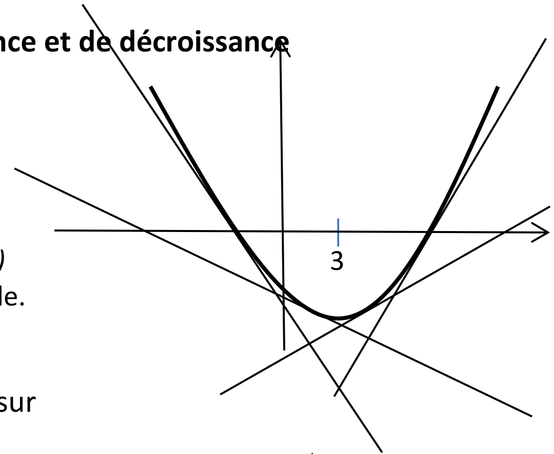
Chapitre 11 : Analyse de fonctions algébriques

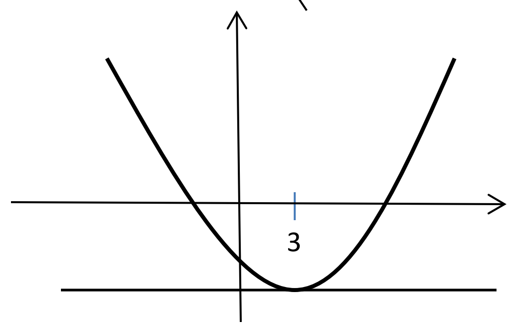
11.1 Intervalles de croissance et de décroissance



1) Nous constatons que *f* (la parabole) est décroissante sur -∞,3].

Remarquez que toutes les tangentes à la courbe de *f* sur -∞,3] ont une pente négative d'où les dérivées *f'(x)* seront négatives (***f'(x)*** $<$ **0**) pour tous x sur cet intervalle.

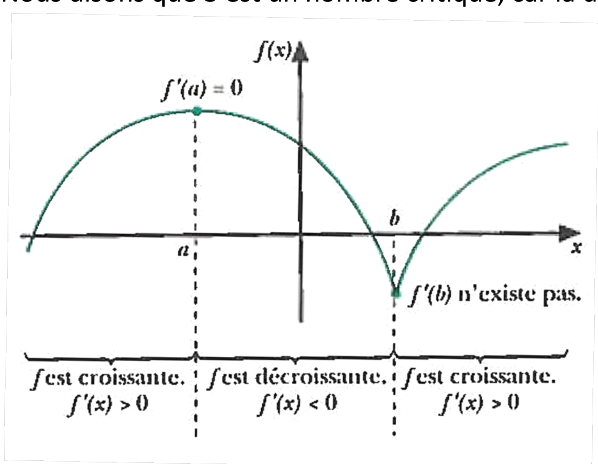
2) Également, nous constatons que *f* est croissante sur [3,+∞



Remarquez que toutes les tangentes à la courbe de *f* sur [3,+∞ ont une pente positive d'où les dérivées *f'(x)* seront positives (***f'(x)*** $>$ **0**) pour tous x sur cet intervalle.

3) Par contre, à x = 3 la tangente a une pente nulle donc, ***f'(x)* = 0.**

Nous disons que 3 est un nombre critique, car la dérivée est nulle à cette valeur de x.



Définition : Soit *c* ∈ dom f. Nous disons que «*c*» est un nombre critique de *f* (un *x* entre 2 variations) si :
1) *f'(c)* = 0.
ou
2) *f'(c)* n'existe pas.

Résumons :

Analyse de variation : croissante, décroissante et nulle 1) Si ***f'(x)*** $<$ **0** sur [a,b] alors *f* est décroissante sur [a,b]. 2) Si ***f'(x)*** $>$ **0** sur [a,b] alors *f* est croissante sur [a,b]. 3) Si ***f'(c)* = 0** alors *c* est un nombre critique.

Exemple 11.1

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

Déterminons les nombres critiques de *f*.

Remarquez que $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3} = (x^2 - 2x - 3)^{\frac{1}{2}}$

Donc $f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3)^{\frac{-1}{2}}(x^2 - 2x - 3)'$ *par la proposition 7 chap. 10*

$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 2x - 3)^{\frac{-1}{2}}(2x - 2) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}}$

Si nous factorisons alors $f'(x) = \frac{2(x-1)}{2\sqrt{(x+1)(x-3)}}$

1) $f'(x) = 0 \; si \; x = 1$ d'où 1 est un nombre critique

2) $f'(x)$ n'existe pas si $\mathrm{x} = -1$ ou $\mathrm{x} = 3$ d'où -1 et 3 sont aussi des nombres critiques

Exemple 11.2

Maintenant nous analyserons, en 3 étapes, une fonction selon ses nombres critiques ainsi que ses variations (croissance, décroissance et constance).

