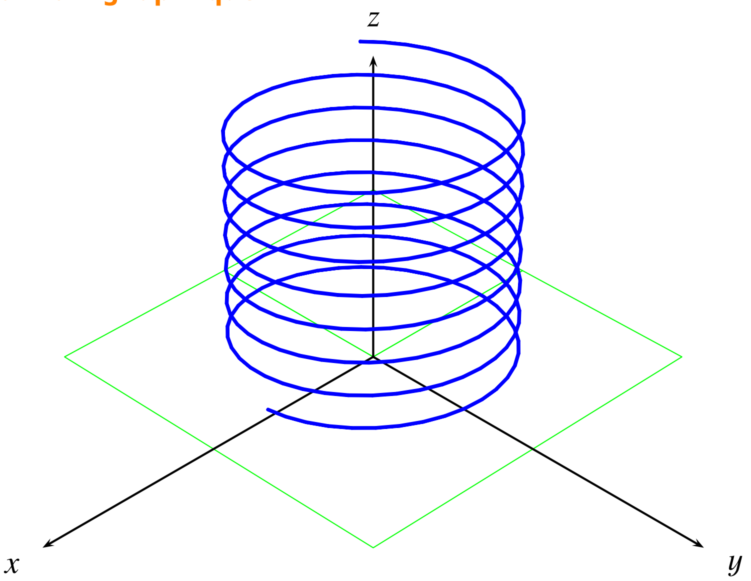
3.2- Dans la base de coordonnées cylindriques.

3.3- Déterminer le rayon de courbure ρ_c en fonction de R, a et ω.

4- Déterminer les vecteurs unitaires de la base de coordonnées curvilignes, puis en déduire le rayon de courbure de la trajectoire dans $\mathcal{R}$; Le comparer avec R.

Correction

1- Représentation graphique:



2- Les unités de :

- ω :rad s^{-1}
- a : m s^{-1}
- On a : $h = z(t+T) - z(t) \Longrightarrow h = aT = \dfrac{2\pi a}{\omega}$

3-

- L'expression de la vitesse :

$$\overrightarrow{V} = R\omega\,\overrightarrow{e_\varphi} + a\,\overrightarrow{e_z} = R\omega(-\sin(\omega t)\,\overrightarrow{e_x} + \cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_y}) + a\,\overrightarrow{e_z} \Longrightarrow V = \sqrt{R^2\omega^2 + a^2}$$

- L'expression de l'accélération :

$$\overrightarrow{\gamma} = -R\omega^2\overrightarrow{e}_\rho = -R\omega^2(\cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_x} + \sin(\omega t)\,\overrightarrow{e_y}) \Longrightarrow \gamma = R\omega^2$$

3.1- Le rayon de courbure :

On a : $\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{e_r} + at\,\overrightarrow{e_z} \Longrightarrow \overrightarrow{V} = R\omega\,\overrightarrow{e_\theta} + a\,\overrightarrow{e_z}$ ainsi $\overrightarrow{\gamma} = -R\omega^2\,\overrightarrow{e_r}$

Donc :

$$V = \sqrt{R^2\omega^2 + a^2} \qquad et \qquad \|\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma}\| = (R^2\omega^2 + a^2)\sqrt{R^2\omega^2 + a^2}$$

Il en résulte que

$$\rho_c = \frac{V^3}{\|\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\gamma}\|} \Longrightarrow \rho_c = R + \frac{a^2}{R\omega^2} > R$$

4- La base de Fresnet :

▶ Le vecteur tangent :

$$\boxed{\overrightarrow{T} = \frac{\overrightarrow{V}}{V} \Longrightarrow \overrightarrow{T} = \frac{R\omega\,\overrightarrow{e_\theta} + a\,\overrightarrow{e_z}}{\sqrt{R^2\omega^2 + a^2}}}$$

▶ Le vecteur normal :

On a : $\overrightarrow{\gamma} = -R\omega^2\,\overrightarrow{e_r} = \frac{dV}{dt}\overrightarrow{T} + \frac{V^2}{\rho_c}\overrightarrow{N}$ ce qui donne :

Comme $V = \sqrt{R^2\omega^2 + a^2} = cte \Longrightarrow \frac{dV}{dt} = 0$, alors

$$-R\omega^2\,\overrightarrow{e_r} = \frac{V^2}{\rho_c}\overrightarrow{N}$$

- La norme donne :

$$\boxed{R\omega^2 = \frac{V^2}{\rho_c} \Longrightarrow \rho_c = R + \frac{a^2}{R\omega^2}}$$

- Conséquence

$$\boxed{\overrightarrow{N} = -\,\overrightarrow{e_r}}$$

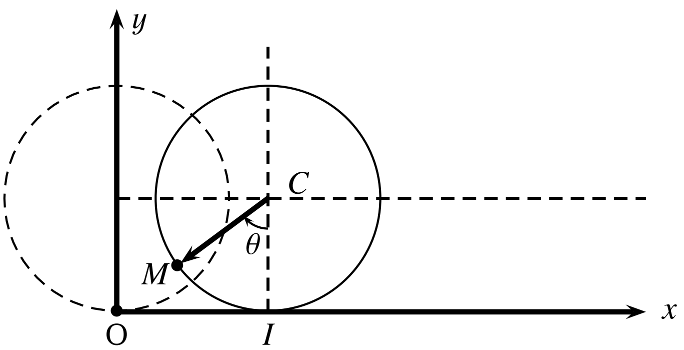
▶ La binormale $\overrightarrow{B}$:

$$\boxed{\overrightarrow{B} = \overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{N} \Longrightarrow \overrightarrow{B} = \frac{-a\,\overrightarrow{e}_\varphi + R\omega\,\overrightarrow{e_z}}{\sqrt{R^2\omega^2 + a^2}}}$$

On vérifie bien que :$||\overrightarrow{B}|| = 1$

1.2.4.5 Mouvement cycloide

Dans un référentiel $\mathcal{R} = (O, x, y, z, t)$ un point M d'un cercle de rayon R se déplace dans le plan (oxy) sans frottement comme l'indique la figure suivante :



On admet que le mouvement se fait avec roulement sans glissement ce qui impose que la mesure de l'arc $\widehat{IM} = R\theta = OI$, et on suppose que le mouvement du centre est uniforme ainsi on pose $\omega = \dot{\theta} = cte$.

1- En utilisant la relation de Châles, Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base des coordonnées cartésiennes en fonction de R, θ.

2- Exprimer dans la base de coordonnées cartésiennes de $\mathcal{R}$ les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$ et celles du vecteur accélération $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R})$ en fonction de R, ω et t.

3- Donner l'allure de la trajectoire de M par rapport à $\mathcal{R}$ (dite cycloide).

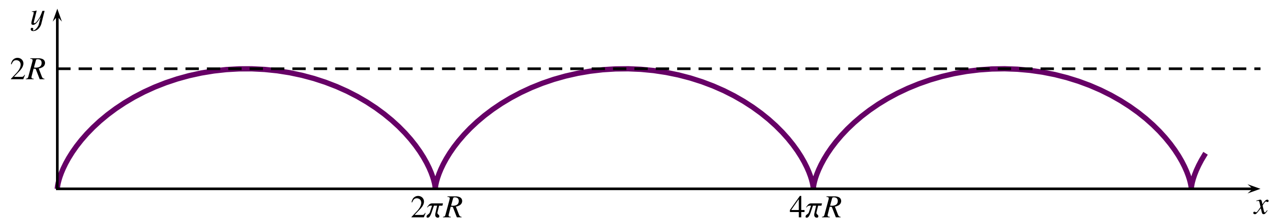
4- Montrer que le rayon de courbure ρ_c de la trajectoire décrite par le point M dans $\mathcal{R}$ s'écrit sous la forme : $\rho_c = 4R\left|\sin(\frac{\omega t}{2})\right|$

Correction

1- Le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CM} \Longrightarrow \overrightarrow{OM} = R(\theta - \sin\theta)\,\overrightarrow{e_x} + R(1-\cos\theta)\,\overrightarrow{e_y}$$

2- la trajectoire du point M :



Trajectoire cycloide

Remarque

On a : $x = R(\omega t - \sin(\omega t))$ *et* $y = R(1-\cos(\omega t))$ *donc*

$$\boxed{(x - R\omega t)^2 + (y-R)^2 = R^2}$$

Une cycloide est un cercle de rayon R et de centre O animé d'un mouvement rectiligne uniforme suivant l'axe Ox

3- L'expression du vecteur :

- vitesse :

$$\boxed{\overrightarrow{V} = R\omega(1-\cos\omega t)\,\overrightarrow{e_x} + R\omega\sin\omega t\,\overrightarrow{e_y}}$$

- accélération :

$$\boxed{\overrightarrow{a} = R\omega^2(\sin(\omega t)\,\overrightarrow{e_x} + \cos(\omega t)\,\overrightarrow{e_y}}$$

4- le rayon de courbure :

On rappelle que : $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$ et $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$.

Puisque : $\overrightarrow{V} = R\omega(1-\cos\omega t)\,\overrightarrow{e_x} + R\omega\sin\omega t\,\overrightarrow{e_y} \Longrightarrow V = 2R\omega\left|\sin\dfrac{\omega t}{2}\right|$

Ainsi : $\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{V} = 2R^2\omega^3\sin^2\dfrac{\omega t}{2}\,\overrightarrow{e_z}$

Il en résulte que :

$$\boxed{\rho_c = 4R\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|}$$

CHAPITRE 2

DYNAMIQUE DU POINT MATÉRIEL DANS UN RÉFÉRENTIEL GALILÉEN

La dynamique a pour objet de prévoir le mouvement d'un corps dans son environnement.

2.1 Quelques forces usuelles

On rappelle que :

- Force gravitationnelle : $\overrightarrow{F} = -\mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$
- Force de Coulomb : $\overrightarrow{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$
- Poids d'un corps : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$
- Tension du ressort : $\overrightarrow{F} = (L - L_o)\overrightarrow{u}_L$
- Poussée d'Archimède : $\overrightarrow{F}_A = \rho g V\overrightarrow{e_z}$
- Force de frottement fluide visqueux :$\overrightarrow{F} = -\lambda\overrightarrow{V}$
- Force de frottement fluide :$\overrightarrow{F} = -\lambda\overrightarrow{V}^2\overrightarrow{u}_V$
- Force de Lorentz :$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B})$

2.2 Lois de Newton

2.2.1 Principe d'inertie

Dite aussi première loi de Newton.

Principe d'inertie

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ si un point matériel isolé ou pseudo-isolé et son mouvement par rapport à ce référentiel est rectiligne uniforme alors le référentiel $\mathcal{R}$ est galiléen.

Remarques

- *Le mouvement rectiligne est uniforme donc le vecteur vitesse est constant :*

$$\overrightarrow{V} = \overrightarrow{cte}$$

mouvement de translation rectiligne uniforme ou équilibre .

- *Le référentiel de* ***Copérnic*** *est un référentiel galiléen si on néglige les actions extérieures autrement dit si le système solaire est supposé isolé.*
- *Les référentiels Géocentrique et terrestre ne sont pas galiléens ;mais on peut les considérer comme galiléens si* ***la durée de l'expérience est très faible par rapport à la période*** de la terre.

2.2.2 La relation fondamentale de la dynamique

dite aussi la $2^{ème}$ loi de **Newton**.

Relation fondamentale de la dynamique

Par rapport à un **référentiel galiléen** $\mathcal{R}$,le mouvement d'un point matériel M de masse m soumis à plusieurs forces dont la résultante ($\Sigma\overrightarrow{F}$) satisfait à la relation :

$$\boxed{\Sigma\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R})}$$

2.2.3 Principe des actions réciproques

Dite aussi $3^{ème}$ loi de Newton.

Principe de l'action et la réaction

Si un point matériel A exerce sur un autre point matériel B une force $\overrightarrow{F}_{A\to B}$ alors le corps B exerce sur A une force $\overrightarrow{F}_{B\to A}$ tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{A\to B} = -\overrightarrow{F}_{B\to A}}$$

2.3 Applications (énoncés voir TD)

2.3.1 Étude d'un projectile avec et sans frottement

Un trièdre orthonormé (Ox, Oy, Oz) est lié au sol terrestre d'axe Oz vertical ascendant. Le champ de pesanteur, supposé uniforme, est noté : $\overrightarrow{g} = -g\,\overrightarrow{e_y}$. A l'origine des temps (t = 0), un projectile supposé ponctuel, de masse $m = 1$kg, est lancé du point O avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V}_o$ située dans le plan xOy, faisant un angle α avec l'horizontale : V_o =10 m/s.

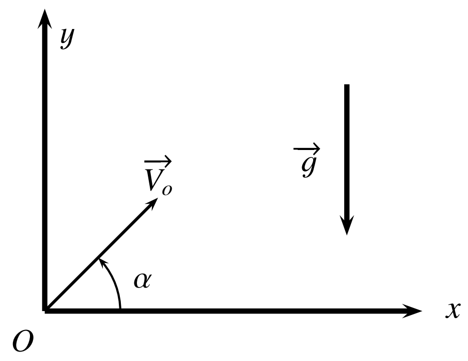
1⊳ En projetant la RFD dans le référentiel terrestre supposé galiléen ,déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

2⊳ Exprimer, en fonction de V_o, g et α le temps nécessaire pour que le projectile atteigne sa plus haute altitude S, et les coordonnées de ce point S.

3⊳ Pour quelle valeur de l'angle α la portée du lancement est-elle maximale ? Calculer cette portée.

4⊳ En supposant le module V_o, de la vitesse initiale, constant, mais α variable ; Donner l'équation de la courbe (dite de sûreté) séparant les points du plan xOy pouvant être atteints par le projectile, de ceux qui ne seront jamais atteints.

5⊳ Le sol fait un angle $\theta_o < \alpha$ avec l'horizontale Ox. Déterminer α pour que la portée soit maximale. Puis calculer la valeur de cette portée pour $\theta_o = 50^o$.



6⊳ Dans cette partie , on suppose que la résistance de l'air est modélisable par une force de type $\overrightarrow{F} = -k\overrightarrow{V}$.

6.1▹ Déterminer les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(M)$.

6.2▹ En déduire celles du vecteur position $\overrightarrow{OM}$

Correction

1⊳ Les composantes du vecteur $\overrightarrow{OM}$

On a :

$$\overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{g} \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} 0 \\ -g \\ 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \overrightarrow{V}(M) \left| \begin{array}{l} V_o \cos\alpha \\ -gt + V_o \sin\alpha \\ 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \overrightarrow{OM} \left| \begin{array}{l} x = V_o \cos\alpha t \\ y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_o \sin\alpha t \\ z = 0 \end{array} \right.$$

On tire L'équation de la trajectoire

$$y = -\frac{g}{2V_o^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha x$$

2▷ Le temps nécessaire pour que le projectile atteigne sa plus haute altitude S, et les coordonnées de ce point S.

- Sachant que au point S la vitesse $v_y = 0$ on tire que

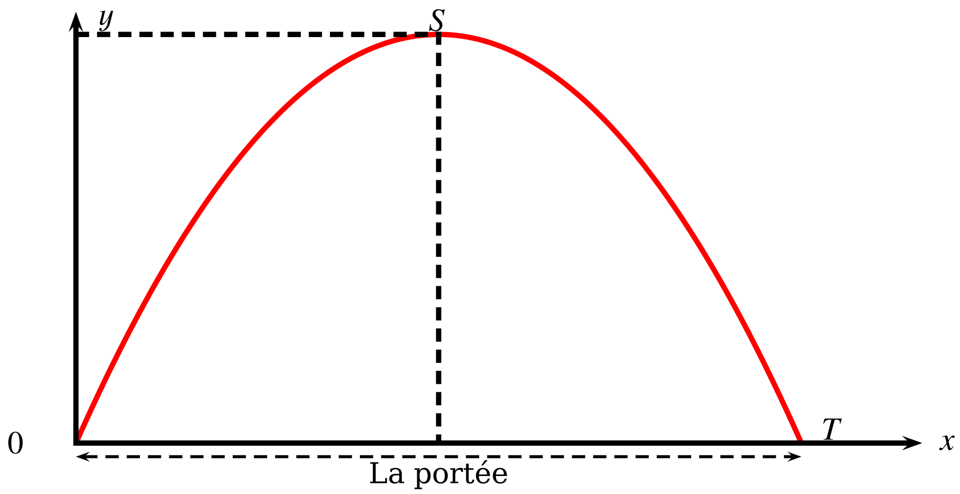
$$\boxed{t_S = \frac{V_o}{g}\sin\alpha}$$

- En utilisant les équations horaires du mouvement on obtient :

$$\boxed{x_S = \frac{V_o^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad et \quad y_S = \frac{V_o^2 \sin^2\alpha}{2g}}$$

3▷ La valeur de l'angle α pour que la portée du lancement est maximale est :
On définit la portée par la distance $p = OT$ avec T le point définit par $y(T) = 0$
$p = 2x_S = \dfrac{V_o^2 \sin 2\alpha}{g}$ est maximale si

$$\boxed{\sin 2\alpha = 1 \Longrightarrow \alpha(p_{max}) = \frac{\pi}{4}}$$



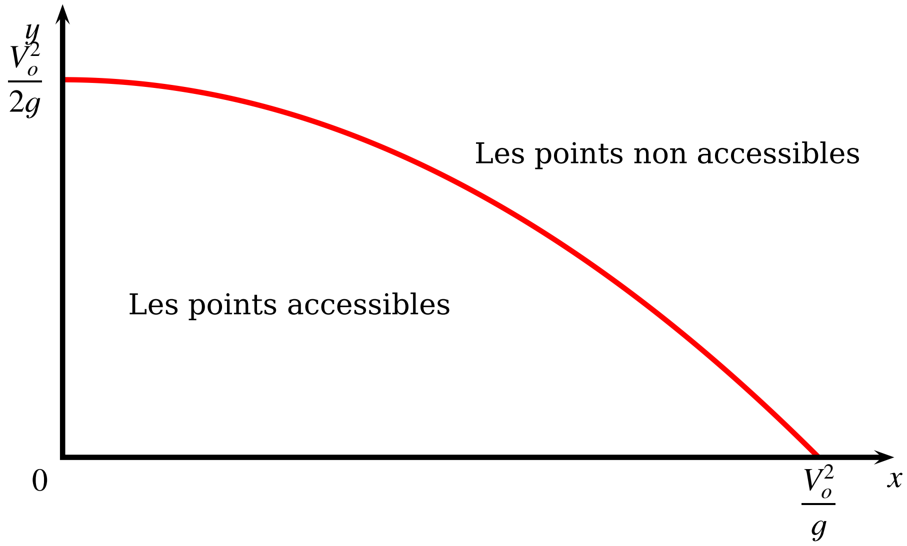
Calcul de la portée portée.$p(\alpha = \dfrac{\pi}{4}) = 10,2\ m$

4▷ L'équation de la courbe :
On a à partir de l'équation de la trajectoire :$y = -\dfrac{g}{2V_o^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha x$ et connaissant que $\cos^2\alpha = \dfrac{1}{1+\tan^2\alpha}$ on obtient que

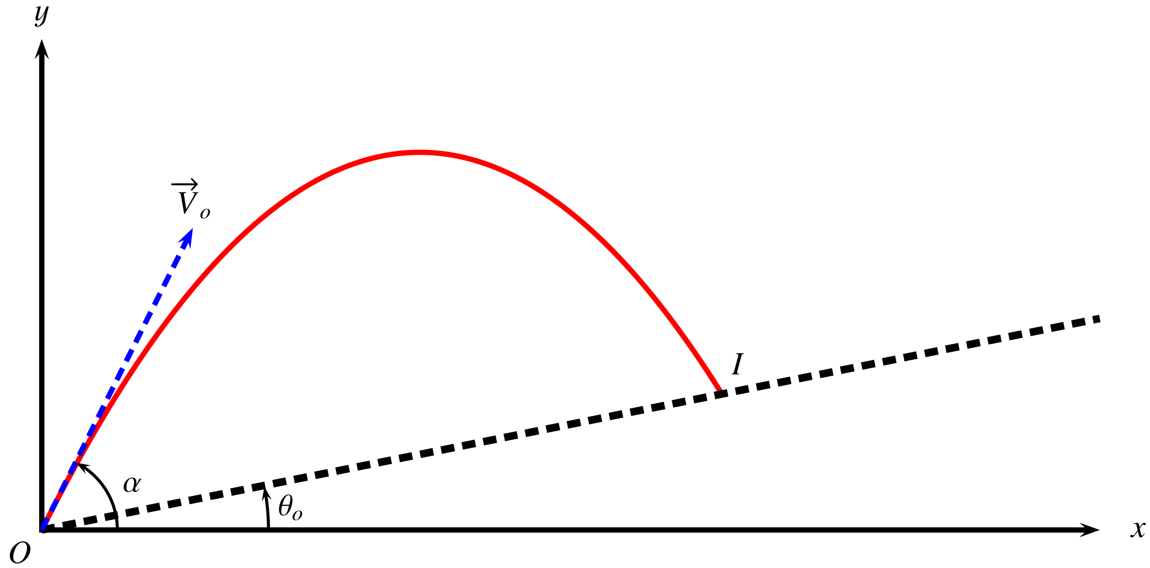
$$\boxed{\frac{gx^2}{2V_o^2}\tan^2\alpha + x\tan\alpha - (y + \frac{gx^2}{2V_o^2}) = 0}$$

C'et une équation du second ordre en $u = \tan\alpha$ possède des solutions réelles si

$$\boxed{\Delta' > 0 \Longrightarrow y < \frac{V_o^2}{2g} - \frac{g}{2V_o^2}x^2}$$



5⊵ Le sol fait un angle $\theta_o < \alpha$ avec l'horizontale Ox. Détermination de α pour que la portée soit maximale.



On a $p = OI$ et on I, $y = x\tan\theta_o = -\dfrac{g}{2V_o^2\cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha x$ donc :

$\tan\alpha - \tan\theta_o = \dfrac{g}{2V_o^2}(1+\tan^2\alpha)x$

Or $p = \dfrac{x}{\cos\theta_o} \Longrightarrow p = \dfrac{2V_o^2\cos^2\alpha}{g\cos\theta_o}(\tan\alpha - \tan\theta_o)$

$$\boxed{p = \frac{2V_o^2}{g\cos\theta_o}\left(\frac{\tan\alpha - \tan\theta_o}{1+\tan^2\alpha}\right) = \frac{2V_o^2}{g\cos\theta_o}\left(\frac{u-u_o}{1+u^2}\right)}$$

avec $u = \tan\alpha$ et $u_o = \tan\theta_o$

Cette portée est maximale si $\dfrac{dp}{d\alpha} = 0$ ou bien $\dfrac{dp}{du} = 0$.

$\dfrac{dp}{du} = 0 \Longrightarrow -\dfrac{u^2 - 2uu_o - 1}{(1+u^2)^2} = 0$ c'est à dire $u^2 - 2uu_o - 1$

$$\boxed{u = \tan\alpha = u_o + \sqrt{1+u_o^2}}$$

A.N

$$\alpha = 70^o \Longrightarrow p_{max} = 8,96\ m$$

La valeur de la portée pour $\theta_o = 50^o$.

$$\alpha = 70^o \Longrightarrow p_{max} = 8,96\ m$$

6⊵ Dans cette partie , on suppose que la résistance de l'air est modélisable par une force de type $\overrightarrow{f} = -k\overrightarrow{V}$

6.1▹ Les composantes du vecteur vitesse $\overrightarrow{V}(M)$
La relation fondamentale de la dynamique donne :

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k\dot{x} = 0 \qquad (A) \\ m\ddot{y} + k\dot{y} + mg = 0 \qquad (B) \end{cases}$$

Par intégration on obtient

$$\boxed{V_x = \dot{x} = V_o \cos\alpha\ e^{-\frac{k}{m}t}}$$

ainsi

$$\boxed{V_y = \dot{y} = -\frac{g}{k} + (V_o \sin\alpha + \frac{g}{k})e^{-\frac{k}{m}t}}$$

Remarque

Lorsque $t \longrightarrow \infty$ les composantes du vecteur vitesse ,tend vers des valeurs limites

$$\boxed{V_{x_{limite}} = V_o \cos\alpha}$$

$$\boxed{V_{y_{limite}} = V_o \sin\alpha}$$

6.2▹ Les composantes du vecteur position $\overrightarrow{OM}$ Par intégration on obtient :

$$\boxed{x(t) = \frac{mV_o \cos\alpha}{k}(1 - e^{-\frac{k}{m}t})}$$

Par un DL au voisinage de $k = 0$ on trouve $x(t) = V_o \cos\alpha t$

$$\boxed{y(t) = -\frac{m}{k^2} + (kV_o \sin\alpha e^{-\frac{k}{m}t} + mge^{-\frac{k}{m}t} + gkt - V_o k \sin\alpha - gm)}$$

2.3.2 Particule soumise à un frottement fluide de type :$f = -k.V^2$

Une particule matérielle est lâchée sans vitesse initiale en un lieu ou règne un champ de pesanteur uniforme. La particule est soumise, en plus de la pesanteur, à une force de frottement de l'air proportionnelle au carrée de sa vitesse, d'intensité $f = kV^2$ ($k > 0$

) et de **sens opposé** au mouvement. Le référentiel d'étude est un référentiel terrestre considéré galiléen. Le mouvement de la particule est repéré sur un axe Oz descendant, d'origine O (position initiale de la particule) et de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$.

1⊳ Écrire l'équation du mouvement de chute. Quelle est la vitesse limite V_∞ atteinte par la particule ?

2⊳ Exprimer la vitesse de la particule à l'instant t, en fonction de t, V_∞ et g.

3⊳ Quelle est l'expression de la distance parcourue à l'instant t en fonction de g ,V_∞ et V

On rappelle que : $\dfrac{2a}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{a-x} + \dfrac{1}{a+x}$

Correction

1⊳

- L'équation du mouvement de chute.

$$\boxed{m\frac{dV}{dt} = mg - kV^2}$$

- La vitesse limite V_∞ atteinte par la particule

$$\boxed{V_\infty = \sqrt{\frac{mg}{k}}}$$

2⊳ L'Expression de la vitesse de la particule à l'instant t, en fonction de t, V_∞ et g.

On a : $\dfrac{m}{k}\dfrac{dV}{dt} = V_\infty^2 - V^2 \Longrightarrow \dfrac{dV}{V_\infty^2 - V^2} = \dfrac{k}{m}dt$

Par décomposition en éléments simples et sachant que $V(0) = 0$ on obtient

$$\boxed{V(t) = V_\infty \frac{e^{\frac{2kV_\infty t}{m}} - 1}{e^{\frac{2kV_\infty t}{m}} + 1} = V_\infty \tanh \frac{2kV_\infty}{m} t}$$

3⊳ L'expression de la distance parcourue à l'instant t en fonction de g ,V_∞ et V

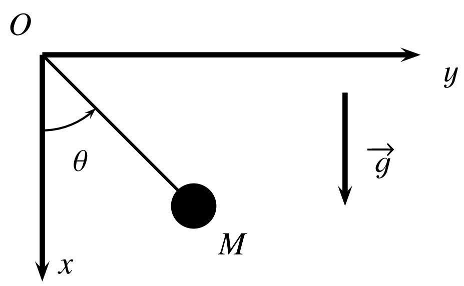
On a : $V = \dfrac{dz}{dt} = V_\infty \tanh \dfrac{2kV_\infty}{m} t$ et sachant que $z(t=0) = 0)$ alors

$$\boxed{z = \frac{m}{2k} \ln\left[\cosh \frac{2kV_\infty t}{m}\right] = \frac{V_\infty^2}{2g} \ln \frac{V_\infty}{V_\infty - V}}$$

2.3.3 Le pendule simple

On considère le mouvement d'un pendule simple qui oscille dans un milieu où les forces de frottement sont inexistantes.Le pendule est constitué d'un objet ponctuel M de masse m , accroché par l'intermédiaire d'un fil rigide à un point O fixe .

On suppose le fil rigide sans masse ,Sa longueur est $\ell = 1m$,On note l'angle du fil OM avec la verticale . L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\overrightarrow{g}$ considéré comme uniforme.



On écarte le pendule de sa position d'équilibre d'un angle $\theta(t = 0) = {}_o$ et le lâche sans vitesse initiale.

1⊳ En utilisant la R.F.D établir :

1.1▹ L'équation différentielle du mouvement.

1.2▹ L'expression de la tension $\overrightarrow{T}$ du fil.

1.3▹ L'expression de la pulsation propre ω_o du mouvement.

2⊳ Résoudre l'équation différentielle du mouvement.

3⊳ Établir et tracer l'équation de la trajectoire de phase dans le plan $(, u = \frac{\dot{}}{\omega_o})$,puis conclure.

4⊳ On a mesuré pour 20 périodes une durée de 40,12s , Déduire de cette expérience une valeur de g.

Correction

1⊳

$$m\overrightarrow{a}\left|\begin{array}{l} -m\ell\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_r} \\ m\ell\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{P}\left|\begin{array}{l} mg\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} \\ -mg\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta} \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{T}\left|\begin{array}{l} -T\,\overrightarrow{e_r} \\ 0\,\overrightarrow{e_\theta} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta & (1) \\ -m\ell\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta & (2) \end{cases}$$

1.1▹ L'équation différentielle du mouvement :(1)$\Longrightarrow$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

1.2▹ L'expression de la tension du fil :(2)$\Longrightarrow$

$$\boxed{T = mg\cos\theta + m\ell\dot{\theta}^2}$$

1.3▹ L'expression de la pulsation propre :

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$

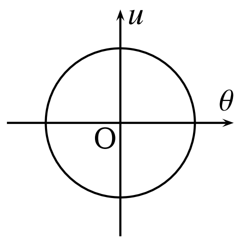
1.4▹ Résolution de l'équation différentielle :

$$\boxed{\theta(t) = \theta_o \cos(\omega t)}$$

2▹ L'équation de la trajectoire de phase

$$\boxed{\theta^2 + u^2 = \theta_o^2}$$

Trajectoire de phase est une courbe fermée(cercle) : mouvement périodique (Oscillateur harmonique)



3▹ La valeur de g :

$$\boxed{g = 4\pi^2 \ell (\frac{20}{\Delta t})^2 \Longrightarrow g = 9,81 m.s^{-2}}$$

2.3.4 Mouvement d'une particule chargé dans un champ uniforme

Une particule électrique ponctuelle M de masse m et portant une charge $q > 0$ mobile dans une région d'espace où règne un champ :

- Électrique uniforme $\overrightarrow{E} = E\,\overrightarrow{e_y}, \quad E > 0$
- Magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{e_z}, \quad B > 0$

La charge est émise sans vitesse initiale au point O à $t = 0$.

1▹

1.1▹ Par application de la RFD trouver un système de trois équations différentielles scalaires vérifiées par x, y et z.

1.2▹ Résoudre ce système et en déduire $x(t), y(t)$ et $z(t)$ on posera : $\omega = \dfrac{qB}{m}$

1.3▹ Représenter la trajectoire .

1.4▹ En déduire le rayon de courbure en fonction des données.

2▹ On suppose maintenant que la particule possède une vitesse initiale : $\overrightarrow{V_o} = V_o\,\overrightarrow{e_x}$

2.1▹ Retrouver :$x(t), y(t)$.

2.2▹ Pour quelle valeur particulière v_{oc} de v_o , la charge décrit un mouvement rectiligne confondu avec Ox. Exprimer v_{oc} en fonction de E et B.

2.3▹ Que peut-on dire dans ce cas sur la force exercée sur la charge.

2.4▹ Représenter la trajectoire de la particule dans le cas ou $v_o = 2v_{oc}$

Correction

1▷

1.1▹ $m\overrightarrow{a}(M) = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{V}_i \wedge \overrightarrow{B}) \Longrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B & (1) \\ m\ddot{y} = q(E - \dot{x}B) & (2) \\ m\ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}$

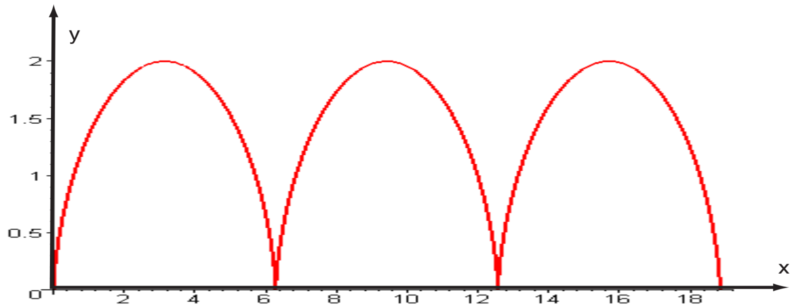
1.2▹ Par intégration on trouve :

$$\boxed{x = \frac{E}{B\omega}(\omega t - \sin\omega t)}$$

$$\boxed{y = \frac{E}{B\omega}(1 - \cos\omega t)}$$

$$\boxed{z = 0 \quad \text{mouvement plan}}$$

1.3▹ Representation graphique (on prend $\frac{E}{B\omega} = 1$)



1.4▹ Le rayon de courbure est

$$\boxed{\rho_c = \frac{4E}{B\omega}|\sin(\frac{\omega t}{2})|}$$

2▷

2.1▹ $\overrightarrow{V}_i = v_o\,\overrightarrow{e_x}$

2.1.1⋄

$$\boxed{x = \frac{E}{B\omega}(\omega t - \sin\omega t) + \frac{v_o}{\omega}\sin(\omega t)}$$

$$\boxed{y = (\frac{E}{B} - v_o)\frac{1}{\omega}(1 - \cos\omega t)}$$

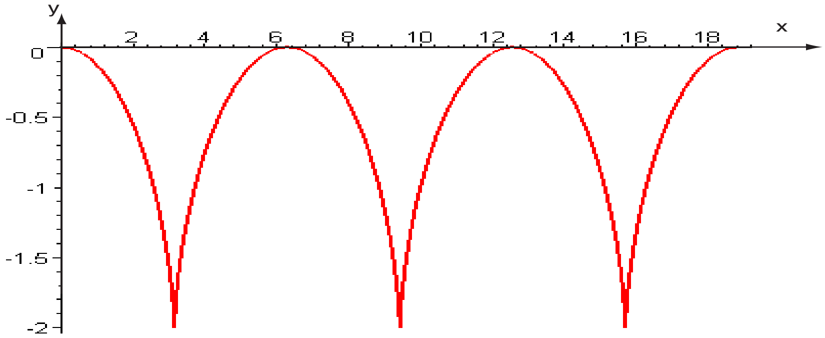
2.1.2⋄ Le mouvement est rectiligne confondu avec ox :$\forall t \Longrightarrow$

$$\boxed{v_{oc} = \frac{E}{B}}$$

2.1.3◇ $\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{V}_i \wedge \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{0}$ la force magnétique compense la force électrique

2.1.4◇ Representation graphique avec $v = 2v_{oc}$

On rappelle que dans ce cas , on a : $\begin{cases} x = \dfrac{E}{B\omega}(\omega t + \sin \omega t) \\ y = -\dfrac{E}{B\omega}(1 - \cos \omega t) \end{cases}$



CHAPITRE 3

MOUVEMENT DE PARTICULES CHARGÉES DANS UN CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE, UNIFORME ET STATIONNAIRE

3.1 Force de Lorentz

3.1.1 Rappel

Définition

Dans un référentiel $\mathcal{R}$, lorsque une particule de charge q animé par rapport à ce référentiel $\mathcal{R}$ de la vitesse $\overrightarrow{V}(M/R) = \overrightarrow{V}$, règne un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$,elle acquière une force dite de Lorentz :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B})}$$

On décompose la force de Lorentz en :

- Force électrique : $\overrightarrow{F}_e = q\overrightarrow{E}$.
- Force magnétique :$\overrightarrow{F}_m = q\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}$

Activité

Comparer le poids et la force électrique ressenti par l'électron dans l'atome d'hydrogène à l'état fondamental. Conclure.
On donne :

- m_e= 1,602 × 10^{-31} kg
- e=9,11 × 10^{-19} C
- $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o} = 9, 10^9$ (S.I)
- g= 10 m s^{-2}
- a_o=0,529 Å

Correction

On a :

- $P = mg \xrightarrow{\text{A.N}} P \simeq 9.10^{-31}$ N
- $F_e = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{e^2}{a_o^2} \xrightarrow{\text{A.N}} F_e \simeq 8.10^{-8}$ N

Donc :

$$\frac{F}{P} \approx 10^{22}$$

Conclusion:

Comme $P \ll F$ alors on retient:
Le poids est très négligeable devant la force de Lorentz

3.1.2 Propriété de la force magnétique

Calculons la puissance de la force magnétique :

$$\boxed{\mathscr{P}\,(\overrightarrow{F}_m) = \overrightarrow{F}_m.\overrightarrow{V} \Longrightarrow \mathscr{P}\,(\overrightarrow{F}_m) = q(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}).\overrightarrow{V} = 0}$$

Si la particule chargée n'est soumise qu'à cette force magnétique , alors d'après le T.E.C :

$$\Delta\mathscr{E}_c = \mathscr{P}\,(\overrightarrow{F}_m) = 0 \Longrightarrow \mathscr{E}_c = cte$$

C'est à dire qu'il y a conservation de l'énergie cinétique (i;e conservation de la norme du vecteur vitesse)

Conclusion:

L'action du champ magnétique sur une particule chargée est de dévier sa trajectoire.

3.2 Applications

3.2.1 Mouvement dans un champ électrostatique uniforme dans le vide.

Activité

L'oscilloscope cathodique
D'après CCP/TSI/2014

Première partie :Création et accélération d'un faisceau d'électrons

Un oscilloscope cathodique est constitué d'un canon à électrons dans lequel un faisceau d'électrons est créé et les électrons sont accélérés .
Une cathode, notée C, émet des électrons de vitesse initiale négligeable. Il est rappelé que les électrons ont une charge électrique négative égale à $-e$.

On établit entre la cathode C et une anode, notée A, une différence de potentiel notée $U_{AC} = V_A - V_C > 0$. Les électrons sont ainsi accélérés lors de leur parcours entre C et A.
L'anode est constituée d'une plaque métallique percée d'un trou centré en O permettant à une partie du faisceau d'électrons de s'échapper dans la direction horizontale Oz comme le montrent les figures 1 et 2 suivantes.
La distance entre C et A est notée d.
L'espace est rapporté au repère cartésien orthonormé direct $(Oxyz)$ associé à la base $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.
Le point O correspond au centre de l'anode A.

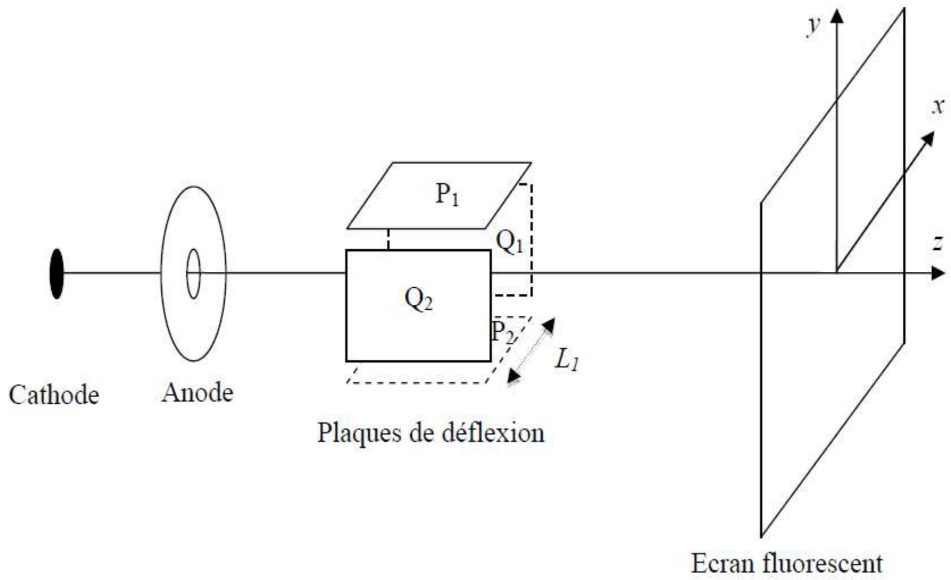


Figure 1 : schéma de l'oscilloscope en perspective

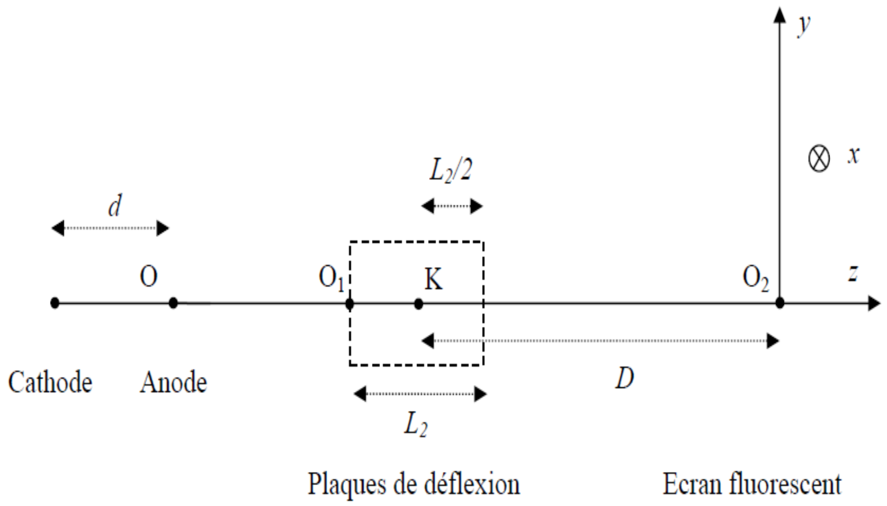


Figure 2 : schéma de l'oscilloscope en coupe dans la plan (yOz)

1▷ Déterminer, en un point de l'axe des z situé entre la cathode et l'anode, la direction et le sens du champ électrique $\overrightarrow{E}$ créé par la tension U_{AC}, On admet que $||\overrightarrow{E}|| = \frac{U_{AC}}{d}$.

2▷ Déterminer l'expression de la force électrostatique $\overrightarrow{f}$ subie par un électron entre C et A en fonction de U_{AC}, d, e et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

3⊳ La tension U_{AC} appliquée est de l'ordre de 1kV. La distance d est de l'ordre de 0,1 m.
Le poids des électrons peut-il être négligé devant la force électrostatique précédente ?
Justifier quantitativement la réponse.

4⊳ En appliquant le théorème de l'énergie cinétique, déterminer l'expression de la vitesse v_o avec laquelle les électrons atteignent l'anode. Exprimer v_o en fonction de U_{AC} ,m et e.
Donner l'ordre de grandeur de la valeur numérique de la vitesse v_o.

Deuxième partie : Dispositif de déflexion du faisceau d'électrons

Les électrons produits et accélérés dans le canon à électrons pénètrent en O_1, avec une vitesse v_o parallèlement à l'axe (O_1z), dans le dispositif de déflexion composé de deux paires de plaques parallèles. Les deux plaques P_1 et P_2 sont horizontales et sont soumises à une différence de potentiel $U_Y = V_{P1} - V_{P2}$ et les deux plaques Q_1 et Q_2 sont verticales et soumises à une différence de potentiel $U_X = V_{Q1} - V_{Q2}$.

Les électrons, après passage dans ce système de déflexion, poursuivent leur trajectoire jusqu'à frapper un écran fluorescent sur lequel le point d'impact est matérialisé par un spot lumineux.

Les plaques P_1 et P_2 d'une part, et les plaques Q_1 et Q_2 d'autre part, sont symétriques par rapport à l'axe Oz. L' écartement entre les paires de plaques est le même et noté L_1. Les longueurs des plaques parallèlement à l'axe O_1z sont identiques et égales à la longueur L_2.

Le mouvement des électrons dans le système de déflexion sera étudié dans le repère (O_1xyz), associé à la base orthonormée cartésienne ($\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$).

Remarque : on admet que le champ électrique est nul à l'extérieur du volume délimité par les plaques et que le champ électrique produit par chaque paire de plaques est uniforme et perpendiculaire aux plaques qui le produisent.

Le dispositif est enfermé dans une ampoule scellée, dans laquelle règne un vide poussé.
On néglige le poids des électrons dans cette partie.
Soit K, le centre du système de déflexion. Le point K appartient ainsi à l'axe Oz et est situé à la distance $\dfrac{L_2}{2}$ du point O_1.
Soit D , la distance entre le centre K du système de déflexion et le point O_2 qui correspond au centre de l'écran fluorescent.
Les points et les distances définis dans cette partie sont représentés sur les figures 1 et 2.

5⊳ On établit entre les plaques horizontales P_1 et P_2 une différence de potentiel $U_Y = V_{P1} - V_{P2}$ constante et positive, et on applique une différence de potentielle nulle entre les plaques Q_1 et Q_2.
Quel est l'effet de la différence de potentiel U_Y sur le mouvement des électrons ?

Établir l'expression vectorielle de la force $\overrightarrow{f'}$ qui agit sur un électron situé entre les plaques P_1 et P_2 en fonction de e, L_1, U_Y et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

6⊵ Par application du principe fondamental de la dynamique, établir l'expression vectorielle de l'accélération $\overrightarrow{a}$ d'un électron dans le repère (O_1xyz) en fonction de m_e, e, L_1, U_Y et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

7⊵ En projetant la relation vectorielle précédente, déterminer les équations différentielles vérifiées par les coordonnées d'un électron .
En déduire , par intégration, les équations horaires relatives au mouvement d'un électron dans le repère (O_1xyz).
Montrer que l'équation cartésienne de la trajectoire d'un électron dans le repère (O_1xyz) a pour expression :

$$y = \frac{eU_Y}{2L_1 m_e v_o^2}$$

8⊵ Trajectoire d'un électron

8.1▹ Déterminer les coordonnées X_E et Y_E d'un électron lorsqu'il sort du système de déflexion, c'est -à-dire, lorsque son abscisse z est égale à L_2 dans le repère (O_1xyz).

8.2▹ Calculer la pente p de la tangente à la courbe, à la sortie du système de déflexion.

8.3▹ Justifier le fait qu'après être sorti du système de déflexion, la trajectoire d'un électron est une droite.

8.4▹ Sachant que la trajectoire d'un électron entre la sortie du système de déflexion et l'écran fluorescent est une droite de pente p passant le point E, déterminer l'équation de cette droite.

8.5▹ Montrer que les coordonnées du point d'impact S (spot) des électrons sur l'écran sont données par les expressions :

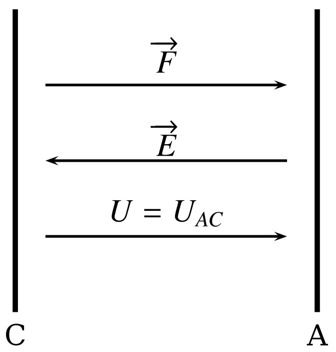
$$X_s = 0 \qquad \text{et} \qquad Y_S = \frac{eDL_2U_Y}{L_1 m_e v_o^2}$$

8.6▹ Quel type de relation mathématique a-t-on entre Y_S et U_Y Commenter ce résultat.