Soit *f(x)* = $x^2 + 4x - 12$

1ère étape : Calculez $f'(x)$ et factoriser $f'(x)$ car factoriser nous aidera à déterminer les nombres critiques

$f'(x) = 2x + 4 = 2(x + 2)$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0 \; si \; x = -2$ d'où -2 est un nombre critique

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : construire un tableau des variations

Le tableau des variations permet de déterminer les valeurs de x qui rendent la dérivée positive ou négative.

x	$-\infty$	Placer ici le nombre critique déterminé à l'étape 2.	$+\infty$
$f'(x)$	Placer ici le signe ($+$ ou $-$) de $f'(x)$ sur l'intervalle ci-dessus.	Ici $f'(x) = 0$ ou $f'(x)$ n'existe pas.	Placer ici le signe ($+$ ou $-$) de $f'(x)$ sur l'intervalle ci-dessus.

Sur cet intervalle, $f'(x)$ est toujours de même signe. — Sur cet intervalle, $f'(x)$ est toujours de même signe.

x	-∞	-2	+∞
f'(x)	−	0	+
f	f est décroissante (↘) sur -∞, -2]	*f*(-2) = -16	f est croissante (↗) sur [-2, +∞

Exemple 11.3

Soit *f(x)* $=\sqrt[4]{x^2-1}$, construisons un tableau de variations

1ère étape :

$$f'(x) = \frac{1}{4}(x^2-1)^{-\frac{3}{4}}\ (x^2-1)' \qquad \textit{proposition } 7\ \textit{chap.}\ 10$$

D'où; *f'(x)* $= \dfrac{2x}{4\sqrt[4]{(x^2-1)^3}} = \dfrac{2x}{4\sqrt[4]{((x-1)(x+1))^3}}$ en factorisant

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0\ si\ x = 0$ d'où 0 est un nombre critique

2) $f'(x)$ n'existe pas si x $= -1$ ou x $= 1$ d'où -1 et 1 sont des nombres critiques

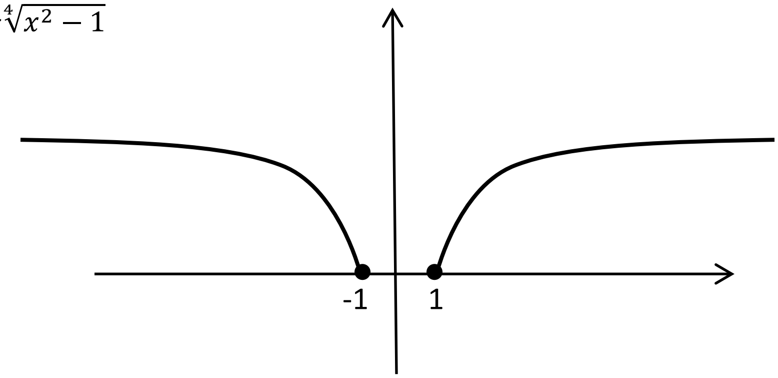
3ème étape : tableau de variation

x	-∞	-1		0		1	+∞
f'(x)	−	∄	∄	0	∄	∄	+
f	↘	0	∄	∄	∄	0	↗

Note : $\nexists$ signifie que $f'(x)$ ou $f(x)$ n'existe pas, car la valeur de la racine carrée n'existe pas (nous ne pouvons pas faire la racine carrée d'un nombre négatif.)

Pour corroborer notre tableau voici à quoi ressemble le graphique de cette fonction

f(x) = $\sqrt[4]{x^2 - 1}$



Exercice 11.1

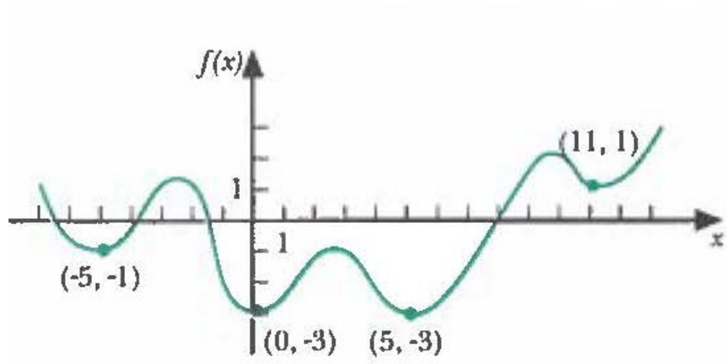
Construire le tableau de variation des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 5$

b) $f(x) = \sqrt[5]{x} + 2$

11.2 Maximum et minimum (Test de la dérivée première)

Grâce à ce graphique nous allons distinguer les maximums absolu et relatif ainsi que les minimums absolu et relatif.



Maximum absolu : y = 2

Maximum relatif y = 1,5 y = -1 et y = 2 (Tout maximum absolu est aussi un maximum relatif)

Minimum absolu y = -3

Minimum relatif y = -1 et y = -3 (Tout minimum absolu est aussi un minimum relatif)

Comme vous pouvez le constater :

Un **minimum** est toujours une décroissance **(↘)** suivie d'une croissance **(↗)**

Un **maximum** est toujours une croissance **(↗)** suivie d'une décroissance **(↘)**

Nous pouvons donc construire un **tableau de variation** (**test de la dérivée première**) afin de déterminer facilement les extrémums d'une fonction.

Exemple 11.4

Déterminons les maximums et minimums de la fonction suivante

$f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 108x + 12$

1ère étape : $f'(x) = 6x^2 - 18x - 108$

$f'(x) = 6(x^2 - 3x - 18) = 6(x + 3)(x - 6) \qquad en\, factorisant$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0\ si\ x = -3\ ou\ x = 6, \text{d'où} - 3 \text{ et } x = 6 \text{ sont des nombres critiques}$

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

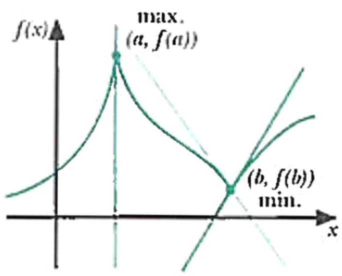
3ème étape : construire un tableau des variations

x	-∞	-3		6	+∞
$f'(x)$	+	0	−	0	+
f	↗	201	↘	-528	↗
		Max		**Min**	

Donc, y = 201 est un maximum et y = -528 est un minimum

Remarque : Dans le cas particulier où $f'(x)$ n'existe pas et le point *(c, f(c))* est un minimum ou maximum, ce point peut également s'appeler point anguleux ou point de rebroussement. Votre professeur de calcul 1 vous donnera plus de détail sur ces types d'extrémums.

Exemple Soit la fonction f définie par le graphique suivant.



$(a, f(a))$ est un point de rebroussement.

$(b, f(b))$ est un point anguleux.

Exercice 11.2

Déterminons les maximums ou minimum des fonctions suivantes

a) $f(x) = -x^2 + 5x + 7$

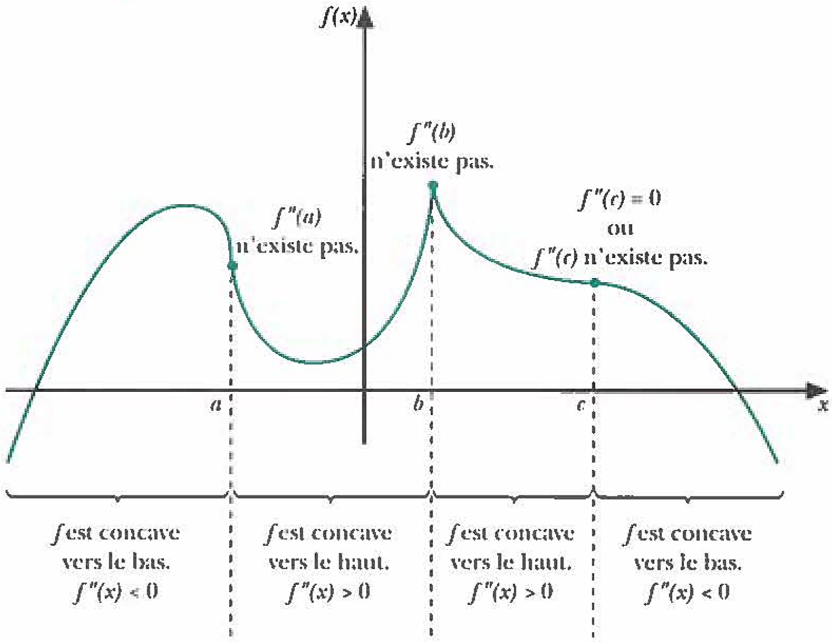
b) $f(x) = 4x^5 - 5x^4 + 9$

c) $f(x) = 3 - \sqrt[3]{(x+2)^2}$

11.3 Intervalles de concavité vers le bas et concavité vers le haut

Note : Certains de vos profs pourraient employer le terme concave pour la concavité vers le bas et convexe pour la concavité vers le haut.

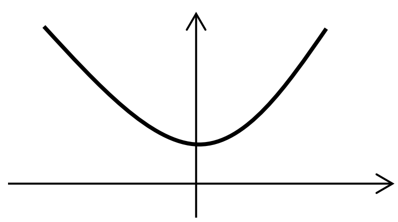
■ ***Exemple*** Soit la fonction f définie par le graphique ci-dessous.



D'abord, nous allons relier la concavité d'une courbe au signe de la dérivée seconde *f''.*

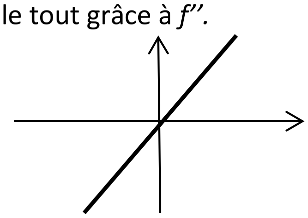
Exemple 11.5

Soit $f(x) = x^2 + 1$



À l'aide du graphique ci-contre, nous constatons que la courbe de *f* est concave vers le haut sur $\mathbb{R}$. Nous prouverons le tout grâce à *f''.*

Nous savons que $f'(x) = 2x$.