Correction

Première partie :Création et accélération d'un faisceau d'électrons

1⊵ Le champ $\overrightarrow{E}$ entre la cathode et l'anode :



On a $U = U_{AC} > 0$ et puisque le champ $\overrightarrow{E}$ se dirige toujours vers les potentiels décroissant alors $\overrightarrow{E}$ se dirige de A → C c'est à dire

$$\boxed{\overrightarrow{E} = E_z\overrightarrow{e_z} \Longrightarrow \overrightarrow{E} = -\frac{U_{AC}}{d}\overrightarrow{e_z}}$$

2⊵ La force

$$\boxed{\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{E} \Longrightarrow \overrightarrow{f} = -e\overrightarrow{E} = e\frac{U_{AC}}{d}\overrightarrow{e_z}}$$

3⊵ l'influence du poids :

- $P = m_e g \xrightarrow{\text{A.N}} P = 9,1\times 10^{-30}\,\text{N}$
- $f = e\dfrac{U_{AC}}{d} \xrightarrow{\text{A.N}} f = 1,610^{-15}\,\text{N}$

On conclut que le poids est négligeable puisque $\dfrac{f}{P} \simeq 10^{15}$

4⊵ L'expression de la vitesse v_o

D'après le TEC on a :$\Delta E_c = W(\overrightarrow{f})$ donc

$$\boxed{\frac{1}{2}m_e v_o^2 = eU_{AC} \Longrightarrow v_o = \sqrt{\frac{2eU_{AC}}{m_e}} \xrightarrow{\text{A.N}} v_o = 1,87\times 10^7\,\text{m}\,\text{s}^{-1}}$$

Deuxième partie : Dispositif de déflexion du faisceau d'électrons

5⊵ Comme $U_y > 0$ alors l'effet de cette différence de potentiel est la déviation du faisceau dans le plan (yOz).

La force exercée

$$\boxed{\overrightarrow{f}_y = e\frac{U}{L_1}\overrightarrow{e_y}}$$

6⊵ La R.F.D donne :

$$\boxed{\overrightarrow{f}_y = m\overrightarrow{a} \Longrightarrow \overrightarrow{a} = \frac{eU_y}{mL_1}\overrightarrow{e_y}}$$

7⊵ L'équation de la trajectoire :

- Les composantes de l'accélération et de la vitesse :

$$\overrightarrow{a} = \left| \begin{array}{l} a_x = 0 \\ a_y = \dfrac{eU_y}{mL_1} \\ a_z = 0 \end{array} \right. \Longrightarrow \overrightarrow{V} = \left| \begin{array}{l} V_x = 0 \\ V_y = \dfrac{eU_y}{mL_1}t \\ V_z = v_o \end{array} \right.$$

- les composantes du vecteur position :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ y = \dfrac{eU_y}{2mL_1}t^2 \\ z = v_o t \end{array} \right.}$$

▶ En éliminant le temps entre y et z on obtient

$$\boxed{y = \frac{eU_y}{mL_1 v_o^2} z^2}$$

C'est l'équation d'une parabole

8⊵ Trajectoire de l'électron :

8.1▹ A la sortie au point E on a : $z_E = L_2$ donc

$$\boxed{\overrightarrow{OE} = \left| \begin{array}{l} X_E = 0 \\ Y_E = \dfrac{eU_y}{2mL_1 v_o^2} L_2^2 \\ Z_E = L_2 \end{array} \right.}$$

8.2▹ La pente p de la tangente au point E :

$$\boxed{p = \left.\frac{dy}{dz}\right|_E \Longrightarrow p = \frac{eU_Y L_2}{L_1 m v_o^2}}$$

8.3▹ Le poids est négligeable ainsi $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$ donc la résultante de force est nulle ce qui donne (principe d'inertie) que la vitesse est constante $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{cte}$

8.4▹ On pose $y = pz + y_o$ l'équation de la tangente au point E.
Puisque E appartient à cette droite alors $y_E = pz_E + y_o$ donc

$$\boxed{y_o = -\frac{eU_y L_2^2}{2L_1 m v_o^2}}$$

ce qui donne

$$\boxed{y = \frac{eU_y L_2}{L_1 m v_o^2}(z - \frac{L_2}{2})}$$

8.5▹ Les coordonnées du point S.
Au point S on a $z_S = D + \dfrac{L_2}{2}$ donc

$$\boxed{\overrightarrow{O_1S} = \left| \begin{array}{l} X_S = 0 \\ Y_S = \dfrac{eU_y L_2 D}{mL_1 v_o^2} \\ Z_S = D + \dfrac{L_2}{2} \end{array} \right.}$$

9⊵ Puisque $Y_S = \alpha U_y$ les deux grandeurs sont proportionnelles donc par étalonnage si on mesure Y_S on peut remonter à la valeur U_y. Si on pose $S_v = \dfrac{1}{\alpha}$; S_v représente la sensibilité verticale de l'oscilloscope.

3.2.2 Mouvement dans un champ magnétostatique uniforme dans le vide.

D'après concours centrale TSI 2010

On s'interesse à l'étude du confinement d'un électron [de masse (m) et de charge $(-e)$] dans une petite région de l'espace à l'aide d'un champ électromagnétique. L'électron se déplace dans le référentiel $\mathcal{R}(Oxyz)$, supposé galiléen ; on appelle respectivement $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$ les vecteurs unitaires des axes Ox,Oy et Oz .
L'électron, se déplaçant dans le vide, est soumis à l'action d'un champ magnétique uniforme et permanent (indépendant du temps). Le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ est colinéaire à Oz : $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{e_z}(B > 0)$. On pose $\omega_c = \dfrac{eB}{m}$
À l'instant initial, l'électron se trouve en O avec la vitesse $\overrightarrow{v_o} = v_{ox}\,\overrightarrow{e_x} + v_{oz}\,\overrightarrow{e_z}$ (v_{ox} et v_{oz} désignent des constantes positives).

1⊵ Déterminer la coordonnée $z(t)$ de l'électron à l'instant t .

2⊵ On étudie la projection du mouvement de l'électron dans le plan Oxy.

2.1▹ Déterminer les composantes v_x et v_y de la vitesse de l'électron en fonction de v_{ox},ω_c et du temps t.

2.2▹ En déduire les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de l'électron à l'instant t.

2.3▹ Montrer que la projection de la trajectoire de l'électron dans le plan est un cercle Γ de centre H et de rayon r_H . Déterminer les coordonnées x_H et y_H de H , le rayon r_H et la fréquence de révolution f_c de l'électron sur ce cercle en fonction de v_{ox} et ω_c. Tracer, avec soin, le cercle Γ dans le plan Oxy . Préciser en particulier le sens de parcours de l'électron sur Γ .

3⊵ Application numérique : calculer la fréquence f_c pour $B = 1,0\,T$.

4⊵ Tracer l'allure de la trajectoire de l'électron dans l'espace. L'électron est-il confiné au voisinage de O ?

Correction

1⊵ La coordonnée $z(t)$ de l'électron à l'instant t :
Par application de la R.F.D qu'on projette sur $\overrightarrow{e_z}$ on obtient :

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -e(\overrightarrow{V} \wedge B\,\overrightarrow{e_z}).\,\overrightarrow{e_z} = 0$$

par conséquent

$$\boxed{z(t) = V_{oz}t}$$

2⊵ Le mouvement de l'électron dans le plan Oxy :

2.1▹ Les composantes v_x et v_y de la vitesse de l'électron :
Projetons la R.F.D :

$$m\overrightarrow{a} = -e\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B} \Longrightarrow \left|\begin{array}{ll} \ddot{x} + \omega_c\dot{y} = 0 & (E1) \\ \ddot{y} - \omega_c\dot{x} = 0 & (E2) \\ \ddot{z} = 0 & \end{array}\right.$$

L'equation (E1) s'écrit $\dot{V}_x + \omega_c V_y = 0$ ainsi (E2) s'écrit $\dot{V}_y - \omega_c V_x = 0$ Ce qui donne

$$\boxed{\ddot{V}_x + \omega_c^2 V_x = 0 \quad (E'1) \qquad ; \qquad \ddot{V}_y + \omega_c^2 V_y = 0 \quad (E'2)}$$

2.2▹ Les coordonnées $x(t)$ et $y(t)$ de l'électron à l'instant t :

- par intégration des équations (E'1) et (E'2) on obtient :

$$\boxed{V_x = V_{ox}\cos\omega_c t \qquad ; \qquad V_y = V_{ox}\sin\omega_c t}$$

- par intégration on obtient

$$\boxed{x = \frac{V_{ox}}{\omega_c}\sin\omega_c t \qquad ; \qquad y = \frac{V_{ox}}{\omega_c}(1-\cos\omega_c t)}$$

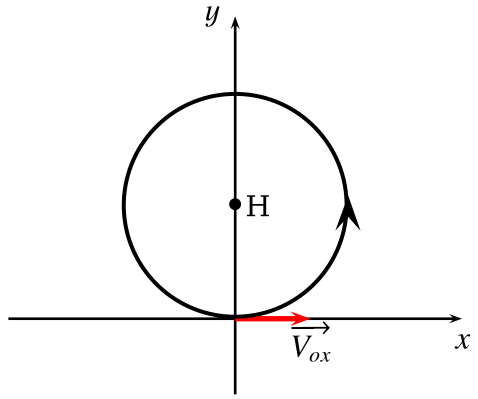
2.3▹ La projection de la trajectoire de l'électron dans le plan est un cercle puisque

$$\boxed{x^2 + (y - \frac{V_{ox}}{\omega_c})^2 = (\frac{V_{ox}}{\omega_c})^2}$$

- Les coordonnées de H :$(x_H = 0, y_H = \dfrac{V_{ox}}{\omega_c})$
- Le rayon $r_H = \dfrac{V_{ox}}{\omega_c}$
- La fréquence de révolution f_c de l'électron :

$$\boxed{f_c = \frac{2\pi}{\omega_c}}$$

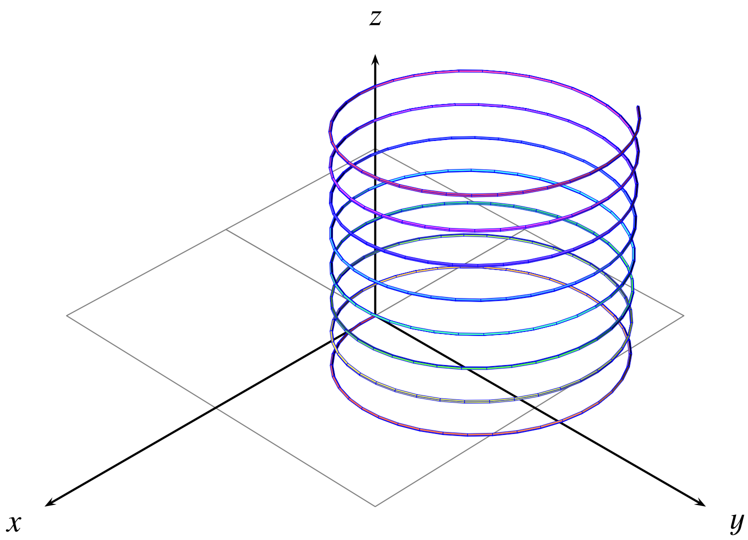
- Le tracé du cercle Γ dans le plan Oxy et le sens de parcours de l'électron sur Γ .



3⊵ <u>Application numérique</u> :

$$\boxed{f_c = \frac{2\pi}{\omega_c} \xrightarrow{\text{A.N}} f_c = 2.80\times10^{10}\ \text{Hz}}$$

4⊵ L'allure de la trajectoire de l'électron dans l'espace :

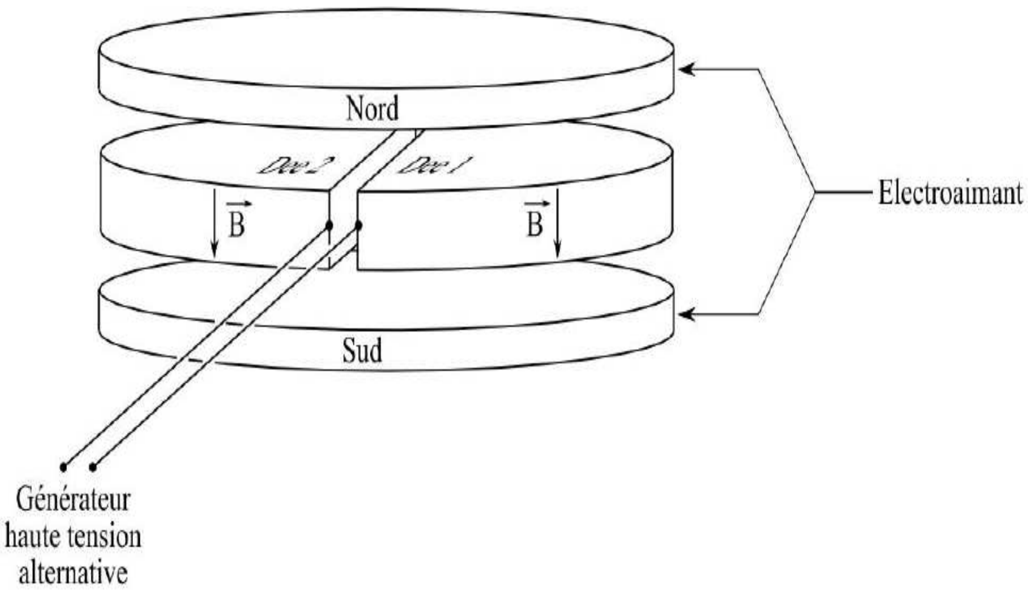


L'électron n'est pas confiné au voisinage de O puisque $z(t)$ diverge.

3.2.3 Mouvement d'un proton dans un cyclotron

D'après CONCOURS COMMUN 2010
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Un cyclotron est un accélérateur de particules qui utilise l'action combinée d'un champ électrique $\overrightarrow{E}$ et d'un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ afin d'accélérer des particules chargées.
Dans le cadre du traitement de certains cancers crâniens et oculaires, notamment chez les enfants, la radiothérapie classique est avantageusement remplacée par la protonthérapie (envoi de protons rapides sur les cellules cancéreuses en vue de les détruire) qui minimise les dégâts occasionnés aux tissus biologiques entourant la tumeur. Les protons à envoyer dans la tumeur sont accélérés à l'aide d'un cyclotron. En France, il existe deux principaux centres utilisant cette technique : Nice (protons de 65 MeV) et Orsay (protons de 200 MeV). On va ici s'intéresser au principe d'un cyclotron qui pourrait être utilisé dans ce cadre.
Le cyclotron est constitué de deux demi-cylindres horizontaux de rayon R très légèrement écartés et creux, les « Dees », au sein desquels règne un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme et constant d'intensité B = 1,67 T. À l'intérieur des Dees, il règne un vide poussé. Entre ces deux Dees une tension haute fréquence de valeur maximale U = 100 kV crée un champ E perpendiculaire aux faces en regard des Dees.



Des protons de masse $m_P = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg et de charge $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C, animés d'une vitesse horizontale négligeable,sont injectés au point A_o de l'espace séparant les deux Dees. (Voir Annexe)
On rappelle l'expression de la force de Lorentz $\overrightarrow{F}_L$ que subit une particule de charge q, animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ lorsqu'elle est placée dans une zone ou règne un champ électromagnétique $(\overrightarrow{E}, \overrightarrow{B})$:

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E} + q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

Dans toute la suite, la force de Lorentz sera la seule force prise en compte.

A/ Étude du mouvement dans les Dees

1▷ Montrer que le mouvement du proton dans un Dee est uniforme.

2▷ Représenter sur document annexe les vecteurs champ magnétique dans chacun des Dees, les vecteurs vitesse et force de Lorentz aux points M_1 et M_2.

3▷ Par application de la relation fondamentale de la dynamique, établir le système d'équations différentielles couplées auxquelles satisfont les composantes V_x et V_y de son vecteur vitesse $\overrightarrow{v}(t)$. On introduira la pulsation cyclotron $\omega_c = \dfrac{eB}{m}$.

4▷ Montrer que la trajectoire du proton dans le Dee 1 est un cercle de rayon $R_1 = \dfrac{V_1}{\omega_c}$

On admet que ce résultat se généralise et que la trajectoire lors de la $n^{\text{ième}}$ traversée d'un Dee sera circulaire uniforme de rayon $R_n = \dfrac{V_n}{\omega_c}$

5▷ Exprimer, en fonction de R_n la distance d parcourue dans un Dee lors du $n^{\text{ième}}$ demi-tour.

6▷ Montrer que la durée Δt de parcours de la trajectoire dans un Dee est indépendante de la vitesse du proton et donner son expression en fonction de m, e et B.

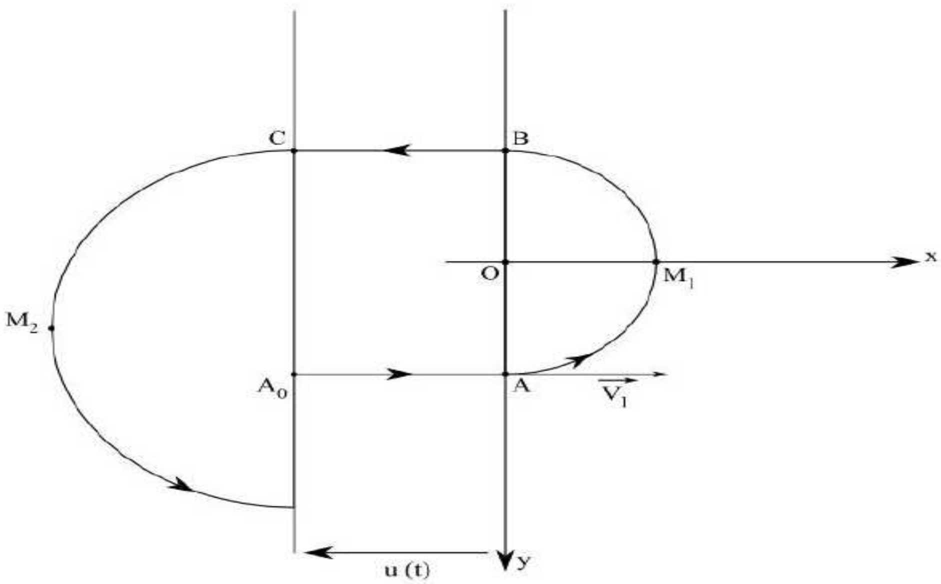
B/ Étude du mouvement entre les Dees

Entre les Dees, qui sont très faiblement écartés, le proton décrit une trajectoire rectiligne et est accéléré.

7▷ Préciser la direction et le sens que doit avoir le champ électrique $\overrightarrow{E}$ entre les Dees quand le proton décrit A_oA, puis BC. Dans chaque cas, quel doit être le signe de la tension u (définie dans l'annexe) pour que les protons soient toujours accélères quand ils passent entre les Dees ?

8▷ Le schéma de l'annexe fournit le graphe de la tension $u(t)$. Noter sur ce graphe :
- le moment où le proton passe de A_o à A, puis lorsquĄfil passe de B à C ;
- la durée δt de parcours de la trajectoire dans chacun des Dees.

9▷ Donner la relation entre la période T de la tension $u(t)$ et la durée Δt ; en déduire l'expression de la fréquence f de $u(t)$ en fonction de m, e et B.

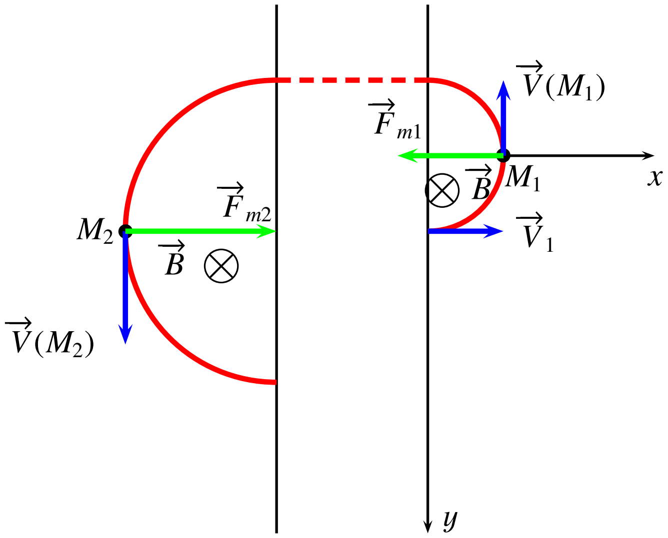


Correction

A/ Étude du mouvement dans les Dees

1▷ Montrons que le mouvement du proton dans un Dee est uniforme.
dans un Dee on a : $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_m = q\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}$
Et comme $\mathscr{P}\,(\overrightarrow{F}_m) = 0 \Longrightarrow \mathscr{E}_c = cte$ et par conséquent $\|\overrightarrow{V}\| = V = cte$
D'où le mouvement de la particule se fait à vitesse constante donc le mouvement est uniforme dans le Dee.

2▷ Représentation des vecteurs :



3⊳ Le système d'équations différentielles couplées :
On applique la R.F.D dans $\mathcal{R}$ galiléen on obtient :

$$m\vec{a} = \vec{F}_m = q\vec{V} \wedge \vec{B} \Longrightarrow \begin{cases} m\dfrac{dV_x}{dt} = qBV_y \\ m\dfrac{dV_y}{dt} = -qBV_x \\ m\dfrac{dV_z}{dt} = 0 \end{cases}$$

En posant $\omega_c = \dfrac{eB}{m}$ (q=e) on obtient :

$$\boxed{\frac{dV_x}{dt} - \omega_c V_y = 0(1) \qquad ; \qquad \frac{dV_y}{dt} + \omega_c V_x = 0(2)}$$

4⊳ La trajectoire du proton :
Par intégration :
(2) $\Longrightarrow V_y = -\omega_c x + cte$ Avec les C.I $cte = 0$ donc

$$V_y = -\omega_c x \quad (3)$$

Les équations (1) et (3) donnent

$$\ddot{x} + \omega_c^2 x = 0 \Longrightarrow x(t) = a\cos(\omega_c t) + b\sin(\omega_c t)$$

Les C.I $x(t=0) = 0$ et $V_x(t=0) = V_1$ donne $a = 0$ et $b = \dfrac{V_1}{\omega_c}$
Il en résulte que

$$\boxed{x(t) = R_1 \sin(\omega_c t) \qquad \text{avec} \qquad R_1 = \frac{V_1}{\omega_c}}$$

L'intégration de l'équation (3) avec $y(t=0) = R_1$ donne

$$\boxed{y(t) = R_1 \cos(\omega_c t)}$$

Il en résulte que

$$\boxed{x^2 + y^2 = R_1^2}$$

D'où la trajectoire est circulaire de rayon R_1.

5⊵ La distance parcourue

$$\boxed{d = \pi R_n \Longrightarrow d = \pi \frac{V_n}{\omega_c}}$$

6⊵ La durée Δt :

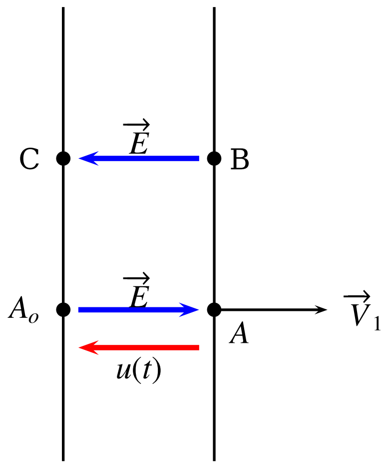
Comme $\Delta t = \frac{1}{2}T \Longrightarrow \Delta t = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{\omega_c}\right)$ alors

$$\boxed{\Delta t = \frac{\pi m}{eB}}$$

Δt ne dépend pas de la vitesse V_n (mouvement uniforme).

B/ Étude du mouvement entre les Dees

7⊵ La direction et le sens que doit avoir le champ électrique $\overrightarrow{E}$:



Puisque la charge est positive donc pour qu'elle s'accélère il faut que :

- Entre A_o et A ; $\overrightarrow{E} = E\,\overrightarrow{e_x} \Longrightarrow u(t) > 0$.
- Entre B et C ; $\overrightarrow{E} = -E\,\overrightarrow{e_x} \Longrightarrow u(t) < 0$.

8⊵ Les moments où le proton passe de :

$$A_o(t=0) \longrightarrow A(\delta t) \longrightarrow B(\delta t + \Delta t) \longrightarrow C(2\delta t + \Delta t)$$

9⊵ La relation entre la période T de la tension $u(t)$ et la durée Δt :

Comme : $\frac{T}{2} = \delta t + \Delta t$ et puisque les Dees sont très faiblement écartés alors $\delta t \ll \Delta t$ donc

$$\boxed{T = 2\Delta t \Longrightarrow T = \frac{2\pi m}{eB}}$$

L'expression de la fréquence f de $u(t)$:

$$\boxed{f = \frac{1}{T} \Longrightarrow f = \frac{eB}{2\pi m}}$$

3.2.4 Rayonnement d'une particule chargée

D'après CCP PC SESSION 2014

On suppose que la vitesse des particules chargées est très inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide, ce qui revient à négliger toute correction relativiste. Les effets de la gravitation seront négligés.

Données :

- La charge électrique élémentaire vaut $e=1{,}60\times10^{-19}\,\mathrm{C}$.
- La vitesse de la lumière dans le vide vaut $c=3{,}0\times10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
- La perméabilité et la permittivité du vide : $\mu_o=4\pi.10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}}$ et $\varepsilon_o=\dfrac{1}{36\pi10^9}\,\mathrm{F\,m^{-1}}$.

A/ Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

1▷ On considère un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen muni d'un repère cartésien $(O,\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$. Une particule chargée de charge q positive et de masse m pénètre avec un vecteur vitesse $\overrightarrow{V}_o=V_o\overrightarrow{e_x}$ au point O de coordonnées (0,0,0) dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}=B\overrightarrow{e_z}$ perpendiculaire à $\overrightarrow{V}_o$ (Figure 1). Montrer que cette cette particule décrit , à vitesse constante, une trajectoire plane et circulaire de rayon $R=\dfrac{mV_o}{qB}$. Pour cela , vous pourrez, notamment , introduire la quantité complexe $\underline{u}(t)=x(t)+jy(t)$.

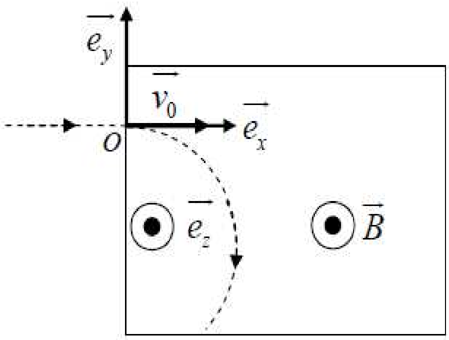


Figure 1 : trajectoire d'une particule de charge q positive dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme

2▷ pour séparer les deux isotopes naturels de l'Uranium 238 et l'Uranium 235, il avait été envisagé d'utiliser un spectrographe de masse. Cet appareil comporte trois parties, représentées en figure 2, où règne un vide poussé. les atomes d'uranium sont ionisés dans une chambre d'ionisation en ion U^+ (de charge électrique $q(U^+)=e$) d'où ils sortent par la fente F_1 avec une vitesse négligeable. Ces ions sont accélérés par un champ électrostatique uniforme imposé par une tension $W=V_{p_2}-V_{p_1}$ entre deux plaques P_1 et P_2. Enfin, les ions pénètrent dans une chambre de déviation où règne un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ (B=0,1 T) perpendiculaire au plan de la figure. Ils décrivent alors deux trajectoires circulaires de rayon R_1 et R_2 et parviennent dans deux collecteurs C_1 et C_2.
Calculer la tension W pour que la distance entre les collecteurs soit égale à d= 2 cm.
Les masses de l'uranium 235 et de l'uranium 238 sont $m_{^{235}U}$= 235 u.m.a et $m_{^{238}U}$= 238 u.m.a.
Une unité de masse atomique (u.m.a) vaut : 1 u.m.a $\simeq 1{,}66\times10^{-27}$ kg.

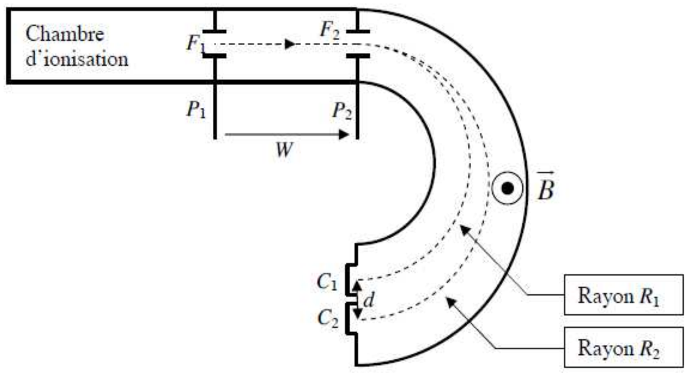


Figure 2 : schéma de principe du spectrographe de masse

B/ Le cyclotron

Le cyclotron est formé de deux demi-cylindres conducteurs creux D_1 et D_2 dénommées dees et séparés par u intervalle étroit. Un champ magnétique $\vec{B}$ (B=0,1 T) règne à l'intérieur des dees, sa direction est parallèle à l'axe de ces demi-cylindres. Un champ électrostatique variable $\vec{E}$ peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les dees en appliquant entre les dees une tension alternative sinusoïdale $u(t)$ qui atteint sa valeur maximale $U_m = 10^5$ V lorsque le proton traverse cet espace. les protons de masse $m_p = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg et de charge $q_p = e$, sont injectés au centre du cyclotron avec une énergie cinétique négligeable. Dans chaque dee, ils décrivent des trajectoires demi-circulaires de rayon croissant. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est R_s= 50 cm.

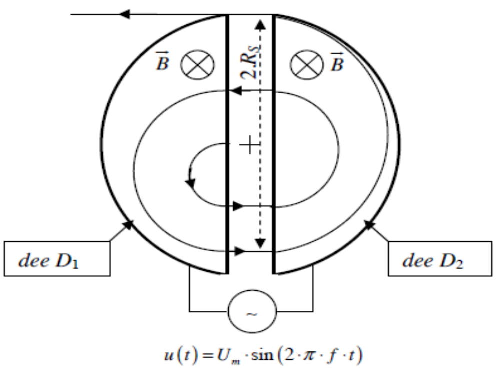


Figure 3 : schéma de principe du cyclotron

3⊵ Donner l'expression littérale de la durée $T_{1/2}$ mise par un proton pour effectuer un demi-tour en fonction de m_p, e et B. Qu'en déduisez-vous ?

4⊵ Justifier le choix d'une tension $u(t)$ alternative sinusoïdale.

5⊵ En déduire l'expression, puis la valeur de la fréquence f de la tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(2\pi f t)$ pour que les protons subissent une accélération maximale à chaque traversée . On néglige le temps de parcours d'un dee à l'autre.

6⊵ Déterminer l'expression, puis la valeur de l'énergie cinétique E_{CS} des protons à la sortie du cyclotron.

7⊵ déterminer l'expression du nombre de tours N effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie en fonction de : e, R_s, B, m_p et U_m. Effectuer l'application numérique.

8⊳ Puissance rayonnée.
Pour une particule non relativiste, toute particule chargée de charge q et d'accélération a rayonne une puissance P_r, donnée par la formule de Larmor : $P_r = \dfrac{\mu_o q^2}{6\pi c} a^2$. On rappelle que c est la vitesse de la lumière dans le vide.

8.1▹ Montrer qu'une particule chargée de charge q, de vitesse v, qui décrit une trajectoire circulaire de rayon R, rayonne une puissance P_r, de la forme : $P_r = \alpha v^4$. Exprimer le cœfficient α en fonction de q, c, μ_o et R.

8.2▹ Calculer l'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon $R_s = 50$ cm. Conclure.

Correction

A/ Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

1⊳ Montrons que la trajectoire est plane et circulaire :
R.F.D donne :

$$m\vec{a} = \vec{F}_m = q\vec{V} \wedge \vec{B} \Longrightarrow \begin{cases} \ddot{x} - \omega_c \dot{y} = 0 & (1) \\ \ddot{y} + \omega_c \dot{x} = 0 & (2) \\ \dfrac{dV_z}{dt} = 0 & (3) \end{cases}$$

- L'équation (3) vu les C.I : $z(t) = 0$ donc le mouvement est plan.
- (1)+j(2) donne

$$\ddot{u} - j\omega_c \dot{u} = 0$$

C'est l'équation différentielle vérifiée par la variable complexe u.
Par intégration on obtient

$$\dot{u} - j\omega_c u = cte$$

Vu les C.I : $cte = V_o$ donc

$$\dot{u} - j\omega_c u = V_o$$

La solution de cette équation différentielle est

$$u(t) = ae^{j\omega_c t} + j\frac{V_o}{\omega_c}$$

Les C.I : $(u(t=0) = x(t=0) + jy(t=0) = 0)$ donnent $a = -j\dfrac{V_o}{\omega_c}$ et par conséquent :

$$\boxed{x(t) = \Re(u) \Longrightarrow x(t) = \frac{V_o}{\omega_c}\sin\omega_c t \qquad ; \qquad y(t) = \Im(u) \Longrightarrow y(t) = \frac{V_o}{\omega_c}(1 - \cos\omega_c t)}$$

Donc la trajectoire est un cercle de rayon $R = \dfrac{V_o}{\omega_c}$ et de centre O(0,R) puisque

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

avec $R = \dfrac{V_o}{\omega_c} = \dfrac{mV_o}{qB}$

2⊳ Puisque le rayon de la trajectoire augmente lorsque la masse augmente alors ; on a :

$$d = 2(R_2 - R_1$$

Avec $R_2 = R(U(238))$ et $R_1 = R(U(235))$ donc

$$d = 2\left(\frac{m_2 V_{o2}}{q_2 B} - \frac{m_1 V_{o1}}{q_1 B}\right)$$

Et puisque $q_1 = q_2 = e$ et d'après le T.E.C (théorème de l'énergie cinétique) entre F_1 et F_2 (phase d'accélération) on a :

$$m_2 V_{o2} = 2eW \qquad (et) \qquad m_1 V_{o1} = 2eW$$

N.B : la vitesse dépend de la masse dans la phase d'accélération.
Il en résulte que

$$\boxed{W = \frac{eB^2 d^2}{8(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})^2} \xrightarrow{\text{A.N}} W = 5065\ V}$$

B/ Le cyclotron

3⊵ L'expression littérale de la durée $T_{1/2}$:
On a : $T_{1/2} = \dfrac{2\pi}{\omega_c}$ comme $\omega_c = \dfrac{eB}{m}$ donc

$$\boxed{T_{1/2} = \frac{2\pi m}{eB}}$$

Conclusion:

- $T_{1/2}$ **est proportionnelle à la masse.**
- $T_{1/2}$ **est indépendante de la vitesse.**

4⊵ Justification du choix d'une tension $u(t)$ alternative sinusoïdale :
Pour accélérer le proton à chaque fois qu'il traverse l'espace entre les deux Dee , il faut que le champ $\overrightarrow{E}$ change de sens donc la tension doit être alternative périodique.
Grâce au théorème de Fourier alors le choix d'une tension alternative sinusoïdale .

5⊵ L'expression de la fréquence f de la tension alternative sinusoïdale :
Le temps de parcours d'un dee à l'autre est négligeable donc :

$$\boxed{T = 2T_{1/2} \Longrightarrow f = \frac{1}{T} = \frac{eB}{4\pi m}}$$

6⊵ L'expression de la valeur de l'énergie cinétique E_{CS} des protons à la sortie du cyclotron.
On a : $\mathcal{E}_c(s) = \dfrac{1}{2} m_p V^2$ et comme $V = R\omega_c$ alors

$$\mathcal{E}_c(s) = \frac{1}{2} m_p (R_s \omega_c)^2$$

Sachant que $\omega_c = \dfrac{eB}{m_p}$ alors

$$\mathscr{E}_c(s) = \frac{1}{2}\frac{(R_s eB)^2}{m_p} \xrightarrow{\text{A.N}} \mathscr{E}_c(s) = 1,916 * 10^{-14}\ J$$

7▷ L'expression du nombre de tours N effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie.
Par application du T.E.C on a :

- $V_1^2 = \dfrac{2eU}{m}$
- $V_2^2 = V_1^2 + \dfrac{2eU}{m} \Longrightarrow V_2^2 = 2(\dfrac{2eU}{m})$

Donc : $V_n^2 = n(\dfrac{2eU}{m})$ avec n le nombre de passage du proton entre les deux Dees.
Comme le nombre de tours N représente $\dfrac{n}{2}$ alors

$$N = \frac{R_s^2 eB^2}{4m_p U_m} \xrightarrow{\text{A.N}} N = 0,5$$

8▷ Puissance rayonnée.

8.1▹ La puissance P_r rayonnée :
On a : $P_r = \dfrac{\mu_o e^2}{6\pi c} a^2$ et puisque le mouvement circulaire et uniforme alors $\vec{a} = \dfrac{V^2}{R}\vec{N}$ ce qui permet d'écrire

$$P_r = \frac{\mu_o q^2}{6\pi c}(\frac{V^2}{R})^2 \Longrightarrow P_r = \frac{\mu_o e^2}{6\pi c R^2} V^4 \qquad \text{donc} \qquad \alpha = \frac{\mu_o e^2}{6\pi c R^2}$$

8.2▹ L'énergie rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire :
On a : $E_r = P_r \dfrac{T}{2}$ donc

$$E_r = \frac{m\mu_o e}{6BcR^2} V^4 \Longrightarrow E_r = \frac{2\mu_o e}{3cBmR_s^2}\mathscr{E}_c^2(s) \xrightarrow{\text{A.N}} E_r = 3,927 \times 10^{-26}\,\text{J}$$

Conclusion:

$\dfrac{E_r}{\mathscr{E}_c(s)} = 2 * 10^{-12} \Longrightarrow E_r \ll \mathscr{E}_c(s)$

L'énergie rayonnée est très négligeable devant l'énergie cinétique

3.2.5 Mouvement dans un champ électromagnétique uniforme dans le vide.

Une particule électrique ponctuelle M de masse m et portant une charge $q > 0$ mobile dans une région d'espace où règne un champ :

- Électrique uniforme $\overrightarrow{E} = E\,\overrightarrow{e_y}, \quad E > 0$
- Magnétique uniforme $\overrightarrow{B} = B\,\overrightarrow{e_z}, \quad B > 0$

La charge est émise sans vitesse initiale au point O à $t = 0$.

1⊵ Vérifier que le poids est négligeable. Pour cela comparer la norme du poids d'un électron de masse $m_e = 9,11.10^{-31}\ kg$ et de charge $e = -6,11.10^{-19}\ C$ et la force de Coulomb. On donne $g = 10\ m.s^{-2}$ et $E = 10\ V.m^{-1}$

2⊵

2.1▹ Par application de la RFD trouver un système de trois équations différentielles scalaires vérifiées par x, y et z.

2.2▹ Résoudre ce système et en déduire $x(t), y(t)$ et $z(t)$ on posera : $\omega = \dfrac{qB}{m}$

2.3▹ Représenter la trajectoire .

2.4▹ En déduire le rayon de courbure en fonction des données.

3⊵ On suppose maintenant que la particule possède une vitesse initiale : $\overrightarrow{V}_o = V_o\,\overrightarrow{e_x}$.

3.1▹ Retrouver :$x(t), y(t)$.

3.2▹ Pour quelle valeur particulière v_{oc} de v_o , la charge décrit un mouvement rectiligne confondu avec Ox. Exprimer v_{oc} en fonction de E et B.

3.3▹ Que peut-on dire dans ce cas sur la force exercée sur la charge.

3.4▹ Représenter la trajectoire de la particule dans le cas ou $v_o = 2v_{oc}$.

Correction

1⊵

1.1▹ $m\overrightarrow{a} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{V}_i \wedge \overrightarrow{B}) \Longrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}B & (1) \\ m\ddot{y} = q(E - \dot{x}B) & (2) \\ m\ddot{z} = 0 & (3) \end{cases}$

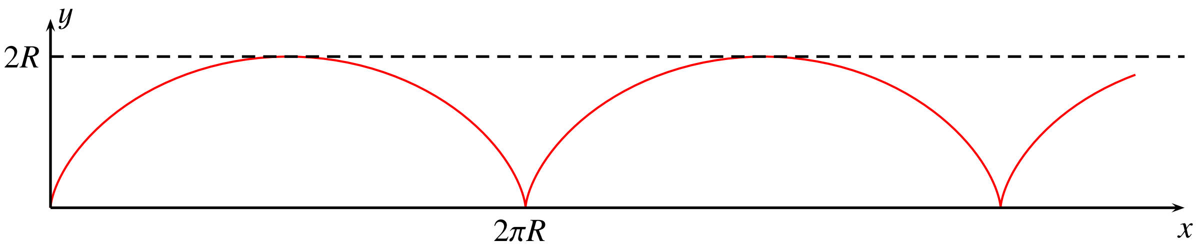
1.2▹ Par intégration on trouve :

$$\boxed{x = \frac{E}{B\omega}(\omega t - \sin\omega t)}$$

$$\boxed{y = \frac{E}{B\omega}(1 - \cos\omega t)}$$

$$\boxed{z = 0 \quad \text{mouvement plan}}$$

1.3▹ Representation graphique (on prend $\dfrac{E}{B\omega} = 1$)



1.4▹ Le rayon de courbure est

$$\boxed{\rho_c = \frac{4E}{B\omega}|\sin(\frac{\omega t}{2})|}$$

2▹

2.1▹ $\overrightarrow{V}_i = v_o \overrightarrow{e_x}$

2.1.1⋄

$$\boxed{x = \frac{E}{B\omega}(\omega t - \sin\omega t) + \frac{v_o}{\omega}\sin(\omega t)}$$

$$\boxed{y = (\frac{E}{B} - v_o)\frac{1}{\omega}(1 - \cos\omega t)}$$

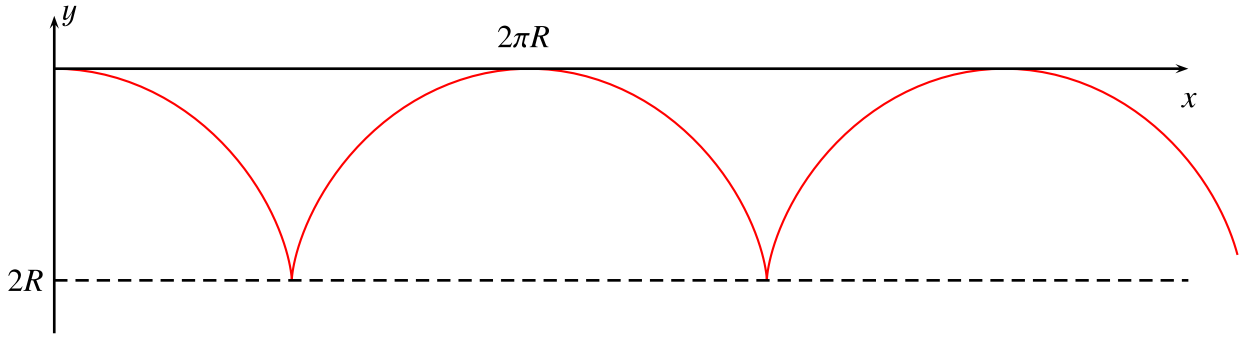
2.1.2⋄ Le mouvement est rectiligne confondu avec ox :$\forall t \Longrightarrow$

$$\boxed{v_{oc} = \frac{E}{B}}$$

2.1.3⋄ $\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{V}_i \wedge \overrightarrow{B}) = \overrightarrow{0}$ la force magnétique compense la force électrique

2.1.4⋄ Representation graphique avec $v = 2v_{oc}$

On rappelle que dans ce cas , on a : $\begin{cases} x = \dfrac{E}{B\omega}(\omega t + \sin\omega t) \\ y = -\dfrac{E}{B\omega}(1 - \cos\omega t) \end{cases}$



Remarque

Lorsque la vitesse de la particule chargée n'est plus négligeable devant la célérité de la lumière alors la mécanique relativiste montre que :

- *l'énergie cinétique de la particule chargée s'écrit :*

$$\boxed{\mathscr{E}_c = (\gamma - 1)mc^2}$$

- *la quantité de mouvement :*

$$\boxed{P = \gamma m v}$$

Avec $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ *(facteur de Lorentz) et* $\beta = \dfrac{v}{c}$

3.3 Mouvement d'une particule chargée dans un métal

3.3.1 Modèle de DRUDE

On rappelle que les électrons dans un atome se répartissent en :

- des électrons du cœur fortement liés au noyau.
- des électrons de valence libre à se déplacer dans un métal (nommés les électrons de conduction)

Hypothèses de Drude:

- Le noyau de l'atome ainsi les électrons du cœur sont fixes dans le référentiel lié au conducteur.
- Les électrons de conduction (formant un gaz d'électrons) se déplacent librement dans le conducteur d'une façon isotrope.
- Les collisions des électrons de conduction avec les ions sont instantanées, par contre les électrons de conduction sont indépendants.