Cette fonction est toujours croissante ce qui veut dire que la **dérivée** de $f'(x) = 2x$ donc $f''(x)$, sera toujours supérieur ou égale à 0.

En effet, $f''(x) = 2$ d'où $f''(x) \geq 0 \; \forall \; x \in \mathbb{R}$.

Nous allons juger de la concavité d'une fonction grâce à deux propositions :

Proposition 1 : Soit une fonction *f* continue sur [a, b] telle que *f''* existe sur]a, b[.
Si ***f''(x)* > 0** sur]a, b[, alors la courbe de f est **concave vers le haut** sur [a, b].

Par le même principe :

Proposition 2 : Soit une fonction *f* continue sur [a, b] telle que *f''* existe sur]a, b[.
Si ***f''(x)* < 0** sur]a, b[, alors la courbe de f est **concave vers le bas** sur [a, b].

Voir graphique ci-haut pour bien assimiler ces deux propositions

Exemple 11.6

Soit $f(x) = x^3 - 5x^2 + x + 2$

Déterminons, en 3 étapes, les intervalles de concavité vers le haut et de concavité vers le bas grâce à la dérivée seconde.

1ère étape : Calculer *f''(x).*

$f'(x) = 3x^2 - 10x + 1$

$f''(x) = 6x - 10$

$= 2(3x - 5)$ *En factorisant*

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f''* :

1) $f''(x) = 0$ si $x = \frac{5}{3}$ d'où $\frac{5}{3}$ est un nombre critique

2) $f''(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif à *f''*

x	-∞	$\frac{5}{3}$	+∞
f''(x)	−	0	+
f	*f* est concave vers le bas sur -∞, $\frac{5}{3}$] **Notation : ∩**	$f(\frac{5}{3}) = -5{,}59$	*f* est concave vers le haut sur [$\frac{5}{3}$, +∞ **Notation : ∪**

Exemple 11.7

Soit$f(x) = 5 + \sqrt[3]{x}$

Déterminons les intervalles de concavité vers le haut et de concavité vers le bas grâce au test de la dérivée seconde.

1ère étape : Calculer *f''(x).*

$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{\frac{-5}{3}} = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f''* :

1) $f''(x) = 0$ pour aucun x.

2) $f''(x)$ n'existe pas si $x = 0$ d'où 0 est un nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif à *f''*

x	-∞	0	+∞
f''(x)	+	∄	−
f	∪	5	∩

f est donc concave vers le haut de -∞, 0] et

f est concave vers le bas de [0, +∞

Exercice 11.3

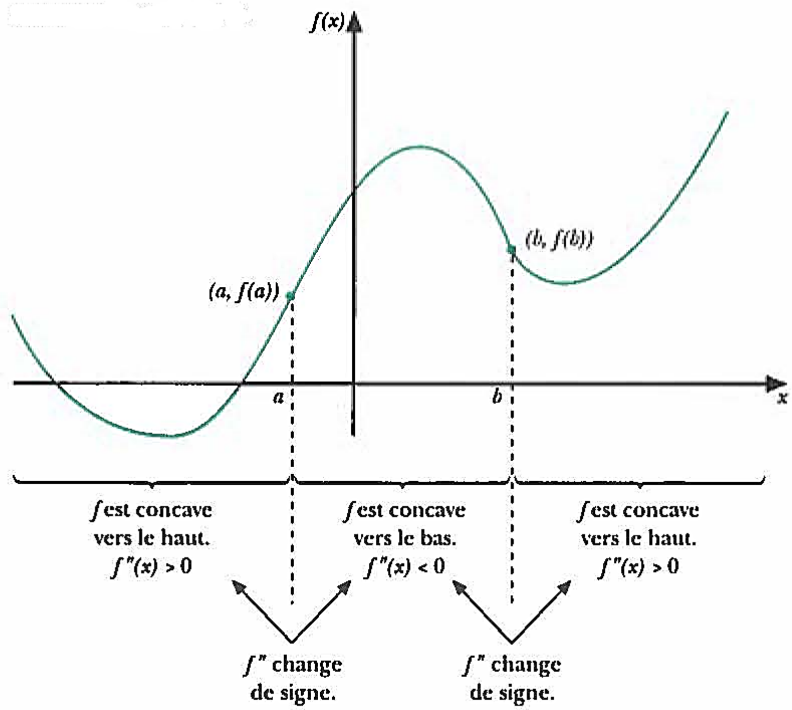
Pour chacune des fonctions suivantes déterminer les intervalles de concavité vers le haut et concavité vers le bas de *f.*

a) $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 9$

b) $f(x) = 2 - \sqrt[3]{(x-1)^2}$

11.4 Points d'inflexion, maximums et minimums

Un point d'inflexion est un point du graphique d'une fonction ou il y a **changement de concavité** (∪ suivi de ∩ ou ∩ suivi de ∪). On remarque dans le graphique ci-dessous que les points *(a, f(a))* et *(b, f(b))* sont deux points d'inflexion. La fonction tangente, vue cette année, possède un point d'inflexion à chaque cycle.