Soit τ la durée moyenne entre deux collisions consécutives d'un porteur de charge.
Entre l'instant t et $t + dt$ la probabilité pour qu'une particule entre en collision est $\dfrac{dt}{\tau}$
τ est dit temps de collision ou temps de relaxation.
Soient $\overrightarrow{p_i} = m_i\overrightarrow{V}_i$ la quantité de mouvement de la particule i et

$$\overrightarrow{p} = \sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{p_i}$$

la quantité de mouvement totale ; donc

$$\overrightarrow{p_m} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{p_i}$$

La quantité de mouvement moyenne d'une particule.
Sachant que :

$$\overrightarrow{p_m}(t+dt) = \frac{dt}{\tau}\overrightarrow{p_{mc}}(t) + (1 - \frac{dt}{\tau})\overrightarrow{p_m}(t)$$

Et comme après collision le champs des vitesses est isotropes alors $\overrightarrow{p_{mc}} = \overrightarrow{0}$ (après collision le champ des vitesses est isotrope).
Il en résulte que

$$\overrightarrow{p_m}(t+dt) - \overrightarrow{p_m}(t) = -\frac{dt}{\tau}\overrightarrow{p_m}(t) \Longrightarrow \frac{\overrightarrow{p_m}(t+dt) - \overrightarrow{p_m}(t)}{dt} = \overrightarrow{f} = -\frac{\overrightarrow{p_m}}{\tau}$$

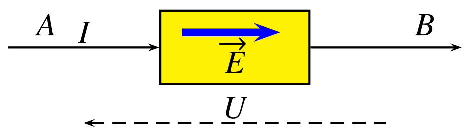
Conclusion

La force de collision des électrons de conduction dans un conducteur est de type frottement visqueux

$$\overrightarrow{f_c} = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{V}$$

3.3.2 Vecteur densité de courant électrique. Loi d'Ohm locale

Considérons un conducteur AB traversé par un courant continu I du à une différence de potentielle $U = V_A - V_B > 0$



On applique la relation fondamentale de la dynamique sur un porteur de charge de masse m et de charge q dans un référentiel lié au conducteur supposé galiléen :

$$q\overrightarrow{E} - \frac{m}{\tau}\overrightarrow{V} = m\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}$$

Avec $\frac{m}{\tau}\overrightarrow{V}$ la force de collision.
Ce qui donne

$$\frac{d\overrightarrow{V}}{dt} + \frac{1}{\tau}\overrightarrow{V} = \frac{q}{m}\overrightarrow{E}$$

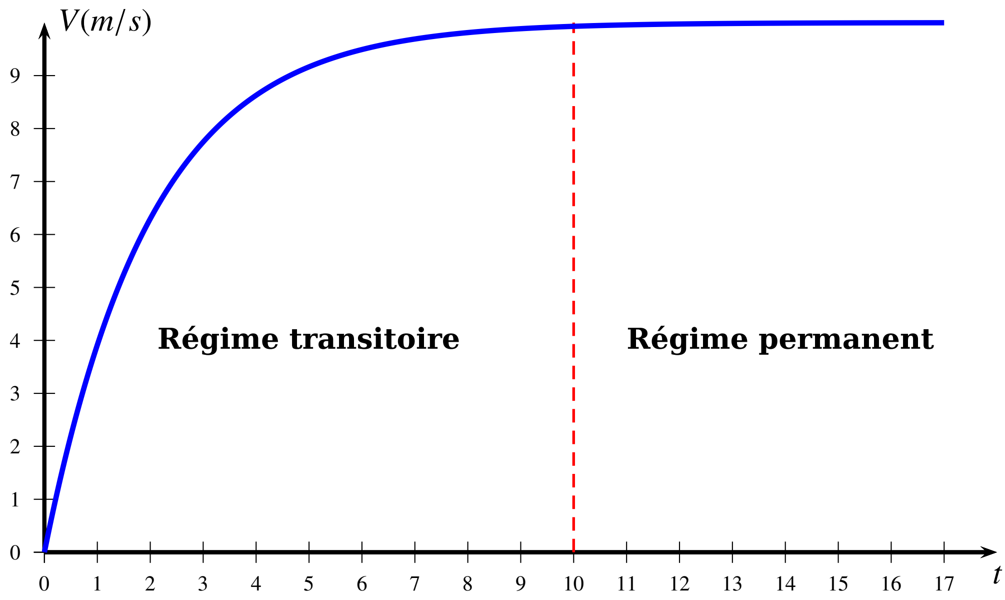
La solution de cette équation différentielle est

$$\overrightarrow{V}(t) = \overrightarrow{A}\exp-\frac{t}{\tau} + \frac{q\tau}{m}\overrightarrow{E}$$

Supposons qu'à $t = 0$ on a $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{0}$ ce qui donne $\overrightarrow{A} = -\frac{q\tau}{m}\overrightarrow{E}$.
Il en résulte que

$$\boxed{\overrightarrow{V} = \frac{q}{\lambda}\overrightarrow{E}(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))}$$

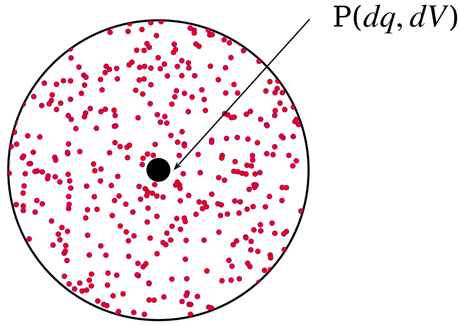
Représentons la norme de la vitesse



En régime permanent on a :

$$\boxed{\overrightarrow{V} = \frac{q\tau}{m}\overrightarrow{E}}$$

Soit une distribution de charges (D) telle que Q la charge totale et V le volume occupé.



Distribution de charge(Q, V)

Soit P un point du domaine D délimité par le volume élémentaire dV et contenant la charge élémentaire dq On définit la densité volumique volumique de charge au point P par

$$\boxed{\rho_q = \frac{dQ}{dV} = \frac{d(Nq)}{dV} = nq}$$

Avec $n = \dfrac{dN}{dV}$ la densité particulaire de particulaire (nombre de particules par unité de volume) et N le nombre de particules de charges dans le volume V.

On appelle vecteur densité de courant le vecteur

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho_q \overrightarrow{V}}$$

Ce qui donne

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{j}} = \frac{\rho_q q\tau}{m}\overrightarrow{E} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathbf{j}} = \frac{nq^2\tau}{m}\overrightarrow{E}}$$

On pose

$$\boxed{\sigma = \gamma = \frac{nq^2\tau}{m} \qquad (S.m^{-1})}$$

conductivité du conducteur

$$\boxed{\rho_r = \frac{1}{\sigma} \qquad (\Omega.m)}$$

résistivité du conducteur

Il en résulte que en régime permanent

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{j}} = \sigma\overrightarrow{E}}$$

C'est la loi d'Ohm locale

Tableau des valeurs:

Métal	Ag	Cu	Au	Zn	Fe	Pb	Ti	Hg
$\sigma(MS.m^{-1})$	62,1	58,5	44,2	16,6	10,1	4,7	2,4	1,1

Activité

Quelle est l'ordre de grandeur de τ pour le cuivre.

- *On suppose que chaque atome contribue par un seul électron.*
- *M(Cu)*=$63 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg\,mol^{-1}}$.
- $\rho(Cu)$= *8,92* $\times 10^{3}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.
- *La constante d'Avogadro :* $\mathcal{N}_A = 6,02 \times 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$

Correction

$$\boxed{\tau = \frac{\sigma m M(Cu)}{e^2\rho(Cu)\mathcal{N}_A} \xrightarrow{\text{A.N}} \tau = 2,5 \times 10^{-14}\,\mathrm{s}}$$

3.3.3 Résistance électrique d'un conducteur cylindrique

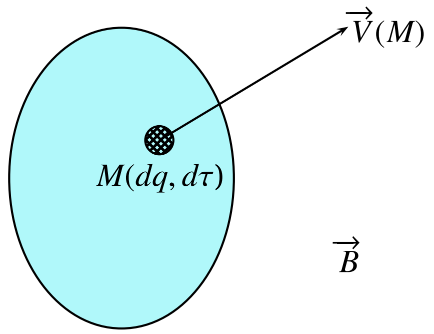
On rappelle que pour un conducteur cylindrique de section S et de longueur L on a la résistance R vaut

$$\boxed{R = \rho_{res}\frac{L}{S} = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{S}}$$

Plus de détail voir cours électromagnétisme

3.4 Force de Laplace

La force de Laplace est la force magnétique qui s'exerce sur un conducteur traversé par un courant dans une région de l'espace où règne un champ magnétique $\overrightarrow{B}$.



Conducteur

L'élément de volume $d\tau$ d'un conducteur subit la force élémentaire de Lorentz :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{F}}{d\tau} = \overrightarrow{\mathbf{j}} \wedge \overrightarrow{B} \Longrightarrow d\overrightarrow{F} = d\overrightarrow{C} \wedge \overrightarrow{B}}$$

La densité volumique des forces de Laplace

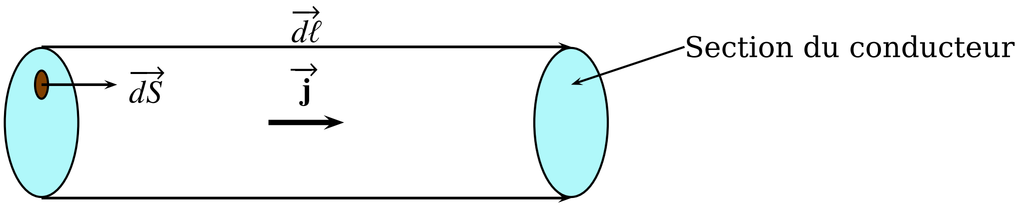
Notations

Élément de courant

$$d\overrightarrow{C} = \overrightarrow{\mathbf{j}}\, d\tau = \overrightarrow{\mathbf{j}}_s dS = I d\overrightarrow{\ell}$$

Remarque

1. Cas d'un circuit filiforme traversé par un courant permanent : $d\overrightarrow{C} = I d\overrightarrow{\ell}$



Ce qui donne

$$\boxed{d\overrightarrow{F} = \int_{\text{circuit}} I d\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B}}$$

Donc pour un conducteur fermé, parcouru par un courant permanent I, la force de Laplace s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{F} = I \oint_{\text{circuit}} d\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B}}$$

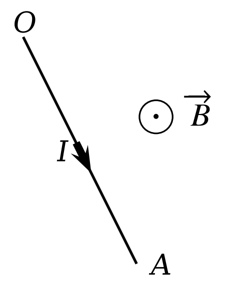
2. Si ce circuit est parcouru par un courant permanent I et plongé dans un champ magnétique $\overrightarrow{B}$, alors chaque élément de circuit $\overrightarrow{d\ell} = d\overrightarrow{OP}$, situé autour de P, subit une force de Laplace : $d\overrightarrow{F} = Id\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B}$.
   Le moment par rapport à un point A quelconque de la force de Laplace sur l'ensemble du circuit est alors

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \oint_{\text{circuit}} \overrightarrow{AP} \wedge d\overrightarrow{F} = \oint_{\text{circuit}} \overrightarrow{AP} \wedge (\overrightarrow{\mathbf{j}} \wedge \overrightarrow{B})d\tau = \oint_{\text{circuit}} \overrightarrow{AP} \wedge (Id\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B})}$$

Application 1 :

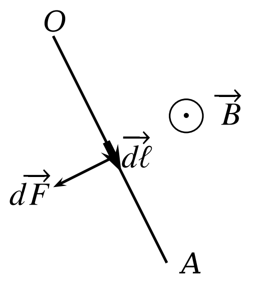
Force de Laplace appliquées à une tige

Une tige OA est parcourue par un courant d'intensité I ; elle baigne dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}_o$ qui lui est orthogonal (voir figure ci-contre)



1. *Déterminer la résultante des forces de Laplace appliquée sur la tige.*
2. *Calculer le moment en O de ces forces.*

Correction



1. *Puisque le circuit est filiforme alors* $d\overrightarrow{F} = \int_O^A Id\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B}$.
   Sachant que I est permanent et $\overrightarrow{B}_o$ uniforme alors

$$\boxed{\overrightarrow{F} = I\overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{B}_o}$$

2. *On a pour tout point $M \in [O, A]$ tel que $\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}$:*

$$d\overrightarrow{\mathcal{M}}_o = \overrightarrow{OM} \wedge (Id\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{B}_o)$$

   On rappelle que

$$1 \wedge (2 \wedge 3) = 2(1.3) - 3(1.2)$$

   Donc : $d\overrightarrow{\mathcal{M}}_o = Id\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{B}_o) - I\overrightarrow{B}_o(\overrightarrow{OM}.d\overrightarrow{OM})$
   Puisque $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{B}_o$ sont perpendiculaires alors $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{B}_o = 0$ ainsi

$$\overrightarrow{OM}.d\overrightarrow{OM} = d(\frac{1}{2}\overrightarrow{OM}^2 + cte)$$

Ce qui donne que

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{M}}_o = -\frac{1}{2}I(OA)^2\overrightarrow{B}_o}$$

Activité

Modèle de Drude

d'après CONCOURS G2E SESSION 2012

Le modèle de Drude (du nom du physicien Paul Drude) est une adaptation effectuée en 1900 de la théorie cinétique des gaz aux électrons des métaux (découvertes 3 ans plus tôt, en 1897 par J.J. Thomson).
Bien que se fondant sur des hypothèses démenties depuis (description purement classique du mouvement des électrons), le modèle permet de rendre compte de plusieurs propriétés des métaux, notamment de leur conductivité électrique et thermique.
Les électrons libres du métal qui contribuent à la conduction sont uniformément répartis et sont animés d'un mouvement d'ensemble par des champs électriques ou magnétiques et freinés dans ce mouvement par des collisions.
On donne pour les électrons :
- masse : $m = 9\times10^{-31}$ kg.
- charge : $-e$ *avec* $e = 1{,}6\times10^{-19}$ C.
- densité volumique : n *en électrons par* m^3.
Les électrons sont ici soumis à l'action d'un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E} = E\,\overrightarrow{e_x}$ *et à une force de frottement traduisant les chocs dans le réseau cristallin* $\overrightarrow{f} = -\frac{m}{\tau}\overrightarrow{v}$ *ou* τ *est la durée moyenne entre deux chocs et* $\overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{e_x}$ *la vitesse d'un électron dans le référentiel lié au métal, suppose galiléen et rapporté au repère cartésien* $(O, \overrightarrow{e_x})$.

1 ▷ *En appliquant la relation fondamentale de la dynamique à un électron, montrer que la vitesse de l'électron tend, en regime permanent, vers une constante notée* $\overrightarrow{v}_\infty$ *que l'on précisera.*

2 ▷ *En déduire le vecteur densité volumique de courant* $\overrightarrow{j} = j\,\overrightarrow{e_x}$ *en fonction de* e, n, m, τ *et* $\overrightarrow{E}$*, et montrer que la conductivité électrique du métal s'écrit alors :* $\sigma = \dfrac{n\tau e^2}{m}$.

3 ▷ *Le métal considéré est du cuivre de masse volumique* $\mu = 8900\ kg.m^3$ *et de masse molaire* $M = 63{,}54$ g mol^{-1}*. Chaque atome de cuivre libère un électron de conduction.*
On donne : $\tau = 2{,}5\times10^{-16}$ s *et le nombre d'Avogadro* $\mathcal{N}_A = 6{,}02\times10^{23}$.
Calculer la valeur de la conductivité σ *du cuivre.*

4 ▷ *Exprimer, en régime permanent, la puissance par unite de volume de la force électrique, ainsi que celle de la force de frottement, et comparer ces deux puissances.*

5 ▷ *Exprimer cette puissance volumique dissipée en fonction de* σ *et* E.

6 ▷ *On considère un conducteur cylindrique de section droite* S *et de longueur* L*, parcouru par un courant d'intensité* I *circulant le long de l'axe du cylindre.*

6.1 ▷ *Exprimer* j *et* E *en fonction de* I, S *et* σ.

6.2 ▷ *Exprimer la puissance dissipée dans ce conducteur par effet Joule et en déduire l'expression de la résistance* R *du conducteur cylindrique en fonction de* L, S *et* σ.

Correction

1 ▷ Dans $\mathcal{R}$ galiléen et puisque le poids est négligeable alors :

$$\overrightarrow{F} + \overrightarrow{f} = m_e \overrightarrow{a} \Longrightarrow m_e \frac{d\overrightarrow{V}}{dt} = -e\overrightarrow{E} - \frac{m_e}{\tau}\overrightarrow{V}$$

Par projection suivant l'axe Ox , on obtient :

$$\boxed{\frac{dV}{dt} + \frac{1}{\tau}V = -\frac{e}{m_e}E}$$

En régime permanent $V \to V_\infty = cte \Longrightarrow \dfrac{dV_\infty}{dt} = 0$ ce qui donne

$$\boxed{\overrightarrow{V}_\infty = -\frac{e\tau}{m_e}\overrightarrow{E}}$$

2 ▷ Le vecteur densité de courant :
Sachant que $\rho = -ne$ alors

$$\boxed{\overrightarrow{\mathbf{j}} = \rho \overrightarrow{V} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathbf{j}} = \frac{ne^2\tau}{m_e}\overrightarrow{E}}$$

Par conséquent la conductivité :

$$\boxed{\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e}}$$

3 ▷ La valeur numérique de la conductivité du cuivre :
Comme : $n = \dfrac{N}{V}$ et $\dfrac{N}{\mathcal{N}_A} = \dfrac{m(Cu)}{M(Cu)} \Longrightarrow n = \dfrac{N}{V} = \mu(Cu)\dfrac{\mathcal{N}_A}{M(Cu)}$ alors :

$$\boxed{\sigma = \frac{\mu(Cu)\mathcal{N}_A e^2\tau}{m_e M(Cu)} \xrightarrow{\text{A.N}} \sigma = 6 \times 10^6\,\mathrm{S\,m^{-1}}}$$

4 ▷ La puissance par unite de volume de :

▸ la force électrique :

On a : $d\mathscr{P}_e = d\overrightarrow{F}_e.\overrightarrow{V}$ et comme $d\overrightarrow{F}_e = dq\overrightarrow{E}$ et $dq = \rho d\tau \Longrightarrow dq = -ned\tau$ alors :

$$\frac{d\mathscr{P}_e}{d\tau} = -ne\overrightarrow{E}.\overrightarrow{V}$$

Or : $\overrightarrow{V} = -\dfrac{e\tau}{m_e}\overrightarrow{E}$
Il en résulte que :

$$\boxed{\frac{d\mathscr{P}_e}{d\tau} = \frac{ne^2\tau}{m_e}\overrightarrow{E}^2}$$

- la force de frottement :

On a : $d\mathscr{P}_J = (\overrightarrow{f}.\overrightarrow{V})dN$ et comme $dN = nd\tau$ alors

$$\boxed{\frac{d\mathscr{P}_J}{d\tau} = -\frac{ne^2\tau}{m_e}\overrightarrow{E}^2}$$

On remarque que

$$\boxed{\frac{d\mathscr{P}_e}{d\tau} = -\frac{d\mathscr{P}_J}{d\tau}}$$

Conclusion:

En régime permanent la puissance dissipée par effet Joule est compensée par la force électrique

5 ▷ On a :

$$\boxed{\frac{d\mathscr{P}_J}{d\tau} = -\frac{ne^2\tau}{m_e}\overrightarrow{E}^2 \Longrightarrow \frac{d\mathscr{P}_J}{d\tau} = -\sigma\overrightarrow{E}^2}$$

6 ▷

6.1▷ Comme $I = jS \Longrightarrow j = \dfrac{I}{S}$ et puisque $j = \sigma E$ alors

$$\boxed{E = \frac{1}{\sigma}\frac{I}{S}}$$

6.2▷ On a : $\dfrac{d\mathscr{P}_J}{d\tau} = -\sigma\overrightarrow{E}^2 \Longrightarrow \dfrac{d\mathscr{P}_J}{d\tau} = -\dfrac{1}{\sigma}\dfrac{I^2}{S^2}$

par intégration, on obtient :

$$\boxed{\mathscr{P}_J = -\left(\frac{1}{\sigma}\frac{L}{S}\right)I^2 = -RI^2 < 0}$$

donc

$$\boxed{R = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{S}}$$

CHAPITRE 4

THÉORÈME DU MOMENT CINÉTIQUE

4.1 Le moment cinétique ,moment d'une force

4.1.1 Définition du moment cinétique

Définition

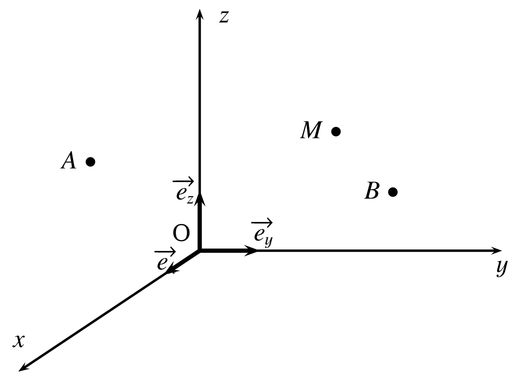
- *On appelle moment cinétique d'un point matériel M de masse m animé de la vitesse $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$, en un point A, le vecteur :*

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_A}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{L}_A(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) \qquad (kg.m^2/s)}$$

N.B Le moment cinétique est un vecteur lié.

4.1.2 Propriété du moment cinétique

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel , A et B deux points quelconques et M un point matériel de masse m , de vitesse $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$.



On a :

- Le moment cinétique en A : $\overrightarrow{\sigma_A}(M/\mathbf{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) \qquad (1).$
- Le moment cinétique en B : $\overrightarrow{\sigma_B}(M/\mathbf{R}) = \overrightarrow{BM} \wedge m\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) \qquad (2).$

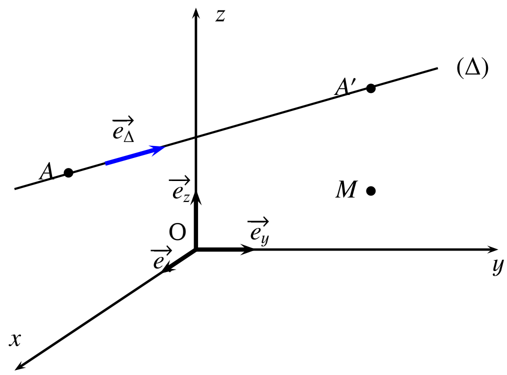
- (2)-(1) donne :

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_B}(M/\mathbf{R}) = \overrightarrow{\sigma_A}(M/\mathbf{R}) + \overrightarrow{BA} \wedge m\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})}$$

Conclusion:

On dit que le moment cinétique est un torseur appelé torseur cinétique dont les éléments de réduction sont $\overrightarrow{\sigma_A}(M/\mathbf{R})$ et la quantité de mouvement $\overrightarrow{P}(M/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$.

Soit Δ une droite et $\overrightarrow{e_\Delta}$ un vecteur unitaire sur (Δ).



Définition

On appelle moment cinétique par rapport à l'axe Δ la projection du moment cinétique par rapport à l'axe Δ, on le note $\sigma_\Delta = \overrightarrow{\sigma}.\overrightarrow{e_\Delta}$

Soit A et A' deux points quelconque sur l'axe (Δ).
Comme : $\overrightarrow{\sigma_A} = \overrightarrow{\sigma_{A'}} + \overrightarrow{AA'} \wedge m\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$
par projection suivant $\overrightarrow{e_\Delta}$ on obtient :

$$\boxed{\sigma_\Delta = \overrightarrow{\sigma_A}.\overrightarrow{e_\Delta} = \overrightarrow{\sigma_{A'}}.\overrightarrow{e_\Delta}}$$

Conclusion:

Le moment cinétique par rapport à l'axe (Δ) ne dépend pas du point A (sur (Δ))

4.1.3 Définition du moment d'une force

Définition

On appelle moment d'une force en un point A , d'une force $\overrightarrow{F}$ appliqué en un point M le vecteur :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{M}}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F} \qquad (m.N)}$$

N.B : Le moment d'une force est un vecteur lié.

4.1.4 Propriété du moment d'une force

Soient A et B deux points quelconques de l'espace.
Sachant que :

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_A = \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{F} \tag{4.1}$$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_B = \overrightarrow{BM} \wedge \overrightarrow{F} \tag{4.2}$$

(1.2)-(1.1) donne

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{M}}_B = \overrightarrow{\mathscr{M}}_A + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{F}}$$

Conclusion:

le moment d'une force est un torseur appelé torseur cinétique dont les éléments de réduction sont $\overrightarrow{\mathscr{M}}_A$ et $\overrightarrow{F}$

4.1.5 Théorème du moment cinétique

Soit A un point fixe d'un référentiel $\mathcal{R}$.
Calculons la dérivée temporaire par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ du moment cinétique.

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge m\overrightarrow{V}(M) + \overrightarrow{AM} \wedge m\frac{d\overrightarrow{V}(M)}{dt}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{\sigma_A}}{dt} = \overrightarrow{AM} \wedge m\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R})$$

$$\Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{\sigma_A}}{dt} = \overrightarrow{AM} \wedge \Sigma\overrightarrow{F}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{\sigma_A}}{dt} = \Sigma\overrightarrow{\mathscr{M}}_A(\overrightarrow{F})$$

$$\boxed{\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_A}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \Sigma\overrightarrow{\mathscr{M}}_A(\overrightarrow{F})}$$

c'est le théorème du moment cinétique avec A un point fixe

Propriété

Théorème du moment cinétique

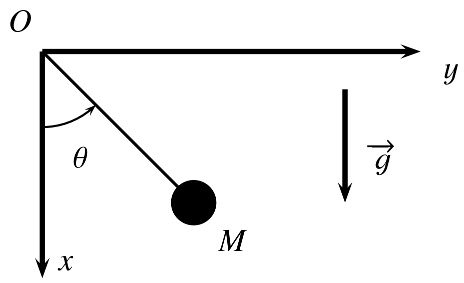
Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la dérivée temporelle du moment cinétique par rapport à un point fixe A est égale à la somme des moments des forces extérieures calculés par rapport à A.

Remarque

Souvent on prend A≡ O origine du repère

4.2 Applications

4.2.1 Pendule simple



On a :

- $\overrightarrow{OM} = l\,\overrightarrow{e_r} \Longrightarrow \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = l\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$
- $\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) \Longrightarrow \overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R}) = ml^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$ donc

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = ml^2\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$$

- $\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{P}) = -mgl\sin\theta\,\overrightarrow{e_z}$

On tire donc que

$$\boxed{l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0}$$

C'est l'équation pendulaire

Remarque

L'équation pendulaire est une équation différentielle **non linéaire** *puisque la fonction* $\sin(x)$ *est non linéaire* ($\sin(a+b) \neq \sin a + \sin b$)

pour les faibles oscillations ($\theta_{max} \leqslant 15^o$) on a : $\sin\theta \simeq \theta$ donc l'équation différentielle devient

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

Dans ce cas l'équation différentielle devient linéaire, dont la solution s'écrit :

$$\theta(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t \qquad \text{avec} \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

Si on suppose que (Les conditions initiales) : $\theta(t=0) = \theta_o$ et $V(t=0) = V_o$ alors :

$$A = \theta_o \qquad et \quad B = \frac{V_o}{\omega\ell}$$

Il en résulte que

$$\boxed{\theta(t) = \theta_o \cos(\omega t) + \frac{V_o}{\omega \ell} \sin(\omega t)}$$

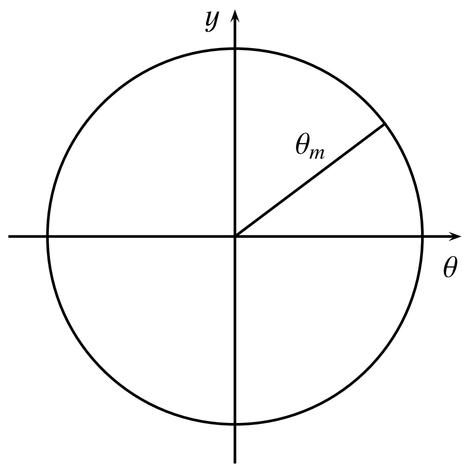
Qu'on peut écrire

$$\boxed{\theta(t) = \theta_m \cos(\omega t + \varphi) \qquad \text{avec} \quad \theta_m = \sqrt{\theta_o^2 + \left(\frac{V_o}{\ell\omega}\right)^2} \quad et \quad \tan\varphi = -\frac{V_o}{\ell\omega\theta_o}}$$

Si on pose $y = \dfrac{\dot{\theta}}{\omega}$ alors

$$\boxed{\theta^2 + y^2 = \theta_m^2}$$

C'est l'équation de la trajectoire de phase : cercle de centre l'origine et de rayon θ_m.



4.2.2 Propriétés de la trajectoire d'un satellite artificiel

Un satellite artificiel,S, assimilable à point matériel de masse m, évolue librement à grande distance de la Terre. La Terre est considérée comme un corps immobile, rigoureusement sphérique et homogène, de rayon R, de masse Met de centre O. On désigne par $\overrightarrow{r}(t) = \overrightarrow{OS}$, le vecteur position du satellite et par $\overrightarrow{V}$ son vecteur vitesse. A l'instant initial $t = 0$, le satellite se trouve dans la position $\overrightarrow{r}_o$, animé de la vitesse $\overrightarrow{V}_o$, non radiale. L'influence de la Lune, du Soleil, des autres planètes, ainsi que celle de l'atmosphère sont ignorées.

On étudie la situation pour $t > 0$.

1⊳ Donner l'expression vectorielle du champ de force $\overrightarrow{F}(r)$ auquel est soumis le satellite.

- On désignera par G la constante de gravitation universelle et par $\overrightarrow{e_r}$ le vecteur unitaire radial.

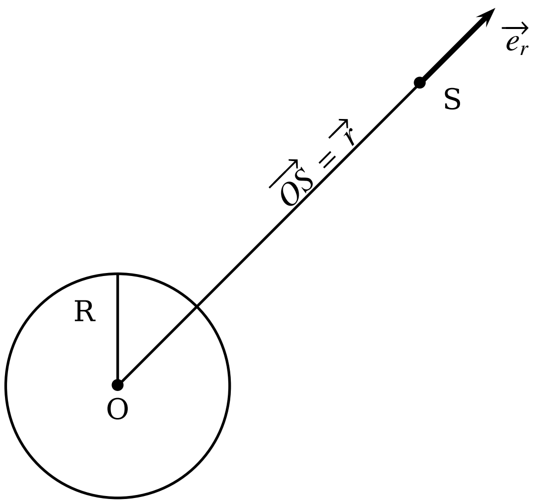
S'agit il d'un champ de force central ?

2⊳ Définir le vecteur moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}_o$ du satellite, par rapport au centre O.

3⊳ Montrer que, quel que soit $t \geq 0$, le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma}_o$ du satellite est constant, égal à une valeur σ_o . Expliciter σ_o .

4⊳ Justifier le fait que la trajectoire suivie par le satellite, pour $t \geq 0$, est entièrement contenue dans un plan fixe Π, que l'on précisera.

Correction



1 ⊳ L'expression de la force :

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mathscr{G}Mm}{r^2}\vec{e}_r}$$

Puisque la direction de la force $\vec{F}$ passe toujours par le point O (centre de la terre) alors elle est centrale.

2 ⊳ Le vecteur moment cinétique :

$$\boxed{\vec{\sigma}_o = \overrightarrow{OS} \wedge m\vec{V}(S/\mathcal{R})}$$

3 ⊳ Appliquons le T.M.C en O centre de la terre (point fixe) :

$$\boxed{\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \overrightarrow{\mathscr{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OS} \wedge \vec{F} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{\sigma}_o = \overrightarrow{cte}}$$

4 ⊳ L'expression de σ_o :

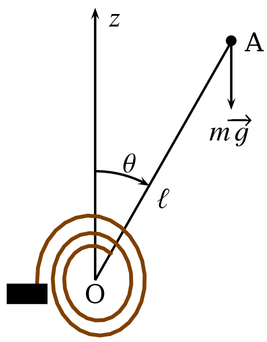
$$\boxed{\sigma_o = mr_oV_o\sin(\widehat{\vec{r}_o, \vec{V}_o})}$$

5 ⊳ Puisque le moment cinétique est constant alors la trajectoire est plane , déterminé par les conditions initiales :

$$\boxed{\Pi = (\overrightarrow{OS}_o, \vec{V}_o)}$$

4.2.3 Pendule de HOLWECK LEIAY

Une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable, de longueur ℓ= OA, articulée en un point fixe O et mobile dans un plan vertical; un ressort spiral exerce sur cette tige un couple de rappel $-C\theta$, où θ désigne l'angle que fait la tige avec la verticale ascendante Oz. On désigne par g l'intensité du champ de pesanteur.



1▷ Le système étant conservatif et à un degré de liberté , former l'expression de l'énergie mécanique totale du système.
L'expression précédente est une constante du mouvement ou intégrale première.

2▷ En déduire l'équation du mouvement.
3▷ Retrouver l'équation différentielle en utilisant le TMC.
4▷ En considérant θ comme petit, à quelle condition la position $\theta = 0$ correspond elle à un équilibre stable d'un oscillateur harmonique ?
5▷ Cette condition étant supposée réalisée, calculer la période T des petites oscillations que l'on écrira sous la forme

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{A-g}}$$

en donnant l'expression de A.

6▷ Calculer la variation relative de la période $\dfrac{\Delta T}{T}$ correspondant à une petite variation g de l'intensité du champ de pesanteur. Montrer que cet appareil peut être rendu plus sensible qu'un pendule simple, dont on appellera $\dfrac{\Delta T_0}{T_0}$ la précision sur la mesure de la période T_0 des petites oscillations.

Correction

1▷ L'énergie mécanique $\mathscr{E}_m$:

$$\boxed{\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p \Longrightarrow \mathscr{E}_m = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}C\theta^2 + mg\ell\cos\theta + cte}$$

2⊵ L'équation différentielle du mouvement :

Absence de force non conservative donc $\mathscr{E}_m = cte$ d 'où $\dfrac{d\mathscr{E}_m}{dt} = 0$ par conséquent

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{m\ell^2}\theta - \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

pour θ faible on a : $\sin\theta \equiv \theta$ ce qui donne :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \left(\frac{C}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell}\right)\theta = 0}$$

3⊵ D'après le T.M.C on a :

$$\frac{d\vec{\sigma}_O}{dt} = \overrightarrow{\mathscr{M}_o}(\vec{P}) + \overrightarrow{\mathscr{M}}_{o\text{torsion}} + \overrightarrow{\mathscr{M}_o}(\vec{R})$$

- $\vec{\sigma}_O = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{V}(A) \Longrightarrow \dfrac{d\vec{\sigma}}{dt} = -m\ell^2\ddot{\theta}\ \vec{e_x}$
- $\overrightarrow{\mathscr{M}_o}(\vec{R}) = \vec{0}$
- $\overrightarrow{\mathscr{M}_o}(\vec{P} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{P} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathscr{M}_o}(\vec{P}) = -mg\ell\sin\theta\ \vec{e_x})$
- $\overrightarrow{\mathscr{M}_o}(\text{torsion}) = C\theta\ \vec{e_x}$ (moment de rappel)

Par conséquent :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{C}{m\ell^2}\theta - \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

4⊵ Pour avoir $\theta = 0$ position d'équilibre stable (avoir un mouvement oscillatoire autour de $\theta = 0$) , il faut que :

$$\boxed{\left(\frac{C}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell}\right) > 0 \Longrightarrow C > mg\ell}$$

5⊵ La période T des petites oscillations :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{\dfrac{C}{m\ell} - g}} \Longrightarrow A = \frac{C}{m\ell}}$$

6⊵ La sensibilité :

- pour un pendule simple :

$$\boxed{T_o = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \Longrightarrow \frac{\Delta T_o}{T_o} = \frac{\Delta g}{2g}}$$

- Pour le pendule de HOLWECK LEIAY :

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{A-g}} \Longrightarrow \frac{\Delta T}{T} = \frac{\Delta g}{2(A-g)}}$$

Le pendule de HOLWECK LEIAY est plus sensible si

$$\boxed{\frac{\Delta T}{T} > \frac{\Delta T_o}{T_o} \Longrightarrow A > 2g}$$

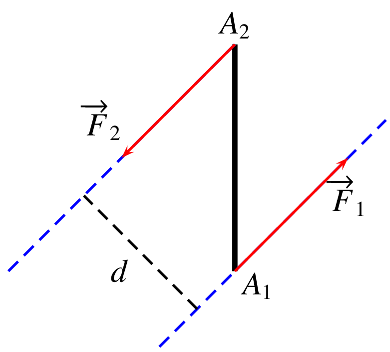
4.3 Les COUPLES

4.3.1 Couple de force

Définition

Deux forces $\overrightarrow{F}_1$ et $\overrightarrow{F}_2$ forment un couple de forces si :

- $\overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 = \overrightarrow{0}$ *: les deux forces ont même direction et norme par contre de sens opposées.*
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{F}_1) + \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{F}_2) \neq \overrightarrow{0}$



On appelle moment du couple qu'on note $\overrightarrow{\mathcal{M}_c} = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{F}_1) + \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{F}_2)$ avec O un point quelconque

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_c} = \overrightarrow{OA_1} \wedge \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{OA_2} \wedge \overrightarrow{F}_2 = Fd\,\overrightarrow{u}}$$

Avec $\overrightarrow{u}$ vecteur unitaire déterminé par la règle de la main droite.

Remarque

En général des forces $\overrightarrow{F}_i$ forment un couple si :

- $\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{F}_i = \overrightarrow{0}$ *et* $\sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{F}_i) \neq \overrightarrow{0}$ *(O un point quelconque)*

N.B : L'action d'un couple sur un corps est de le faire tourner .

4.3.2 Couple de torsion

▶ Lorsqu'on tord un fil d'un angle θ alors il exerce un couple de rappel tel que

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{M}} = -C\theta\overrightarrow{u}}$$

▶ L'énergie potentielle de torsion est

$$\boxed{E_{p,t} = \frac{1}{2}C\theta^2}$$

▶ Pour un fil métallique cylindrique de longueur ℓ de diamètre d la constante de torsion C est donné par la loi de Coulomb

$$\boxed{C = \chi\frac{d^4}{\ell}}$$

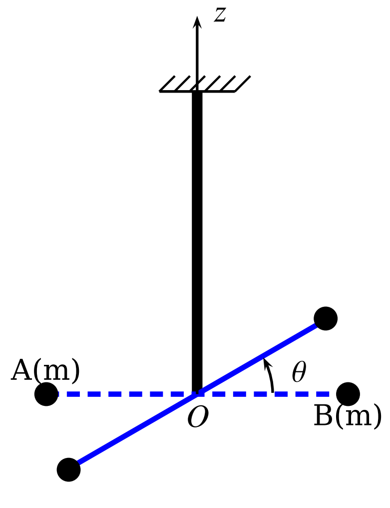
Avec χ une constante caractéristique du métal.

Activité Pendule de torsion

Une barre AB de longueur ℓ et de masse négligeable porte à ses extrémités deux masses ponctuelles identiques (m), suspendue en son milieu O par un fil métallique de constante de torsion C.

On tourne la barre AB dans un plan horizontal d'un angle θ_o, et on la lâche sans vitesse initiale.

Établir la période des oscillations



Correction

Le TMC donne : $\dfrac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R})}{dt} = \overrightarrow{\mathscr{M}_o}(\overrightarrow{P}) + \overrightarrow{\mathscr{M}_o}(\overrightarrow{R}) + \overrightarrow{\mathscr{M}_o}(torsion)$

Sachant que :

- $\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R})(A) + \overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R})(B) \Longrightarrow \overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R}) = \dfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{e_z}$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{OA} \wedge m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{OB} \wedge m\overrightarrow{g} = \overrightarrow{0}$
- $\overrightarrow{\mathcal{M}_c} = -C\theta\,\overrightarrow{e_z}$ couple de torsion.

Alors l'équation différentielle

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2C}{m\ell^2}\theta = 0}$$

- C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique.
- La pulsation propre :

$$\boxed{\omega_o = \sqrt{\frac{2C}{m\ell^2}}}$$

- La période propre des oscillations :

$$\boxed{T_o = 2\pi\sqrt{\frac{m\ell^2}{2C}}}$$

- La solution est :

$$\theta(t) = A\cos\omega_o t + B\sin\omega_o t$$

Si les C.I sont $\theta(t=0) = \theta_o$ et $V = 0$ (sans vitesse initiale) alors

$$\boxed{\theta(t) = \theta_o\cos\omega_o t}$$

CHAPITRE 5

PUISSANCE ET TRAVAIL D'UNE FORCE. THÉORÈME DE L'ÉNERGIE CINÉTIQUE

5.1 Puissance et travail d'une force

5.1.1 Définitions

► On appelle la puissance d'une force $\vec{F}$ appliquée sur un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ la quantité :

$$\boxed{\mathscr{P} = \vec{F}.\vec{V}(M/\mathcal{R}) \quad (watt)}$$

► Lorsque le point M effectue un déplacement élémentaire $d\overrightarrow{OM}$ pendant la durée dt sous l'action d'une force $\vec{F}$, on définit le travail élémentaire par :

$$\boxed{\delta \mathbf{W} = \vec{F}.d\overrightarrow{OM} \quad (Joule)}$$

On remarque que :

$$\boxed{\frac{\delta \mathbf{W}}{dt} = \mathscr{P}}$$

5.1.2 Exemples

5.1.2.1 Travail du poids

On suppose que l'axe Oz orienté vers le haut On a : $\vec{P} = -mg\,\vec{e_z}$ et $d\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{e_x} + dy\,\vec{e_y} + dz\,\vec{e_z}$ donc :

$$\boxed{\delta \mathbf{W} = -mgdz \Longrightarrow \mathbf{W}_{A\to B}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A) = \pm mgh}$$

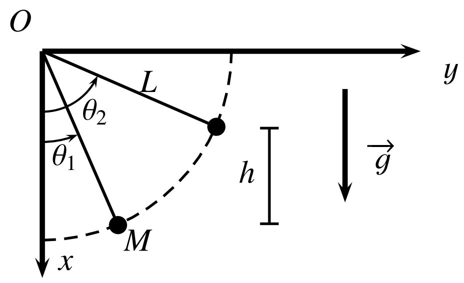
Avec h la hauteur (toujours positive).

- (+) si le travail moteur (le point M se déplace vers le bas (descend)).
- (-) si le travail résistif (le point M se déplace vers le haut (monte)).

Activité

Déterminer le travail du poids lorsqu'un pendule simple passe de $\theta_1 \to \theta_2$ avec $\theta_1 < \theta_2$

Correction



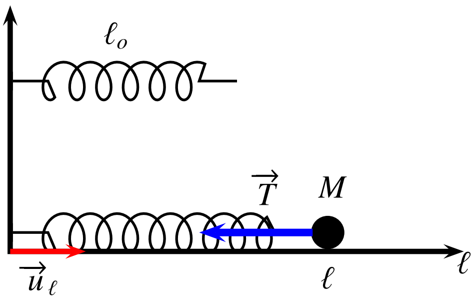
Puisque le point M monte vers le haut alors le signe (-).
Et comme $h = L(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)$ alors :

$$\boxed{\mathbf{W}_{\theta_1\to\theta_2}(\overrightarrow{P}) = -mgL(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)}$$

Cas particulier : $\theta_1 = 0$ et $\theta_2 = \theta$ donc :

$$\boxed{\mathbf{W} = -mgL(1-\cos\theta)}$$

5.1.2.2 Travail de la tension d'un ressort



On a : $\overrightarrow{T} = -k(\ell-\ell_o)\,\vec{u}_\ell$ et $\overrightarrow{dOM} = d\ell\,\vec{u}_\ell$ donc :

$$\boxed{\delta\mathbf{W} = -k(\ell-\ell_o)d\ell \Longrightarrow \mathbf{W}_{\ell_A\to\ell_B}(\overrightarrow{T}) = -\frac{1}{2}k\Big[(\ell_B-\ell_o)^2 - (\ell_A-\ell_o)^2\Big]}$$

Qu'on peut écrire autrement :

$$\boxed{\mathbf{W}(\overrightarrow{T}) = -\frac{1}{2}k(\ell-\ell_o)^2 + cte}$$

5.1.2.3 Travail de la force de Lorentz (Force magnétique)

On a : $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{V}\wedge\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{V}dt$ donc

$$\boxed{\mathbf{W}(\overrightarrow{F}) = 0}$$

5.1.2.4 Travail de la force newtonienne

Définition

On appelle force newtonienne une force de type

$$\boxed{\overrightarrow{F}_N = \frac{\alpha}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}}$$

Exemples

- *Force gravitationnelle :*

$$\boxed{\overrightarrow{F}_G = -\frac{\overrightarrow{G}m_1m_2}{r^2}\,\overrightarrow{e_r} \Longrightarrow \alpha = -\overrightarrow{G}m_1m_2}$$

- *Force coulombienne(électrostatique) :*

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\frac{q_1q_2}{r^2}\,\overrightarrow{e_r} \Longrightarrow \alpha = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_o}}$$

On a : $\delta\mathbf{W}(\overrightarrow{F}_N) = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dOM} \Longrightarrow \delta\mathbf{W}(\overrightarrow{F}_N) = \alpha\frac{dr}{r^2}$.
Par intégration entre les points A et B on obtient :

$$\boxed{\mathbf{W}(\overrightarrow{F}_N) = \alpha\Big(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\Big)}$$

Activité Travail d'une force donnée sur différents trajets

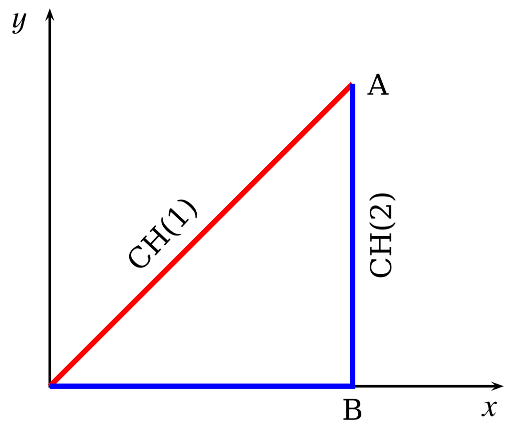
On considère le champ de forces de composantes cartésiennes :

$$F_x = y^2 - x^2 \quad et \quad F_y = 4xy$$

Calculer le travail de cette force pour aller de O (0,0) à A (1,1) :

1. *suivant la droite OA.*
2. *suivant Ox [jusqu'en B (1,0)] puis OY [jusqu'en A(1,1)].*
3. *conclure*

Correction



1/ Suivant le chemin (1) OA on a : $x = y$ donc $dx = dy$, $F_x = 0$ et $F_y = 4x^2$ par conséquent :

$$\boxed{\delta \mathbf{W}_1 = 4x^2 dx \Longrightarrow \mathbf{W}_1 = \frac{4}{3}\text{ J}}$$

2/ Suivant le chemin (2) OBA :

$$\boxed{\delta \mathbf{W}_2 = -x^2 dx + 4y dy \Longrightarrow \mathbf{W}_2 = \frac{5}{3}\text{ J}}$$

Conclusion:

En général le travail d'une force dépend du chemin suivi.

5.2 Énergie cinétique. Théorème de l'énergie cinétique

▸ Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ on a : $\overrightarrow{F} = m\dfrac{d\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\Big|_{\mathcal{R}}$; et comme : $\mathscr{P} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$ alors :

$$\mathscr{P} = m\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}).\frac{d\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})}{dt}_{/\mathcal{R}} \Longrightarrow \mathscr{P} = \frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\overrightarrow{V}^2)$$

Définition

On appelle l'énergie cinétique d'un point matériel M ;de masse m animé de la vitesse par rapport au référentiel $\mathcal{R}$; qu'on note $\mathscr{E}_c$ la quantité :

$$\boxed{\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}m\overrightarrow{V}^2}$$

Remarque

L'énergie cinétique est grandeur positive qui dépend du référentiel.

▶ On a :$\mathscr{P} = \dfrac{\delta W}{dt} = \dfrac{d\mathscr{E}_c}{dt}$ donc :

$$\boxed{\Delta\mathscr{E}_c = \mathbf{W}_{A\to B}(\overrightarrow{F})}$$

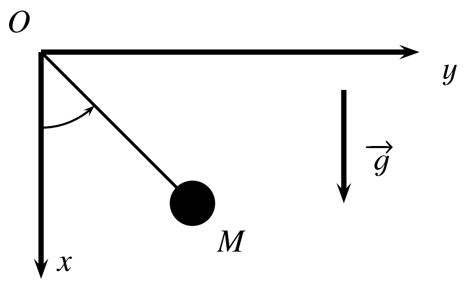
T.E.C

Théorème Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen , la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail entre ces instants des forces qui lui sont appliquées

Activité

Pendule simple



On a : $d\mathscr{E}_c = \delta\mathbf{W} \Longrightarrow \Delta\mathscr{E}_c = \dfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 - \dfrac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}_o{}^2 = \mathbf{W}(\overrightarrow{P}) + \mathbf{W}(\overrightarrow{T})$

- $\mathbf{W}(\overrightarrow{P}) = -mgh = -mg\ell(\cos\theta_o - \cos\theta)$
- $\mathbf{W}(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{0}(\overrightarrow{T} \perp \overrightarrow{e_\theta})$

Par égalité on tire que :

$$\boxed{\dot{\theta}^2 = 2\frac{g}{\ell}(\cos\theta - \cos\theta_o) \qquad (E)}$$

Par simple dérivation temporelle de (E) on obtient : $\dot{\theta}(\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta) = 0$
Puisque $\dot{\theta} \neq 0$ (car sinon alors pas de mouvement)on aura :

$$\boxed{\ell\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0}$$

Remarque

Dans le cas d'une charge ponctuelle soumise seulement à une force magnétique $\overrightarrow{F}_m = q\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{B}$ *alors :* $\dfrac{d\mathscr{E}_c}{dt} = \overrightarrow{F}_m.\overrightarrow{V} = 0$ *Ce qui justifie que :*$\mathscr{E}_c = cte \Longrightarrow V = cte = V_0$

5.3 Force conservatives. Énergie potentielle

5.3.1 Définition

Définition

Une force $\overrightarrow{F}$ est dite conservative si on peut écrire

$$\boxed{\delta \mathbf{W} = \overrightarrow{F}.\overrightarrow{dOM} = -d\mathscr{E}_p}$$

$\mathscr{E}_p$ est appelée énergie potentielle.

5.3.2 Exemples

▶ **Énergie potentielle de pesanteur**

▹ On suppose que l'axe Oz orienté vers le haut :

Dans ce cas : :$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{e_z}$

On suppose que $\overrightarrow{g} = \overrightarrow{cte}$; c'est à dire $\overrightarrow{g}$ **est uniforme**,on obtient :

$\overrightarrow{P}.\overrightarrow{dOM} = -mg\,\overrightarrow{e_z}.(dx\,\overrightarrow{e_x} + dy\,\overrightarrow{e_y} + dz\,\overrightarrow{e_z}) = -mgdz$

$$\boxed{\mathbf{E}_{pp} = mgz + cte}$$

▹ On suppose que l'axe Oz orienté vers le bas :

Dans ce cas : :$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg\,\overrightarrow{e_z}$

Donc $\overrightarrow{P}.\overrightarrow{dOM} = mg\,\overrightarrow{e_z}.(dx\,\overrightarrow{e_x} + dy\,\overrightarrow{e_y} + dz\,\overrightarrow{e_z}) = mgdz$

$$\boxed{\mathbf{E}_{pp} = -mgz + cte}$$

Par conséquent

Conclusion:

$$\boxed{\mathbf{E}_{pp} = \pm mgz + cte}$$

- **(+) Si Oz orienté vers le haut.**
- **(-) Si Oz orienté vers le bas.**

On conclut que si $\overrightarrow{g}$ est uniforme alors le poids $\overrightarrow{P}$ est conservative.

▶ **Énergie potentielle élastique d'un ressort** :

On rappelle que : $\overrightarrow{T} = -k\overrightarrow{OM}$, avec O position d'équilibre .

Si on pose :$\overrightarrow{OM} = (\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{e_x} = x\,\overrightarrow{e_x}$

alors : $\overrightarrow{T}.\overrightarrow{dOM} = -kx\,\overrightarrow{e_x}.x\,\overrightarrow{e_x} \Longrightarrow \overrightarrow{T}.\overrightarrow{dOM} = d(-\frac{1}{2}kx^2 + cte)$

d'où :

$$\boxed{\mathbf{E}_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 + cte = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 + cte}$$

On conclut que la tension d'un ressort est une force conservative.

► **Énergie potentielle gravitationnelle**

On rappelle que : $\overrightarrow{F} = -\frac{Gm_Am_B}{r^2}\overrightarrow{e_r} = \frac{\alpha}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ avec ($\alpha < 0$).

En coordonnées sphériques on a : $\overrightarrow{F}.d\overrightarrow{OM} = \frac{\alpha}{r^2}\overrightarrow{e_r}.(dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta} + r\sin\theta d\varphi\,\overrightarrow{e_\varphi}) = \alpha\frac{dr}{r^2}$

D'où :

$$\boxed{\mathbf{E}_{pp} = \frac{\alpha}{r} + cte}$$

On conclut que la force gravitationnelle est une force conservative.

► **Énergie potentielle électrostatique**

La force électrostatique (ou coulombienne) : $\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1q_2}{r^2}\overrightarrow{e_r} = \frac{\beta}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ est une force conservative

$$\boxed{\mathbf{E}_{pe} = \frac{\beta}{r} + cte}$$

5.4 Énergie mécanique

Définition

On appelle énergie mécanique d'un point matériel $M(m)$ la somme de son énergie cinétique et son énergie potentielle.

$$\boxed{E_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p}$$

N.B : L'énergie mécanique $\mathscr{E}_m$ dépend du référentiel.

5.4.1 Théorème de l'énergie mécanique

On pose : $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_c + \overrightarrow{F}_{nc}$ avec :

-$\overrightarrow{F}_c$: la résultante des forces conservatives.

-$\overrightarrow{F}_{nc}$: la résultante des forces non conservatives.

Théorème de l'énergie cinétique donne :

$\Delta\mathscr{E}_c = \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_c) + \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{nc}) \Longrightarrow \Delta(\mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p) = \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{nc})$

On tire le théorème de l'énergie mécanique :

$$\boxed{\Delta E_m = \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{nc})}$$

Théorème

Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen , la variation de l'énergie mécanique d'un point matériel dans un champ de forces conservatives entre deux instants est égale au travail entre ces instants des forces non conservatives qui lui sont appliquées .

$$\boxed{\Delta E_m = \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{nc})}$$

5.4.2 Cas particulier important

Si $\mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{nc}) = 0$ alors $\Delta E_m = 0$
Donc l'énergie mécanique est constante c'est à dire que l'énergie mécanique se conserve :l'énergie cinétique se transforme en énergie potentielle et vice versa ;c'est l'intégrale première de l'énergie.

Remarques

1. *On a* $E_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p$ *et comme* $\mathscr{E}_c \geqslant 0$ *alors*

$$\boxed{E_m \geqslant \mathscr{E}_p}$$

2. *Le premier principe de la thermodynamique :*

$$\Delta U + \Delta E_m = \mathbf{W} + \mathbf{Q} \Longrightarrow \Delta U + \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{NC}) = \mathbf{W} + \mathbf{Q}$$

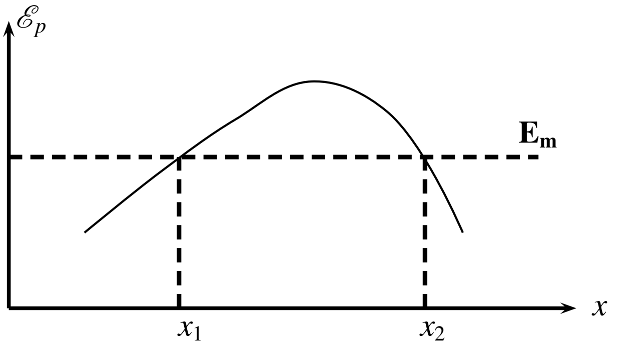
5.5 Applications :Équilibre d'un point matériel dans un champ de forces conservatives

Hypothèse de travail : système unidimensionnel :$\mathscr{E}_p(M) = \mathscr{E}_p(x)$.

5.5.1 Barrière d'énergie potentielle

On a : $E_m = \mathscr{E}_p + \mathscr{E}_c$ et comme $\mathscr{E}_c = \dfrac{1}{2}m\overrightarrow{V}^2 \geq 0$,alors :

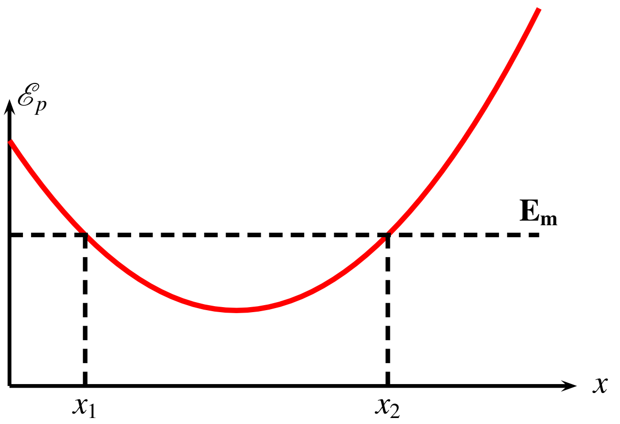
$$\boxed{E_m = \mathscr{E}_p + \mathscr{E}_c \geq \mathscr{E}_p}$$



Domaine permis à la particule : $x \leq x_1$ ou $x \leq x_2$

- Si à $t = 0, x_0 < x_1$:le point matériel ne peut franchir la barrière potentielle.
- Si à $t = 0, x_0 > x_2$:le point matériel peut s'éloigner à l'infini , on dit qu'on a un état de diffusion.

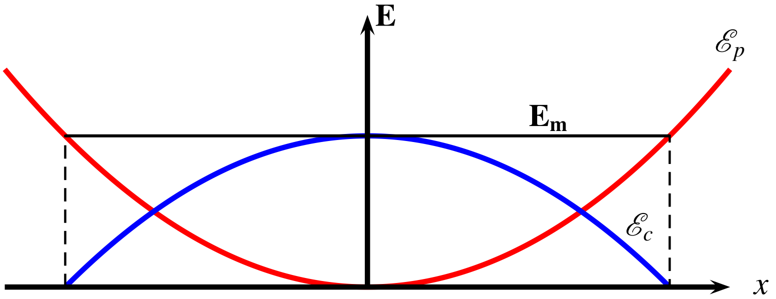
5.5.2 Cuvette d'énergie potentielle



Domaine permis est $[x_1, x_2]$; on dit que la particule est dans un état lié :**La particule effectue un mouvement périodique**

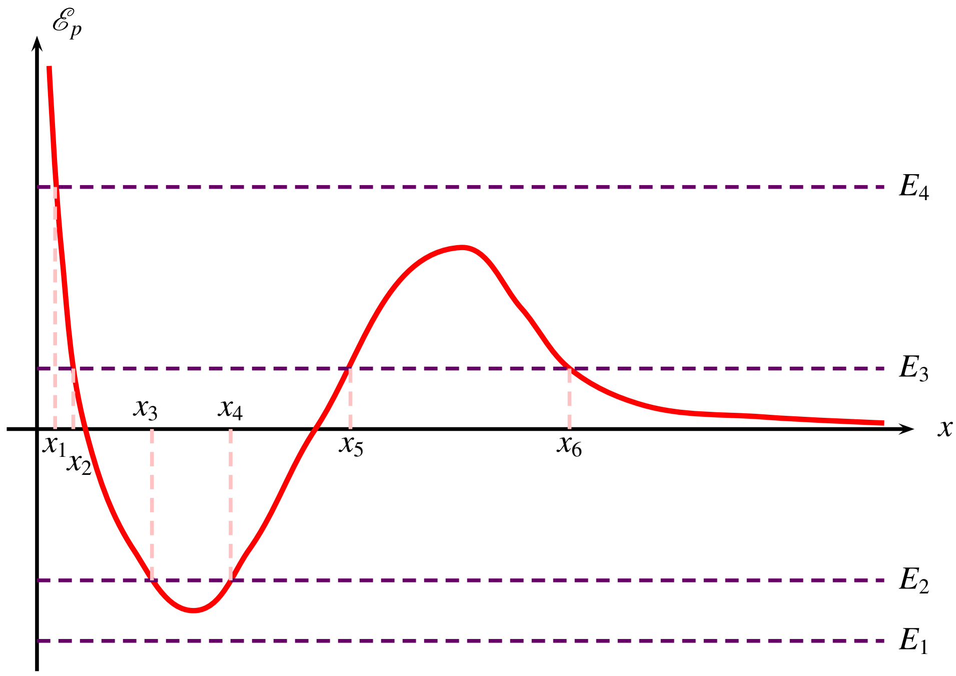
5.5.3 Cas de l'oscillateur harmonique

$\mathscr{E}_p(x) = \dfrac{1}{2}kx^2 + c$,on prend la position d'équilibre comme origine des énergie potentielle



5.5.4 Exemple général

Soit un point matériel qui se déplace dans un champ de forces conservatives dont l'énergie potentielle à l'allure suivante.



Suivant les conditions initiales on peut avoir :

- $E_m = E_1$ mouvement impossible ($\mathscr{E}_c < 0$)
- $E_m = E_2 \Longrightarrow x \in [x_3, x_4]$: état lié ; on a un mouvement elliptique (par conséquent périodique) ,la trajectoire de phase est une courbe fermé.
- $E_m = E_3 \Longrightarrow x \in [x_2, x_5] \cup [x_6, \infty]$: Si :
  - $x \in [x_2, x_5]$ état lié ; on a un mouvement elliptique ,la trajectoire de phase est une courbe fermé.
  - $x \in [x_6, \infty]$ état de diffusion ; on a un mouvement rectiligne ou parabolique ou hyperbolique ,la trajectoire de phase est une courbe ouverte.
- $E_m = E_4 \Longrightarrow x \in [x_1, \infty]$: état de diffusion ; on a un mouvement rectiligne ou parabolique ou hyperbolique ,la trajectoire de phase est une courbe ouverte.

5.5.5 Équilibre d'un point matériel soumis à l'action des forces conservatives

5.5.5.1 Condition d'équilibre

On a : $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_c + \overrightarrow{F}_{nc} = \overrightarrow{F}_c$ ainsi

$$\boxed{\delta \mathbf{W} = -d\mathscr{E}_p = F(x)dx \Longrightarrow F(x) = -\frac{d\mathscr{E}_p}{dx}}$$

Á l'équilibre en $x = x_e$,$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow F(x_e) = 0$

Soit :

$$\boxed{(\frac{d\mathscr{E}_p}{dx})_{x=x_e} = 0}$$

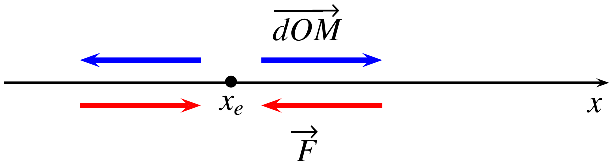
Condition nécessaire mais insuffisante,(ajouter $\overrightarrow{V}_o = \overrightarrow{0}$)

Conclusion:

Á l'équilibre ,l'énergie potentielle est extrémale

5.5.5.2 Condition de stabilité

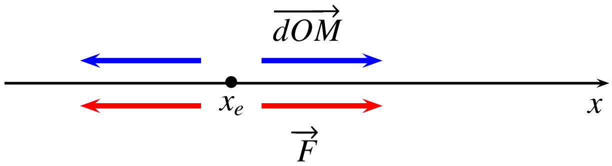
- Si x_e est une position d'équilibre **stable** alors si on écarte M de sa position ,la force tend à le faire revenir à sa position d'équilibre stable :



La force $\overrightarrow{F}$ s'oppose au déplacement $\overrightarrow{dOM}$: $\overrightarrow{F}$ est dite force de rappel.
Autrement dit

$$\boxed{(\overrightarrow{F}.\overrightarrow{dOM})_{x=x_e} < 0}$$

- Si x_e est une position d'équilibre **instable** alors si on écarte M de sa position d'équilibre ,la force tend à le faire divergé de sa position d'équilibre :



Autrement dit

$$\boxed{(\overrightarrow{F}.\overrightarrow{dOM})_{x=x_e} > 0}$$

5.5.5.3 Critère de stabilité

On fait un DL de $\mathscr{E}_p$ au voisinage de la position d'équilibre x_e.

$$\mathscr{E}_p(x) \simeq \mathscr{E}_p(x_e) + (x - x_e)(\frac{d\mathscr{E}_p}{dx})_{x_e} + \frac{1}{2}(x - x_e)^2(\frac{d^2\mathscr{E}_p}{dx^2})_{x_e} + ...$$

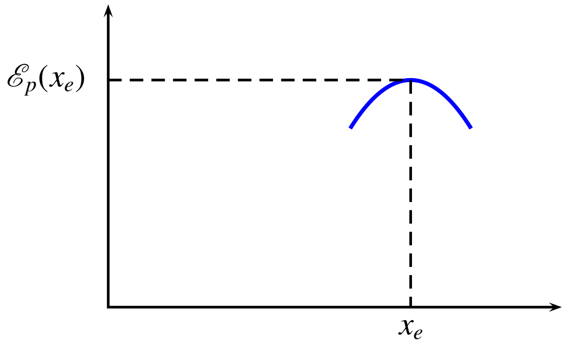
x_e est une position d'équilibre alors $(\frac{d\mathscr{E}_p}{dx})_{x=x_e} = 0$
Par conséquent :

$$\mathscr{E}_p(x) \simeq \mathscr{E}_p(x_e) + \frac{1}{2}(x - x_e)^2(\frac{d^2\mathscr{E}_p}{dx^2})_{x_e} + ...$$

d'où :

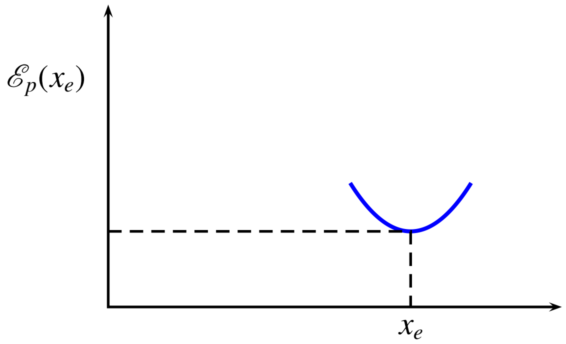
$$\boxed{F(x) = -\frac{d\mathscr{E}_p}{dx} = -(x - x_e)\frac{d^2\mathscr{E}_p}{dx^2}}$$

- Si $\frac{d^2\mathscr{E}_p}{dx^2} < 0$,$x_e$ est un maximum de $\mathscr{E}_p$ (la concavité vers le bas) :



$$\left.\begin{array}{l} x > x_e \Longrightarrow F(x) > 0 \\ x < x_e \Longrightarrow F(x) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x_e \textit{ est une position d'équilibre instable}$$

- Si $\dfrac{d^2\mathscr{E}_p}{dx^2} > 0$,$x_e$ est un minimum de $\mathscr{E}_p$ (la concavité vers le haut) :



$$\left.\begin{array}{l} x > x_e \Longrightarrow F(x) < 0 \\ x < x_e \Longrightarrow F(x) > 0 \end{array}\right\} x_e \text{ est une position d'équilibre stable}$$

Conclusion:

équilibre stable$\Longrightarrow$ $\mathscr{E}_p$ **minimale**

.

Remarque

On a $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) \Longrightarrow F(x) = m\ddot{x}$

$\Longrightarrow m(x \ddot{-} x_e) = -(x - x_e)(\dfrac{d^2\mathscr{E}_p}{dx^2})_{x=x_e}$

$\Longrightarrow \ddot{X} + \dfrac{1}{m}(\dfrac{d^2\mathscr{E}_p}{dx^2})_{x=x_e} X = 0$

c'est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique avec :

$$\boxed{\omega^2 = \frac{1}{m}(\frac{d^2\mathscr{E}_p}{dx^2})_{x=x_e} = \frac{1}{m}(\frac{d^2\mathscr{E}_p}{dX^2})_{X=0} \Longrightarrow k_{ressort\ équivalent} = \frac{d^2\mathscr{E}_p}{dx^2}\Big|_{x=x_e}}$$

CHAPITRE 6

OSCILLATEUR LINÉAIRE À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ

6.1 Rappel sur l'oscillateur harmonique

L'équation différentielle d'un oscillateur harmonique au voisinage d'une position d'équilibre stable est

$$\boxed{a\ddot{X} + bX = c}$$

avec $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$ et $c \in \mathbb{R}$ Qu'on peut écrire

$$\boxed{a\ddot{X} + b(X - \frac{c}{b}) = 0}$$

On pose

$$\boxed{x = X - \frac{c}{b} \quad ; \quad \omega_o^2 = \frac{b}{a}}$$

- x : l'élongation repéré à partir de la position d'équilibre stable ($x_e = 0 \Longrightarrow X_e = \frac{c}{b}$)
- $\omega_o = \frac{2\pi}{T_o}$ pulsation propre .

Ce qui permet d'écrire la **forme canonique** de l'oscillateur

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_o^2 x = 0}$$

La solution de cette équation donne :
$x(t) = X_m \cos(\omega_o t + \varphi) \Longrightarrow \dot{x} = -X_m\omega_o \sin(\omega_o t + \varphi)$
Dans le cas de l'oscillateur élastique (masse + ressort) $k = m\omega_o^2$ on obtient pour :

- $\mathscr{E}_p = \frac{1}{2}kx^2(+cte = 0) \Longrightarrow \mathscr{E}_p = \frac{1}{2}kX_m^2 \cos^2(\omega_o t + \varphi)$
- $\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \Longrightarrow \mathscr{E}_c = \frac{1}{2}m\omega_o^2 X_m^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi) = \frac{1}{2}kX_m^2 \sin^2(\omega_o t + \varphi)$
- $E_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p = \frac{1}{2}kX_m^2 = cte$ caractéristique d'un système conservatif.

Calculons la valeur moyenne des énergies sur une période T ; On rappelle que

$$< \cos^2 x >=< \sin^2 x >= \frac{1}{2}$$

- $< \mathscr{E}_p >= \frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{E}_p \, dt$

$$< \mathscr{E}_p >= \frac{1}{4}kX_m^2$$

- $< \mathscr{E}_c >= \frac{1}{T}\int_0^T \mathscr{E}_c \, dt$

$$< \mathscr{E}_c >= \frac{1}{4}kX_m^2$$

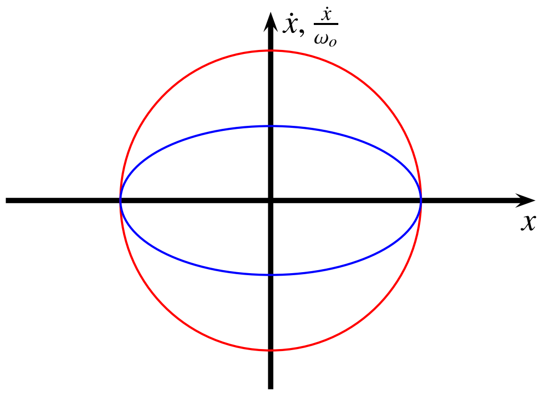
- $< Em >= \frac{1}{T}\int_0^T E_m \, dt$

$$< E_m >= \frac{1}{2}kX_m^2$$

On retient que

$$< \mathscr{E}_c >=< \mathscr{E}_p >= \frac{< E_m >}{2}$$

Ainsi la trajectoire de phase est une ellipse dans le plan $(x, \dot{x})$ ou un cercle dans le plan $(x, \frac{\dot{x}}{\omega_o})$



6.2 régime libre d'un oscillateur linéaire amorti

6.2.1 Forme canonique de l'équation différentielle

On s'interesse à un oscillateur linéaire amorti par un frottement fluide visqueux (du à l'action d'un fluide et proportionnel à la vitesse).
L'équation différentielle d'un tel oscillateur s'écrit :

$$a\ddot{X} + h\dot{X} + bX = c$$

avec $(a, h, b) \in \mathbb{R}_+^3$ et $c \in \mathbb{R}$.
On pose dans la suite :

$$\omega_o = \sqrt{\frac{b}{a}}$$

La pulsation propre de l'oscillateur

$$\boxed{\frac{h}{a} = 2\alpha = \frac{\omega_o}{\mathbf{Q}} = \frac{1}{\tau}}$$

- α : la constante d'amortissement .
- τ : le temps de relaxation (c'est le temps nécessaire pour que l'amplitude se divise par e .
- $\mathbf{Q}$: le facteur de qualité .

$$x = X - \frac{c}{b}$$

l'élongation repéré à partir de la position d'équilibre

La forme canonique de l'équation différentielle d'un oscillateur linéaire amorti par un frottement fluide visqueux s'écrit donc :

$$\boxed{\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = 0}$$

Remarque

Dans ce cas l'énergie mécanique est fonction décroissante du temps, en effet :

$$\frac{\delta\mathscr{E}_m}{dt} = \mathscr{P}\,(\overrightarrow{F}_f) = -h\overrightarrow{V}^2 < 0$$

6.2.2 Différents régimes libres amortis

On a :

- l'équation différentielle : $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$
- Le polynôme caractéristique : $r^2 + 2\alpha r + \omega_o^2 = 0$
- Le discriminant : $\Delta' = \alpha^2 - \omega_o^2 = (\alpha + \omega_o)(\alpha - \omega_o) = \omega_o^2(\frac{1}{4\mathbf{Q}^2} - 1)$

6.2.2.1 Régime apériodique

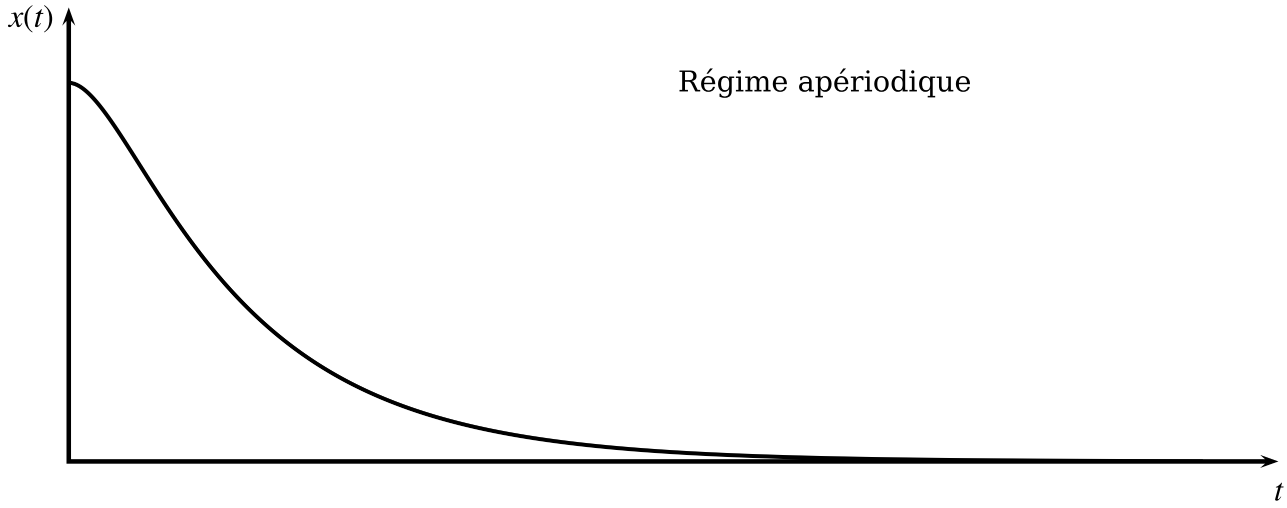
$$\Delta' > 0 \Longrightarrow \alpha > \omega_o \Longrightarrow \mathbf{Q} < \frac{1}{2}$$

Deux racines réelles distinctes : $r_{\pm} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_o^2}$

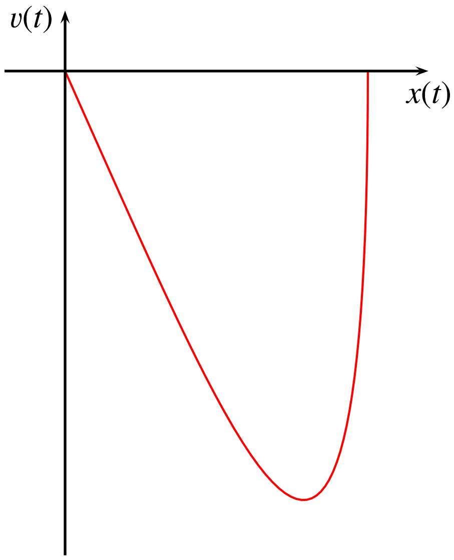
$$\boxed{x(t) = Ae^{r_+t} + Be^{r_-t} \Longrightarrow x(t) = e^{-\alpha t}[Ae^{\sqrt{\alpha^2-\omega_o^2}t} + Be^{-\sqrt{\alpha^2-\omega_o^2}t}]}$$

Lorsque $t \to \infty$, $e^{-\alpha t}$ l'emporte ;d'où $x \to 0$ sans osciller :C'est le régime apériodique.

Representation graphique



Le portrait de phase du régime apériodique



régime apériodique : trajectoire dans le plan de phase est ouverte

6.2.2.2 Régime critique

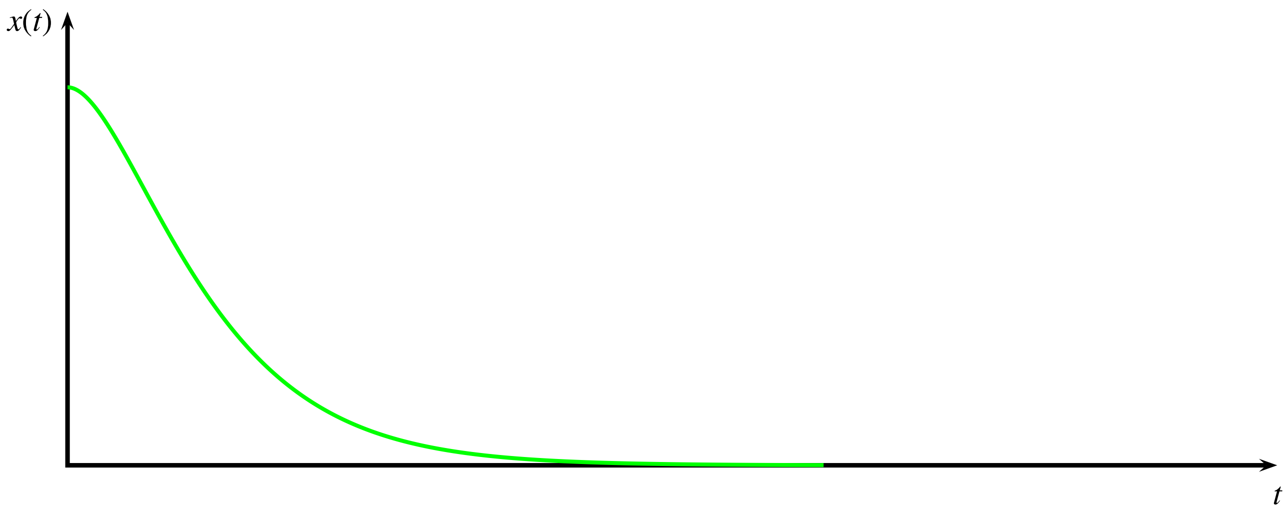
$$\Delta' = 0 \Longrightarrow \alpha = \omega_o \Longrightarrow \mathbf{Q} = \frac{1}{2}$$

Deux racines réelles confondues : $r_+ = r_- = -\alpha$

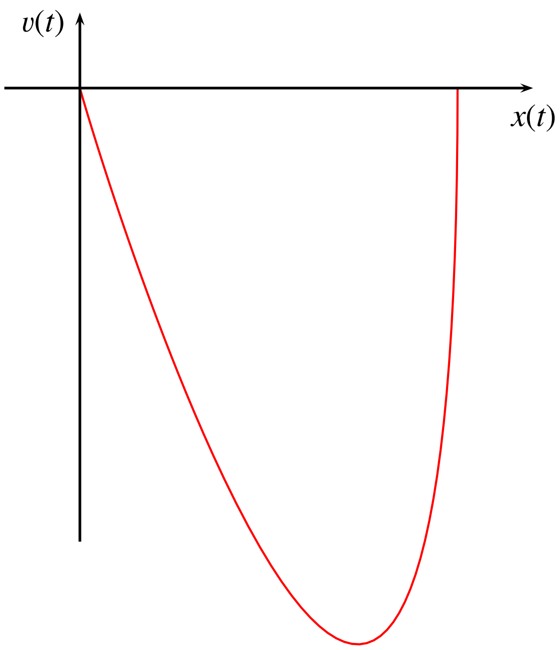
$$\boxed{x = (A_c + B_c t)e^{-\alpha t}}$$

Quand $t \to \infty, x \to 0$ rapidement sans osciller : C'est le régime critique.

Representation graphique



Le portrait de phase du régime critique



régime critique : trajectoire dans le plan de phase est ouverte

6.2.2.3 Régime pseudo-périodique

$\Delta' < 0 \Longrightarrow \alpha < \omega_o \Longrightarrow \mathbf{Q} > \dfrac{1}{2}$

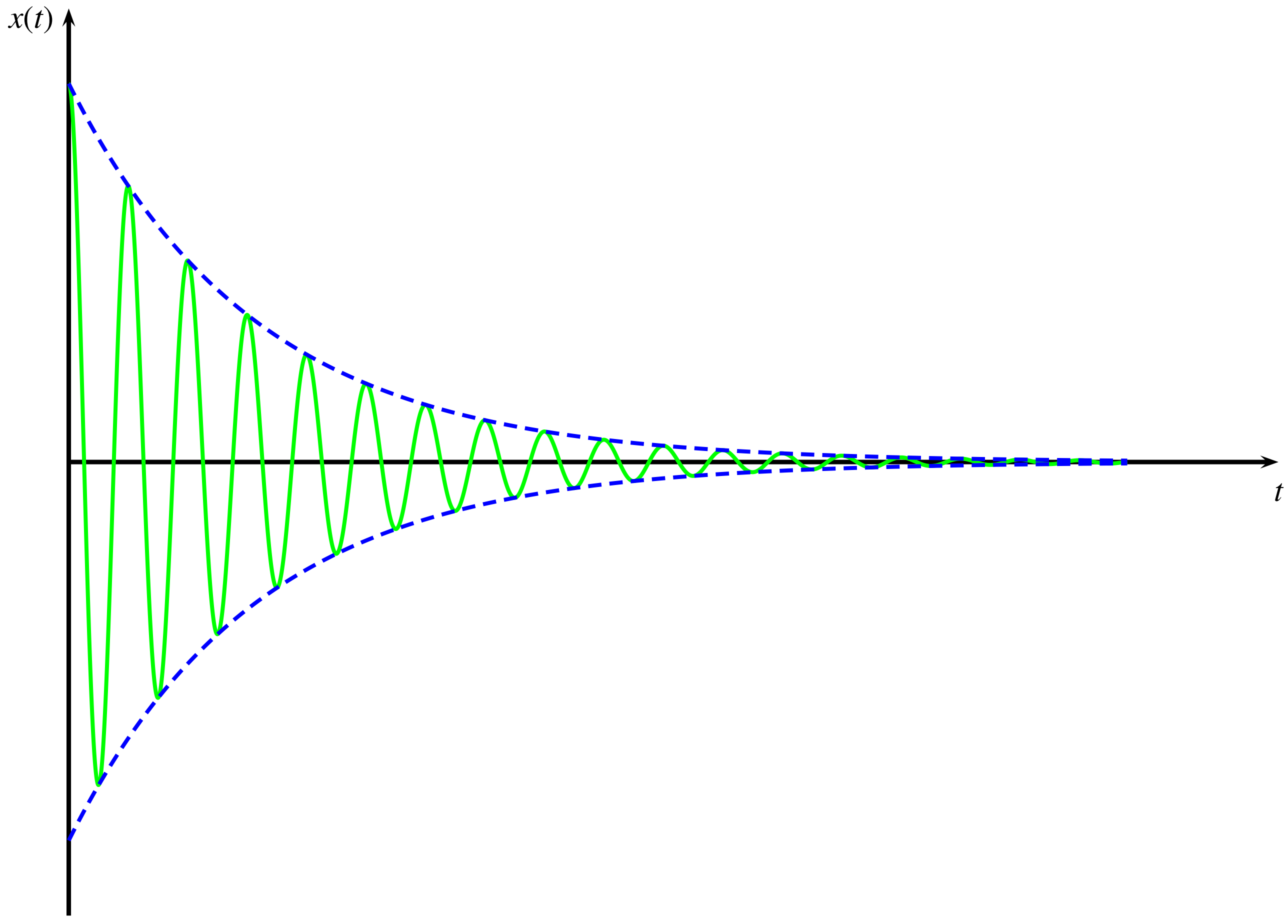
$\Delta' = \alpha^2 - \omega_o^2 = i^2\Omega^2$ avec :$\Omega^2 = \omega_o^2 - \alpha^2$

Deux racines complexes conjuguées : $r_1 = -\alpha + i\Omega$ et $r_2 = -\alpha - i\Omega$ donc la solution s'écrit :

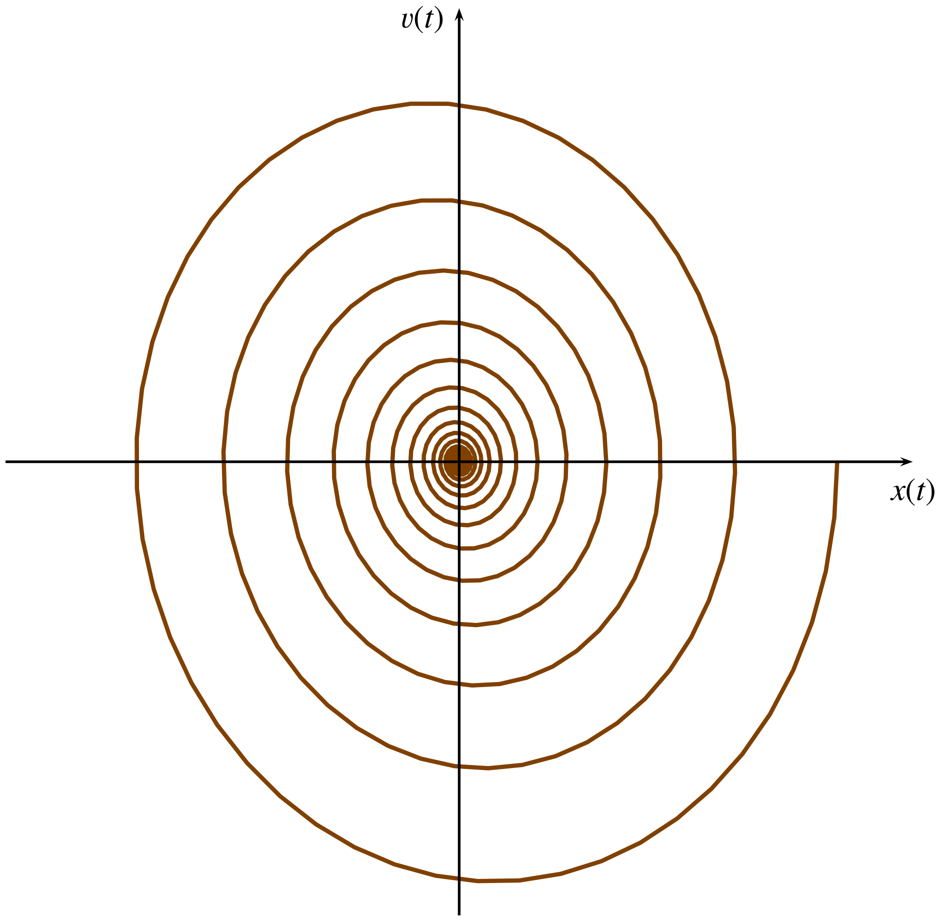
$$\boxed{x(t) = e^{-\alpha t}(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t) = x_o e^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \varphi)}$$

C'est une fonction pseudo-périodique d'amplitude $X_m = x_o e^{-\alpha t}$ variable en fonction du temps $X_m \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$

Representation graphique



Le portrait de phase du régime pseudopériodique



Portrait de phase en régime pseudo-périodique

Le point O attire toutes les trajectoires dans le plan de phase qui correspond à la position d'équilibre stable

La pseudo-période est :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{T_o}{\sqrt{1-(\frac{\alpha}{\omega_o})^2}} = \frac{T_o}{\sqrt{1-\frac{1}{4\mathbf{Q}^2}}} > T_o}$$

6.2.3 Décrément logarithmique

on définit le décrément logarithmique par

$$\boxed{\delta = \alpha T}$$

cœfficient sans unité

On a :

- $x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \varphi)$
- $x(t+nT) = Ae^{-\alpha(t+nT)}\cos(\Omega t + n\Omega T + \varphi) = e^{-\alpha nT}x(t)$

D'où : $\dfrac{x(t)}{x(t+nT)} = e^{\alpha nT} \Longrightarrow \alpha nT = \ln \dfrac{x(t)}{x(t+nT)}$
On en déduit que

$$\boxed{\delta = \alpha T = \frac{1}{n} \ln \frac{x(t)}{x(t+nT)}}$$

Si $n = 1$ alors :

$$\boxed{\delta = \alpha T = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)}}$$

6.2.4 Interprétation physique

6.2.4.1 Facteur de qualité

Hypothèse : L'amortissement très faible $(\alpha \to 0 \Longrightarrow Q \gg 1 \Longrightarrow \omega_o \gg \alpha)$

- $x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\Omega t + \varphi)$
- $\Omega = \omega_o \sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}} \simeq \omega_o$
- $T = T_o$

D'où :$x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_o t + \varphi)$

- $\mathscr{E}_p = \dfrac{1}{2}kx^2 = \dfrac{1}{2}kA^2e^{-2\alpha t}\cos^2(\omega_o t + \varphi)$
- $\mathscr{E}_c = \dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 = \dfrac{1}{2}A^2m[-\omega_o e^{-\alpha t}\sin(\omega_o t + \varphi) - \alpha e^{-\alpha t}\cos(\omega_o t + \varphi)]^2$

Or les fonctions cos et sin sont bornées ainsi $\alpha \ll \omega_o$ donc :
$\mathscr{E}_c \simeq \dfrac{1}{2}mA^2\omega_o^2 e^{-2\alpha t}\sin^2(\omega_o t + \varphi)$

-

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}kA^2e^{-2\alpha t}}$$

Question : Que vaut la diminution relative de l'énergie mécanique au cours d'une pseudo-période ,c'est à dire :$\dfrac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)}$?