Exemple 11.8

Soit $f(x) = x^4 - 24x^2 - 34$

Déterminons les points d'inflexion de *f.*

1ère étape : Calculer *f''(x).*

$f'(x) = 4x^3 - 48x$

$f''(x) = 12x^2 - 48 = 12(x^2 - 4) = 12(x-2)(x+2) \quad En\ factorisant$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f''* :

1) $f''(x) = 0$ si $x = \ 2\ ou\ x = \ -2$ d'où -2 et 2 sont des nombres critiques

2) $f''(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif à *f''*

x	-∞	-2		2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	−	0	+
f	∪	-114	∩	-114	∪
		inflexion		inflexion	

Donc les points : (-2, -114) et (2, -114) sont tous deux, des points d'inflexion de *f*.

Exercice 11.4

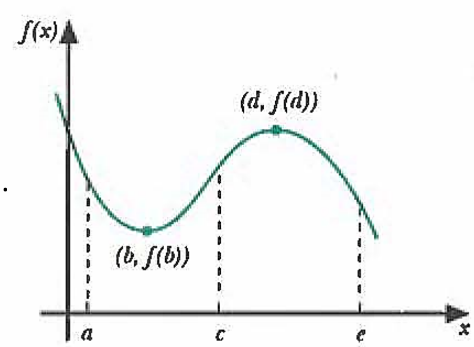
Trouver les points d'inflexion de cette fonction.

$f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1$

11.5 Test de la dérivée seconde

Je termine ce chapitre par une façon de faire plus rapide pour juger si un point est un maximum ou minimum sans toujours faire un tableau relatif à *f'*, cette façon de faire s'appelle le **test de la dérivée seconde**.

Pour comprendre ce test voici un exemple de compréhension :



Soit la fonction *f* définie par le graphique ci-contre.

Nous pouvons constater que :

i) le point *(b, f(b))* est un **minimum** de *f*,

ii) Donc, il est clair que *f'(b)* = 0 (tangente à ce point horizontale donc de pente nulle).

iii) Nous remarquons facilement que *f* est **concave vers le haut** autour du point *(b, f(b))* Ceci nous amène à dire que ***f''(b)* > 0**.

De la même façon :

i) le point *(d, f(d))* est un **maximum** de *f*,

ii) Donc, il est clair que *f'(d)* = 0 (tangente à ce point horizontale donc de pente nulle).

iii) Nous remarquons facilement que *f* est **concave vers le bas** autour du point *(d, f(d))* Ceci nous amène à dire que ***f''(d)* < 0**.

Voici donc en un résumé le **test de la dérivée** seconde :

Soit une fonction *f* et c un nombre critique de *f* tel que *f'(c)* = 0.

1. Si *f''(c)* $>$ 0 alors le point *(c, f(c))* est un minimum.

2. Si *f''(c)* $<$ 0 alors le point *(c, f(c))* est un maximum.
3. Si *f''(c)* = 0 ou *f''(c)* n'existe pas, alors on ne peut rien conclure.

Exemple 11.9

Soit $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$

Déterminons les maximums et minimums grâce au test de la dérivée seconde.

1ère étape : calculer *f'(x)*

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x - 1)(x + 1) \quad en\ factorisant$

2ème étape : calculer les nombres critiques de *f*.

1) $f'(x) = 0\ si\ x = 0, x = 1\ et\ x = -1, d'\text{où} - 1, 0\ et\ 1\ sont\ des\ nombres\ critiques.$

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : calculer *f''(x)*

$f''(x) = 60x^3 - 30x$

4ème étape : On effectue proprement dit le test de la dérivée seconde :

$f''(-1) = -30\ donc\ f''(-1) < 0\ donc\ \big(-1, f(-1)\big)\ est\ un\ maximum\ de\ f.$

$f''(1) = 30\ donc\ f''(1) > 0\ donc\ \big(1, f(1)\big)\ est\ un\ minimum\ de\ f.$

$f''(0) = 0\ \ donc\ on\ ne\ peut\ rien\ conclure\ pour\ l'instant\ \text{à}\ savoir$

$si\ nous\ sommes\ en\ \text{pr}\acute{e}\text{sence}\ d'un\ minimum\ ou\ maximum$

Pour savoir si (0, f(0) est un max. ou min. nous devons obligatoirement bâtir un tableau de variation (test de la dérivée première voir section 11.2)

x	-∞	-1		0		1	+∞
f'(x)	+	0	−	0	−	0	+
f	↗	4	↘	2	↘	0	↗
		Max		**Rien conclure**		**Min**	

Nous constatons que (-1, 4) est un maximum et (1, 0) est un minimum comme le test de la dérivée seconde l'a démontré. Par contre, le point (0, 2) n'est ni un maximum ou minimum. On pourrait vérifier si (0, 2) est un point d'inflexion grâce au tableau de variation relatif à *f''*. (voir section 11.4)

Exemple 11.10

Soit $f(x) = 2x^3 - 6x + 3$

Déterminons les maximums et minimums de cette fonction suivante grâce au test de la dérivée seconde.