- $E_m(t) = \dfrac{1}{2}kA^2e^{-2\alpha t}$
- $E_m(t+T) = \dfrac{1}{2}kA^2e^{-2\alpha(t+T)}$

$$\boxed{\frac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)} = 1 - e^{-2\alpha T_o}}$$

Or $\quad \alpha T \simeq \alpha\dfrac{2\pi}{\omega_o} = \alpha T_o \ll 1 \Longrightarrow 1 - e^{-2\alpha T_o} \approx 2\alpha T_o$
D'où :

$$\frac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)} \simeq 2\alpha T_o = \frac{2\alpha 2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi}{\mathbf{Q}}$$

Donc :

$$\boxed{\mathbf{Q} = 2\pi\frac{E_m(t)}{E_m(t) - E_m(t+T)}}$$

c'est à dire :

$$\mathbf{Q} = 2\pi \frac{\text{énergie del'oscillateur}}{\text{énergie perdue pendant une pseudo-période}}$$

6.2.4.2 Temps de relaxation

(Énoncé voir TD)

Activité

Un point matériel M de masse m est mobile sur un axe horizontal Ox , et il est soumis à une force de frottement visqueux de type :$\overrightarrow{R} = -\lambda\overrightarrow{\dot{x}}$. ce point est relié par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k à un point A d'abscisse x_A . on pose $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ et $\alpha = \dfrac{\lambda}{2m}$, et on supposera $\alpha \ll \omega_o$

1. *a quoi correspond cette hypothèse ?*
2. *le point A étant supposé fixe, on écarte M de sa position d'équilibre, et on l'abandonne sans vitesse initiale. Calculer l'intervalle de temps τ au bout duquel l'amplitude du mouvement est divisée par e = 2,718.*

Correction

1. On a : $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = 0$. $\alpha \ll \omega_o$(amortissement trop faible :oscillations isochrones (T=cte).
2. $v(0) = 0$

On a :$x = x_o \cos(\Omega t + \varphi)$ avec $\Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \alpha^2} \simeq \omega_o$
Donc : $x = x_o \cos(\omega_o t + \varphi)$

- à $t = 0$ on a $\boxed{X_m = x_o \cos\varphi}$.
- $\dot{x} = x_o e^{-\alpha t}[-\alpha\cos(\omega_o t + \varphi) - \omega_o \sin(\omega_o t + \varphi)]$
- $v(0) = 0 \Longrightarrow \tan\varphi = -\dfrac{\alpha}{\omega_o} \ll 1 \Longrightarrow \varphi \to 0$
- $\varphi \to 0 \Longrightarrow x_o = X_m$

On conclut que : $X_m(t) = x_o e^{-\alpha t} \Longrightarrow X_m(t+\tau) = x_o e^{-\tau\alpha} e^{-\alpha t}$
Si le rapport des amplitudes est e alors :$\dfrac{x_o e^{-\alpha t}}{x_o e^{-\tau\alpha} e^{-\alpha t}} = e$ alors :

$$\boxed{\tau = \frac{1}{\alpha}}$$

Définition

Le temps d'amortissement τ correspond au temps nécessaire pour que l'amplitude se divise par e

6.3 Oscillations forcées -Résonance

Pour maintenir l'amplitude des oscillations constante,il faut fournir une énergie égale à celle perdue par les frottements à l'aide d'une force excitatrice qui impose une fréquence d'où la naissance des oscillations forcées.
Prenons l'exemple (masse-ressort) et appliquons la R.F.D
$\vec{F}(t) + \vec{f} + \vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}(M/\mathcal{R})$
avec : $\vec{P} + \vec{T} = -kx\,\vec{e_x}$
donc : $-kx - \lambda\dot{x} + F(t) = m\ddot{x}$
$\Longrightarrow m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t)$
l'équation canonique est : $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = \dfrac{1}{m}F(t)$
avec :

- $2\alpha = \dfrac{\lambda}{m} = \dfrac{\omega_o}{Q} = \dfrac{1}{\tau}$: constante d'amortissement
- $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$: la pulsation propre

La solution Dde cette équation différentielle est la somme de deux fonctions :
- solution de l'équation homogène $x_t(t)$ qui décrit le régime transitoire (disparaît après quelques τ).
- solution particulière $x_p(t)$ qui décrit le régime permanent .

donc $x(t) = x_t(t) + x_p(t)$ avec :
- $x_t(t)$ dépend du signe de Δ'
- $x_p(t) = X\cos(\omega_p t + \varphi_p)$

Si $F(t) = F_o\cos(\omega t+\varphi_F)$ alors la solution est **en régime permanent** est : $x(t) = X\cos(\omega t+\varphi_x)$

6.3.1 Détermination de l'amplitude X et la phase $\varphi = \varphi_x - \varphi_F$

Pour
- $x = X\cos(\omega t + \varphi)$ on associe $\underline{x(t)} = Xe^{i(\omega t+\varphi)} = \underline{X}e^{i\omega t}$ avec $\underline{X} = Xe^{i\varphi}$

Pour $F = F_o\cos(\omega t + \varphi_F)$ on associe $\underline{F} = \underline{F_o}e^{i\omega t}$
- Pour $\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = \dfrac{F(t)}{m}$ on associe $\underline{\ddot{x}} + 2\alpha\underline{\dot{x}} + \omega_o^2\underline{x} = \dfrac{\underline{F}(t)}{m}$

Ce qui donne :$-\omega^2\underline{X} + 2\alpha i\omega\underline{X} + \omega_o^2\underline{X} = \dfrac{\underline{F_o}}{m}$

$$\boxed{\underline{X} = Xe^{i\varphi_x} = \dfrac{F_o e^{i\varphi_F}/m}{(\omega_o^2 - \omega^2) + 2i\alpha\omega} = f(\omega)}$$

Donc :
- X représente le module de $f(\omega)$;$X = |\,f(\omega)\,|$
- φ_x représente l'argument de $f(\omega)$

$$\boxed{X = \dfrac{F_o}{m}\dfrac{1}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}}}$$

$$\boxed{\tan\varphi = \tan(\varphi_x - \varphi_F) = -\dfrac{2\alpha\omega}{\omega_o^2 - \omega^2}}$$

6.3.2 Étude de la résonance d'amplitude :

On pose :

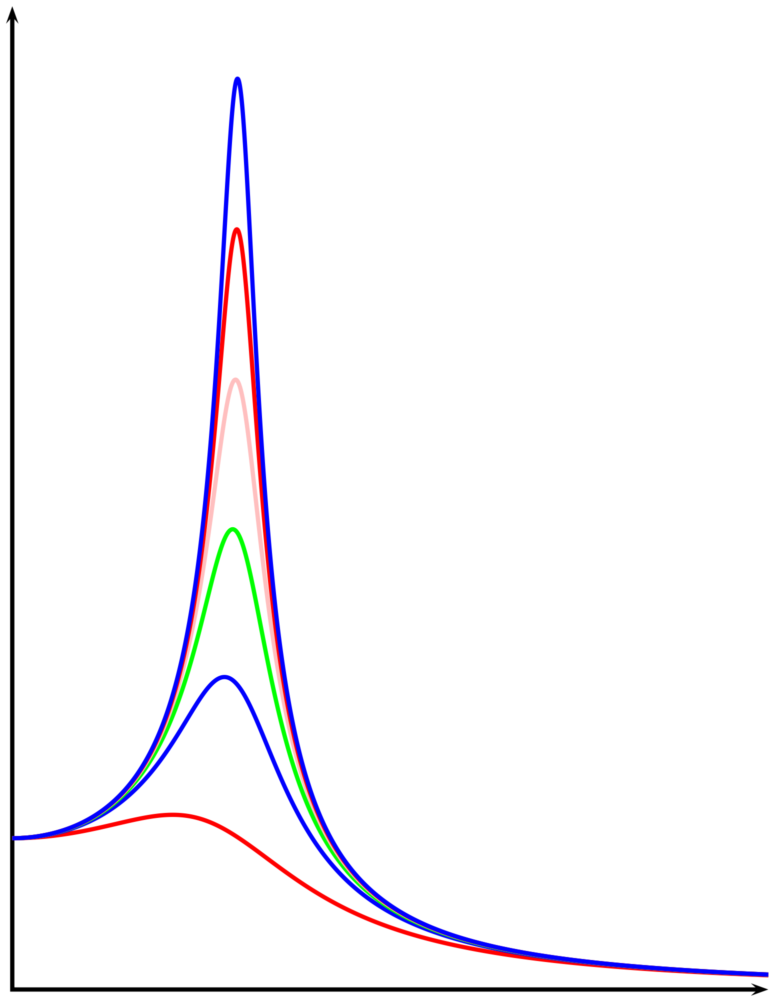
- $r = \dfrac{\omega}{\omega_o} > 0 \Longrightarrow \omega = r\omega_o$
- $X_o = \dfrac{F_o}{m}$

On en déduit que :

$$\boxed{X = \frac{X_o}{\omega_o^2\sqrt{(1-r^2)^2 + \dfrac{r^2}{Q^2}}} = X(r)}$$

- Si $1 - \dfrac{1}{2Q^2} \leq 0 \Longrightarrow Q \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: pas de résonance d'amplitude
- Si $1 - \dfrac{1}{2Q^2} > 0 \Longrightarrow Q > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$: on a résonance d'amplitude

Representation graphique de la fonction $X(r)$ pour quelques valeurs de Q



6.3.3 Calcul énergétique :

Pour simplifier on choisi $\varphi_F = 0$ donc $\varphi = \varphi_x$

6.3.3.1 Énergie perdue :

En régime permanent on a : $\Delta \mathbf{W}_p = -\lambda \dot{x} dx = -\lambda \dot{x}^2 \, dt$
$\Delta \mathbf{W}_P = -\dfrac{\lambda^2 X^2 \omega^2}{2}[1 - \cos(2(\omega t + \varphi))] \, dt$
Au cours d'une période on a :
$\mathbf{W}_p = \int_0^T \Delta \mathbf{W}_p \Longrightarrow$

$$\boxed{\mathbf{W}_p = -\frac{\lambda X^2 \omega^2 T}{2} = -\lambda X^2 \pi \omega < 0}$$

6.3.3.2 Énergie gagnée :

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{W}_g = F(t)dx = F(t)\dot{x}dt \quad &\Longrightarrow \quad \Delta \mathbf{W}_g = -F_o \cos \omega t X \omega \sin(\omega t + \varphi) dt \\
&\Longrightarrow \quad \Delta \mathbf{W}_g = -F_o \omega X [\cos \omega t . \sin(\omega t + \varphi)] \\
&\Longrightarrow \quad \Delta \mathbf{W}_g = -\frac{F_o \omega X dt}{2}[\sin(2(\omega t = \varphi)) - \sin(-\varphi)] \\
&\Longrightarrow \quad \mathbf{W}_g = -\frac{F_o \omega X}{2}[(\sin \varphi)t - \frac{1}{2\omega}\cos(2(\omega t + \varphi))]_0^T
\end{aligned}$$

$\mathbf{W}_g = -F_o \pi X \sin \varphi$

Or : $\underline{X} = X e^{i\varphi} = \dfrac{X_o}{(\omega^2 - \omega^2) + 2i\alpha\omega} = \dfrac{X}{e^{-i\varphi}} \Longrightarrow -\dfrac{\sin \varphi}{X} = \dfrac{2\alpha\omega}{X_o}$

Donc

$$\boxed{\mathbf{W}_g = 2\pi X^2 \omega m \alpha = \pi X^2 \omega \lambda > 0}$$

D'où :

$$\boxed{\mathbf{W}_g = |\mathbf{W}_p|}$$

ce qui montre que l'énergie perdue par frottement et totalement fournie par la force excitatrice $F(t)$.

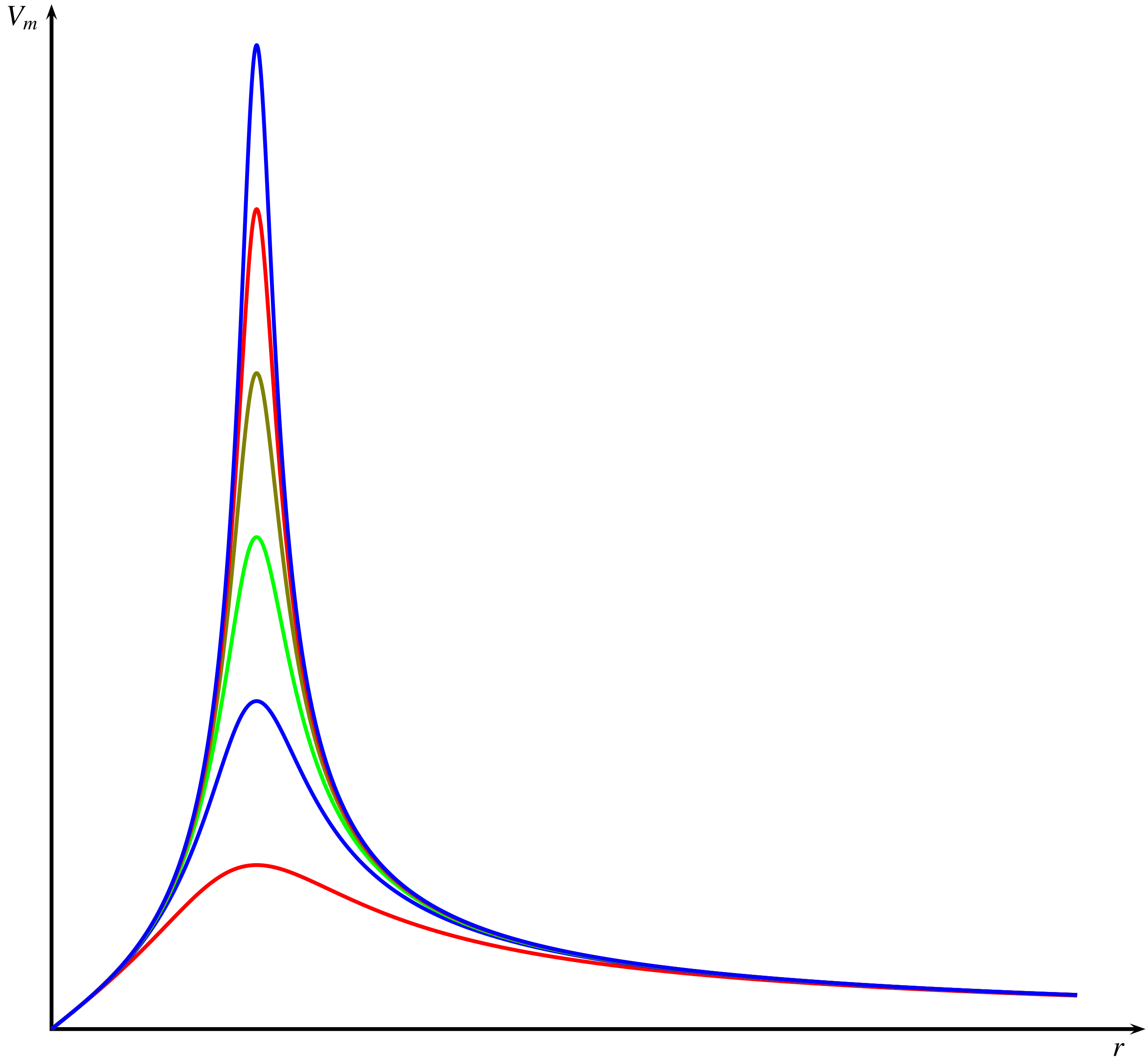
6.3.4 Résonance de vitesse

En régime établi (permanent) on pose $v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi_v)$ Avec

$$\boxed{V_m = \omega X = \frac{X_o r/\omega_o}{\sqrt{(1 - r^2)^2 + \dfrac{r^2}{Q^2}}}}$$

$$\boxed{\frac{dV_m}{dr} = 0 \Longrightarrow r = 1}$$

Représentation graphique



6.3.5 Bande passante

énoncé voir TD

$x_A = a\cos\omega t$,l'équation différentielle sera donc :$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_o^2 x = \dfrac{a}{m}\cos\omega t$
La solution du régime permanent s'écrit :$x = A\cos(\omega t + \varphi)$
En notation complexe :$(-\omega^2 + \omega_o^2) + 2i\alpha\omega_o = a/m$

$$A = \frac{a/m}{\sqrt{(\omega_o^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\omega^2}} = \frac{a}{m\omega_o^2}\frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \dfrac{r^2}{Q^2}}} \text{ avec } Q = \omega_o/2\alpha$$

$\alpha \ll \omega_o \Longrightarrow Q \to \infty$ donc

$A = \dfrac{a}{m\omega_o^2}\dfrac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + \dfrac{r^2}{Q^2}}}$: la résonance aura lieu pour $r = 1$ et par conséquent :

$A_m = \dfrac{a}{m\omega_o^2}Q = \dfrac{a\omega_o}{2m\omega_o^2\alpha} \Longrightarrow \boxed{A_m = \dfrac{a}{2m\alpha\omega_o}}$

La bande passante $[\omega_1, \omega_2]$ est telle que :$A > \dfrac{A_m}{\sqrt{2}} \Longrightarrow A^2 > \dfrac{A_m^2}{2}$

- $\omega^4 - 2\omega^2(\omega_o^2 - 2\alpha^2) + \omega_o^4 - 8\alpha^2\omega_o^2 = 0$
- $\Delta' = 4\alpha^2\omega_o^2$
- $\omega^2 = (\omega_o^2 - 2\alpha^2) \pm 2\alpha\omega_o \simeq \omega_o^2 \pm 2\alpha\omega_o = \omega_o^2(1 \pm \dfrac{1}{Q})$
- $\omega_2 = \omega_o(1 + \dfrac{1}{Q})^{1/2} = \omega_o(1 + \dfrac{1}{2Q})$
- $\omega_1 = \omega_o(1 - \dfrac{1}{Q})^{1/2} = \omega_o(1 - \dfrac{1}{2Q})$
- $\Delta\omega = \dfrac{\omega_o}{Q} = 2\alpha = \dfrac{2}{\tau}$

Donc le résultat fondamental

$$\Delta\omega.\tau = 2$$

$$\boxed{Q = \frac{\omega_o}{\Delta\omega}}$$

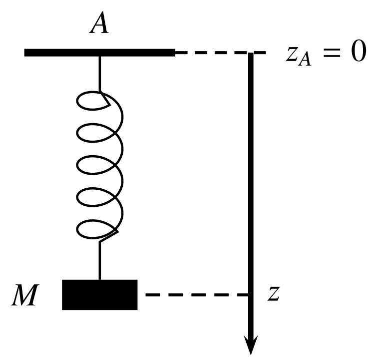
6.4 Analogie :Electrique/Mécanique

Grandeur électrique	Grandeur mécanique
$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e(t)$	$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = F(t)$
L	m
λ	R
C	$1/k$
q	x
i	v
$e(t)$	$F(t)$
$\frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{2}m\dot{x}^2$
$\frac{1}{2C}q^2$	$\frac{1}{2}kx^2$
$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}}$
$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$

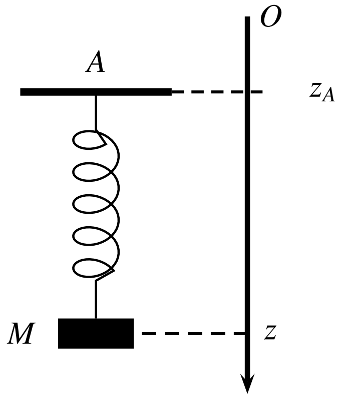
Activité

Le pendule élastique

On considère une masse M homogène de masse volumique ρ et de volume V, plongée dans l'eau (masse volumique ρ_e). Cette masse est suspendue a un ressort de raideur k et de longueur à vide l_o, accroché en un point A .
Soit (Oz) un axe vertical oriente vers le bas, le point A est fixe à la cote $z_A = 0$. On s'interesse au mouvement suivant (Oz) de la masse et on note z la cote du centre de gravite G de la masse. A l'équilibre la masse est située en $z = h$. On négligera la hauteur de la masse M devant h. Soit $\mathcal{R}$ le référentiel terrestre suppose galiléen.



1- Écrire la condition d'équilibre de la masse M dans $\mathcal{R}$.
2- En déduire l'équation différentielle du mouvement de l'oscillation de M. On écrira une équation reliant z et ses dérivées, M, k et h. Donner la pulsation propre ω_o de cet oscillateur. On négligera les frottements dans cette question.
3- Commenter le fait que ω_o ne dépende pas de l'intensité de la poussée d'Archimède. Y a-t-il un terme de l'équation différentielle précédente qui en dépende ?
4- On tient compte d'une force de frottement visqueux, colinéaire à la vitesse et d'intensité $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{V}$ (identique dans tous les référentiels) de l'eau sur la masse M. Donner la nouvelle équation différentielle vérifiée par z. En se plaçant dans le cas d'un amortissement faible, donner sans calcul l'allure de la fonction $z(t)$ avec les conditions initiales suivantes : à $t = 0$, $z = h_1 > h$ et la vitesse initiale est nulle.
5- A l'aide d'un piston, on impose à l'extrémité A du ressort, un mouvement vertical sinusoidal d'amplitude z_{Am} ; donc $z_A(t) = z_{Am}\cos(\omega t)$. Écrire dans le référentiel $\mathcal{R}'$, lie à A, l'équation différentielle vérifiée par z' cote de G dans $\mathcal{R}'$.
6- Calculer l'amplitude des oscillations de la masse M dans $\mathcal{R}'$. On utilisera la notation complexe et on fera apparaître les constantes $\omega_o, \tau = \dfrac{M}{\alpha}$ et la variable $x = \dfrac{\omega}{\omega_o}$
7- Dans ce dispositif, l'intérêt du ressort est de permettre d'obtenir des oscillations de la masse d'amplitude supérieure à celle de l'excitation. Chercher un intervalle de pulsations pour lequel cette condition est vérifiée. Vous montrerez que cet intervalle existe si la masse M est supérieure à une certaine valeur que vous préciserez.
8-Si la condition précédente est vérifiée, pour quelle pulsation l'amplitude d'oscillation de la masse M est-elle maximale ?



Correction

1- La condition d'équilibre de la masse M dans $\mathcal{R}$.

$$\boxed{Mg = F_A + k(h - l_o)}$$

2- L'équation différentielle du mouvement de l'oscillation de M.
On projette la RFD sur l'axe Oz on obtient :

$$M\ddot{z} = Mg - \alpha\dot{z} - F_A - k(z - l_o) = Mg - \alpha\dot{z} - F_A - k(z - h) - k(h - l_o)$$

La condition d'équilibre donne

$$\boxed{M\ddot{z} + \alpha\dot{z} + k(z - h) = 0}$$

La pulsation propre $\omega_o = \sqrt{\dfrac{k}{M}}$.

3- ω_o ne dépend que des paramètres intrinsèque du système

Le terme de l'équation différentielle précédente qui en dépend est h la position d'équilibre

En général toute forces constantes n'apparaissent pas dans l'équation différentielle, son rôle est de modifier la position d'équilibre

4- La nouvelle équation différentielle vérifiée par z.

$$\boxed{M\ddot{z} + \alpha\dot{z} + k(z-h) = 0 \Longrightarrow \ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_o^2(z-h) = 0}$$

Avec $\lambda = \dfrac{\alpha}{2M} \ll \omega_o$ amortissement faible

dans ce cas la solution est de la forme :

$$z(t) = h + Ae^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi) \qquad \Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$$

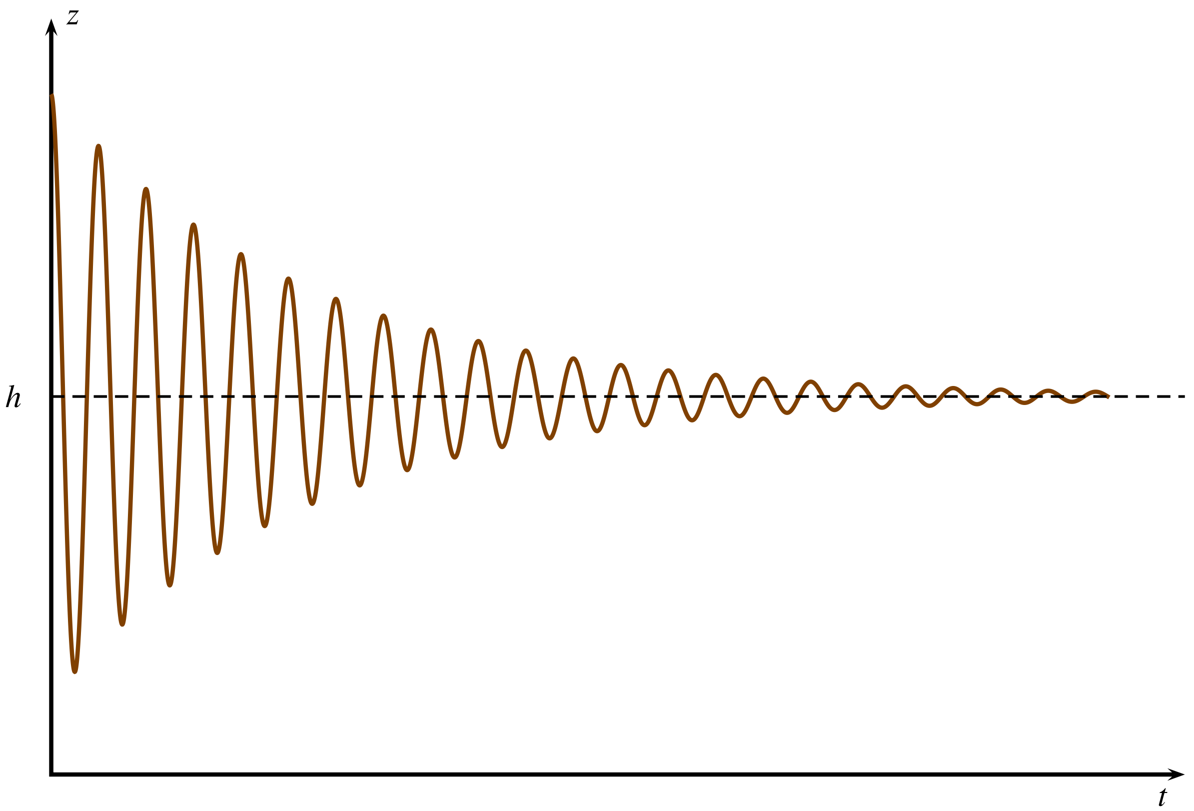
A et φ deux constantes d'intégration à déterminer par les C.I.

Comme $\lambda \ll \omega_o \Longrightarrow \Omega \simeq \omega_o$ ainsi :

- $z(t=0) = h_1 \Longrightarrow h_1 = h + A\cos\varphi$
- $\dot{z}(t=0) = 0 \Longrightarrow \tan\varphi = -\dfrac{\lambda}{\omega_o} \to 0$ c'est à dire $\varphi \to 0$ On en déduit que

$$\boxed{z(t) = h + (h_1 - h)e^{-\lambda t}\cos\omega_o t}$$

Représentation graphique de $z(t)$ pour $h = 5$,$h_1 = 6$, $\lambda = 0.2$ et $\omega_o = 10$



5- L'équation différentielle.

$$\boxed{M\ddot{z} + \alpha\dot{z} + k(z-h) = kz_A}$$

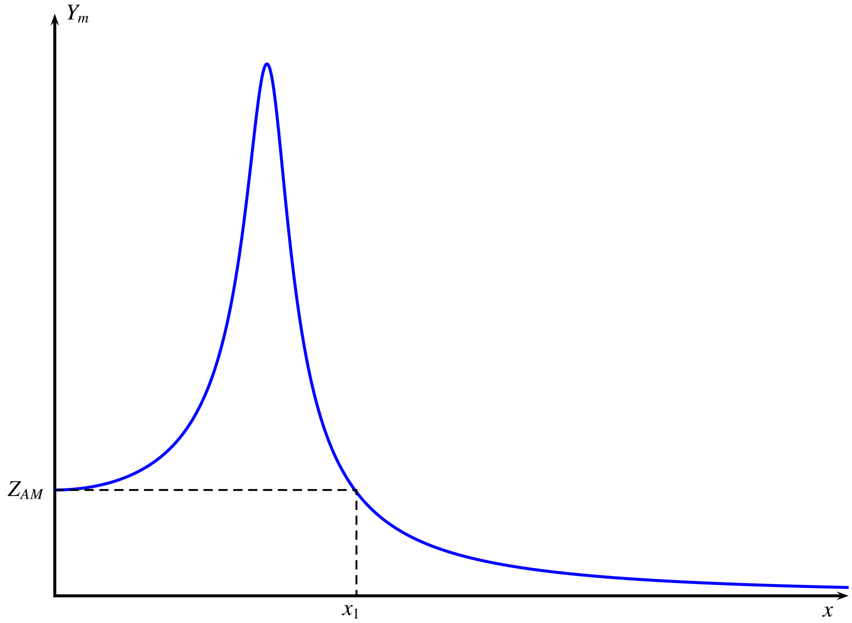
En posant $y = z - h$ on obtient

$$\boxed{\ddot{y} + \frac{1}{\tau}\dot{y} + \omega_o^2 y = \omega_o^2 Z_{AM}\cos\omega t}$$

6- On cherche une solution qui décrit le régime permanent sous la forme $y(t) = Y_m\cos(\omega t+\varphi)$ et en notation complexe on trouve

$$\boxed{Y_m = \frac{Z_{AM}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \dfrac{x^2}{\tau^2\omega_o^2}}}}$$

La représentation graphique de Y_M en fonction de la pulsation réduite x



7- L' intervalle de pulsations est $[0, \omega_1 = x_1\omega_o]$. telle que $Z_{AM} = Y_M$ c'est à dire x_1 solution de

$$\boxed{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{\tau^2\omega_o^2} = 1}$$

La solution est

$$x_1^2 = 2 - \frac{1}{\tau^2\omega_o^2}$$

Si $2 - \dfrac{1}{\tau^2\omega_o^2} > 0 \Longrightarrow M > \dfrac{\alpha^2}{2k} = M_c$ alors

$$\boxed{\omega_1 = \omega_o\sqrt{2 - \frac{1}{\tau^2\omega_o^2}}}$$

8-L'amplitude d'oscillation de la masse M est maximale si $\dfrac{dY_M}{dx} = 0$

$$\boxed{\omega_R = \omega_o\sqrt{1 + \frac{1}{2\tau^2\omega_o^2}}}$$

CHAPITRE 7

MOUVEMENTS DANS UN CHAMP DE FORCES CENTRALES CONSERVATIVES, MOUVEMENT NEWTONIEN

7.1 Généralités sur les forces centrales

7.1.1 Définition

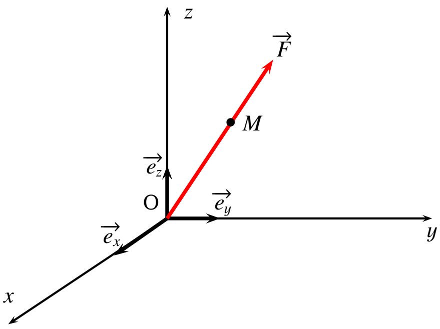
Définition

On appelle force centrale une force $\overrightarrow{F}$ dont la direction passe toujours par un point fixe O.

Exemple

- *Tension du ressort.*
- *Force gravitationnelle :* $\overrightarrow{F} = -\dfrac{\mathcal{G}mM}{r^2}\overrightarrow{e_r}$
- *Force coulombienne :* $\overrightarrow{F} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}\dfrac{q_1q_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$
- *La tension du fil dans le pendule simple.*

Son expression en coordonnées sphériques s'écrit $\overrightarrow{F} = F(r,\theta,\varphi)\overrightarrow{e_r}$ avec $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{OM}}{r}$



7.1.2 Moment cinétique, Loi des aires

7.1.2.1 Conservation du moment cinétique

Appliquons le TMC en O point fixe dans $\mathcal{R}$ **supposé galiléen**

$$\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathcal{M}_o}(\overrightarrow{F}) \Longrightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}$$
$$\Longrightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = r\,\overrightarrow{e_r} \wedge F\,\overrightarrow{e_r}$$
$$\Longrightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{cte}}$$

Conclusion:

Le moment cinétique d'une force centrale est conservatif

7.1.2.2 Planéité de la trajectoire

On a : $\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{cte}$ donc le mouvement est plan : **C'est la première loi de Kepler**
On choisit les coordonnées cylindriques avec

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R}) = \sigma_o\,\overrightarrow{e_z}}$$

Par conséquent :
- Le vecteur position :$\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$
- La vitesse :$\overrightarrow{V}(M/R) = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$
- L'accélération : $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta})\,\overrightarrow{e_\theta}$
- Le moment cinétique : $\sigma_o = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{V}(M/R) \Longrightarrow \sigma_o = mr^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$

D'où :

$$\boxed{\sigma_o = mr^2\dot{\theta} = mC}$$

Avec :

$$\boxed{C = r^2\dot{\theta} = \frac{\sigma_o}{m}}$$

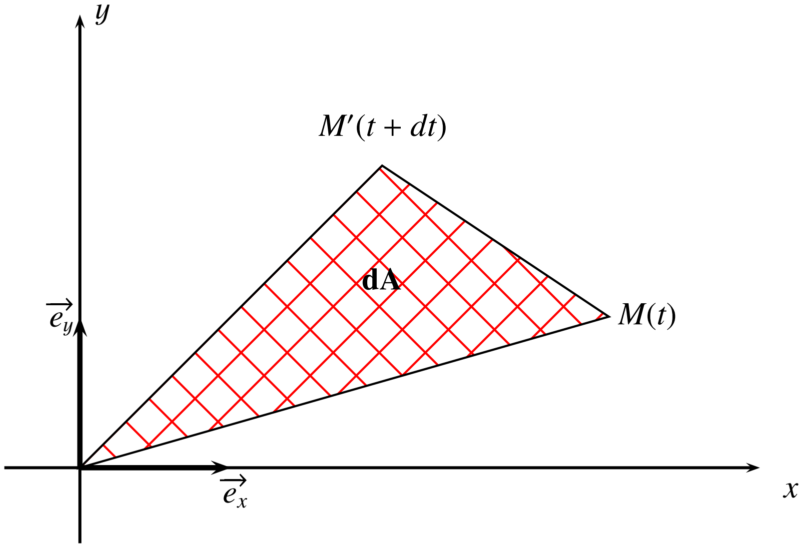
Constante des aires

Remarque

Si $\overrightarrow{\sigma_o} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \dot{\theta} = 0$ c'est à dire que le mouvement se fait dans la direction de $\overrightarrow{e_r}$: C'est un mouvement rectiligne

7.1.2.3 Vitesse aréolaire , Loi des aires

Déterminons dA l'aire (surface) élémentaire balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ entre les instants t et $t + dt$



On a :
$dA = \frac{1}{2} \| \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{OM} \| \Longrightarrow dA = \frac{1}{2} \| r\,\overrightarrow{e_r} \wedge (dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta}) \|$

$$\boxed{dA = \frac{1}{2} r^2 d\theta}$$

On définit la **vitesse aréolaire** $\frac{dA}{dt}$ comme la surface balayée par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ pendant l'unité de temps

$$\boxed{\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{C}{2} = \frac{\sigma_o}{2m} = cte}$$

Conclusion:

Loi des aires (deuxième loi de Kepler):
Le vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaye des surfaces égales pendant des intervalles de temps égaux.

7.1.3 Formules de Binet

On a :

- $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} \Longrightarrow V^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2$.
- On pose :$u = \frac{1}{r} \Longrightarrow \frac{dr}{du} = -\frac{1}{u^2}$
- $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = (\frac{dr}{du})(\frac{du}{d\theta})(\frac{d\theta}{dt}) = -r^2\dot{\theta}\frac{du}{d\theta}$

$$\boxed{\frac{dr}{dt} = -C\frac{du}{d\theta}}$$

Donc

$$\boxed{V^2 = C^2[(\frac{du}{d\theta})^2 + u^2]}$$

C'est la première loi de Binet

De même on a : $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\overrightarrow{e_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta})\,\overrightarrow{e_\theta}$
Or :

$$\boxed{a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = \frac{1}{r}\frac{dC}{dt} = 0}$$

- $\ddot{r} = \dfrac{d}{dt}[-C\dfrac{du}{d\theta}] = -C\dfrac{d}{d\theta}(\dfrac{du}{d\theta})\dfrac{d\theta}{dt} = -C^2u^2\dfrac{d^2u}{d\theta^2}$
- $r\dot{\theta}^2 = r\dfrac{C^2}{r^4} = C^2u^3$

$$\boxed{\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}) = -C^2u^2(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u)\,\overrightarrow{e_r}}$$

C'est la deuxième loi de Binet

Activité

Déterminer la loi de forces centrales $F(r)$ lorsque :
- $r = k\exp\theta$
- $r = k\theta$

7.2 Forces centrales conservatives

On suppose que la force centrale $\overrightarrow{F}$ est conservative c'est à dire qu'il existe une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ tel que

$$\boxed{d\mathcal{E}_p = -\overrightarrow{F}.\overrightarrow{dOM} \Longrightarrow d\mathcal{E}_p = -F_r dr}$$

On en déduit que l'énergie potentielle ne dépend que de la distance r elle ne dépend ni de θ ni de φ

$$\boxed{\mathcal{E}_p(r) = \int F(r)dr + cte}$$

Par conséquent : $E_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \Longrightarrow E_m = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 + \dfrac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \mathcal{E}_p(r)$

Or :$\dot{\theta} = \dfrac{\sigma_o}{m} = \dfrac{C}{r^2}$ par conséquent :

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\sigma_o^2}{2m}\frac{1}{r^2} + \mathcal{E}_p(r)}$$

On pose :

- $\mathscr{E}_{c,r} = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2$: l'énergie cinétique radiale.
- $\mathscr{E}_{p,eff})(r) = \dfrac{\sigma_o^2}{2m}\dfrac{1}{r^2} + \mathscr{E}_p(r)$: l'énergie potentielle effective (ou efficace).

Puisque le système est conservatif alors :

$$\boxed{E_m = cte = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\sigma_o^2}{2m}\frac{1}{r^2} + \mathscr{E}_p(r) = E^o}$$

C'est l'intégrale première de l'énergie

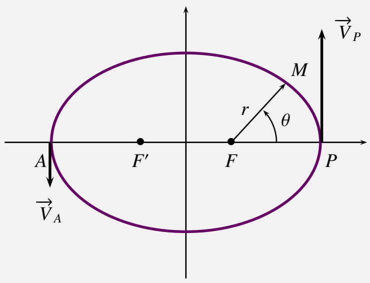
Remarques

- $$\boxed{\mathscr{E}_{c,r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geqslant 0 \Longrightarrow E_m \geqslant \mathscr{E}_{p,eff}}$$
- $\mathscr{E}_{c,r} = \dfrac{1}{2}m\dot{r}^2 = 0 \Longrightarrow \dot{r} = 0$ *c'est à dire que r est extremum.*

- *Pour une trajectoire circulaire $r = R \Longrightarrow \mathscr{E}_{c,r} = 0$ c'est à dire*

$$\boxed{E_m(circulaire) = \mathscr{E}_{p,eff} = E^o}$$

- *Pour une trajectoire elliptique avec origine au foyer*



On a au points :

- *P appelé périgée (le point le plus proche au foyer origine) :*

$$r_P = r_{min} \Longrightarrow \dot{r}_P = 0$$

- *A appelé apogée (le point le plus éloigné du foyer origine :*

$$r_A = r_{max} \Longrightarrow \dot{r}_A = 0$$

Comme $\overrightarrow{V} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$ *alors*

$$\boxed{V_A = r_A\dot{\theta}_A \qquad ; \qquad V_P = r_P\dot{\theta}_P}$$

Relation entre V_A et V_P

Comme $C = r^2\dot{\theta} = r(r\dot{\theta})$ alors

$$\boxed{r_AV_A = r_PV_P}$$

7.3 Cas du champ newtonien

7.3.1 L'approche énergétique

On suppose que la force est newtonnienne c'est à dire :

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\overrightarrow{e_r}}$$

▶ Si $\overrightarrow{F}$ est attractive (interactions gravitationnelle ou coulombienne entre deux charges de signe contraire) alors $\alpha > 0$

▶ Si $\overrightarrow{F}$ est repulsive (interactions coulombienne entre deux charges de même signe) alors $\alpha < 0$

L'énergie potentielle est donc avec référence à l'infini

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{\alpha}{r^2}\overrightarrow{e_r} \Longrightarrow \mathscr{E}_p(r) = -\frac{\alpha}{r}}$$

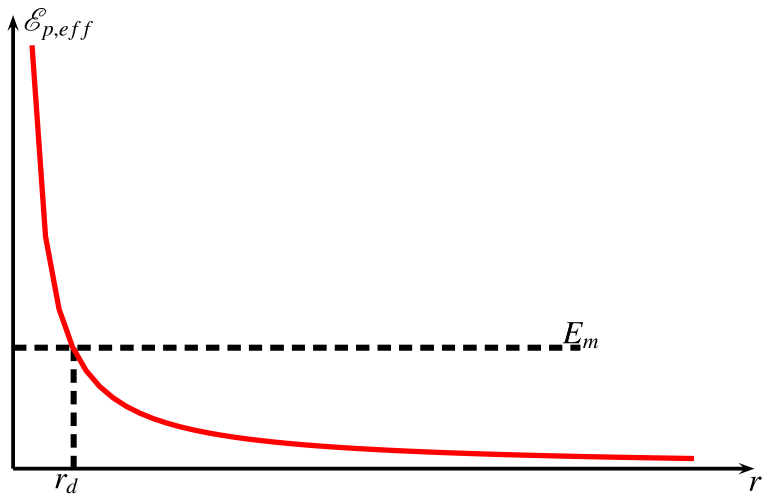
Remarque

Le signe de l'énergie potentielle :

- *Si* $\overrightarrow{F}$ *est attractive alors* $\mathscr{E}_p(r) < 0$
- *Si* $\overrightarrow{F}$ *est repulsive alors* $\mathscr{E}_p(r) > 0$

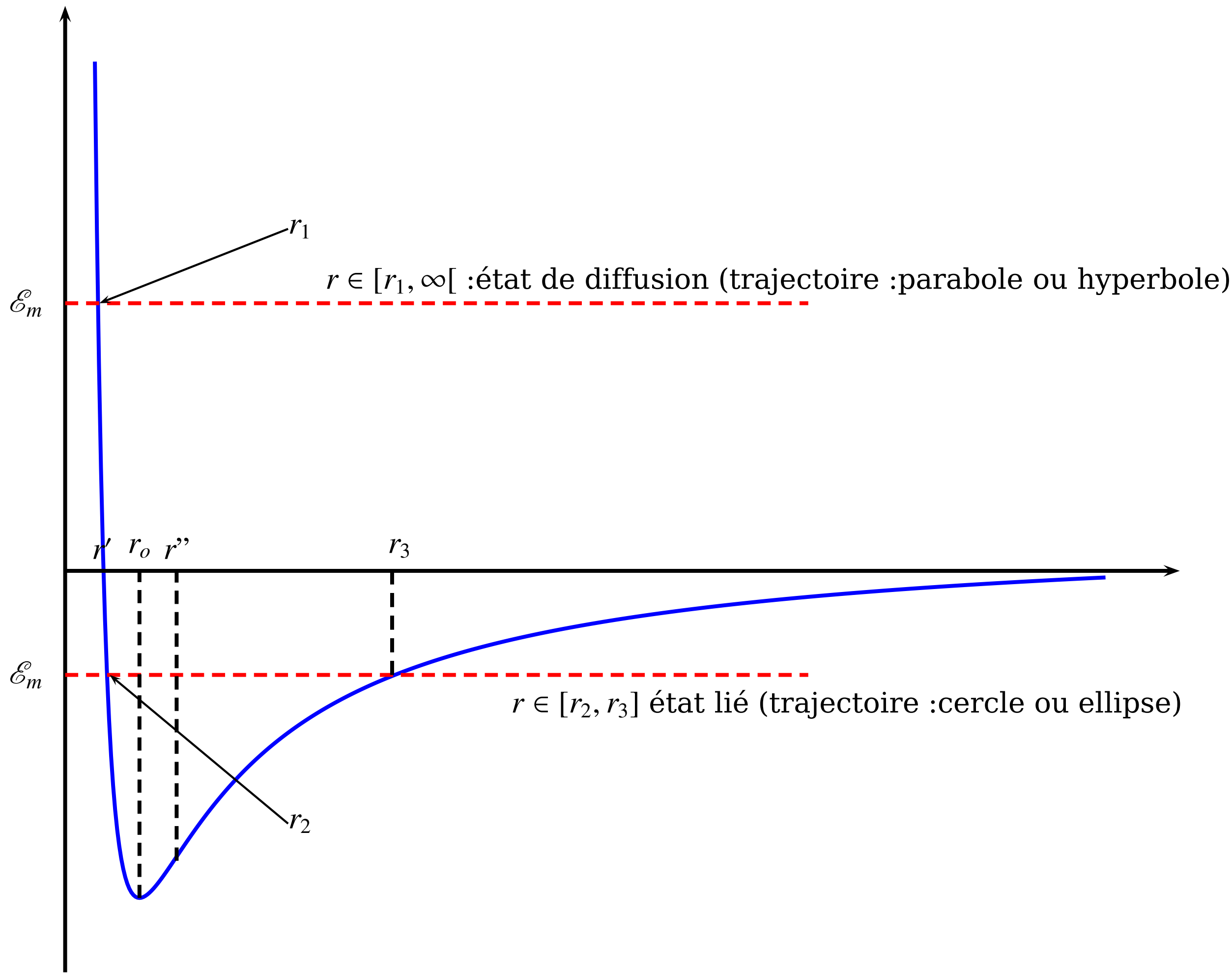
Représentation de l'énergie potentielle effective

Cas ou $\overrightarrow{F}$ est repulsive



$$\boxed{r \geqslant r_d \Longrightarrow \textbf{état de diffusion}}$$

Cas ou $\overrightarrow{F}$ est attractive



- $\mathscr{E}_{p,eff} = 0 \Longrightarrow r' = \dfrac{\sigma_o^2 m}{2\alpha}$
- $\dfrac{d\mathscr{E}_{p,eff}}{dr} = 0 \Longrightarrow r_o = \dfrac{\sigma_o^2 m}{\alpha} = 2r'$
- $\dfrac{d^2\mathscr{E}_{p,eff}}{dr^2} = 0 \Longrightarrow r" = \dfrac{3\sigma_o^2 m}{2\alpha} = 3r'$

7.3.2 L'équation de la trajectoire

7.3.2.1 Relation fondamentale de la dynamique

On a : $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}(M)$ or :
$\overrightarrow{F} = -\dfrac{\alpha}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

- $\alpha < 0 \Longrightarrow$ repulsion $(q_1.q_2 > 0)$
- $\alpha > 0 \Longrightarrow$ attraction :soit $(q_1.q_2 < 0)$ soit gravitation.

On sait que : $C = r^2\dot{\theta} = \dfrac{\sigma_o}{m}$ ainsi : $\overrightarrow{a}(M) = -C^2u^2(\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u)\,\overrightarrow{e_r}$

donc : $-mC^2u^2(\dfrac{d^2u}{d\theta^2} + u) = -\dfrac{\alpha}{r^2} = -\alpha u^2$

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = +\frac{\alpha}{mC^2} = \frac{\alpha m}{\sigma_o^2}}$$

La solution de cette équation est :
$u = A\cos(\theta - \theta_o) + \dfrac{\alpha m}{\sigma_o^2}$ avec A et θ_o sont des constantes déterminées par les conditions initiales.
Cette solution peut s'écrire :

$$\frac{1}{r} = u = \frac{\alpha m}{\sigma_0^2}(1 + \frac{A\sigma_0^2}{\alpha m}\cos(\theta - \theta_o))$$

On pose :

$$\boxed{p = |\frac{\sigma_0^2}{\alpha m}| \quad || \quad e = |\frac{A\sigma_0^2}{\alpha m}|}$$

C'est l'équation d'une **conique** avec :
• $a = \dfrac{p}{|1 - e^2|}$ • $b = \sqrt{ap}$ • $c = ea$

7.3.2.2 Vecteur Range-Lenz

On définit le vecteur de Range-Lenz par pour une force centrale de forme $\overrightarrow{F} = -\dfrac{\alpha}{r^2}$ par

$$\boxed{\overrightarrow{A} = \frac{1}{\alpha}(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R})) - \overrightarrow{e_r}}$$

Montrons que ce vecteur est constant au cours du temps ,pour cela calculons $\dfrac{d\overrightarrow{A}}{dt}$:

$$\frac{d\overrightarrow{A}}{dt} = \frac{1}{\alpha}[\overrightarrow{a} \wedge \overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R})] - \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{A}}{dt} = \frac{1}{\alpha}[-\frac{\alpha}{mr^2}\,\overrightarrow{e_r} \wedge mC\,\overrightarrow{e_z}] - \frac{C}{r^2}\,\overrightarrow{e_\theta}$$

$$\Longrightarrow \frac{d\overrightarrow{A}}{dt} = \frac{C}{r^2}\,\overrightarrow{e_\theta} - \frac{C}{r^2}\,\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{A} = \frac{1}{\alpha}(\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R})) - \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{cte}}$$

La constante est déterminée par les conditions initiales ou des conditions particulières.
Sachant que :
• $\overrightarrow{V} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{\sigma_o}(M/\mathcal{R}) = mC\,\overrightarrow{e_z}$ alors

$$\boxed{\overrightarrow{A} = (\frac{mC^2}{\alpha r} - 1)\,\overrightarrow{e_r} - \frac{mC}{\alpha}\dot{r}\,\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{cte}}$$

Remarque

les conditions particulières
Si $\dot{r} = 0$ c'est à dire r est extrémale alors $\overrightarrow{A} // \overrightarrow{e_r}$

On pose

$$\boxed{e = \|\overrightarrow{A}\| \geqslant 0}$$

Donc calculons e^2 au lieu de e :
$e^2 = (\frac{mC^2}{\alpha r} - 1)^2 + (\frac{mC}{\alpha}\dot{r})^2$
$\Longrightarrow e^2 = \frac{2mC^2}{\alpha^2}[\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}] + 1$
Or : $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{\alpha}{r}$
on tire que :

$$\boxed{e^2 - 1 = \frac{2mC^2}{\alpha^2}E_m \Longrightarrow E_m = \frac{\alpha^2}{2mC^2}(e^2 - 1) = \frac{m\alpha^2}{2\sigma_o^2}(e^2 - 1)}$$

Calculons la quantité $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{r}$:
$\overrightarrow{A}.\overrightarrow{OM} = (\frac{mC^2}{\alpha r} - 1)r = er\cos\theta \Longrightarrow r = \frac{mC^2}{\alpha} + er\cos\theta$

$$\boxed{r = \frac{\frac{mC^2}{\alpha}}{1 + e\cos\theta}}$$

C'est l'équation d'une conique de paramètre

$$\boxed{p = \frac{mC^2}{|\alpha|}}$$

Et d'excentricité

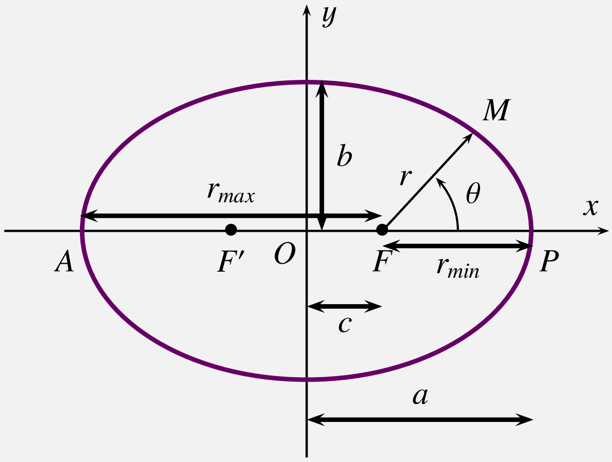
$$\boxed{e = \|\overrightarrow{A}\|}$$

Discussion

- Si $e = 0 \Longrightarrow A = cte = 0 \Longrightarrow E_m < 0$: trajectoire circulaire
- Si $0 < e < 1 \Longrightarrow E_m < 0$: trajectoire elliptique
- Si $e = 1 \Longrightarrow E_m = 0$: trajectoire parabolique
- Si $e > 1 \Longrightarrow E_m > 0$: trajectoire hyperbolique

Remarque

Pour une trajectoire elliptique



- *En coordonnées cartésiennes son équation (avec) est :*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Avec si $a > b$:

$$c^2 = a^2 - b^2 \quad ; \quad c = ea \quad ; \quad p = \frac{b^2}{a} \Longrightarrow b = \sqrt{ap}$$

- *En coordonnées polaire son équation **avec origine au foyer F** est :*

$$\boxed{r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}}$$

Avec

$$\boxed{0 < e < 1}$$

- *Apogée* $(\dot{r} = 0)$: $r_{max} = \dfrac{p}{1-e}$
- *Périgée* $(\dot{r} = 0)$: $r_{min} = \dfrac{p}{1+e}$
- *Grand axe* a : $r_{min} + r_{max} = 2a \Longrightarrow a = \dfrac{p}{1-e^2}$
- *Petit axe* b : $b = \sqrt{ap} \Longrightarrow b = \dfrac{p}{\sqrt{1-e^2}}$

7.3.2.3 L'étude de quelques trajectoires

7.3.2.3.1 Trajectoire circulaire .

C'est l'exemple des satellites autour de la terre.