1ère étape : calculer *f'(x)*

$f'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2 - 1) = 6(x-1)(x+1) \qquad en\ factorisant$

2ème étape : calculer les nombres critiques de *f*.

1) $f'(x) = 0\ si\ x = 1\ et\ x = -1, d'où - 1\ et\ 1\ sont\ des\ nombres\ critiques.$

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : calculer *f''(x)*

$f''(x) = 12x$

4ème étape : Test de la dérivée seconde :

$f''(-1) = -12\ donc\ f''(-1) < 0\ donc\ \big(-1, f(-1)\big)\ est\ un\ maximum\ de\ f.$

$f''(1) = 12\ donc\ f''(1) > 0\ donc\ \big(1, f(1)\big)\ est\ un\ minimum\ de\ f.$

Donc,$\big(-1, f(-1)\big)\ ou\ (-1, 7)\ est\ un\ maximum\ et\ \big(1, f(1)\big)\ ou\ (1, -1) est\ un\ minimum.$

11.6 Analyse des fonctions algébriques à l'aide de la dérivée première et seconde

Ce chapitre vous parait peut-être lourd ou même pénible pour certains…, alors j'ai ajouté cette section qui résume l'ensemble du chapitre 11.

Exemple 11.11

Voici un dernier exemple qui englobe l'essentiel de ce chapitre. Le tout sera résumé à travers celui-ci.

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 7$, étudions cette fonction *f* grâce aux dérivées première et seconde.

1ère étape : calculer *f'(x)* et calculer les nombres critiques de *f*.

$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3x(x-4) = 3x(x-4) \qquad en\ factorisant$

Nombres critiques :

1) $f'(x) = 0\ si\ x = 0\ et\ x = 4, d'$où $0\ et\ 4\ sont\ des\ nombres\ critiques.$

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

2ème étape : calculer *f''(x) et déterminer les nombres critiques de f'*

$f''(x) = 6x - 12$

Nombres critiques :

1) $f''(x) = 0\ si\ x = 2\ d'$où $2\ est\ un\ nombre\ critique$

2) $f''(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif *f'* et *f''.*

x	$-\infty$	0		2		4	$+\infty$
f'(x)	+	0	–	–	–	0	+
f''(x)	–	–	–	0	+	+	+
f	↗ et ∩	7	↘ et ∩	-9	↘ et ∪	-25	↗ et ∪
Allure et points		(0, 7)		(2, -9)		(4, -25)	
		Max		**Inflexion**		**Min**	

Remarques :

Dans la ligne *f* : Vous devez que combiner croissante ↗ (*f’(x) : +*) ou décroissante ↘ (*f’(x)* : *−*) selon le signe de *f’* et la concavité vers le haut ∪ (*f’’(x) : +)* ou la concavité vers le bas ∩ (*f’’(x) : −*) avec le signe de *f’’.*

De plus,

signifie croissante ↗ et concave vers le bas ∩

signifie croissante ↗ et concave vers le haut ∪

signifie décroissante ↘ et concave vers le haut ∪

signifie décroissante ↘ et concave vers le bas ∩

Dans votre cours de calcul 1, vous devrez esquisser le graphique de cette fonction. Avec la ligne : ***Allure et points***, il vous sera facile de la tracer à la main, ce qui est pour moi très difficile avec *Word*…

Exercice 11.5

Pour chacune des fonctions suivantes construire un tableau relatif à *f’* et *f’’* afin de l’analyser en détail. (Trouver les maximums, minimums et points d’inflexion, concavité vers le haut et vers la bas.)

a) $f(x) = -x^5 + 7 + 5x$
b) $f(x) = \sqrt{x^3} - 3x + 1$
c) $f(x) = 5x - 4\sqrt[3]{x^2}$
d) $f(x) = \ x^5 + x^3 + 2x$

Réponses

Exercice 11.1

a) 1ère étape :

$f'(x) = 4x^3 - 4x$

D'où; *f'(x)* = 4x$(x^2 - 1) = 4x(x+1)(x-1)$ en factorisant

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0\ si\ x = -1, x = 0\ ou\ x = 1$ d'où $-1, 0$ et 1 sont des nombres critiques

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : tableau de variation

x	-∞	-1		0		1	+∞
f'(x)	–	0	+	0	–	0	+
f(x)	↘	-6	↗	-5	↘	-6	↗

b) 1ère étape :

$f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\ x' \qquad proposition\ 7\ chap. 10$

D'où $f'(x) = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0\ pour\ aucun\ x$

2) $f'(x)$ n'existe pas si x = 0 d'où 0 est un nombre critique

3ème étape : tableau de variation

x	-∞	0	+∞
f'(x)	+	∄	+
f(x)	↗	2	↗

Exercice 11.2

a)

1ère étape : $f'(x) = -2x + 5$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0 \; si \; x = \frac{5}{2}$, d'où $x = \frac{5}{2}$ est un nombre critique

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : construire un tableau des variations

x	-∞	$\frac{5}{2}$	+∞
f'(x)	+	0	–
f	↗	13,25	↘
		Max	

Donc, *y* = 13,25 est un maximum

b)

1ère étape : $f'(x) = 20x^4 - 20x^3$

$f'(x) = 20x^3(x-1) \qquad en\ factorisant$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0 \; si \; x = 0 \; ou \; x = 1$, d'où 0 et $x = 1$ sont des nombres critiques

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : construire un tableau des variations

x	-∞	0		1	+∞
f'(x)	+	0	–	0	+
f	↗	9	↘	8	↗
		Max		**Min**	

Donc, *y* = 9 est un maximum et *y* = 8 est un minimum

$c)\ f(x) = 3 - (x+2)^{\frac{2}{3}}$

1ère étape : $f'(x) = \frac{-2}{3}(x+2)^{\frac{-1}{3}}(x+2)'$ $\quad$ $proposition\ 7\ chap. 10$

$= \frac{-2}{3(x+2)^{\frac{1}{3}}} = \frac{-2}{3\sqrt[3]{x+2}}$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f.*

1) $f'(x) = 0\ pour\ aucun\ x$

2) $f'(x)$ n'existe pas si $x = -2$ d'où -2 est un nombre critique

3ème étape : construire un tableau des variations

x	-∞	-2	+∞
f'(x)	+	∄	−
f	↗	3	↘
		Max	

Donc, *y* = 3 est un maximum

Exercice 11.3

a) $f(x) = 2x^6 - 5x^4 + 9$

1ère étape : Calculer *f''(x).*

$f'(x) = 12x^5 - 20x^3$

$f''(x) = 60x^4 - 60x^2$

$= 60x^2(x^2-1) = 60x^2(x-1)(x+1)$ $\quad$ *En factorisant*

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f''* :

1) $f''(x) = 0$ si *x* = 0 , $x = 1\ ou\ x = -1$ d'où $-1, 0\ et\ 1\ sont\ des$ nombres critiques

2) $f''(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif à *f''*

x	-∞	-1		0		1	+∞
f''(x)	+	0	−	0	−	0	+
f	∪	6	∩	9	∩	6	∪

f est concave vers le haut sur -∞, -1] ∪[1, +∞ et *f* est concave vers le bas sur [-1,0] ∪ [0,1] donc de [-1,1]…

$b)\ f(x) = 2 - \sqrt[3]{(x-1)^2} = 2 - (x-1)^{\frac{2}{3}}$

1ère étape : Calculer *f''(x).*

$f'(x) = -\frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(x-1)' \qquad proposition\ 7\ chap.10$

$$f''(x) = \frac{2}{9}(x-1)^{\frac{-4}{3}} = \frac{2}{9\sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f''* :

1) $f''(x) = 0$ pour aucun x.

2) $f''(x)$ n'existe pas si $x = 1$ d'où 1 est un nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif à *f''*

x	-∞	1	+∞
f''(x)	+	∄	+
f	∪	2	∪

f est donc concave vers le haut sur $\mathbb{R}$

*f n'*est jamais concave vers le bas.

Exercice 11.4

$f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 1$

1ère étape : Calculer *f''(x).*

$f'(x) = 15x^4 - 20x^3$

$f''(x) = 60x^3 - 60x^2$

$\quad = 60x^2(x-1)$ *En factorisant*

2ème étape : Déterminer les nombres critiques de *f''* :

1) $f''(x) = 0$ si $x = 0$, $x = 1$ d'où $0\ et\ 1\ sont\ des$ nombres critiques

2) $f''(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif à *f''*

x	-∞	0		1	+∞
f''(x)	–	0	–	0	+
f	$\cap$	1	$\cap$	-1	$\cup$
				inflexion	

Le point (1, -1) est un point d'inflexion.

Exercice 11.5

a) $f(x) = -x^5 + 7 + 5x$

1ère étape : calculer *f'(x)* et calculer les nombres critiques de *f*.