La R.F.D dans le repère de Fresnet donne : $\dfrac{\mathcal{G}M_T m_s}{r^2} = m_s\dfrac{V^2}{r}$ donc :

- La vitesse :

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}}$$

- La période :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mathcal{G}M_T}}}$$

- L'énergie mécanique : $E_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \Longrightarrow E_m = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{\mathcal{G}mM_T}{r}$ ce qui donne

$$\boxed{E_m = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{2r} = -\frac{\alpha}{2r}}$$

7.3.2.3.2 Trajectoire elliptique .

C'est l'exemple des planètes autour du soleil.

- L'énergie mécanique : $E_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \Longrightarrow E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2}\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha}{r}$ Pour $\dot{r} = 0$ on a deux solutions r_{min} et r_{max} qui sont solutions de l'équation

$$E_m = \frac{mC^2}{2}\frac{1}{r^2} - \frac{\alpha}{r} \Longrightarrow E_m r^2 + \alpha r - \frac{mC^2}{2} = 0$$

La somme des solutions de cette équation du second ordre donne

$$r_{min} + r_{max} = 2a = -\frac{\alpha}{E_m}$$

Donc

$$\boxed{E_m = -\frac{\alpha}{2a} = -\frac{\mathcal{G}mM}{2a}}$$

L'énergie mécanique est inversement proportionnel au grand axe de l'ellipse

- La période du mouvement :

On rappelle que $p = \frac{mC^2}{\alpha}$ et $b = \sqrt{ap}$

$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2} \Longrightarrow A = \frac{C}{2}T = \pi ab$

donc :

$\frac{C^2}{4}T^2 = \pi^2a^2b^2 \Longrightarrow T^2 = \frac{4}{C^2}\pi^2a^3p$

Or $\alpha = \mathcal{G}mM$ on tire que

$$\boxed{T^2 = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}a^3 \Longrightarrow \frac{T^2}{a^3} = cte}$$

C'est la troisième loi de Kepler

Remarque

On trouvé que :

	Orbite circulaire	Orbite elliptique
L'énergie mécanique	$-\dfrac{\mathcal{G}mM}{2R}$	$-\dfrac{\mathcal{G}mM}{2a}$
La période	$\sqrt{\dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}R^3}$	$\sqrt{\dfrac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}a^3}$

Donc pour retrouver les expressions de l'énergie mécanique et la période du mouvement elliptique à partir du mouvement circulaire , il suffit de remplacer le rayon R par le grand axe de l'ellipse a

7.3.2.3.3 Vitesse de libération .

C'est la vitesse qu'il faut fournir à un objet depuis la terre pour qu'il s'échappe de l'attraction terrestre.

Son orbite doit être parabolique ou hyperbolique c'est dire son $E_m \geqslant 0$

Or $E_m = \dfrac{1}{2}mV_o^2 - \dfrac{\mathcal{G}mM_T}{R_T} \geqslant 0 \Longrightarrow V_o \geqslant \sqrt{\dfrac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}} = \sqrt{2g_oR_T}$

$$\boxed{V_\ell = \sqrt{2g_oR_T} = 11,3\ km/s = 40,7.10^3\ km/h}$$

7.3.2.3.4 Rayon de la trajectoire circulaire d'un satellite géostationnaire .

Un satellite est dit géostationnaire s'il a la même période de rotation T que la terre sur elle même $T = 24.h = 86400\ s$

On a $V = R\omega = \dfrac{2\pi R}{T} = \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{R}}$

$$\boxed{R = \left[\frac{T^2\mathcal{G}M_T}{4\pi^2}\right]^{1/3}}$$

A.N : $R = 42300\ km = 6,6\ R_T$

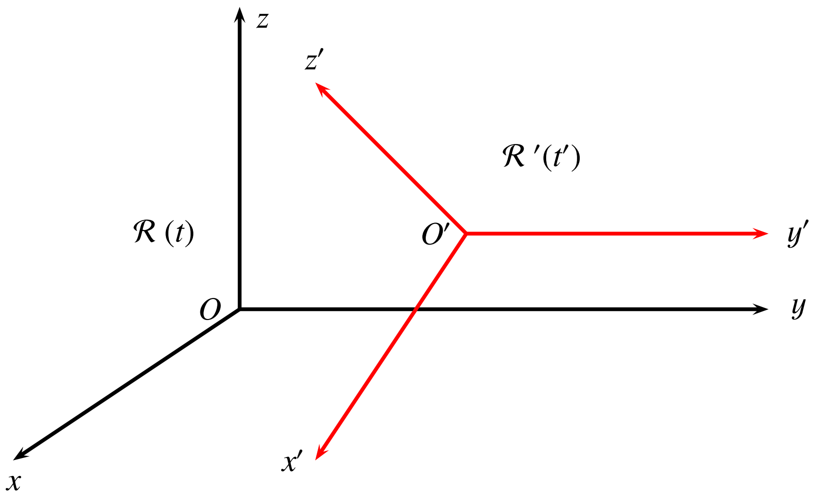
Donc sa hauteur $h = R - R_T = 36000\ km = 5,6\ R_T$

CHAPITRE 8

MÉCANIQUE DANS UN RÉFÉRENTIEL NON GALILÉEN

8.1 Introduction

Soient $\mathcal{R}$ $(Oxyzt)$ un référentiel galiléen et $\mathcal{R}'(O'x'y'z't')$ un autre référentiel en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$.



- $\mathcal{R}$ = repère fixe dit repère absolu.
- $\mathcal{R}'$ = repère en mouvement dit repère relatif.

On rappelle que en mécanique classique ,le temps est absolu c'est à dire ne dépend pas du référentiel et par conséquent

$$t_{\mathcal{R}} = t_{\mathcal{R}'} = t \Longrightarrow dt_{\mathcal{R}} = dt_{\mathcal{R}'} = dt$$

Dans la suite on s'intéresse aux mouvements relatifs :

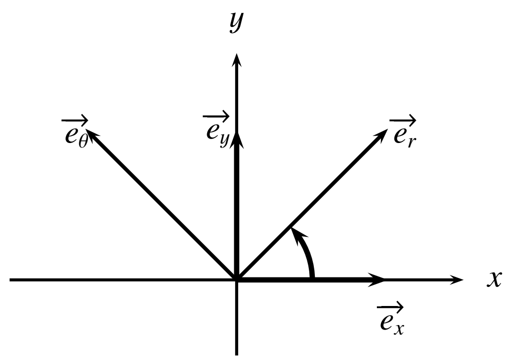
- **Translation** : Les axes de $\mathcal{R}'$ restent constamment parallèle à ceux de $\mathcal{R}$.
- **Rotation uniforme** : autour d'un axe.

8.2 L'étude cinématique

8.2.1 Axe instantané de rotation

8.2.1.1 L'étude d'un exemple

En coordonnées cylindriques le vecteur $\overrightarrow{e_r}$ ainsi $\overrightarrow{e_\theta}$ tourne autour de l'axe oz d'un angle dans le sens direct



Que vaut $\dfrac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt}_{/\mathcal{R}'}$ et $\dfrac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt}_{/\mathcal{R}}$ ainsi $\dfrac{d\,\overrightarrow{e_\theta}}{dt}_{/\mathcal{R}'}$ et $\dfrac{d\,\overrightarrow{e_\theta}}{dt}_{/\mathcal{R}}$?

- $\dfrac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt}_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{0}$; car $\overrightarrow{e_r}$ est un vecteur lié à $\mathcal{R}'$.
- $\dfrac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt}_{/\mathcal{R}} = \dot{}\,\overrightarrow{e_\theta}$

Or : $\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_r}$ d'où : $\dfrac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt}_{/\mathcal{R}} = \dot{}\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_r}$.

Ainsi

- $\dfrac{d\,\overrightarrow{e_\theta}}{dt}_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{0}$; car $\overrightarrow{e_\theta}$ est un vecteur lié à $\mathcal{R}'$.
- $\dfrac{d\,\overrightarrow{e_\theta}}{dt}_{/\mathcal{R}} = -\dot{}\,\overrightarrow{e_r}$

Or : $\overrightarrow{e_r} = -\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$ d'où : $\dfrac{d\,\overrightarrow{e_\theta}}{dt}_{/\mathcal{R}} = \dot{}\,\overrightarrow{e_z} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$.

On pose :

$$\overrightarrow{\Omega} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z} = \Omega\,\overrightarrow{e_z}$$

$\overrightarrow{\Omega}$ est appelé le **vecteur instantannée de rotation** du repère relatif $\mathcal{R}'$ par rapport au repère absolu $\mathcal{R}$; il caractérise la rotation du repère relatif $\mathcal{R}'$ par rapport au repère absolu $\mathcal{R}$

Par conséquent

$$\dfrac{d\,\overrightarrow{e_r}}{dt}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_r} \qquad \dfrac{d\,\overrightarrow{e_\theta}}{dt}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$$

Conclusion:

Si $\overrightarrow{A}$ un vecteur lié au repère relatif $\mathcal{R}'$ alors

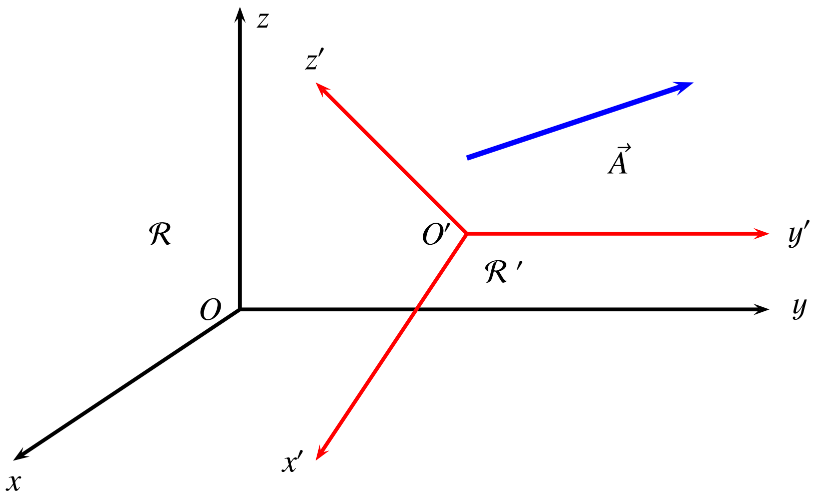
$$\boxed{\left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{A}}$$

Remarques

- $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}/\mathcal{R}') = -\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R})$
- $\overrightarrow{\Omega}$ *est porté par l'axe de rotation.*
- $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_3) = \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_1/\mathcal{R}_2) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_2/\mathcal{R}_3)$ *: relation de* ***châles***.

8.2.1.2 Relation fondamentale de la dérivation vectorielle

Soit $\overrightarrow{A}$ un vecteur libre non lié à $\mathcal{R}'$ qu'on connaît ses composantes dans $\mathcal{R}'$ et on désire le dériver par rapport à $\mathcal{R}$.



on admet le résultat suivant :

$$\boxed{\left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{A}}$$

Remarque

1. *Si $\vec{A}$ est lié à $\mathcal{R}'$ alors on retrouve le résultat précédent.*
2. *Pour un mouvement de translation : $\vec{\Omega} = \vec{0}$ d'où :*

$$\boxed{\left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\vec{A}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'}}$$

C'et à dire dériver par rapport à $\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}'$ c'et la même chose : autrement dit la dérivation ne dépend pas du repère.

8.2.2 Composition des vitesses

Soit un point M mobile dans un référentiel relatif $\mathcal{R}'$ en mouvement par rapport à un référentiel absolu $\mathcal{R}$ galiléen .

On appelle :

- **La vitesse relative** $\vec{V}_r(M) = \vec{V}(M/\mathcal{R}')$ la vitesse du point M dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$
- **La vitesse absolue** $\vec{V}_a(M) = \vec{V}(M/\mathcal{R})$ la vitesse du point M dans le référentiel absolu $\mathcal{R}$

Quelle relation entre $\vec{V}(M/\mathcal{R})$ et $\vec{V}(M/\mathcal{R}')$?

On a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \Longrightarrow \left.\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}}$

d'où : $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(O'/\mathcal{R}) + \left.\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$

$$\boxed{\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(M/\mathcal{R}') + \vec{V}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

- On pose :

$$\boxed{\vec{V}_e(M) = \vec{V}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}}$$

vitesse d'entraînement de M

Par conséquent :

$$\boxed{\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}_e + \vec{V}_r}$$

Si $M \equiv A$ lié à $\mathcal{R}'$ alors $\vec{V}(A/\mathcal{R}') = \vec{0}$ donc :

$$\boxed{\vec{V}(A/\mathcal{R}) = \vec{V}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'A} = \vec{V}_e}$$

La vitesse d'entraînement c'est la vitesse d'un point lié à $\mathcal{R}'$ et qui coincide à l'instant t avec le point M .

Le point A est dit point coïncidant.

Remarques

- *Dans le cas de la translation* $\vec{\Omega} = \vec{0}$ *donc :*

$$\boxed{\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}_r + \vec{V}(O'/\mathcal{R})}$$

- *si* $O \equiv O'$ *alors* $\vec{V}_e = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$ *:*

$$\boxed{\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}_r + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$$

- *si* $O \equiv O'$ *et* M *lié à* $\mathcal{R}$ *alors :*

$$\boxed{\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$$

C'est une rotation pure autour de l'axe $\vec{\Omega}$

8.2.3 Composition des accélérations

On a :

- $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(O'/\mathcal{R}) + \left.\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$
- $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \left.\dfrac{d\vec{V}(M/\mathcal{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}}$
- $\left.\dfrac{d\vec{V}(O'/\mathcal{R})}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \vec{a}(O'/\mathcal{R})$
- $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{/\mathcal{R}}\left(\left.\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'}\right) = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'}\left(\left.\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'}\right) + \vec{\Omega} \wedge \left(\left.\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'}\right) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r$
- $\left.\dfrac{d}{dt}\right|_{/\mathcal{R}}(\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}) = \left(\left.\dfrac{d\vec{\Omega}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}}\right) \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge \left.\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}}$

$= \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \left[\left.\dfrac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}\right]$

$= \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$

d'où :

$$\boxed{\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \vec{a}(M/\mathcal{R}') + 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})}$$

On pose :

$$\boxed{\vec{a}_e(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{\Omega} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})}$$

accélération d'entraînement.

$$\boxed{\vec{a}_c(M/\mathcal{R}) = 2\vec{\Omega} \wedge \vec{V}_r}$$

accélération de *Coriolis*.

CAS PARTICULIERS :

1. $\vec{\Omega} = \vec{0}$ mouvement de translation alors :$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ et par conséquent :
   - $\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(O'/\mathcal{R}) + \vec{V}(M/\mathcal{R}')$
   - $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \vec{a}(M/\mathcal{R}')$.
2. $\vec{\Omega} = \overrightarrow{cte}$
   $\vec{a_e}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(O'/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M})$.
3. M lié à $\mathcal{R}' \Longrightarrow$
   $$\boxed{\vec{a_c}(M/\mathcal{R}') = \vec{0}}$$
4. $\vec{\Omega} = \overrightarrow{cte}$ et $O \equiv O'$ le point M décrit un cercle
   $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \vec{\Omega} \wedge (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OH} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM}$.
   H étant la projection de M sur l'axe $\vec{\Omega}$.
   Or : $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OH} = \vec{0}$; et $\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM} = -\Omega HM\vec{e_\theta}$.
   donc :
   $$\boxed{\vec{a}_e(M) = \vec{\Omega} \wedge [\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}] = -\Omega^2\overrightarrow{HM}}$$
   accélération centripète
5. $$\boxed{\vec{a}_e(M) \neq \frac{d\vec{V}_e(M)}{dt}}$$

8.3 Dynamique dans un référentiel non galiléen

8.3.1 RFD dans un référentiel non galiléen : forces d'inertie

Soit $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen et $\mathcal{R}'$ un référentiel non galiléen en mouvement quelconque par rapport à $\mathcal{R}$; en général $\mathcal{R}'$ non galiléen.
La relation fondamentale de la dynamique dans $\mathcal{R}$ donne :
$\Sigma\vec{F}_e = m\vec{a}(M/\mathcal{R})$
Or : $\vec{a}(M/\mathcal{R}) = \vec{a}(M/\mathcal{R}') + \vec{a}_e(M) + \vec{a}_c(M)$
donc : $\Sigma\vec{F}_e - m\vec{a}_e(M) - m\vec{a}_c(M) = m\vec{a}(M/\mathcal{R}')$
On pose :

$$\boxed{\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}_e(M)}$$

force d'inertie d'entrainement

$$\boxed{\vec{F}_{ic} = -m\vec{a}_c(M)}$$

force d'inertie de Coriollis

D'où dans un référentiel non galiléen la R.F.D s'écrit :

$$\boxed{\Sigma\overrightarrow{F}_e + \overrightarrow{F}_{ie} + \overrightarrow{F}_{ic} = m\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}')}$$

Remarques

1. *Si le corps est en équilibre dans le référentiel relatif $\mathcal{R}'$ alors* $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}') = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{F}_{ic} = -2m\,\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V}_r = \overrightarrow{0}$ *donc*

$$\boxed{\Sigma\overrightarrow{F}_e + \overrightarrow{F}_{ie} = \overrightarrow{0}}$$

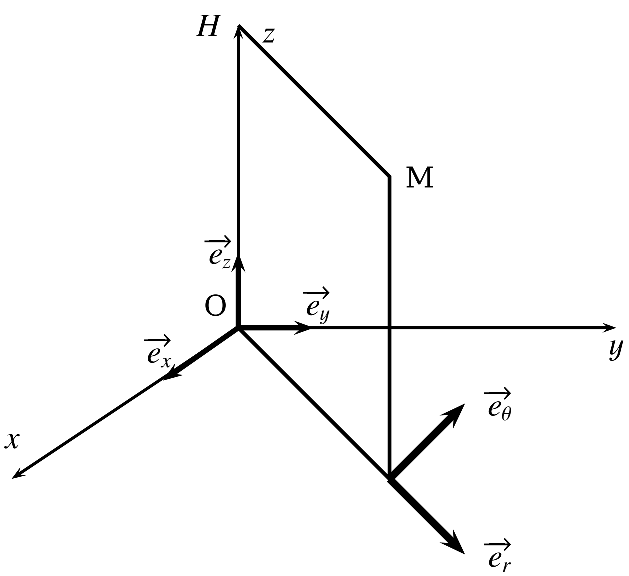
2. *Si* $O \equiv O'$ *et* $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{cte}$ *alors*

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{ie} = m\Omega^2\overrightarrow{HM}}$$

3. *Les forces d'inertie* $\overrightarrow{F}_{ie}$ *et* $\overrightarrow{F}_{ic}$ *n'apparaissent que si le référentiel est non galiléen : Ce sont des pseudo-forces*

8.3.2 L'énergie potentielle d'entrainemment

On rappelle que si $O \equiv O'$ et $\Omega = cte$ alors la force $\overrightarrow{F}_{ie}$ s'écrit :$\overrightarrow{F}_{ie} = m\Omega^2\overrightarrow{HM}$.



Donc : $\overrightarrow{F}_{ie}.\overrightarrow{dOM} = m\Omega^2\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{dOM}$ et comme
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM} \Longrightarrow \overrightarrow{dOM} = \overrightarrow{dOH} + \overrightarrow{dHM}$
Or :$\overrightarrow{HM}.\overrightarrow{dOH} = 0$

D'où : $\overrightarrow{F}_{ie}.d\overrightarrow{OM} = m\Omega^2 d(\frac{\overrightarrow{HM}^2}{2} + cte)$

$$\boxed{\mathscr{E}_p = -\frac{1}{2}m\Omega^2\overrightarrow{HM}^2 + cte}$$

On conclut que dans les conditions précédentes la force d'entraînement est conservative.

Remarques

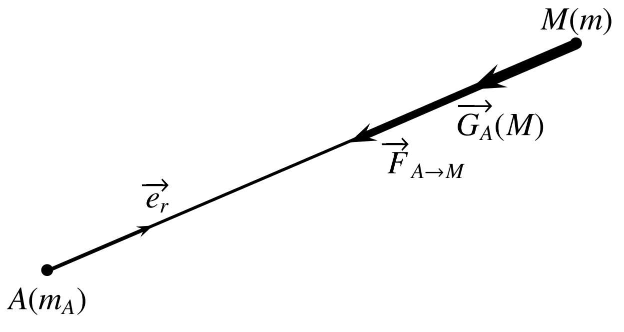
1. *Le travail élémentaire de la force de Coriolis :*
   $\delta\mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{ic}) = \overrightarrow{F}_{ic}.d\overrightarrow{OM} \Longrightarrow \delta\mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{ic}) = -2m(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{V}_r).\overrightarrow{V}_r dt = 0$
   Donc la force d'inertie de Coriolis ne travaille pas et par conséquent elle dérive d'une énergie potentielle constante.
2. *Dans $\mathcal{R}'$ non galiléen :*
   (a) *Le T.E.C s'écrit :*
   $$\boxed{\Delta\mathscr{E}_c = \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{ext}) + \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{ie})}$$
   (b) *Le T.M.C s'écrit :* avec
   $$\boxed{\overrightarrow{\sigma_{O'}}(M/\mathcal{R}') = \overrightarrow{O'M} \wedge m\overrightarrow{V}_r(M)}$$
   $$\boxed{\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma_{O'}}(M/\mathcal{R}')}{dt}\right|_{/\mathcal{R}'} = \overrightarrow{\mathcal{M}_{o'}}(\overrightarrow{F}_{ext}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{o'}}(\overrightarrow{F}_{ie}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_{o'}}(\overrightarrow{F}_{ic})}$$

8.3.3 Applications

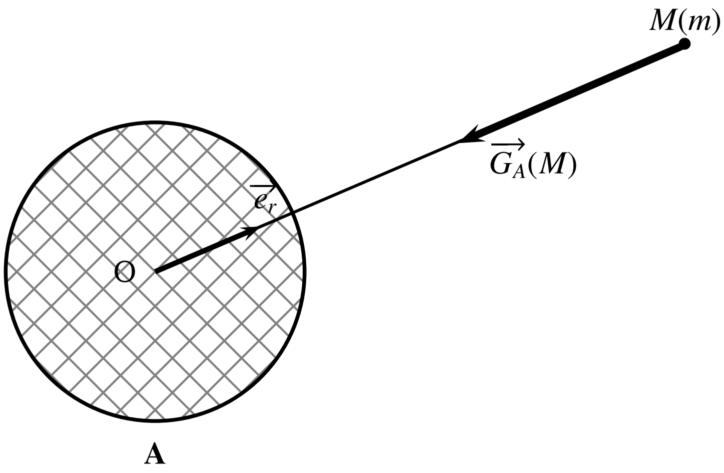
8.3.3.1 Préliminaire

▶ Tout corps A de masse m_A crée en tout point M de l'espace un champ gravitationnel centripète $\overrightarrow{G_A}(M)$.

▶ La force exercée par A sur un point M de masse m est : $\overrightarrow{F}_{A\to M} = m\overrightarrow{G_A}(M)$



▶ Si le corps A est de forme sphérique alors : $\overrightarrow{G_A}(M) = -\mathcal{G}\frac{m_A}{r^2}\overrightarrow{e_r}$



Remarque

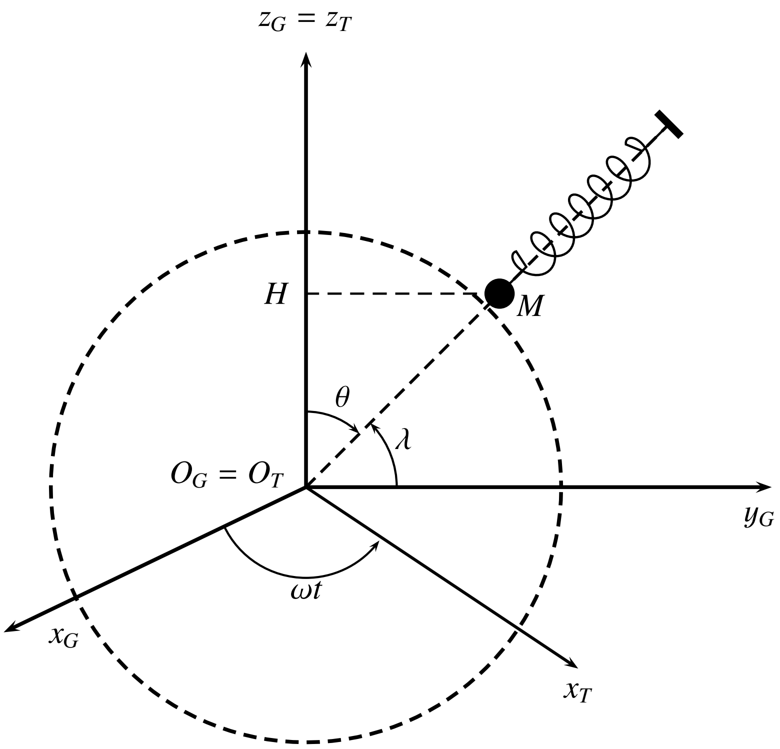
Dans l'expression de la force :

- *Gravitationnelle* $\overrightarrow{F} = -\mathcal{G}\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ *: la masse est dite masse gravitationnelle.*
- *RFD* $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a}$ *: la masse est dite inertielle.*

On admet que les deux masses sont identiques

8.3.3.2 Définition du poids

Soit un corps accroché à un ressort en équilibre dans le référentiel terrestre non galiléen en rotation uniforme autour de $O_G z$.



On a Dans $\mathcal{R}_T$: $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{T} = -\overrightarrow{P}$. avec

$$\boxed{\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}(M)}$$

$\overrightarrow{g}(M)$: Champ de pesanteur.

La relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel $\mathcal{R}_T$ non galiléen donne :

$$m\frac{d\overrightarrow{V}}{dt}_{/\mathcal{R}_T} = \Sigma\overrightarrow{F}_e + \overrightarrow{F}_{ie} + \overrightarrow{F}_{ic}$$

Or $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}_T) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{F}_{ic} = \overrightarrow{0}$ (équilibre relatif)

De même : $\Sigma\overrightarrow{F}_e = m\overrightarrow{G}_T(M) + \overrightarrow{T}$ (On néglige l'effet des autres astres autre que la terre)

Et $\overrightarrow{F}_{ie} = -m\overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) = m\Omega^2\overrightarrow{HM}$

avec Ω la pulsation propre du référentiel terrestre dans le référentiel Géocentrique.

on conclut que : $\overrightarrow{T} + m\Omega^2\overrightarrow{HM} + m\overrightarrow{G}_T(M) = \overrightarrow{0}$.

L'équilibre donne : $\overrightarrow{T} = -\overrightarrow{P} = -m(\overrightarrow{G}_T(M) + \Omega^2\overrightarrow{HM})$.

On tire que :

$$\boxed{\overrightarrow{g}(M) = \overrightarrow{G}_T(M) + \Omega^2\overrightarrow{HM}}$$

Remarque

$\overrightarrow{g}(M)$ n'est pas centripète que si on néglige la rotation propre de la terre dans le référentiel Géocentrique ou aux pôles $HM = 0$.

Quelques ordre de grandeur à Béni Mellal :

- Le rayon terrestre : $R_T = 6380\ km$

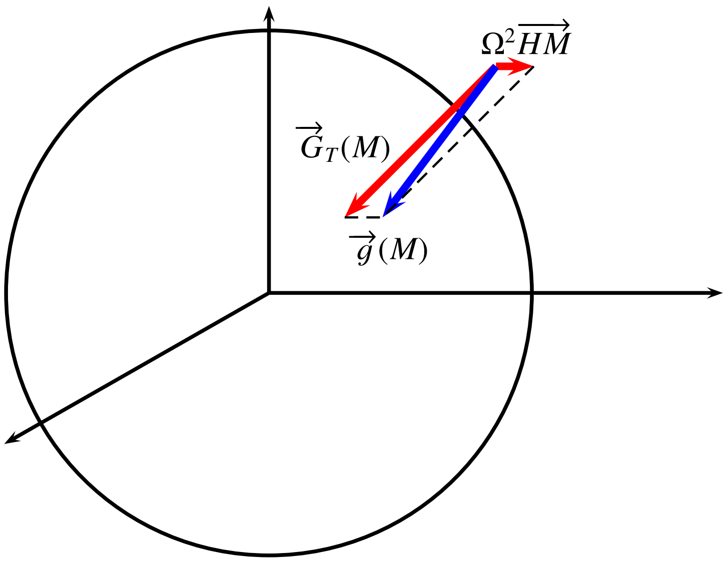
- La latitude $\lambda = 34^o30'$
- La masse de la terre $m_T = 5,97.10^{24}\ kg$
- La constante d'attraction universelle $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}\ N.kg^{-2}.m^2$

Tout calcul donne :

$$G_T = 9,72\ m.s^{-2}$$

$$\Omega^2 HM = \frac{4\pi^2}{T^2} R_T \cos\lambda \Longrightarrow \Omega^2 HM = 0,0279\ m.s^{-2}$$

On conclut que le terme $\Omega^2\overrightarrow{HM}$ est un terme correctif



8.3.3.3 Effet de marée statique

8.3.3.3.1 Expression analytique .

Dans le référentiel de Copérnic supposé galiléen ; soit un point $M(m)$ lié au repère terrestre : $\overrightarrow{V}(M/T) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{F}_{ic} = \overrightarrow{0}$.

$\overrightarrow{G}_T$:le champ gravitationnel terrestre .

$\overrightarrow{G}_A$:le champ gravitationnel de tous les astres sauf la terre (soleil, lune,...).

$\mathcal{R}_T$: référentiel terrestre non galiléen en rotation par rapport à $\mathcal{R}_G$:$\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}_T/\mathcal{R}_G)$.

$\mathcal{R}_G$: référentiel géocentrique en translation circulaire (l'excentricité de l'ellipse terrestre est $e = 0,01671022$)par rapport référentiel de Copérnic $\mathcal{R}_C$,supposé galiléen.

R.F.D dans $\mathcal{R}_T$ donne :

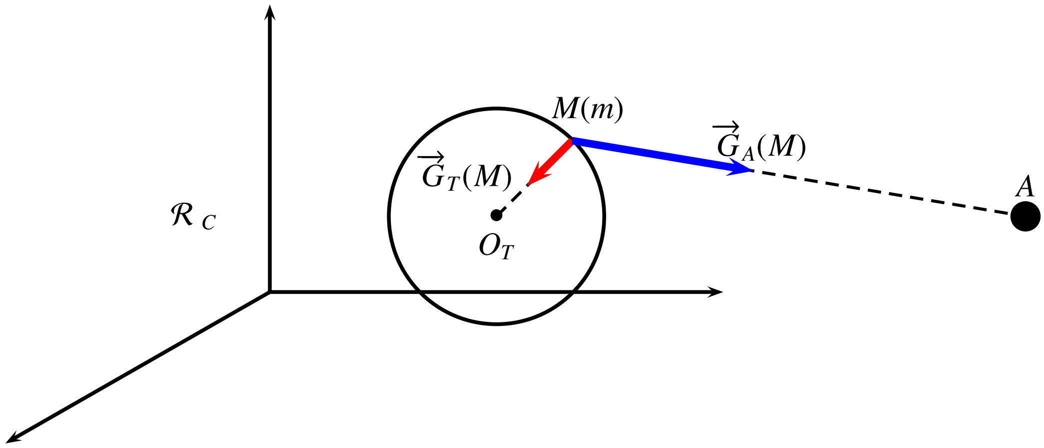
$m\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}_T) = m\overrightarrow{G}_T(M) + m\overrightarrow{G}_a(M) - m\overrightarrow{a}_e(M)$

Or : $\overrightarrow{a}_e(M) = \overrightarrow{a}(O/\mathcal{R}_C) + \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) + \dot{\overrightarrow{\Omega}} \wedge \overrightarrow{OM}$

On néglige le terme (on suppose que la rotation est uniforme) : $\dot{\overrightarrow{\Omega}} \wedge \overrightarrow{OM}$

On tire que : $\overrightarrow{a}(M/\mathcal{R}_T) = \overrightarrow{G}_T(M) + \overrightarrow{G}_a(M) - \overrightarrow{a}(O/\mathcal{R}_C) - \overrightarrow{\Omega} \wedge (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})$

Appliquons la RFD à la terre dans le référentiel de Copérnic :



$m_T\vec{a}(O/\mathcal{R}_C) = m_T\vec{G}_a(O) \Longrightarrow \vec{a}(O/\mathcal{R}_C) = \vec{G}_a(O)$

donc : $\vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{G}_T(M) + \vec{G}_a(M) - \vec{G}_a(O) - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})$

$$\boxed{\vec{a}(M/\mathcal{R}_T) = \vec{G}_T(M) - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}) + \vec{G}_a(M) - \vec{G}_a(O)}$$

On pose :

$$\boxed{\vec{g}(M) = \vec{G}_T(M) - \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM})}$$

le champ de pesanteur :terme statique

$$\boxed{\vec{\mathscr{C}}(M) = \vec{G}_a(M) - \vec{G}_a(O)}$$

terme de marée : terme dépendant du temps

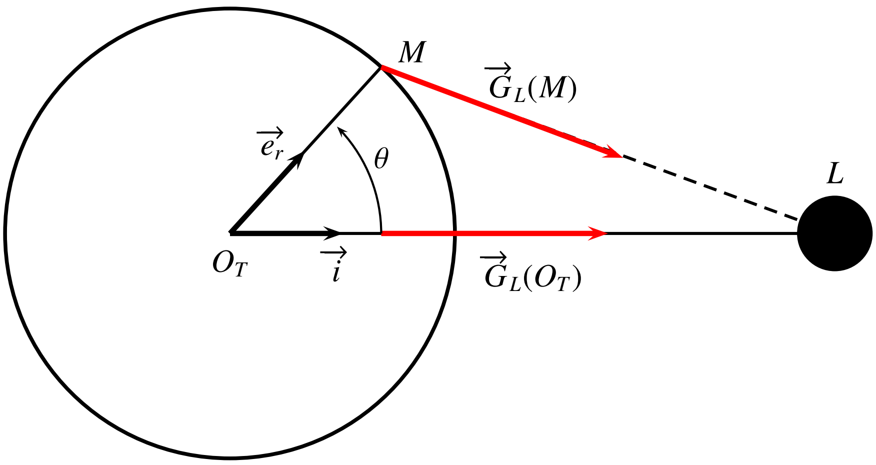
8.3.3.3.2 La marée océanique .

En supposant que la terre et la lune sont de formes sphériques et on donne :

$R_T = 6400km$ et $d = OL = 4.10^5\ km$

On néglige l'effet de tous les astres sauf l'effet de la lune.

On a : $\vec{\mathscr{C}}(M) = \vec{G}_L(M) - \vec{G}_L(O)$



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathscr{C}} = \overrightarrow{G}_L(M) - \overrightarrow{G}_L(O) \quad &\Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathscr{C}} = Gm_L\frac{\overrightarrow{LO}}{LO^3} - Gm_L\frac{\overrightarrow{LM}}{LM^3}\\
&\Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathscr{C}} = Gm_L[\frac{-d\,\overrightarrow{i}}{d^3} + \frac{\overrightarrow{OL} - \overrightarrow{OM}}{LM^3}]\\
&\Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathscr{C}} = Gm_L[\frac{-d\,\overrightarrow{i}}{d^3} + \frac{d\,\overrightarrow{i} - R\,\overrightarrow{e_r}}{LM^3}]\\
&\Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathscr{C}} = Gm_L[\frac{-d\,\overrightarrow{i}}{d^3} + \frac{d\,\overrightarrow{i} - R\,\overrightarrow{e_r}}{(R^2 + d^2 - 2dR\cos\theta)^{3/2}}]\\
&\Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathscr{C}} = \frac{Gm_L}{d^3}[-d\,\overrightarrow{i} + \frac{d\,\overrightarrow{i} - R\,\overrightarrow{e_r}}{(1 - 2\frac{R}{d}\cos\theta)^{3/2}}]\\
&\Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathscr{C}} \simeq \frac{Gm_L}{d^3}[-d\,\overrightarrow{i} + (d\,\overrightarrow{i} - R\,\overrightarrow{e_r})(1 + 3\frac{R}{d}\cos\theta)]\\
&\Longrightarrow \quad \overrightarrow{\mathscr{C}} \simeq \frac{Gm_L}{d^3}[3R\cos\theta\,\overrightarrow{i} - R\,\overrightarrow{e_r} + 3\frac{R^2}{d}\cos\theta\,\overrightarrow{e_r}]
\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{C}} \simeq \frac{GRm_L}{d^3}(3\cos\overrightarrow{i} - \overrightarrow{e_r})}$$

force par unité de masse

- en A : $= 0 \Longrightarrow \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{i}$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{C}}(\theta = 0) = \frac{2RGm_L}{d^3}\overrightarrow{i}}$$

- en B : $\theta = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{j}$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{C}}(\theta = \frac{\pi}{2}) = -\frac{RGm_L}{d^3}\overrightarrow{j}}$$

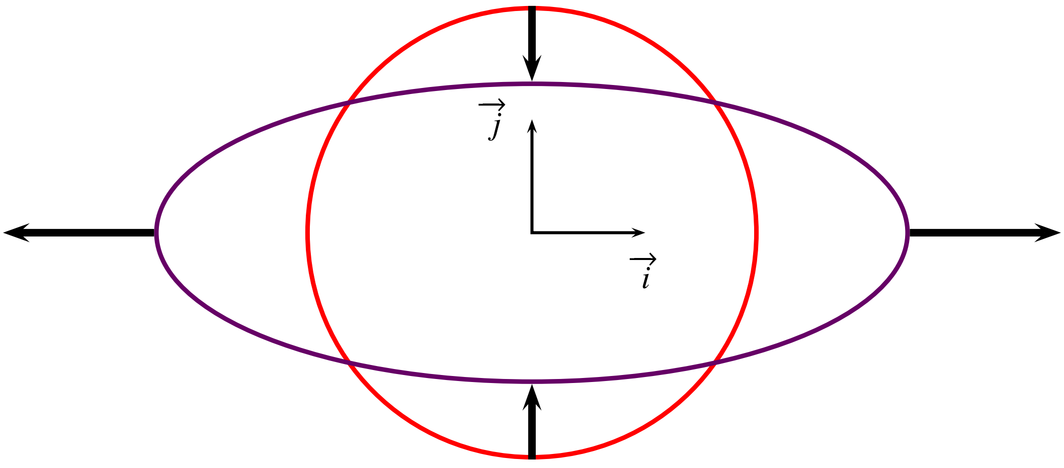
- en C : $\theta = \pi \Longrightarrow \overrightarrow{e_r} = -\overrightarrow{i}$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{C}}(\theta = \pi) = -\frac{2RGm_L}{d^3}\overrightarrow{i}}$$

- en D : $\theta = -\frac{\pi}{2} \Longrightarrow \overrightarrow{e_r} = -\overrightarrow{j}$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{C}}(\theta = \frac{\pi}{2}) = \frac{RGm_L}{d^3}\overrightarrow{j}}$$

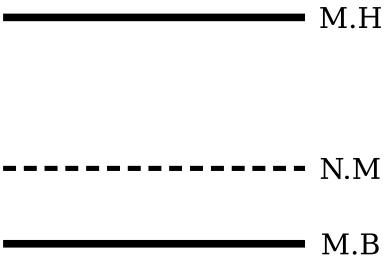
Donc les marées hautes en A et C et les marées basses en B et D.



D'où deux marées hautes et deux marées basses par jour décalé de 6H.

Remarque

Le cœfficient de la marée haute est le double du cœfficient de la marée basse.



8.3.3.4 Déviation vers l'est

Voir TD

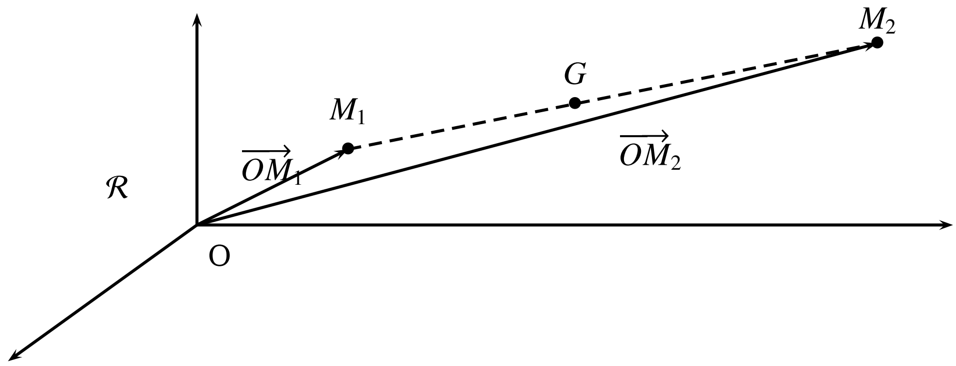
8.3.3.5 Pendule de Foucault

Voir CNC 99

CHAPITRE 9

SYSTÈME DE DEUX POINTS MATÉRIELS

Dans un **repère galiléen** $\mathcal{R}$,considérons un système de deux points matériels $M_1(m_1)$ et $M_2(m_2)$



9.1 Grandeurs cinématiques

9.1.1 Barycentre du système

Le barycentre G du système $\{M_1, M_2\}$ est donné par :

$$m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{GM_i} = \overrightarrow{0}$$

Soit O un point quelconque :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1\overrightarrow{OM_1} + m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2} \Longrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad (1)$$

Dérivons (1) par rapport au temps on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{V}(G/\mathcal{R}) = \frac{m_1\overrightarrow{V}(M_1/\mathcal{R}) + m_2\overrightarrow{V}(M_2/\mathcal{R})}{m_1 + m_2}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a}(G/\mathcal{R}) = \frac{m_1\overrightarrow{a}(M_1/\mathcal{R}) + m_2\overrightarrow{a}(M_2/\mathcal{R})}{m_1 + m_2}}$$

Remarque

Puisque $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \overrightarrow{0}$ *alors les points* M_1, G *et* M_2 *sont alignés.*

9.1.2 Repère Barycentrique

C'est le repère centré en G et dont les axes restent constamment parallèles à ceux de $\mathcal{R}$,on le note $\mathcal{R}_G, \mathcal{R}_B$ ou $\mathcal{R}^\star$

Conséquence :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}^\star/\mathcal{R}) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \forall \overrightarrow{A} : \left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}} = \left.\frac{d\overrightarrow{A}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}^\star}}$$

NOTATION

- $\overrightarrow{V}(M_1/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}_1$
- $\overrightarrow{V}(M_2/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}_2$
- $\overrightarrow{a}(M_1/\mathcal{R}) = \overrightarrow{a}_1$
- $\overrightarrow{a}(M_2/\mathcal{R}) = \overrightarrow{a}_2$
- $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_2 - \overrightarrow{V}_1$:vitesse relative de M_2 par rapport à M_1 dans le repère $\mathcal{R}$.
- $\overrightarrow{V}_{1B} = \overrightarrow{V}(M_1/\mathcal{R}_B) = \left.\frac{d\overrightarrow{GM_1}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}_B}$:vitesse de M_1 dans $\mathcal{R}_B$
- $\overrightarrow{V}_{2B} = \overrightarrow{V}(M_2/\mathcal{R}_B) = \left.\frac{d\overrightarrow{GM_2}}{dt}\right|_{/\mathcal{R}_B}$:vitesse de M_2 dans $\mathcal{R}_B$
- $\overrightarrow{V}_B = \overrightarrow{V}_{2B} - \overrightarrow{V}_{1B}$:vitesse relative de M_2 par rapport à M_1 dans le repère barycentrique $\mathcal{R}^\star$.

On conclut que :

$$\boxed{\overrightarrow{V}_{1B} = \overrightarrow{V}_1 - \overrightarrow{V}_G \quad ; \quad \overrightarrow{V}_{2B} = \overrightarrow{V}_2 - \overrightarrow{V}_G}$$

Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_B}$$

c'est à dire la vitesse relative à la même valeur dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}^*$.

- On a :
- $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1} = \overrightarrow{r}_{2B} - \overrightarrow{r}_{1B}$
- $m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow m_1\overrightarrow{r}_{1B} + m_2\overrightarrow{r}_{2B} = \overrightarrow{0}$

On conclut que :

$$\boxed{\overrightarrow{r_{1B}} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{r} \quad \| \quad \overrightarrow{r_{2B}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{r}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{V}_{1B} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{V} \quad || \quad \overrightarrow{V}_{2B} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{V}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{a}_{1B} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{a} \quad || \quad \overrightarrow{a}_{2B} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{a}}$$

9.1.3 Quantité de mouvement

9.1.3.1 Dans le repère $\mathcal{R}$

Dans le repère $\mathcal{R}$ on a :
$\overrightarrow{P}_1 = m_1\overrightarrow{V}_1$ et $\overrightarrow{P}_2 = m_2\overrightarrow{V}_2$
La quantité de mouvement totale du système est :
$\overrightarrow{P} = \overrightarrow{P}_1 + \overrightarrow{P}_2 \Longrightarrow \overrightarrow{P} = m_1\overrightarrow{V}_1 + m_2\overrightarrow{V}_2 = (m_1 + m_2)\overrightarrow{V}_G$ donc

$$\boxed{\overrightarrow{P} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{V}_G = m_T\overrightarrow{V}(G/\mathcal{R})}$$

9.1.3.2 Dans le repère $\mathcal{R}^\star$;,masse réduite

On a :

$$\overrightarrow{P}_{1B} = m_1\overrightarrow{V}_{1B} = m_1(\overrightarrow{V}_1 - \overrightarrow{V}_G) = m_1(\overrightarrow{V}_1 - \frac{m_1\overrightarrow{V}_1 + m_2\overrightarrow{V}_2}{(m_1 + m_2)}) = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2}(\overrightarrow{V}_1 - \overrightarrow{V}_2)$$

On pose :

$$\mu = \frac{m_1m_2}{m_1 + m_2} \Longrightarrow \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

masse réduite du système

On déduit que :

$$\boxed{\overrightarrow{P}_{1B} = -\mu\overrightarrow{V} \quad || \quad \overrightarrow{P}_{2B} = \mu\overrightarrow{V}}$$

On tire que :

$$\boxed{\overrightarrow{P}_B = \overrightarrow{P}_{1B} + \overrightarrow{P}_{2B} = \overrightarrow{0}}$$

Conclusion:

La quantité de mouvement totale du système est nulle dans le repère barycentrique.