$f'(x) = -5x^4 + 5$

$= \ -5(x^4 - 1) = -5(x^2 - 1)(x^2 + 1) \ \ - 5(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) \ \ en\ factorisant$

Nombres critiques :

1) $f'(x) = 0\ si\ x = 1\ et\ x = -1, d'\text{où} - 1\ et\ 1\ sont\ des\ nombres\ critiques.$

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

2ème étape : calculer *f''(x) et déterminer les nombres critiques de f'*

$f''(x) = \ -20x^3$

Nombres critiques :

1) $f''(x) = 0\ si\ x = 0\ d'\text{où}\ 0\ est\ un\ nombre\ critique$

2) $f''(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif *f'* et *f''.*

x	-∞	-1		0		1	+∞
f'(x)	–	0	+	+	+	0	–
f''(x)	+	+	+	0	–	–	–
f	$\searrow$ et $\cup$	3	$\nearrow$ et $\cup$	7	$\nearrow$et $\cap$	11	$\searrow$ et $\cap$
Allure et points		(-1, 3)		(0, 7)		(1, 11)	
		Min		**Inflexion**		**Max**	

$b)\ f(x) = \sqrt{x^3} - 3x + 1 = x^{\frac{3}{2}} - 3x + 1$

Remarque le *dom f* = $[0, +\infty$, car x ne peut pas être négatif par la présence de la racine carrée…

1ère étape : calculer *f'(x)* et calculer les nombres critiques de *f*.

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 3 \quad = \frac{3\sqrt{x}}{2} - 3$$

Nombres critiques :

1) $f'(x) = 0\ si\ x = 4, d'où\ 4\ est\ un\ nombre\ critique.$

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

2ème étape : calculer *f''(x) et déterminer les nombres critiques de f'*

$$f''(x) = \frac{3}{4}x^{\frac{-1}{2}} = \frac{3}{4x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3}{4\sqrt{x}}$$

Nombres critiques :

1) $f''(x) = 0\ pour\ aucun\ x$

2) $f''(x)$ n'existe pas si $x = 0$ d'où 0 est un nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif *f'* et *f''*.

x	0		4	+∞
f'(x)	−	−	0	+
f''(x)	∄	+	+	+
f	1	↘ et ∪	-3	↗ et ∪
Allure et points	(0, 1)		(4, -3)	
	Max		**Min**	

$c)\ f(x) = 5x - 4\sqrt[3]{x^2} = 5x - 4x^{\frac{2}{3}}$

1ère étape : calculer *f'(x)* et calculer les nombres critiques de *f*.

$$f'(x) = 5 - \frac{8}{3}x^{\frac{-1}{3}} = 5 - \frac{8}{3\sqrt[3]{x}}$$

Nombres critiques :

1) $f'(x) = 0 \; si \; x = \dfrac{512}{3375}, d'où \; \dfrac{512}{3375} \; est \; un \; nombre \; critique.$

2) $f'(x) \; n'existe \; pas \; si \; x = 0 \; d'où \; 0 \; est \; un \; nombre \; critique$

2ème étape : calculer *f''(x) et déterminer les nombres critiques de f'*

$$f''(x) = \frac{8}{9}x^{\frac{-4}{3}} = \frac{8}{9x^{\frac{4}{3}}} = \frac{8}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

Nombres critiques :

1) $f''(x) = 0 \; pour \; aucun \; x$

2) $f''(x)$ n'existe pas si x $= 0$ d'où 0 est un nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif *f'* et *f''*.

x	-∞	0		$\frac{512}{3375}$	+∞
f'(x)	+	∄	−	0	+
f''(x)	+	∄	+	+	+
f	↗ et ∪	0	↘ et ∪	-0,379…	↗ et ∪
Allure et points		(0, 0)		($\frac{512}{3375}$, -0,379…)	
		Max		**Min**	

$d) \; f(x) = x^5 + x^3 + 2x$

1ère étape : calculer *f'(x)* et calculer les nombres critiques de *f*.

$f'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 2$

Nombres critiques :

1) $f'(x) = 0 \; pour \; aucun \; x \; car \; si \; 0 = 5x^4 + 3x^2 + 2$

Alors, $-2 = 5x^4 + 3x^2 \; ce \; qui \; impossible \; car \; 5x^4 + 3x^2 \; est \; toujours \; positif. \; En \; effet,$ $les \; exposants \; des \; x \; de \; ces \; deux \; monômes \; sont \; pairs \ldots$

2) $f'(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

2ème étape : calculer *f''(x) et déterminer les nombres critiques de f'*

$f''(x) = 20x^3 + 6x = 2x(10x^2 + 3) \quad en\ factorisant$

Nombres critiques :

1) $f''(x) = 0\ si\ x = 0\ d'où\ 0\ est\ un\ nombre\ critique$

2) $f''(x)$ est définie pour tous x, d'où aucun autre nombre critique

3ème étape : Construire un tableau de variation relatif *f'* et *f''*.

x	-∞	0	+∞
f'(x)	+	+	+
f''(x)	−	0	+
f	↗∩	0	↗ et ∪
Allure et points		(0, 0)	
		Inflexion	