9.2 Grandeurs cinétiques

9.2.1 Le moment cinétique du système

9.2.1.1 Dans le repère $\mathcal{R}^\star$

$\overrightarrow{\sigma}^\star(M_1/G) = \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1\overrightarrow{V}_1 = \overrightarrow{GM_1} \wedge \overrightarrow{P}_{1B}$
$\overrightarrow{\sigma}^\star(M_2/G) = \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2\overrightarrow{V}_2 = \overrightarrow{GM_2} \wedge \overrightarrow{P}_{2B}$
Le moment cinétique total du système est donné par :
$\overrightarrow{\sigma}^\star(S) = \overrightarrow{\sigma}^\star(M_1/G) + \overrightarrow{\sigma}^\star(M_2/G)$
$\Longrightarrow \overrightarrow{\sigma}^\star = \overrightarrow{GM_1} \wedge \overrightarrow{P}_{1B} + \overrightarrow{GM_2} \wedge \overrightarrow{P}_{2B} = (\overrightarrow{GM_2} - \overrightarrow{GM_1}) \wedge \overrightarrow{P}_{2B}$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}^\star(S) = \overrightarrow{r} \wedge \mu\overrightarrow{V}}$$

9.2.1.2 Dans le repère $\mathcal{R}$

On a : $\overrightarrow{\sigma}(M_1/O) = \overrightarrow{OM_1} \wedge m_1\overrightarrow{V}_1$ ainsi $\overrightarrow{\sigma}(M_2/O) = \overrightarrow{OM_2} \wedge m_2\overrightarrow{V}_2$
$\Longrightarrow \overrightarrow{\sigma}(S/O) = \overrightarrow{OM_1} \wedge m_1\overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{OM_2} \wedge m_2\overrightarrow{V}_2$
$\Longrightarrow \overrightarrow{\sigma}(S/O) = (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_1}) \wedge m_1(\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{V}_{1B}) + (\overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GM_2}) \wedge m_2(\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{V}_{2B})$
$\Longrightarrow \overrightarrow{\sigma}(S/O) = \overrightarrow{OG} \wedge m_1\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{OG} \wedge m_1\overrightarrow{V}_{1B} + \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1\overrightarrow{V}_{1B} + \overrightarrow{OG} \wedge m_2\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{OG} \wedge m_2\overrightarrow{V}_{2B} + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2\overrightarrow{V}_{2B}$
$\Longrightarrow \overrightarrow{\sigma}(S/O) = \overrightarrow{OG} \wedge (m_1 + m_2)\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{OG} \wedge (m_1\overrightarrow{V}_{1B} + m_2\overrightarrow{V}_{2B}) + (m_1\overrightarrow{GM_1} + m_2\overrightarrow{GM_2}) \wedge \overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{GM_1} \wedge m_1\overrightarrow{V}_{1B} + \overrightarrow{GM_2} \wedge m_2\overrightarrow{V}_{2B}$

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}(S/O) = \overrightarrow{\sigma}^\star(S) + \overrightarrow{OG} \wedge M_T\overrightarrow{V}_G}$$

c'est le premier théorème de Kœnig

9.2.2 L'énergie cinétique du système

9.2.2.1 Dans le repère $\mathcal{R}^\star$

On a : $\mathscr{E}_{CB_1} = \dfrac{1}{2}m_1\overrightarrow{V}_{1B}^2 = \dfrac{P_{1B}^2}{2m_1}$, $\mathscr{E}_{CB_2} = \dfrac{1}{2}m_2\overrightarrow{V}_{2B}^2 = \dfrac{P_{2B}^2}{2m_2}$
L'énergie totale du système est donnée par :
$\mathscr{E}_{CB} = \dfrac{P_{1B}^2}{2m_1} + \dfrac{P_{2B}^2}{2m_2} = \dfrac{P_{2B}^2}{2}(\dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}) = \dfrac{P_{2B}^2}{2\mu}$

$$\boxed{\mathscr{E}_{CB} = \mathscr{E}_c^\star = \frac{1}{2}\mu\overrightarrow{V}^2}$$

μ : masse réduite du système.
$\overrightarrow{V}$: la vitesse relative de M_2 par rapport à M_1

9.2.2.2 Dans le repère $\mathcal{R}$

On a :
$\mathscr{E}_{C_1} = \dfrac{1}{2}m_1\overrightarrow{V}_1^2 = \dfrac{1}{2}m_1(\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{V}_{1B})^2 = \dfrac{1}{2}m_1(\overrightarrow{V}_G^2 + \overrightarrow{V}_{1B}^2 + 2\overrightarrow{V}_G.\overrightarrow{V}_{1B})$

De même :
$E_{C_2} = \frac{1}{2}m_2\overrightarrow{V}_2^2 = \frac{1}{2}m_2(\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{V}_{2B})^2 = \frac{1}{2}m_2(\overrightarrow{V}_G^2 + \overrightarrow{V}_{2B}^2 + 2\overrightarrow{V}_G.\overrightarrow{V}_{2B})$
l'énergie cinétique totale du système s'écrit :
$\mathscr{E}_C(S) = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\overrightarrow{V}_G^2 + \frac{1}{2}(m_1\overrightarrow{V}_{1B}^2 + m_2\overrightarrow{V}_{2B}^2) + \overrightarrow{V}_G.(m_1\overrightarrow{V}_{1B} + m_2\overrightarrow{V}_{2B})$
D'où :

$$\boxed{\mathscr{E}_C(S) = \mathscr{E}_{CB} + \frac{1}{2}M_T\overrightarrow{V}_G^2}$$

le deuxième théorème de Kœning

Remarque

Dans $\mathcal{R}^\star$ toutes les quantités s'expriment en fonction de :
- *la masse réduite $\mu = \dfrac{m_1m_2}{m_1 + m_2}$*
- *la vitesse relative $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{V}_2 - \overrightarrow{V}_1 = \overrightarrow{V}^\star$ de M_2 par apport à M_1.*

9.3 Dynamique du système

Supposons que les deux points sont soumis à :
- M_1 :
- $\overrightarrow{F}_{i1}$: force exercée par M_2
- $\overrightarrow{F}_{e1}$: force exercée par le milieu extérieur du système sur M_1
- M_2 :
- $\overrightarrow{F}_{i2}$: force exercée par M_1
- $\overrightarrow{F}_{e2}$: force exercée par le milieu extérieur du système sur M_2

Les forces $\overrightarrow{F}_{e1}$ et $\overrightarrow{F}_{e2}$ sont des forces extérieures et les deux forces $\overrightarrow{F}_{i1}$ et $\overrightarrow{F}_{i2}$ sont des forces intérieures qui obéissent au principe de l'action et la réaction (troisième loi de Newton) c'est à dire

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{i1} = -\overrightarrow{F}_{i2}}$$

9.3.1 Relation fondamentale de la dynamique

Appliquons la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ pour chaque point du système :
- Pour M_1 : $m_1\overrightarrow{a}_1 = \overrightarrow{F}_{i1} + \overrightarrow{F}_{e1}$ (E1)
- Pour M_2 : $m_2\overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{F}_{i2} + \overrightarrow{F}_{e2}$ (E2)

$(E1) + (E2)$ donne $m_1\overrightarrow{a}_1 + m_2\overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{F}_{e1} + \overrightarrow{F}_{e2}$ donc la RFD pour le système s'écrit

$$\boxed{m_T\overrightarrow{a}(G/\mathcal{R}) = \overrightarrow{F}_{e1} + \overrightarrow{F}_{e2}}$$

Théorème de la résultante cinétique

Conclusion:

Le mouvement du barycentre est identique à celui d'un point matériel de masse m_T soumis à une force égale à la résultante des forces extérieures

$$m_T\vec{a}(G/\mathcal{R}) = \vec{F}_{ext}$$

Remarque

- *Le Théorème de la résultante cinétique ne fait apparaître que les forces extérieures.*
- *(E2)-(E1) donne :*

$$\boxed{\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}^*}{dt} = \frac{\vec{F}_{i2}}{\mu} + \frac{\vec{F}_{e2}}{m_2} - \frac{\vec{F}_{e1}}{m_1}}$$

9.3.2 Théorème du moment cinétique dans un référentiel galiléen

9.3.2.1 Moment des forces en un point O fixe dans $\mathcal{R}$.

Calculons les moments de tous les forces appliquées en un point O fixe dans $\mathcal{R}$.

- $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{i1}) = \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{i1}$;
- $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{i2}) = \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{i2}$ donc :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_i) = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{F}_{i2} = \vec{\mathcal{M}}_O(int) = \vec{0}}$$

puisque $\vec{F}_{i2}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{M_1M_2}$.
On retient que pour un système de deux points

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{ext}) = \vec{\mathcal{M}}_O(ext)}$$

9.3.2.2 Moment des forces en G barycentre

Calculons les moments de tous les forces appliquées en G barycentre du système :

- $\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_{i1}) = \overrightarrow{GM_1} \wedge \vec{F}_{i1}$;
- $\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_{i2}) = \overrightarrow{GM_2} \wedge \vec{F}_{i2}$ donc :

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_i) = \overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{F}_{i2} = \vec{0}}$$

puisque $\vec{F}_{i2}$ est colinéaire avec $\overrightarrow{M_1M_2}$.
On retient que pour un système de deux points

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathcal{M}}_G = \vec{\mathcal{M}}_G(\vec{F}_{ext})}$$

9.3.2.3 Théorème du moment cinétique barycentrique

On a d'après le théorème de Kœnig $\overrightarrow{\sigma}(S/O) = \overrightarrow{OG} \wedge M_T\overrightarrow{V}_G + \overrightarrow{\sigma}^\star(S)$ donc :
$\overrightarrow{\mathscr{M}}_O(ext) = \dfrac{d\overrightarrow{\sigma}^\star(S/O)}{dt}/\mathcal{R} = \dfrac{d\overrightarrow{\sigma}^\star(S)}{dt}/\mathcal{R} + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{F}_e$
Sachant que :
$\overrightarrow{\mathscr{M}}_O = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathscr{M}}_O = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{F} + \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{F}$

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_O = \overrightarrow{\mathscr{M}}_G + \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{F}$$

On en déduit le théorème du moment cinétique barycentrique

$$\boxed{\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}^\star(S)}{dt}\right|_{/\mathcal{R}^*} = \overrightarrow{\mathscr{M}}_G(ext)}$$

9.3.3 Puissance des forces intérieures

- **Puissance des forces extérieures** :

$$\mathscr{P}(ext) = \overrightarrow{F}_{e1}.\overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{F}_{e2}.\overrightarrow{V}_2 = \overrightarrow{F}_{ext}.\overrightarrow{V}_G$$

- **Puissance des forces intérieures** :

$$\mathscr{P}(int) = \overrightarrow{F}_{i1}.\overrightarrow{V}_1 + \overrightarrow{F}_{i2}.\overrightarrow{V}_2 = \overrightarrow{F}_{i2}.\overrightarrow{V} = \overrightarrow{F}_{i2}.\frac{d\overrightarrow{r}}{dt} = \overrightarrow{F}_{i2}.\frac{d\overrightarrow{M_1M_2}}{dt}$$

Conclusion:

La puissance des forces intérieures est en générale non nulle pour un système déformable , par contre nulle pour un système indéformable $M_1M_2 = cte$

9.3.4 Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen

D'après ce qui précède on tire que :

$$\boxed{\Delta\mathscr{E}_c = \mathbf{W}(\overrightarrow{F}(ext)) + \mathbf{W}(\overrightarrow{F}(int))}$$

9.3.5 L'énergie potentielle d'interaction

- Dans le repère $\mathcal{R}$

$\delta\mathbf{W}_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{F}_{i1}.d\overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{F}_{i2}.d\overrightarrow{OM}_2 = \overrightarrow{F}_{i2}.(d\overrightarrow{OM}_2 - d\overrightarrow{OM}_1)$

$$\boxed{\delta\mathbf{W}_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{F}_{i2}.d\overrightarrow{M_1M_2}}$$

- Dans $\mathcal{R}_B$

$\delta \mathbf{W}_{\mathcal{R}_B} = \overrightarrow{F}_{i1}.d\overrightarrow{GM_1} + \overrightarrow{F}_{i2}.d\overrightarrow{GM_2} = \overrightarrow{F}_{i2}.(d\overrightarrow{GM_2} - d\overrightarrow{GM_1})$

$$\boxed{\delta \mathbf{W}_{\mathcal{R}_B} = \overrightarrow{F}_{i2}.d\overrightarrow{M_1M_2}}$$

Conclusion:

Pour un système de deux points matériels le travail des forces intérieures ne dépend pas du référentiel et non nul pour un système déformable

Si on pose : $\overrightarrow{F}_{i1} = -f(r)\,\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{F}_{i2} = f(r)\,\overrightarrow{e_r}$, ainsi $\overrightarrow{M_1M_2} = r\,\overrightarrow{e_r}$

Donc : $\delta \mathbf{W} = f(r)\,\overrightarrow{e_r}.d(r\,\overrightarrow{e_r}) = f(r)\,\overrightarrow{e_r}.(dr\,\overrightarrow{e_r} + rd\theta\,\overrightarrow{e_\theta})$

$\Longrightarrow \delta \mathbf{W}_{\mathcal{R}_B} = f(r)dr(= -d\mathscr{E}_p)$ si $\overrightarrow{F}_{i2}$ est conservative.

$$\boxed{\mathscr{E}_p(int) = -\int f(r)dr}$$

l'énergie potentielle d'interaction

9.3.6 Énergie mécanique

Dans le référentiel $\mathcal{R}$ on a :

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p(ext) + \mathscr{E}_p(int)$$

et par conséquent :

$$\Delta\mathscr{E}_m = \mathbf{W}(\overrightarrow{F}_{NC})$$

Pour un système conservative l'énergie mécanique est constante (l'intégrale première de l'énergie)

9.4 Cas d'un système isolé de deux points matériels

Le système est isolé si

$$\overrightarrow{F}_{e1} = \overrightarrow{F}_{e2} = \overrightarrow{0}$$

9.4.1 Conséquences

- Conservation de la quantité de mouvement dans $\mathcal{R}$.

$$\overrightarrow{F}(ext) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{P} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{V}_G = \overrightarrow{cte}$$

- $\overrightarrow{V}_G = \overrightarrow{Cte}$ donc le référentiel barycentrique est **galiléen**.
- Conservation de l'énergie mécanique barycentrique

$$\boxed{\mathscr{E}_m^* = \mathscr{E}_c^* + \mathscr{E}_p(int) = cte}$$

- Le moment cinétique barycentrique est conservé :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{M}}_G(int) = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{\sigma^*} = \overrightarrow{cte}}$$

Dans le repère barycentrique le mouvement est plan.

9.4.2 Réduction canonique :Mobile réduit équivalent

On a établit que dans **le repère barycentrique** $\mathcal{R}^\star$ que :

- $\overrightarrow{\sigma}^\star = \overrightarrow{r} \wedge \mu\overrightarrow{V}^\star$
- $\mathscr{E}_c^\star = \dfrac{1}{2}\mu\overrightarrow{V}^{\star 2}$
- $\dfrac{d\overrightarrow{V}^\star}{dt} = \dfrac{\overrightarrow{F}_{i2}}{\mu} + \dfrac{\overrightarrow{F}_{e2}}{m_2} - \dfrac{\overrightarrow{F}_{e1}}{m_1} = \dfrac{\overrightarrow{F}_{i2}}{\mu} \Longrightarrow$

$$\boxed{\mu\frac{d\overrightarrow{V}^\star}{dt} = \overrightarrow{F}_{i2}}$$

Conclusion:

Dans le repère barycentrique le système isolé de deux points est équivalent à un seul point P fictif (nommée mobile équivalent)tel que $GP = r = M_1M_2$ et animé de la vitesse $\overrightarrow{V}^* = \overrightarrow{V}$ soumis à la force $\overrightarrow{F}_{i2}$:c'est la réduction canonique.

Remarque

Connaissant le mouvement du barycentre G du système dans le référentiel $\mathcal{R}$ (c'est à dire $\overrightarrow{OG}(t)$) et le mouvement du mobile équivalent dans le repère barycentrique $\mathcal{R}^\star$ (c'est à dire $\overrightarrow{r}(t)$) on peut déduire le mouvement des deux points M_1 et M_2 :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}_1(t) = \overrightarrow{OG}(t) - \frac{m_2}{m_1 + m_2}\overrightarrow{r}(t)}$$

$$\boxed{\overrightarrow{OM}_2(t) = \overrightarrow{OG}(t) + \frac{m_1}{m_1 + m_2}\overrightarrow{r}(t)}$$

Conclusion:

La trajectoire du mobile équivalent (ou réduit) dans le référentiel barycentrique donne, par homothétie, celles des deux particules dans ce référentiel

CHAPITRE 10

MÉCANIQUE DU SOLIDE

10.1 CINÉMATIQUE DU SOLIDE

10.1.1 Définition d'un solide

On appelle un corps solide (**S**) si la distance entre deux points quelconque du solide A et B est constante

$$(\mathbf{S}) = solide \Longrightarrow \forall (A,B) \in \mathbf{S}; \parallel \overrightarrow{AB} \parallel = cte$$

Remarque

Si la distance entre les deux points A et B est variable on dit que le système est déformable.

10.1.2 Barycentre d'un solide. Repère barycentrique

On définit le centre de masse ou barycentre d'un solide (S) par :

$$\boxed{\iiint_{(S)} \overrightarrow{GM} dm = \overrightarrow{0}}$$

Soit O un point quelconque de $\mathcal{R}$ et sachant que :$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}$ alors en posant m la masse totale du solide on obtient :

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \iiint \overrightarrow{OM} dm}$$

En dérivant la relation obtenue par rapport au temps dans le référentiel $\mathcal{R}$ on obtient

$$\boxed{\overrightarrow{V}(G/\mathcal{R}) = \frac{1}{m} \iiint \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) dm}$$

De même

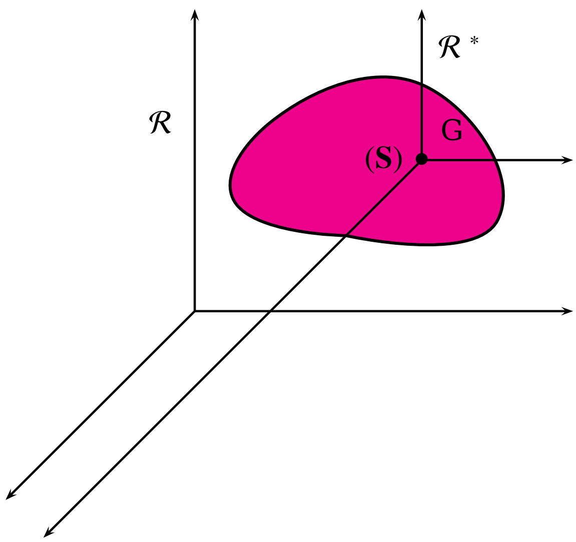
$$\boxed{\overrightarrow{a}(G/\mathcal{R}) = \frac{1}{m}\iiint \overrightarrow{a}(M/\mathcal{R})dm}$$

On en déduit que la quantité de mouvement totale du solide est

$$\boxed{\overrightarrow{P}(S/\mathcal{R}) = \iiint \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})dm \Longrightarrow \overrightarrow{P}(S/\mathcal{R}) = m\overrightarrow{V}(G/\mathcal{R})}$$

On retient que : La quantité du mouvement du solide est équivalent à la quantité d'un point matériel G(centre de masse) affecté de la masse totale du solide.
On définit le repère barycentrique $\mathcal{R}_B = R^* = \mathcal{R}_G$ le repère d'origine le centre de masse G et dont les axes restent constamment parallèle à ceux de $\mathcal{R}$ c'est à dire

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(R_G/\mathcal{R}) = \overrightarrow{O}}$$



Remarque

- Le centre de masse appartient à l'intersection des plans de symétrie.
- Le centre de masse est confondu avec le centre de symétrie.
- Pour un système discret

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_{i=1}^{N} m_i}}$$

Activité

1. *Déterminer la position du centre de masse G des courbes homogènes suivantes :*
   (a) *Fil linéique homogène de masse m et de longueur l*
   (b) *Demi-cercle de rayon R.*
   (c) *Quart de cercle de rayon R.*
   (d) *Demi disque de masse m et de rayon R*
   (e) *Cône de révolution homogène, de masse M, de hauteur h, dont la base est un disque de rayon R.(On commence par la détermination du volume)*
   (f) *Plaque rectangulaire homogène de masse m et de longueur a et de largeur b.*
2. *Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ d'un bipoint $A(m_A)$ et $B(m_B)$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r}$. Discuter le cas ou $m_A \gg m_B$.*

Correction

1. Détermination de la position du centre de masse G des courbes homogènes suivantes :
   (a) Fil linéique homogène de masse m et de longueur l

   $$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2} l \overrightarrow{e_x}}$$

   (b) Demi-cercle de rayon R d'axe de symétrie $\overrightarrow{e_y}$.

   $$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{2R}{\pi} \overrightarrow{e_y}}$$

   (c) Quart de cercle de rayon R.

   $$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{2R}{\pi} (\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y})}$$

(d) Demi disque de masse m et de rayon R d'axe de symétrie $\overrightarrow{e_y}$.

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{4R}{3\pi}\overrightarrow{e_y}}$$

(e) Plaque rectangulaire homogène de masse m et de longueur a et de largeur b.

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{1}{2}(a\,\overrightarrow{e_x} + b\,\overrightarrow{e_y})}$$

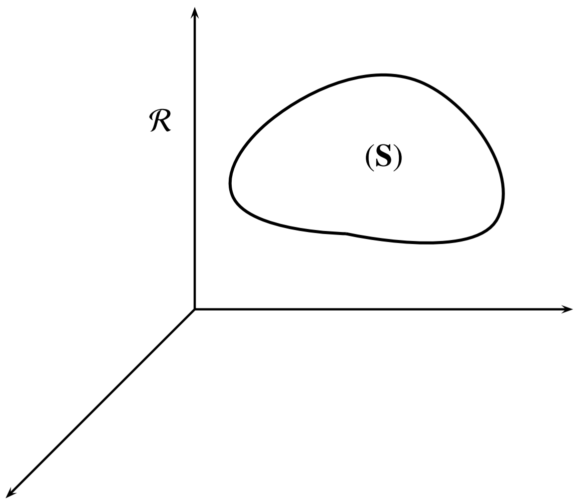
(f) Cône de révolution homogène, de masse M, de hauteur h, dont la base est un disque de rayon R.(On commence par la détermination du volume)

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi R^2 h \Longrightarrow \overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}h\,\overrightarrow{e_z}}$$

2. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GB}$ d'un bipoint $A(m_A)$ et $B(m_B)$ tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{r}$. Discuter le cas ou $m_A \gg m_B$.

10.1.3 Cinématique du solide

Soit (**S**) un solide et $\mathcal{R}$ un référentiel .
Puisque (S) est indéformable alors $\forall(A,B) \in \mathbf{S} \Longrightarrow \|\overrightarrow{AB}\| = cte$
c'est à dire $\overrightarrow{AB}^2 = cte \Longrightarrow \dfrac{d\,\overrightarrow{AB}^2}{dt/\mathcal{R}} = 0$



Sachant que $\dfrac{d\,\overrightarrow{AB}^2}{dt/\mathcal{R}} = 2\overrightarrow{AB}.\dfrac{d\overrightarrow{AB}}{dt/\mathcal{R}}$

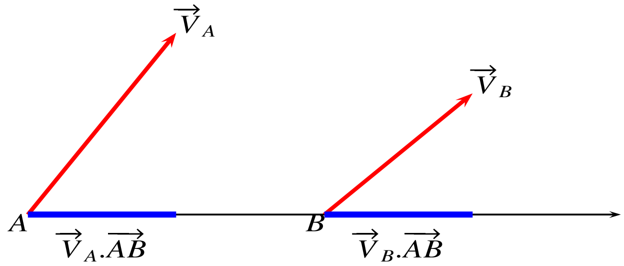
Or $\dfrac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt/\mathcal{R}} = \overrightarrow{V}(B/\mathcal{R}) - \overrightarrow{V}(A/\mathcal{R})$.

Il en résulte que

$$\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{V}(B/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{V}(A/\mathcal{R})}$$

le champs des vitesses d'un solide est équiprojectif

Et par conséquent le champ des vitesses d'un solide est un torseur.



En effet :
Appliquons la relation de dérivation vectorielle d'un vecteur avec $\mathcal{R}'$ le référentiel lié au solide **S** :
$\dfrac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt/\mathcal{R}} = \dfrac{d\,\overrightarrow{AB}}{dt/\mathcal{R}'} + \overrightarrow{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB} \Longrightarrow \overrightarrow{V}(B/\mathcal{R}) - \overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{AB}$
C'est à dire

$$\boxed{\overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(B/\mathcal{R}) + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R})}$$

10.1.4 Mouvement d'un solide

10.1.4.1 mouvement de translation

On dit que le mouvement du solide **S** est une translation si tous les points ont même vitesse quelque soit le temps t, c'est à dire

$$(\mathbf{S}) \text{ en translation } \Longrightarrow \overrightarrow{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{0}$$

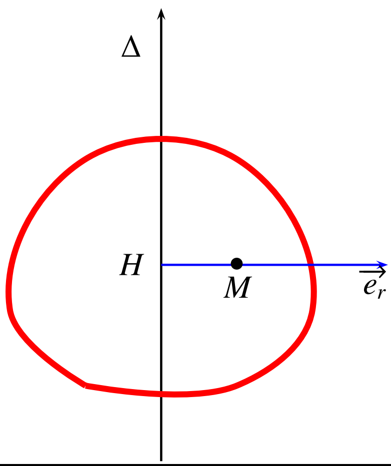
C'est à dire que $\overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(B/\mathcal{R}) \Longrightarrow \overrightarrow{a}(A/\mathcal{R}) = \overrightarrow{a}(B/\mathcal{R})\ \forall t$

Exemple

- *Translation rectiligne.*
- *Translation circulaire.*

10.1.4.2 mouvement de rotation autour d'un axe fixe

Δ est l'axe de rotation ; posons $\overrightarrow{\Omega} = \omega\,\overrightarrow{u}_\Delta$.
On en déduit que $\forall O \in \Delta, \overrightarrow{V}(O) = \overrightarrow{0}$
Pour tout point M de **S**, il existe un point H projection de M sur Δ.
Posons $HM = r$; le mouvement de M est une rotation pure autour de Δ, et donc sa trajectoire est circulaire (de centre H et de rayon r) :
$\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(O/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$



$$\boxed{\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM} = r\omega\,\overrightarrow{e_\theta}}$$

10.1.4.3 Description du mouvement instantanée le plus général d'un solide

Soit Δ une droite telle que à l'instant t ; Δ représente l'axe de rotation $\Delta = \Delta(t)$ (l'axe de viration) et H la projection de M sur Δ

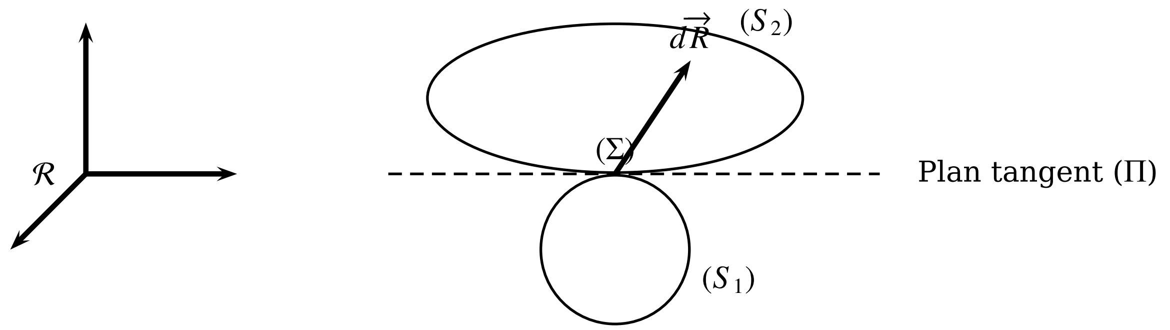
$$\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{V}(H) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{HM}$$

Donc le mouvement est une rotation autour de $\Delta(H, HM)$ et le point H est animé d'un mouvement suivant Δ.
on conclut que le mouvement général est helicoidal.

10.2 MODÉLISATION DES EFFORTS ENTRE SOLIDES EN CONTACT

10.2.1 Solide en contact

Considérons deux solides S_1 et S_2 en contact sur une petite surface plane (Σ) et en mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$, et I un point quelconque de (Σ).



Soit I un point de Σ ;On peut décomposer la force élémentaire $\overrightarrow{dR}$ exercé par S_1 sur S_2 en deux forces de contact tel que

$$\boxed{\overrightarrow{R} = \iint_{\Sigma} \overrightarrow{dR} = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{N}}$$

$\overrightarrow{T}$: force de frottement de glissement. Elle appartient au plan tangent Π.
$\overrightarrow{N}$: réaction normale à Π.

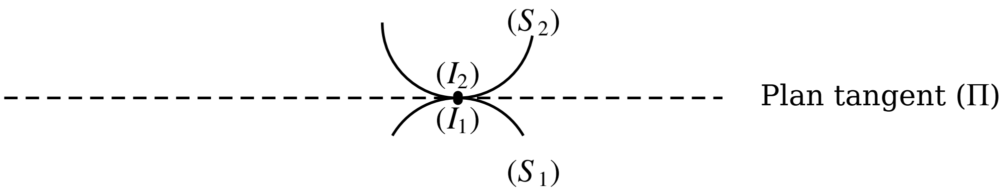
Le moment de cette force en I est :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,contact} = \iiint \overrightarrow{IM} \wedge \overrightarrow{dR}(M) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,t} + \overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,n}}$$

Avec :
- $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,t}$ moment de frottement de roulement. $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,t} \in$ au plan tangent Π.
- $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,n}$ moment de frottement de pivotement. $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{I,n} \perp \Pi$.

10.2.2 Vitesse de glissement

On suppose pour la suite que le contact est ponctuel c'est à dire que $\Sigma \to I$ appelé point géométrique



- Soit I_2 un point du solide S_2 qui coïncide à l'instant t avec le point géométrique I.
- Soit I_1 un point du solide S_1 qui coïncide à l'instant t avec le point géométrique I.

On appelle vitesse de glissement de solide S_2 par rapport à S_1

$$\boxed{\overrightarrow{V}_g(I) = \overrightarrow{V}(I_2) - \overrightarrow{V}(I_1)}$$

Remarque

- *La vitesse de glissement est vitesse relative.*
- *La vitesse de glissement ne dépend pas du référentiel.En effet :*

Soit $\mathcal{R}'$ un autre référentiel et d'après la loi de composition des vitesses on :

- $\overrightarrow{V}(I_2/R) = \overrightarrow{V}(I_2/\mathcal{R}') + \overrightarrow{V}(O'/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'I_2}$
- $\overrightarrow{V}(I_1/R) = \overrightarrow{V}(I_1/\mathcal{R}') + \overrightarrow{V}(O'/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) \wedge \overrightarrow{O'I_1}$
- *ce qui donne puisque* $\overrightarrow{I_1 I_2} = \overrightarrow{0}$

$$\overrightarrow{V}(I_2/R) - \overrightarrow{V}(I_1/R) = \overrightarrow{V}(I_2/\mathcal{R}') - \overrightarrow{V}(I_1/R) \Longrightarrow \overrightarrow{V}_g(\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}_g(\mathcal{R}')$$

- *la vitesse de glissement appartient au plan tangent Π.*
- *On peut écrire la vitesse de glissement* $\overrightarrow{V}_g = \overrightarrow{V}(I_2/S_1)$

On dit que le mouvement de (S_2) est sans glissement si la vitesse de glissement est nulle

$$\boxed{\overrightarrow{V}_g = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \overrightarrow{V}(I_2) = \overrightarrow{V}(I_1)}$$

Si le solide (S_1) est fixe dans $\mathcal{R}$ alors $\overrightarrow{V}_g = \overrightarrow{V}(I_2/S_1) = \overrightarrow{0}$ cad que la vitesse du point I_2 est nulle par rapport au solide (S_1)

10.2.3 Vecteur rotation relative

Soient eux solides en mouvement par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$.
On définit le vecteur rotation relative du solide (S_2) par rapport au solide (S_1) par

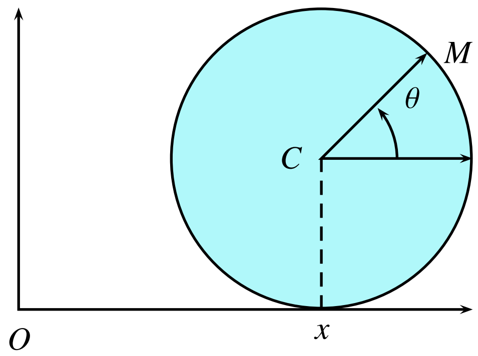
$$\overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) = \overrightarrow{\Omega}(S_2/\mathcal{R}) - \overrightarrow{\Omega}(S_1/\mathcal{R})$$

On décompose le vecteur rotation relative dans le plan tangent en

$$\overrightarrow{\Omega}(S_2/S_1) = \overrightarrow{\Omega}_T + \overrightarrow{\Omega}_N$$

- $\overrightarrow{\Omega}_T$ Vecteur rotation de roulement.
- $\overrightarrow{\Omega}_N$ Vecteur rotation de pivotement.

Application 2 :
On considère un disque de rayon R dont le centre C est repère par la coordonnée cartésienne x. La position d'un point M à la périphérie du disque est repérée par un angle θ par rapport a un axe de direction fixe. Le disque roule sans glisser sur un plan horizontal. Déterminer la relation entre x et θ.



Que devient la relation précédente si le sol horizontal est remplacé par un tapis roulant se déplaçant à la vitesse $v_o\,\overrightarrow{e_x}$

Correction

1- $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_x} + R\,\overrightarrow{e_y} + R\,\overrightarrow{e_r} \Longrightarrow \overrightarrow{V} = \dot{x}\,\overrightarrow{e_x} + R\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$

$$\boxed{\overrightarrow{V}_g = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \dot{x} + R\dot{\theta} = 0}$$

$\Delta x = -R\Delta\theta$ le signe (-) traduit le fait que x et θ on des sens opposés
2- $\dot{x} + R\dot{\theta} = V_o \Longrightarrow \Delta x + R\Delta\theta = V_o\Delta t$

10.2.4 Lois de Coulomb pour le frottement de glissement

On admet les lois empiriques de Coulomb

1. Loi de frottement « cinétique» : $\overrightarrow{V}_g \neq \overrightarrow{0}$ (présence de glissement)
   La force de frottement $\overrightarrow{T}$ possède les propriétés suivantes :
   – $\overrightarrow{T} \wedge \overrightarrow{V}_g = \overrightarrow{0}$ cad $\overrightarrow{T} // \overrightarrow{V}_g$
   – $\overrightarrow{T}.\overrightarrow{V}_g = 0$ cad $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{V}_g$ ont des sens opposés

–

$$T = fN$$

f ou μ cœfficient de frottement de glissement caractérise la nature des surfaces en contact.

2. `Loi de frottement « statique»` : $\overrightarrow{V}_g = \overrightarrow{0}$ (absence de glissement)

$$T \leqslant fN$$

10.2.5 La puissance totale des actions de contact

10.2.5.1 Expression de la puissance pour un solide

On rappelle que la puissance d'un point matériel animé par rapport à un référentiel d'une vitesse $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$ soumis à la force $\overrightarrow{F}$ est

$$\mathscr{P}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}).\overrightarrow{F}$$

Pour un solide , on le décompose en des masses élémentaires (dm) centré en M dont la résultante des forces est $d\overrightarrow{F}$ donc

$$d\mathscr{P} = \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}).d\overrightarrow{F}$$

Soit A un autre point du solide ; le torseur cinématique donne :

$$\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{V}(A) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$$

ce qui donne :

$$d\mathscr{P} = \overrightarrow{V}(A).d\overrightarrow{F} + (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}).d\overrightarrow{F} \Longrightarrow \mathscr{P}(S/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}).\overrightarrow{F} + \iiint (\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}).d\overrightarrow{F}$$

Or $(\overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}).d\overrightarrow{F} = (\overrightarrow{AM} \wedge d\overrightarrow{F}).\overrightarrow{\Omega}$ Rappelons que

$$\overrightarrow{\mathscr{M}}_A(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge d\overrightarrow{F}$$

Le moment résultant

Il en résulte que la puissance du solide dans le référentiel $\mathcal{R}$ s'écrit

$$\boxed{\mathscr{P} = \overrightarrow{V}(A/\mathcal{R}).\overrightarrow{F} + \overrightarrow{\mathscr{M}}_A(\overrightarrow{F}).\overrightarrow{\Omega}}$$

Deux cas important à discuter :

1. Mouvement de translation : Tous les point du solide ont même vitesse donc

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{0} \Longrightarrow \mathscr{P}(S/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(A).\overrightarrow{F} = \overrightarrow{V}(M).\overrightarrow{F}}$$

2. Mouvement de rotation pure autour d'un axe (Δ) : On choisit $A \in \Delta \Longrightarrow \overrightarrow{V}(A) = \overrightarrow{0}$ donc

$$\boxed{\mathscr{P}(S/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\mathscr{M}}_A.\overrightarrow{\Omega}(S/\mathcal{R})}$$

10.2.5.2 Puissance totale des actions de contact

Soient deux solides en contact ponctuel avec $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{T} + \overrightarrow{N}$ la résultante des forces de contact exercé par le solide (S_1) sur le solide (S_2).
La puissance de contact reçue par le solide (S_2) est :

$$\mathscr{P}_2 = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{V}(I_2) + \overrightarrow{\mathscr{M}}_{I_2}\overrightarrow{\Omega}_2$$

De même pour le solide (S_1) et d'après le principe de l'action et la réaction :

$$\mathscr{P}_1 = \overrightarrow{-R}.\overrightarrow{V}(I_1) + (-\overrightarrow{\mathscr{M}}_{I_1}).\overrightarrow{\Omega}_1$$

La puissance de contact totale est

$$\mathscr{P}_{T,contact} = \mathscr{P}_1 + \mathscr{P}_2 \Longrightarrow \mathscr{P}_{T,contact} = \overrightarrow{R}.(\overrightarrow{V}(I_2) - \overrightarrow{V}(I_1)) + \overrightarrow{\mathscr{M}}_I.(\overrightarrow{\Omega}_2 - \overrightarrow{\Omega}_1)$$

Or :
- $\overrightarrow{V}(I_2) - \overrightarrow{V}(I_1) = \overrightarrow{V}_g$
- $\overrightarrow{\mathscr{M}}_I = \overrightarrow{0}$ contact ponctuel

Il en résulte que

$$\boxed{\mathscr{P}_{T,contact} = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{V}_g = \overrightarrow{T}.\overrightarrow{V}_g \qquad (< 0)}$$

Remarque

Cas du roulement sans glissement

Dans le modèle du contact ponctuel,s'il y a roulement sans glissement, alors $\overrightarrow{V}_g = \overrightarrow{0}$ ainsi $\overrightarrow{\mathscr{M}}_I = \overrightarrow{0}$ donc

$$\boxed{\textit{Roulement sans glissement} \Longrightarrow \mathscr{P}_{(T,contact)} = 0}$$

10.2.5.3 Modèle des liaisons parfaites

10.2.5.4 Définition

Une liaison est parfaite si la puissance de contact de cette liaison est nulle

10.2.5.5 Exemples

▶ Liaison glissière : C'est une liaison lors d'un mouvement de translation d'un solide par rapport à l'autre.
Si oz est l'axe de translation alors

$$\boxed{\text{Liaison glissière} \Longrightarrow R_z = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{e_z} = 0}$$

► Liaison pivot : C'est une liaison lors d'un mouvement de rotation par rapport à un axe d'un solide par rapport à l'autre.
Si oz est l'axe de rotation alors :
$\mathscr{P}_c = \overrightarrow{R}.\overrightarrow{V}_g + \overrightarrow{\mathscr{M}}_I \wedge \overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\mathscr{M}}_I.\Omega\,\overrightarrow{e_z} \Longrightarrow M_z = 0$

$$\boxed{\text{Liaison pivot} \Longrightarrow M_z = 0}$$

► Liaison rotule : C'est une liaison lors d'un mouvement de rotation par rapport à un point O d'un solide par rapport à l'autre.
Dans ce cas $\mathscr{P}_c = \overrightarrow{\mathscr{M}}_o.\overrightarrow{\Omega} = 0$ quelque soit le vecteur $\overrightarrow{\Omega}$ donc

$$\boxed{\text{Liaison rotule} \Longrightarrow \overrightarrow{\mathscr{M}}_o = \overrightarrow{0}}$$

10.3 DYNAMIQUE D'UN SOLIDE

10.3.1 Théorème de la résultante cinétique

Soit un point M d'un solide de masse dm animé de la vitesse $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$ avec $\mathcal{R}$ un référentiel galiléen soumis à la force élémentaire $d\overrightarrow{F}$.
Appliquons la RFD dans $\mathcal{R}$ galiléen :
$dm\dfrac{d\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})}{dt} = d\overrightarrow{F} \Longrightarrow \dfrac{d}{dt}(\iiint_{(S)} \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})\,dm) = \iiint_{(S)} d\overrightarrow{F}$
Si on pose : $\overrightarrow{F} = \iiint_{(S)} d\overrightarrow{F}$ la résultante des forces exercé sur le solide et sachant que : $\iiint_{(S)} \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})\,dm = m\overrightarrow{V}(G/\mathcal{R})$ la quantité du mouvement du solide alors on obtient

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{P}(S)}{dt} = m\overrightarrow{a}(G/\mathcal{R}) = \overrightarrow{F}}$$

C'est le théorème de la résultante cinétique

Remarque

Pour un solide isolé ou pseudo-isolé dans un référentiel galiléen alors le mouvement du centre de masse est rectiligne uniforme.

10.3.2 Le moment cinétique

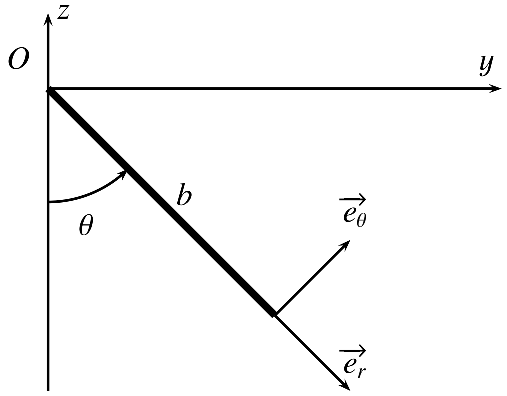
10.3.2.1 Définition

On décompose le solide en des points matériels ; chaque point M de masse dm est animé par rapport à un référentiel $\mathcal{R}$ de la vitesse $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$.
Donc le moment cinétique du point M par rapport à un point A quelconque est : $d\overrightarrow{\sigma}_A(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{AM} \wedge (dm\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}))$ ce qui donne pour le solide

$$\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R}) = \iiint_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R})\, dm$$

Activité

On considère une plaque rectangulaire a sur b, homogène, de masse$M$, d'épaisseur négligeable, qui oscille autour d'un axe horizontal Ox. Elle est attachée à cet axe par un de ses côtés de longueur a. La rotation de la plaque autour de Ox est repérée par l'angle $\theta(t)$ Le point O est au milieu du côté de longueur a. On utilisera la base cartésienne ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_x$, $\vec{e}_z$) ainsi que la base locale ($\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_x$).



1. Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}(P)$ d'un point P de la plaque en fonction de r (distance de P à Ox), θ et $\vec{e}_\theta$.
2. En déduire le vecteur quantité de mouvement $\vec{P}$ de la plaque.
3. Déterminer la position du centre de masse G de la plaque. Vérifier que $\vec{P} = M\vec{V}(G)$
4. Calculer le moment cinétique $\vec{\sigma}_o$ en fonction de $M, a, b,$ et des vecteurs de base.
5. En déduire $\vec{\sigma}^*$ Vérifier l'homogénéité de son expression.

Correction

1- $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{e}_x + r\,\vec{e}_r \Longrightarrow \vec{V}(P/\mathcal{R}) = r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

2- $\vec{P}(S/\mathcal{R}) = \iint_{\mathbf{S}} \overrightarrow{OP}dm \Longrightarrow \vec{P}(S/\mathcal{R}) = \dfrac{1}{2}Mb\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

3- $\vec{V}(G/\mathcal{R}) = \dfrac{1}{2}b\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \Longrightarrow \vec{P}(S/\mathcal{R}) = M\vec{V}(G/\mathcal{R})$

4- $\vec{\sigma}_o = \iint \overrightarrow{OP} \wedge \vec{V}(P/\mathcal{R})dm \Longrightarrow \vec{\sigma}_o = \dfrac{1}{3}Mb^2\dot{\theta}\,\vec{e}_x$

5- $\vec{\sigma}_o = \vec{\sigma}^* + \overrightarrow{OG} \wedge M\vec{V}(G/\mathcal{R}) \Longrightarrow \vec{\sigma}^* = \dfrac{1}{12}Mb^2\dot{\theta}\,\vec{e}_x$

10.3.2.2 Le torseur cinétique

Soit B un autre point quelconque donc :

- $\vec{\sigma}_A(M/\mathcal{R}) = \iiint_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R})\, dm.$
- $\vec{\sigma}_B(M/\mathcal{R}) = \iiint_{(\mathbf{S})} \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R})\, dm.$
- $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ ce qui donne

$$\boxed{\vec{\sigma}_A = \vec{\sigma}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{P(\mathbf{S})} = \vec{\sigma}_B + \overrightarrow{AB} \wedge m\vec{V}(G/\mathcal{R})}$$

Remarque

1. *Dans le repère barycentrique $\mathcal{R}^*$ on a :*

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}^*_A = \overrightarrow{\sigma}^*_B + \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{P^*(\mathbf{S})} \Longrightarrow \overrightarrow{\sigma}^*_A = \overrightarrow{\sigma}^*_B = \overrightarrow{\sigma}^*_G = \overrightarrow{\sigma}^*}$$

   On retient que le moment cinétique barycentrique ne dépend pas du point ou on le calcule (vecteur libre)

2. *De même on a si $B \equiv G$*

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}_A = \overrightarrow{\sigma}_G + \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{P(\mathbf{S})}}$$

10.3.2.3 Le théorème de KŒNIG relatif moment cinétique

On a : $\overrightarrow{\sigma}_A(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \iiint_{\mathbf{S}} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})dm.$
D'après la loi de composition des vitesses entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}^*$ on a :

$$\overrightarrow{V}_a = \overrightarrow{V}_r + \overrightarrow{V}_e \Longrightarrow \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) \Longrightarrow \overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}^* + \overrightarrow{V}(G/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{GM}$$

Sachant que : $\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{0}$ alors

$$\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(G/\mathcal{R}) + \overrightarrow{V}^*$$

Il en résulte que

$$\overrightarrow{\sigma}_A(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \iiint_{\mathbf{S}} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V}(G)dm + \iiint_{\mathbf{S}} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V}^*dm$$

Puisque :
- $\iiint_{\mathbf{S}} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V}^*dm = \overrightarrow{\sigma}^*_A$
- $\iiint_{\mathbf{S}} \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{V}(G/\mathcal{R})dm = \iiint_{\mathbf{S}} \overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{V}(G/\mathcal{R})dm + \underbrace{\iiint_{\mathbf{S}} \overrightarrow{GM} \wedge \overrightarrow{V}(G/\mathcal{R})dm}_{\overrightarrow{0}}$

Il en résulte que :(Théorème de KŒNIG relatif au moment cinétique

$$\boxed{\overrightarrow{\sigma}_A(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\sigma}^* + \overrightarrow{AG} \wedge m\overrightarrow{V}(G/\mathcal{R})}$$

Remarque

$$\boxed{A \equiv G \Longrightarrow \overrightarrow{\sigma}_G(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \overrightarrow{\sigma}^*}$$

Relation importante à retenir

10.3.3 L'énergie cinétique d'un solide

10.3.3.1 Définition l'énergie cinétique

On a $dE_c = \frac{1}{2}\overrightarrow{V}^2(M)dm$ donc

$$\boxed{E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\iiint_S \overrightarrow{V}^2(M)dm}$$

Application 3 :
Calculer l'énergie cinétique d'une barre (m,l) en rotation autour de son extrémité.

$$\boxed{E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{6}ml^2\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{J}_\Delta\,\overrightarrow{\Omega}^2}$$

Soit A un point quelconque du solide
Le torseur cinématique donne $\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{V}(A) + \overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{AM}$ ce qui donne

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\iiint_S \overrightarrow{V}(M).(\overrightarrow{V}(A) + \overrightarrow{\Omega}\wedge\overrightarrow{AM})dm$$

Ce qui donne

$$E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{V}(A).\iiint_S \overrightarrow{V}(M)dm + \frac{1}{2}\overrightarrow{\Omega}.\iiint_S \overrightarrow{AM}\wedge\overrightarrow{V}(M)dm$$

Il en résulte que

$$\boxed{E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{V}(A).\overrightarrow{P}(S/\mathcal{R}) + \overrightarrow{\Omega}.\overrightarrow{\sigma}_A\right]}$$

Cas particulier important : A ≡ G

$$\boxed{E_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\left[m\overrightarrow{V}^2(G) + \overrightarrow{\Omega}.\overrightarrow{\sigma}_G\right] = \frac{1}{2}\left[m\overrightarrow{V}^2(G) + \overrightarrow{\Omega}.\overrightarrow{\sigma}^*\right]}$$

10.3.3.2 Le théorème de KŒNIG relatif à l'énergie cinétique

Soit :
- $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R})$ la vitesse du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$.
- $\overrightarrow{V}^*(M)$ la vitesse du point M dans le référentiel barycentrique $\mathcal{R}^*$.

Sachant que $\overrightarrow{V}(M/\mathcal{R}) = \overrightarrow{V}(G/\mathcal{R}) + \overrightarrow{V}^*(M)$ puisque $(\overrightarrow{\Omega}(\mathcal{R}^*/\mathcal{R}) = \overrightarrow{0})$
Donc $\mathscr{E}_c(S/\mathcal{R}) = \frac{1}{2}\iiint_S \overrightarrow{V}^2(G/\mathcal{R})dm + \frac{1}{2}\iiint_S \overrightarrow{V}^{*2}(M)dm + \iiint_S \overrightarrow{V}(G/\mathcal{R}).\overrightarrow{V}^*(M)dm$
Comme :
- $\frac{1}{2}\iiint_S \overrightarrow{V}^2(G/\mathcal{R})dm = \mathscr{E}_c(G)$ l'énergie cinétique du barycentre affecté de la masse totale.
- $\frac{1}{2}\iiint_S \overrightarrow{V}^{*2}(M)dm = \mathscr{E}_c^*$ l'énergie cinétique barycentrique.
- $\iiint_S \overrightarrow{V}(G/\mathcal{R}).\overrightarrow{V}^*(M)dm = \overrightarrow{V}(G/\mathcal{R}).\iiint_S \overrightarrow{V}^*(M)dm = \overrightarrow{V}(G/\mathcal{R}).m\overrightarrow{V}(G/\mathcal{R}^*) = \overrightarrow{0}$

D'où le théorème

$$\boxed{\mathscr{E}_c(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \mathscr{E}_c(G/\mathcal{R}) + \mathscr{E}_c(\mathbf{S}/\mathcal{R}^*) = \mathscr{E}_c^* + \frac{1}{2}m\overrightarrow{V}^2(G/\mathcal{R})}$$

10.3.4 Le moment d'une force

On rappelle que le moment d'une force $\vec{F}$ appliqué sur un point matériel (M, m) est

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(F) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}}$$

Pour un solide **S** soumis à la résultante des forces $\vec{F}$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(F) = \iiint_S \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}}$$

Avec $d\vec{F}$ la force élémentaire exercée sur le point M. On montre de même que

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_A = \overrightarrow{\mathcal{M}}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{F}}$$

Si la résultante des forces $\vec{F}$ est nulle ; alors le système de forces est équivalent à un **couple**.
On appelle couple de forces un système de forces dont la résultante est nulle et le moment est non nul (indépendant du point).

Exemple

Calculer le moment de la résultante des forces exercée sur un dipôle électrostatique rigide par un champ extérieur uniforme .

Remarque

Dans une liaison pivot (rotation autour d'un axe) :
- *Si le couple présente le sens du mouvement : Couple moteur.*
- *Si le couple présente le sens contraire du mouvement : Couple frein.*

10.3.5 Mouvement d'un solide autour d'un axe de direction fixe

10.3.5.1 Cinétique d'un solide ayant un point de vitesse nulle

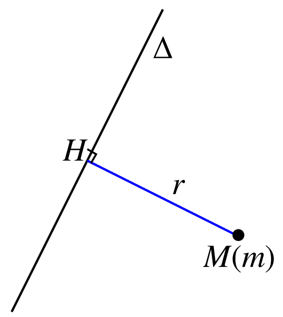
On suppose que le solide (**S**) possède un point A tel que $\vec{V}(A/\mathcal{R}) = \vec{0}$; si non on fait l'étude dans le référentiel barycentrique et $A \equiv G$ et donc $\vec{V}(G/\mathcal{R}^*) = \vec{0}$

10.3.5.1.1 Le moment d'inertie. Théorème de Huygens .

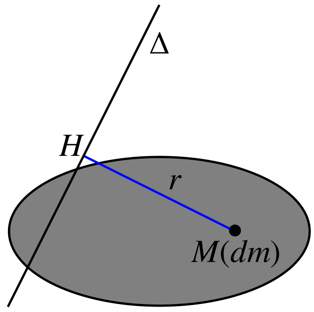
10.3.5.1.1.1 Le moment d'inertie d'un point matériel M .

Soit Δ une droite et M un point matériel de masse m distant de $r = HM$ avec H la projection perpendiculaire de M sur Δ.
On appelle le moment d'inertie $\mathbf{J}_\Delta$ du point M par rapport à Δ l'expression

$$\boxed{\mathbf{J}_\Delta = mr^2 \ (kg.m^2)}$$



10.3.5.1.1.2 Le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe .

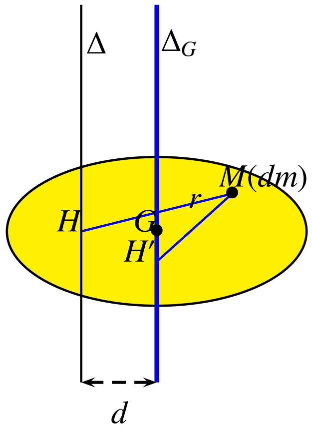


On subdivise le solide en des points matériels élémentaire de masse dm et par conséquent

$$\boxed{\mathbf{J}_{\Delta} = \iiint_{(\mathbf{S})} r^2 dm}$$

Exemples :Voir photocopie

10.3.5.1.1.3 Théorème de Huygens .



On a :

$\mathbf{J}_{\Delta} = \iiint r^2 dm \Longrightarrow \mathbf{J}_{\Delta} = \iiint \overrightarrow{HM}^2 dm$

Or $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HH'} + \overrightarrow{H'M}$

Donc $\mathbf{J}_{\Delta} = \iiint (\overrightarrow{HH'}^2 + \overrightarrow{HM}^2)\ dm$

$$\Longrightarrow \mathbf{J}_{\Delta} = \underbrace{\iiint \overrightarrow{HH'}^2\ dm}_{md^2} + \underbrace{\iiint \overrightarrow{H'M}^2\ dm}_{\mathbf{J}_{\Delta G}} + 2\iiint \overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'M}\ dm$$

Puisque :$\overrightarrow{H'M} = \overrightarrow{H'G} + \overrightarrow{GM}$ alors

$$\iiint \overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'M}\ dm = \iiint \underbrace{\overrightarrow{HH'}.\overrightarrow{H'G}}_{\perp}\ dm + \overrightarrow{HH'}.\underbrace{\iiint \overrightarrow{GM}\ dm}_{=\vec{0}\text{(déf de G)}} = 0$$

Il en résulte le théorème de HUYGENS :

$$\boxed{\mathbf{J}_{\Delta} = \mathbf{J}_{\Delta G} + md^2}$$

10.3.5.1.2 Le moment cinétique .

On a :$\vec{\sigma}_A(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \iiint \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M/\mathcal{R})\ dm$

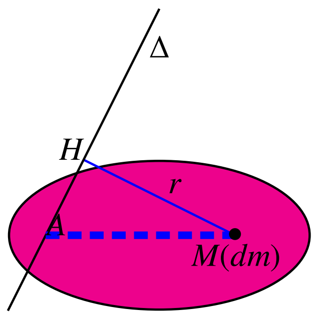
Puisque le solide est en rotation autour d'un axe Δ fixe alors A est un point de Δ d'où :

$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{V}(A/\mathcal{R}) + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM} \Longrightarrow \vec{V}(M/\mathcal{R}) = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM}$

Donc :$\vec{\sigma}_A(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \iiint \overrightarrow{AM} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM})\ dm$

Sachant que $1 \wedge (2 \wedge 3) = 2(1.3) - 3(1.2)$ alors :

$\vec{\sigma}_A(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \iiint (\overrightarrow{AM}^2 dm)\vec{\Omega} - \iiint \overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AM}.\vec{\Omega})\ dm$



Or $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$ avec $\overrightarrow{AH} /\!/ \vec{\Omega} = \omega\vec{e}_{\Delta}$ et $\overrightarrow{HM} \perp \vec{\Omega}$ ainsi

$\overrightarrow{AH} = AH\vec{e}_{\Delta}$

$$\vec{\sigma}_A = \Big[\iiint \overrightarrow{AH}^2\vec{\Omega}\ dm + \iiint \overrightarrow{HM}^2\vec{\Omega}\ dm + 2\iiint (\underbrace{\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HM}}_{\perp})\vec{\Omega}\ dm\Big] - \Big[\iiint (\overrightarrow{AH}.\vec{\Omega})\overrightarrow{AH}\ dm + \iiint (\overrightarrow{AH}.\vec{\Omega})\overrightarrow{HM}\ dm + \iiint (\underbrace{\overrightarrow{HM}.\vec{\Omega}}_{\perp})\overrightarrow{AM}\ dm\Big]$$

$$\Longrightarrow \vec{\sigma}_A = \iiint \overrightarrow{HM}^2\vec{\Omega}\ dm + \iiint \overrightarrow{AH}^2\omega\vec{e}_{\Delta}\ dm - \iiint \overrightarrow{AH}^2\omega\vec{e}_{\Delta}\ dm - \iiint (\overrightarrow{AH}.\vec{\Omega})\overrightarrow{HM}\ dm$$

$\Longrightarrow \overrightarrow{\sigma}_A(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = (\iiint \overrightarrow{HM}^2 dm)\overrightarrow{\Omega} - \iiint (\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{\Omega})\overrightarrow{HM}\ dm$

On pose

$$\mathbf{J}_\Delta = \iiint \overrightarrow{HM}^2\ dm = \iiint r^2\ dm \qquad (m^2 kg)$$

Moment d'inertie du solide (**S**) par rapport à l'axe de rotation Δ

avec r la distance de M à l'axe Δ.

Donc

$$\iiint \overrightarrow{HM}^2\overrightarrow{\Omega}\ dm = \mathbf{J}_\Delta\ \overrightarrow{\Omega}(\mathbf{S}/\mathcal{R})$$

Ainsi

$$\iiint (\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{\Omega})\overrightarrow{HM}\ dm = \iiint (\overline{AH}\omega)\overrightarrow{HM}\ dm = \overrightarrow{\sigma}_{A\perp\Delta}$$

Il en résulte que

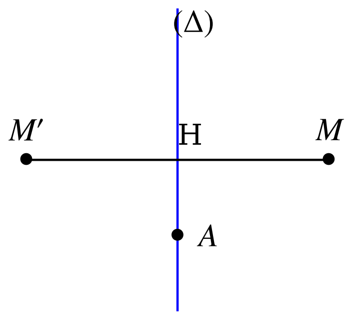
$$\overrightarrow{\sigma}_A(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \mathbf{J}_\Delta\ \overrightarrow{\Omega} - \overrightarrow{\sigma}_{A\perp\Delta} = \mathbf{J}_\Delta\ \overrightarrow{\Omega} - \iiint (\overline{AH}\omega)\overrightarrow{HM}\ dm$$

On retient que : **Pour un solide en général le moment cinétique d'un solide par rapport à un point fixe A n'est pas colinéaire avec le vecteur instantanée de rotation**.

Cas particuliers importants :

1. Solide plan perpendiculaire à $\Delta \Longrightarrow A \equiv H$ donc

$$\overrightarrow{\sigma}_A = \mathbf{J}_\Delta\ \overrightarrow{\Omega}$$



2. Δ est un axe de symétrie matériel

$$\iiint (\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{\Omega})\overrightarrow{HM}\ dm = \overrightarrow{0}$$

2 à 2 s'annulent

On appelle σ_Δ la projection du moment cinétique en A sur l'axe Δ

$$\sigma_\Delta = \overrightarrow{\sigma}_A.\overrightarrow{e}_\Delta$$

Donc

$$\overrightarrow{\sigma}_A = \mathbf{J}_\Delta\ \overrightarrow{\Omega} - \iiint (\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{\Omega})\overrightarrow{HM}\ dm \Longrightarrow \sigma_\Delta = \overrightarrow{\sigma}_A.\overrightarrow{e}_\Delta = \mathbf{J}_\Delta\ \Omega$$

10.3.5.1.3 L'énergie cinétique .

On a :$E_c = \frac{1}{2}\iiint \overrightarrow{V}^2(M)\ dm$

Or $\overrightarrow{V}(M) = \overrightarrow{V}(A) + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{\Omega}$

Ainsi : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}$ ce qui donne $E_c = \frac{1}{2}\iiint (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \wedge \overrightarrow{\Omega})^2\ dm$

Et puisque $\overrightarrow{HA}//\overrightarrow{\Omega}$ alors

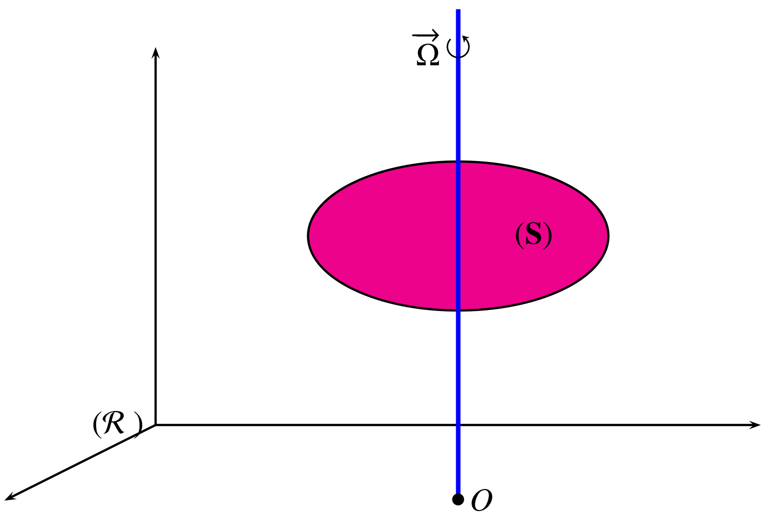
$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}\mathbf{J}_\Delta\ \omega^2}$$

C'est l'énergie cinétique de rotation autour de l'axe Δ

10.3.5.2 Mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen

Considérons un solide ($\mathbf{S}$) en rotation **sans frottement**

10.3.5.2.1 Théorème scalaire du moment cinétique .



Soit O un point de Δ.

✓ $\overrightarrow{\mathscr{M}}_O(\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{0}$

✓ $\overrightarrow{\sigma}_O(\mathbf{S}/\mathcal{R}) = \mathbf{J}_\Delta\ \overrightarrow{\Omega} = \mathbf{J}_\Delta\ \omega\ \overrightarrow{e_z}$

✓ Le théorème du moment cinétique donne

$$\frac{d\overrightarrow{\sigma}_{O\perp}}{dt/\mathcal{R}} + \frac{d\overrightarrow{\sigma}_O}{dt/\mathcal{R}} = \sum \overrightarrow{\mathscr{M}}_O(\overrightarrow{F}_{ext})$$

Ce qui donne l'équation différentielle

$$\boxed{\mathbf{J}_\Delta\ \frac{d\omega}{dt} = \sum \mathcal{M}_{Oz}}$$

10.3.5.2.2 Théorème de l'énergie cinétique .

Calculons : $\dfrac{d\mathscr{E}_c}{dt}$

$\dfrac{d\mathscr{E}_c}{dt} = \dfrac{1}{2}\iiint_S \dfrac{d\overrightarrow{V}^2}{dt}dm \Longrightarrow \dfrac{d\mathscr{E}_c}{dt} = \iiint_S \overrightarrow{V}(M).\overrightarrow{a}(M)dm$

Or $\mathcal{R}$ est galiléen donc $\overrightarrow{a}(M)dm = d\overrightarrow{F}(M) = d\overrightarrow{F}_{ext} + d\overrightarrow{F}_{int}$ ce qui donne :

$$\frac{d\mathscr{E}_c}{dt} = \iiint_S \overrightarrow{V}(M).(d\overrightarrow{F}_{ext} + d\overrightarrow{F}_{int})$$

Puisque $\mathscr{P}_{int} = \iiint_S \overrightarrow{V}(M).d\overrightarrow{F}_{int} = 0$ d'après le principe des actions réciproques d'où

$$\boxed{\frac{d\mathscr{E}_c}{dt} = \mathscr{P}_{ext}}$$

Théorème de la puissance cinétique

Par intégration on obtient le théorème de l'énergie cinétique

$$\boxed{\Delta\mathscr{E}_c = \mathbf{W}_{ext}}$$

10.3.5.2.3 Théorème de l'énergie mécanique .

si on pose $\mathbf{W}_{ext} = \mathbf{W}_{ext}^{C} + \mathbf{W}_{ext}^{NC}$

Avec :

- $\mathbf{W}_{ext}^{C}$ le travail des forces conservatives.
- $\mathbf{W}_{ext}^{NC}$ le travail des forces non conservatives.

et puisque $\mathbf{W}_{ext}^{C} = -\Delta\mathbf{E}_p$ alors

$$\boxed{\Delta\mathbf{E}_m = \Delta(\mathscr{E}_c + \mathbf{E}_p) = \mathbf{W}_{ext}^{NC}}$$

C'est le théorème de l'énergie mécanique

Remarque

Si le système est conservatif alors $\mathbf{W}_{ext}^{NC} = 0$ *alors l'énergie mécanique se conserve*

$$\mathbf{W}_{ext}^{NC} = 0 \Longrightarrow \mathbf{E}_m = cte$$

10.4 Application : le pendule pesant (CNC 2014 MP P1)

Étude d'un pendule : CNC P1-2014
Étude d'un pendule : CNC P1-2014

1- Un référentiel R est dit galiléen s'il vérifie la première loi de Newton(principe d'inertie) :

```
Dans un référentiel R si un point matériel isolé ou pseudo-isolé et son
mouvement par rapport à ce référentiel est rectiligne uniforme alors
le référentiel R est galiléen
```

2- Le référentiel terrestre est un référentiel lié à la terre.
- L'expérience de pendule de Foucault.
- Si la durée de l'expérience est très négligeable devant la période de rotation de la terre autour d'elle même (un jour) alors on peut approximer le mouvement par une droite et par conséquent le référentiel terrestre est considéré comme galiléen.

3- Liaison pivot parfaite de centre O est une liaison qui provoque un mouvement de rotation autour d'un axe passant par O sans frottement.
Conséquences :
- la vitesse de O est nulle $\overrightarrow{V}(O/R) = \overrightarrow{0}$.
- Le moment des forces projeté suivant oy est nul $M_{oy} = 0$.
- La puissance des forces de contact est nulle $\mathcal{P}_{contact} = 0$
- Le système est conservative et l'énergie mécanique est constante

4- Le moment d'inertie du pendule par rapport à l'axe de rotation (Oy)

$$\boxed{J_p = \frac{1}{3}m_T\ell^2 + \frac{1}{2}m_D(a^2 + 2\ell^2)}$$

5- ▶ Le vecteur instantanée de rotation :

$$\boxed{\overrightarrow{\Omega}(P/R) = \dot{\theta}\,\overrightarrow{e_r}}$$

▶ Le vecteur position du barycentre

$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\ell}{2}\Big(\frac{m_T + 2m_D}{m_T + m_D}\Big)\overrightarrow{e_r}}$$

▶ La vitesse du barycentre

$$\boxed{\overrightarrow{V}(G/R) = \frac{\ell}{2}\Big(\frac{m_T + 2m_D}{m_T + m_D}\Big)\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}}$$

6-

▶ Les caractéristique de la poussée d'Archimède :
- Point d'application : barycentre C :
- Sens : vers le haut.
- Direction : verticale.
- Module $F_A = \rho_{air} g V_D$

▶ Comparons F_A et le poids P

$$\boxed{\frac{F_A}{P} = \frac{\rho_{air} g V_D}{\rho_{Pendule} g V_D} = \frac{\rho_{air}}{\rho_{pendule}} \ll 1 \Longrightarrow F_A \ll P}$$

C'est à dire que la poussée d'Archimède est négligeable devant le poids du disque.

7-

▶ Bilan des forces :

- $\overrightarrow{P}$ le poids du pendule.
- $\overrightarrow{R}$ réaction de l'axe.

▶ Le travail de chaque force :

- $W(\overrightarrow{R}) = 0$: liaison pivot parfaite.
- $W(\overrightarrow{P}) = \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)(\cos\theta - \cos\theta_o)$

▶ T.E.C donne

$$\Delta E_c = W(\overrightarrow{R}) + W(\overrightarrow{P}) = -\Delta E_p \Longrightarrow \Delta E_m = 0$$

Donc le système est conservatif.

▶ L'énergie potentielle

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)(1 - \cos\theta)}$$

8-

▶ L'énergie cinétique(rotation autour de O)

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}^2}$$

▶ L'énergie mécanique

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)(1 - \cos\theta)}$$

9- L'équation différentielle : Puisque le système est conservatif; donc par dérivation de l' énergie mécanique on obtient

$$\boxed{J_p\ddot{\theta} + \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)\sin\theta = 0}$$

L'existence du terme $\sin\theta$ dans l'équation différentielle rend le système non linéaire.

10- TMC en O point fixe donne par projection suivant oy :

- $\overrightarrow{\sigma}_o = J_p\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{\sigma}_{o\|}$
- $\overrightarrow{M}_o(\overrightarrow{P}) = -(m_T + m_D)gOG\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$

ce qui donne

$$\boxed{\left.\frac{d\overrightarrow{\sigma}_o}{dt}\right|_{/R} = \overrightarrow{M}_o(\overrightarrow{P}) + \overrightarrow{M}_o(\overrightarrow{R}) \Longrightarrow J_p\ddot{\theta} + \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)\sin\theta = 0}$$

11- Le mouvement du pendule est oscillatoire si le système est dans un état lié

$$\boxed{E_{pmin} = E_p(0) < E_m < E_{pmax} = E_p(\pi) \Longrightarrow E_o = E_{pmax} = E_p(\pi) = g\ell(m_D + \frac{1}{2}m_T)}$$

▶ Pour $E_m < E_o$ et puisque E_p est paire en fonction de θ alors il existe deux valeurs (dans l'intervalle$[-\pi, \pi]$) θ_m et $-\theta_m$ telle que $0 < E_m < E_o$

▶ Expression de la période T :

On a : $E_m = E_c + E_p \Longrightarrow E_m = \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)(1 - \cos\theta)$ et puisque $E_m = cte = E_m(t = 0)$ donc

$$\frac{1}{2}J_p\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)(1 - \cos\theta) = \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)(1 - \cos\theta_o)$$

Ce qui donne

$$\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{g\ell}{J_p}(m_T + 2m_D)[\cos\theta - \cos\theta_o]}$$

12- ▶ Portrait de phase :

▶ Pour $E_m > E_o$ on a un mouvement de révolution autour de O.

▶ Position d'équilibre stable correspond au centre des courbes fermées.

▶ Position d'équilibre instable correspond à l'intersection des trajectoires de phases (croisement des courbes).

13- L'énergie potentielle est harmonique si $\theta(t)$ est harmonique (faibles oscillations)

$$\boxed{\theta(t) = \theta_{max}\cos(\omega_o t + \varphi)}$$

Avec

$$\boxed{\omega_o = \sqrt{\frac{g\ell(m_T + 2m_D)}{2J_p}}}$$

▶ La longueur du pendule synchrone L

Les deux pendules ont même périodes donc même pulsations propres et par conséquent

$$\boxed{\frac{g}{L} = \frac{g\ell(m_T + 2m_D)}{2J_p} \Longrightarrow L = \frac{2J_p}{\ell(m_T + 2m_D)}}$$

14-

15- Courbe sinusoïdale dont l'amplitude décroît légèrement d'une façon exponentielle (et non linéaire) du à l'existence du frottement visqueux du à l'action de l'air sur le disque .

▶ Régime d'évolution : Pseudo-périodique.

16-

16.1- Le T.M.C projeté suivant $\overrightarrow{e_y}$:

sachant que $\overrightarrow{M}_o(\overrightarrow{F}) = -\alpha\ell^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_y}$ alors

$$\boxed{J_p\ddot{\theta} + \alpha\ell^2\dot{\theta} + \frac{1}{2}g\ell(m_T + 2m_D)\theta = 0 \Longrightarrow \ddot{\theta} + \beta\dot{\theta} + \gamma\theta = 0}$$

Ce qui donne

$$\boxed{\beta = \frac{\alpha\ell^2}{J_P}\ [T^{-1}] \quad ; \quad \gamma = \frac{1}{2J_P}g\ell(m_T + 2m_D)\ [T^{-2}]}$$

16.2- La polynôme caractéristique est $r^2 + \beta r + \gamma = 0$ donc les solutions sont :

$$r_{1/2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

avec $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$ ce qui donne

$$\boxed{\theta(t) = \exp(-\beta t/2)\Big(A\exp(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t) + B\exp(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t)\Big)}$$

Il en résulte que

$$\boxed{\tau = \frac{2}{\beta}}$$

- Les différents régimes :

- Si $\Delta > 0$ Régime apériodique, $\theta(t)$ décroît d'une façon exponentielle sans osciller.
- Si $\Delta = 0$ Régime critique ,$\theta(t)$ décroît rapidement vers la position d'équilibre sans osciller.
- Si $\Delta < 0$ Régime pseudo-périodique $\theta(t)$ oscille avec une amplitude qui décroît d'une façon exponentielle

10.5 Autres Applications

Correction du concours CCP TSI 2009

Correction du concours CCP TSI 2009

10.5.1 MOUVEMENT D'UNE BARRE HOMOGÈNE

10.5.1.1 Étude cinématique du mouvement

1-

1.1- $\overrightarrow{OA} = 2L\sin\theta\,\overrightarrow{e_x}$

1.2- $\overrightarrow{OB} = 2L\cos\theta\,\overrightarrow{e_y}$

1.3- $\overrightarrow{AB} = 2L(-\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y})$

2-

2.1- Relation de Chasles donne le résultat

2.2- $\overrightarrow{OG} = L(\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + \cos\theta\,\overrightarrow{e_y})$

3-

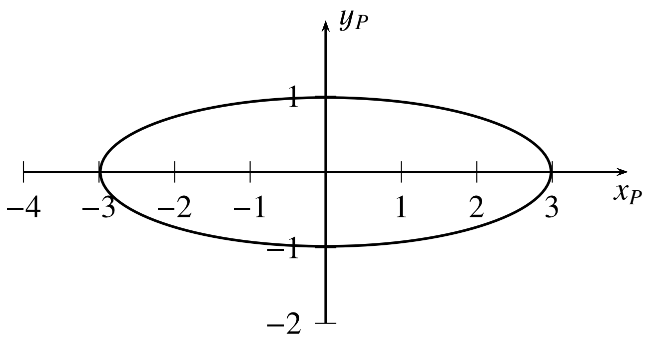
3.1- $\overrightarrow{OP} = (2L - r)\sin\theta\,\overrightarrow{e_x} + r\cos\theta\,\overrightarrow{e_y})$

3.2- On a : $x_P = (2L - r)\sin\theta$ et $y_P = r\cos\theta$ ce qui donne

$$\frac{x_P^2}{(2L-r)^2} + \frac{y_P^2}{r^2} = 1$$

Donc la trajectoire du point P est une ellipse.

3.3- On a : $r = L/2 \Longrightarrow a = 3L/2$ et $b = L/2$



4-

4.1- $\overrightarrow{V}_B = (V_A - 2L\dot{\theta}\cos\theta)\,\overrightarrow{e_x} - 2L\dot{\theta}\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}$

4.2- $\overrightarrow{V}_B.\overrightarrow{e_x} = 0 \Longrightarrow \dot{\theta} = \dfrac{V}{2L\cos\theta}$

4.3- $\overrightarrow{V}_B = -V\tan\theta\,\overrightarrow{e_y}$

5-

5.1- $\overrightarrow{V}_G = L\dot{\theta}(\cos\theta\,\overrightarrow{e_x} - \sin\theta\,\overrightarrow{e_y})$

5.2- $\overrightarrow{V}_G = \dfrac{V}{2}(\overrightarrow{e_x} - \tan\theta\,\overrightarrow{e_y})$

5.3- $\overrightarrow{a}_G = L[(\ddot{\theta}\cos\theta - \dot{\theta}^2\sin\theta)\,\overrightarrow{e_x} - (\ddot{\theta}\sin\theta + \dot{\theta}^2\cos\theta)\,\overrightarrow{e_y}]$

6-

6.1- $\overrightarrow{V}_P = \dot{\theta}[(2L - r)\cos\theta\,\overrightarrow{e_x} - r\sin\theta\,\overrightarrow{e_y}]$

6.2- $\overrightarrow{V}_P = \dfrac{V}{2L}[(2L - r)\,\overrightarrow{e_x} - r\tan\theta\,\overrightarrow{e_y}]$

6.3-

- Pour $r = L \Longrightarrow \overrightarrow{V}_P = \dfrac{V}{2}(\overrightarrow{e_x} - \tan\theta\,\overrightarrow{e_y}) = \overrightarrow{V}_G$
- Pour $r = 2L \Longrightarrow \overrightarrow{V}_P = -V\tan\theta\,\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{V}_B$

10.5.1.2 Étude énergétique du mouvement , relation entre V et θ

1- On a : $\overrightarrow{R}_A.\overrightarrow{V}_A = 0$ et $\overrightarrow{R}_B.\overrightarrow{V}_B = 0$

2-

2.1- $E_p = +Mgy_G$

2.2- $dE_p = M\overrightarrow{g}.\overrightarrow{dOG} \Longrightarrow E_p = Mgy_G(+cte = 0 =$

2.3- $E_p = MgL\cos\theta$

3-

3.1- $E_m = E_c + E_p \Longrightarrow E_m = MgL\cos\theta + \dfrac{MV^2}{6\cos^2\theta}$

3.2- Absence de forces non conservatives alors $E_m = cte$

3.3- $E_m = cte = E_m(t = 0) = MgL$

4-

4.1- $V^2 = 6gL\cos^2\theta(1 - \cos\theta)$

4.2- $\dot{\theta}^2 = \dfrac{3g}{2L}(1 - \cos\theta)$

4.3- $\ddot{\theta} = \dfrac{3g}{4L}\sin\theta$

10.5.1.3 Étude dynamique du mouvement, verification de l'hypothèse initiale de contact de la barre avec le sol et le mur

1- $\overrightarrow{a}_G = \dfrac{3g}{4}[\sin\theta(3\cos\theta - 2)\,\overrightarrow{e_x} - (1 - 3\cos^2\theta + 2\cos\theta)\,\overrightarrow{e_y}]$

2-

2.1- $M\overrightarrow{a}_G = M\overrightarrow{g} + \overrightarrow{R}_A + +\overrightarrow{R}_B$

2.2- $\overrightarrow{R}_B = \dfrac{3Mg}{4}\sin\theta(3\cos\theta - 2)\,\overrightarrow{e_x}$

2.3- $\overrightarrow{R}_A = \dfrac{Mg}{4}(1 - 3\cos\theta)^2\,\overrightarrow{e_y}$

2.4- Il faut tenir compte du frottement.

10.5.2 OSCILLATIONS MÉCANIQUES

Correction du concours CCP TSI 2005

Correction du concours CCP TSI 2005

Première Partie :Oscillations d'un pendule simple

10.5.2.1 Étude dynamique : équation différentielle du mouvement

1- Bilan des forces : $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{T}$

2- $\dfrac{d\overrightarrow{\sigma}_o}{dt/\mathcal{R}} = mL^2\ddot{\theta}\,\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_o(\overrightarrow{P}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}_o(\overrightarrow{T}) = -mgL\sin\theta\,\overrightarrow{e_z}$ et par conséquent

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

3- θ est une position d'équilibre $\Longrightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ ce qui donne $\sin\theta = 0$ donc les positions d'équilibre sont $\theta = 0$ et $\theta = \pi$.

- Au voisinage de $\theta = 0 \Longrightarrow \sin\theta \simeq \theta$ donc $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\theta = 0$ équation diff caractéristique d'un oscillateur harmonique et par conséquent $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable.
- Au voisinage de $\theta = \pi$ on pose $\theta = \varphi + \pi \Longrightarrow \ddot{\theta} = \ddot{\varphi}$ ainsi $\sin\theta = -\sin\varphi$ donc $\ddot{\varphi} - \dfrac{g}{L}\varphi = 0$ équation diff dont la solution est exponentielle qui diverge et par conséquent $\theta = \pi$ est une position d'équilibre stable.

10.5.2.2 Petites oscillations

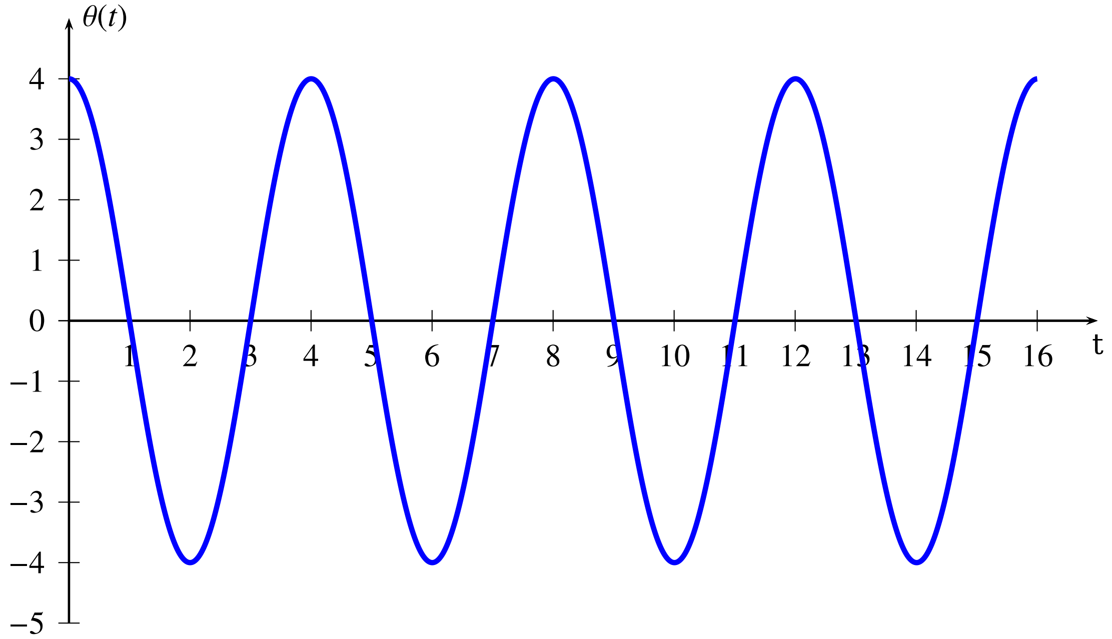
1- petites oscillations donc $\sin\theta \simeq \theta$ ce qui donne $\ddot{\theta} + \omega_o^2\theta = 0$ donc oscillateur harmonique.

- la pulsation propre $\omega_o = \sqrt{\dfrac{g}{L}}$
- la période propre $T_o = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}}$

2- $\theta(t) = \theta_o\cos\omega_o t$

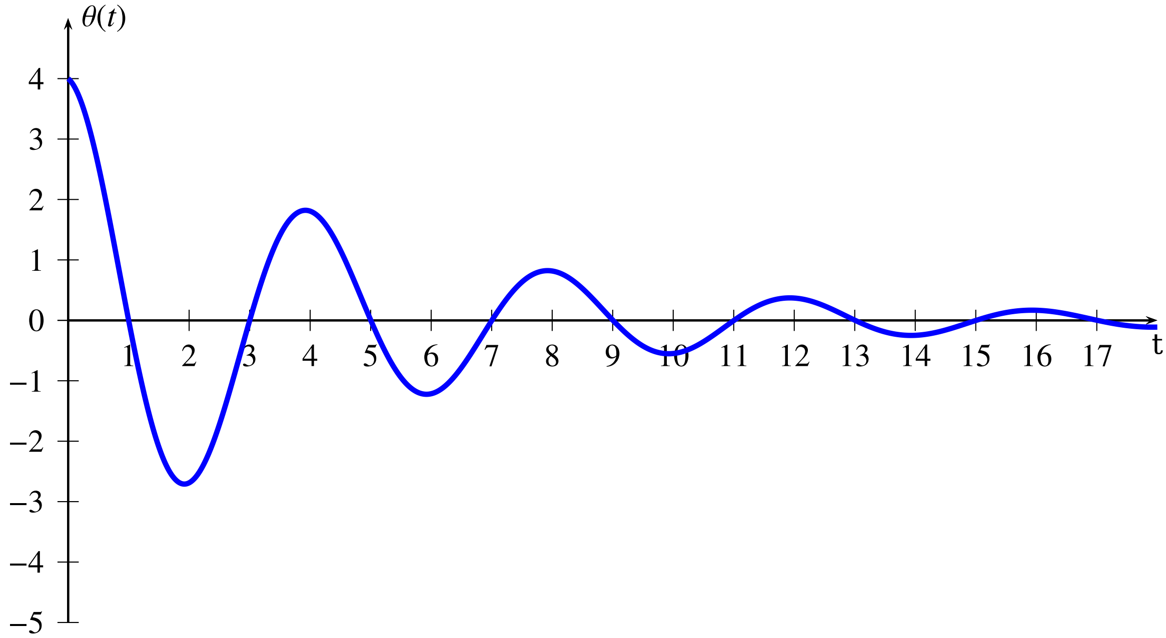
3- La valeur maximale de la vitesse $v_{max} = L\omega_o\theta_o = \theta_o\sqrt{gL}$

4- Representation graphique



5- **Amortissement par frottement fluide**

- $\ddot{\theta} + \dfrac{h}{m}\dot{\theta} + \dfrac{g}{L}\theta = 0$
- $\theta(t) = Ce^{-\lambda t}\cos[\Omega t + \varphi]$ avec :
  - $\lambda = \dfrac{h}{2m}$
  - $\Omega = \sqrt{\omega_o^2 - \lambda^2}$
  - $C = \theta_o\sqrt{1 + \dfrac{\lambda^2}{\Omega^2}}$
  - $\tan\varphi = -\dfrac{\lambda}{\Omega} \Longrightarrow \varphi = -\arctan\dfrac{\lambda}{\Omega}$
- Representation graphique



10.5.2.3 Aspect énergétique

1- $E_c = \dfrac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$

2- $E_p = -mgL\cos\theta$

3- $\ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0$

4- Sachant que $\cos^2(\omega t) = \dfrac{1}{2}(1+\cos(2\omega t)$ alors $T'_o = \dfrac{1}{2}T_o$

5- On a : $\dfrac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}(\overrightarrow{f}) \Longrightarrow mL^2\dot{\theta}(\ddot{\theta} + \dfrac{g}{L}\sin\theta) = -hL^2\dot{\theta}^2$ ce qui donne

$$\ddot{\theta} + \frac{h}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Deuxième Partie :Rotation d'un pendule composé autour d'un axe fixe

10.5.2.4 Moment d'inertie du pendule composé

$$J = I_1 + J_1 = \frac{1}{2}mR^2 + L^2(m + m'/3)$$

10.5.2.5 Étude dynamique : équation différentielle du mouvement

1- Bilan des forces : $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{R}$

2- L'équation diff

$$\ddot{\theta} + \frac{gL(2m+m')}{2J}\sin\theta = 0$$

3- On a θ faible donc $\sin\theta \simeq \theta$ ce qui donne

$$\ddot{\theta} + \frac{gL(2m+m')}{2J}\theta = 0$$

équation diff d'un oscillateur harmonique

- La pulsation propre : $\omega_1 = \sqrt{\dfrac{gL(2m+m')}{2J}}$
- La période propre : $T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{2J}{gL(2m+m')}}$

10.5.2.6 Simplification : retour au cas du pendule simple

Si $m' \to 0$ et $R \to 0$ alors $J \simeq mL^2 \Longrightarrow T' \simeq T_o$ On retrouve le pendule simple

10.5.3 ÉTUDE D'UN PENDULE

CORRECTION DU CONCOURS NATIONAL DEUG 2003

MÉCANIQUE

1▷ Les coordonnées du centre de gravité G du pendule (S) :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{4r}{3\pi}\overrightarrow{x_1}$$

2⊵ La masse M du pendule (S) :

$$M = \frac{1}{2}\mu\pi e r^2$$

3⊵ La vitesse du point G lié au pendule (S) :

$$\overrightarrow{V}(G/\mathcal{R}_o) = \frac{4r}{3\pi}\dot{\theta}\overrightarrow{y_1}$$

4⊵ l'accélération du point G lié au pendule (S) :

$$\overrightarrow{\Gamma}(G/\mathcal{R}_o) = \frac{4r}{3\pi}(\ddot{\theta}\overrightarrow{y_1} - \dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1})$$

5⊵ La résultante dynamique du pendule (S) :

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt/\mathcal{R}} = M\overrightarrow{\Gamma}(G/\mathcal{R}) = \frac{4r}{3\pi}(\ddot{\theta}\overrightarrow{y_1} - \dot{\theta}^2\overrightarrow{x_1})$$

6⊵ L'action d e la pesanteur sur le pendule (S) :

$$\overrightarrow{p} = Mg(\cos\theta\overrightarrow{x_1} - \sin\theta\overrightarrow{y_1})$$

7⊵ Le théorème de la résultante dynamique et l'appliquer au pendule (S).

$$\frac{d\overrightarrow{P}}{dt/\mathcal{R}} = \overrightarrow{p} + \overrightarrow{R}$$

8⊵ Les coordonnées X et Y de la réaction :

$$\begin{aligned} X &= -M(g\cos\theta + \frac{4r}{3\pi}\dot{\theta}^2) \\ Y &= M(g\sin\theta + \frac{4r}{3\pi}\ddot{\theta}) \end{aligned}$$

9⊵ Le moment de l'action de pesanteur au point O.

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_o(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{OG} \wedge \overrightarrow{p} = -\frac{4r}{3\pi}Mg\sin\theta\overrightarrow{z_o}$$

10⊵ Le moment cinétique du pendule (S) par rapport au point O :

$$\overrightarrow{L_o}(S/\mathcal{R}_o) = \overrightarrow{L}_{o//} = I\overrightarrow{\Omega} = I\dot{\theta}\overrightarrow{z_o}$$

11⊵ Le théorème du moment cinétique appliqué au pendule (S) au point O.

$$\frac{d\overrightarrow{L_o}}{dt/\mathcal{R}} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_o(\overrightarrow{F}_i) \Longrightarrow I\ddot{\theta} = -\frac{4r}{3\pi}Mg\sin\theta$$

12⊵ L'équation du mouvement du pendule (S).

$$\ddot{\theta} + \frac{4Mgr}{3\pi I}\sin\theta = 0$$

13⊵ L'énergie cinétique T du pendule (S) dans son mouvement

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2$$

14⊵ Le travail W_e des forces extérieures appliquées au pendule (S)

$$W_e = W(\overrightarrow{p}) = +Mgh = MgOG(1 - \cos\theta)$$

15⊵ Le théorème de la variation d'énergie cinétique dans le cas d'un solide

$$\Delta T = \sum_i W(\overrightarrow{F}_i)$$

16⊵ L'équation du mouvement du pendule (S).

$$E_m = cte \Longrightarrow I\ddot{\theta} + \frac{4Mgr}{3\pi}\sin\theta = 0$$

17⊵ Integration de l'équation dans le cas ou l'angle θ assez petit au cours du temps.

$$\theta(t) = \theta_o \cos\sqrt{\frac{4Mgr}{3\pi I}}t$$

18⊵ La période T des oscillations ;

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3\pi I}{4Mgr}}$$

19⊵ Application numérique :

$$T = 0,243\ (s)\ (s)$$

20⊵ La longueur L du pendule simple synchrone

$$l = \frac{3\pi I}{4Mr} \xrightarrow{\text{A.N}} l = 12\ cm$$