

Partie 1: Actuariat Vie

CHAPITRE 3: ESTIMATION DES PROVISIONS MATHÉMATIQUES

Partie 1: Actuariat Vie

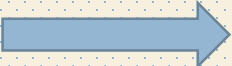
Chapitre 3. Estimation des provisions mathématiques

Utilité


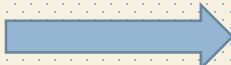
Rappelons que, la durée d'un contrat vie/ décès est généralement plus longue que l'exercice comptable.

Pour ces contrats, la compagnie d'assurance inscrit dans le passif de son bilan comptable de fin d'année, un poste très important appelé **Provisions Mathématiques**.

Ces provisions mathématiques doivent représenter la dette probable de l'assureur vis-à-vis de ses assurés.

A la souscription: Prime Pure = prime de risque  Equilibre des engagements des deux parties

Après 1 an:

- Cas prime Unique: Engagements de l'assureur > Engagements de l'assuré  Déséquilibre
- Cas de prime annuelle: Prime annuelle constante Vs risque annuel qui varie selon la probabilité de décès/ vie annuelle de l'assuré  Déséquilibre

Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 3. Estimation des provisions mathématiques

Définition

La provision mathématique est égale à l'excédent des engagements futurs de l'assureur sur les engagements futurs de l'assuré, c à d sur les primes encore à payer.

Types:

- PM Pure: Calculée à partir de la prime pure.
- PM d'Inventaire: Calculée à partir de la prime d'Inventaire.
- PM Commerciale: Calculée à partir de la prime Commerciale.

Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 3. Estimation des provisions mathématiques

Provisions mathématiques Pures

Prime Pure: rappel et généralisation

Soit, \mathbf{K} un contrat d'assurance vie/ décès quelconque, pour un assuré d'âge x et une période limitée ou illimitée

Notons : la prime pure unique de ce contrat ${}_n\mathbf{K}_x$ (${}_nE_x / {}_nA_x / {}_na_x / {}_nIA_x, \dots$)

Le contrat assure un versement C .

La prime nivelée est notée PA .

Périodicité de paiement de la prime est m

Rappelons la relation suivante (Equivalence des VAP)

$$PA \cdot {}_m\ddot{a}_x = C \cdot {}_n\mathbf{K}_x$$

Définition des Provisions Mathématiques Pures:

La PM Pure à une date donnée est calculée par la différence entre les VAP des engagements futurs des deux parties.

- Au niveau des engagements de l'assureur : On retient ceux qui sont exprimés envers l'assuré.
- Au niveau des engagements de l'assuré : On retient le paiement de la prime pure

Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 3. Estimation des provisions mathématiques

Provisions mathématiques Pures

Formule générale de la PM Pure:

Notons $PM(t)$, la PM Pure à une date donnée t , d'un contrat Vie/décès donné tel qu'il est défini plus haut.

La différence entre la VAP des engagements futurs des deux parties:

$$PM(t) = C \cdot {}_{n-t}K_{x+t} - PA \cdot {}_{m-t}\ddot{a}_{x+t}$$

Application au contrat vie entière

Pour un contrat de vie entière contacté par un assuré d'âge x , la PM pure calculée à la fin de la $t^{\text{ième}}$ année de la date de conclusion du contrat, s'écrit comme suit:

- Si la prime est annuelle payée sur m périodes: $PM(t) = C \cdot A_{x+t} - PA \cdot {}_{m-t}\ddot{a}_{x+t}$
- Si la prime est unique: $PM(t) = C \cdot A_{x+t}$

Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 3. Estimation des provisions mathématiques

Provisions mathématiques Pures

Exercice d'application

Une compagnie d'assurance vend en mars 2010, un contrat vie entière de 500.000 dh à un client âgé de 30 ans. Le paiement de la prime est annuelle et limité sur 10 ans.

A l'occasion des travaux annuels de clôture de 2015 , quelle est le montant de la provision mathématique pure que la compagnie d'assurance doit réserver pour ce contrat?

Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 3. Estimation des provisions mathématiques

Provisions mathématiques d'Inventaire

Prime d'Inventaire: rappel et généralisation

Rappel: Prime d'Inventaire = Prime Pure + frais de gestion

Les frais de gestion sont en général un % (g) du capital assuré, prélevé annuellement.

Chargement annuel pour la gestion du contrat = $C \cdot g$

Notons P' : La prime unique d'inventaire

On a donc $P' = C \cdot {}_nK_x + C \cdot g \cdot {}_n\ddot{a}_x$

Notons PA' : la prime annuelle d'inventaire sur m période . Rappelons: $P' = PA' \cdot {}_m\ddot{a}_x$

On a donc

$$PA' \cdot {}_m\ddot{a}_x = C \cdot {}_nK_x + C \cdot g \cdot {}_n\ddot{a}_x$$

Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 3. Estimation des provisions mathématiques

Provisions mathématiques d'Inventaire

Définition des Provisions Mathématiques d'Inventaire

La PM d'inventaire à une date donnée est calculée par la différence entre les VAP des engagements futurs des deux parties.

- Au niveau des engagements de l'assureur : On retient ceux qui sont exprimés envers l'assuré et ceux exprimés envers lui-même pour couvrir les frais de gestion
- Au niveau des engagements de l'assuré : On retient le paiement de la prime d'inventaire

Formule générale de la PM d'Inventaire:

Notons $PM'(t)$, la PM d'inventaire à une date donnée t , d'un contrat Vie/décès donné tel qu'il est défini plus haut.

La différence entre la VAP des engagements futurs des deux parties:

$$PM'(t) = C \cdot {}_{n-t}K_{x+t} + C \cdot g \cdot {}_{n-t}\ddot{a}_{x+t} - PA' \cdot {}_{m-t}\ddot{a}_{x+t}$$

Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 3. Estimation des provisions mathématiques

Provisions mathématiques d'Inventaire

Application au contrat temporaire décès

Pour un contrat de temporaire décès contracté par un assuré d'âge x sur une période n , la PM d'inventaire calculée à la fin de la $t^{\text{ième}}$ année de la date de conclusion du contrat, s'écrit comme suit:

- Si la prime est annuelle, payée sur m périodes:

$$PM'(t) = C \cdot {}_{n-t}A_{x+t} + C \cdot g \cdot {}_{n-t}\ddot{a}_{x+t} - PA' \cdot {}_{m-t}\ddot{a}_{x+t}$$

- Si la prime est unique: $PM'(t) = C \cdot {}_{n-t}A_{x+t} + C \cdot g \cdot {}_{n-t}\ddot{a}_{x+t}$

Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 3. Estimation des provisions mathématiques

Provisions mathématiques d'Inventaire

Exercice d'application

Une compagnie d'assurance vend en mars 2005, un contrat de temporaire décès de 500.000 dh à un client âgé de 30 ans pour une durée de 20 ans. Le paiement de la prime est annuelle et limité sur 10 ans.

Les frais de gestion est de l'ordre de 2,5 ./.. (pour mille) du capital.

- Calculer la prime d'inventaire?

- Calculer les PM d'inventaire à fin 2016?

Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 3. Estimation des provisions mathématiques

Provisions mathématiques Commerciales

Prime Commerciale: Rappel et généralisation

Rappel: Prime Commerciale = Prime d'inventaire + frais d'acquisition + frais d'encaissement de primes

- Les frais d'acquisition sont en général proportionnels au capital, versés en totalité à la souscription, noté α
- Les frais d'encaissement sont en général proportionnels à la prime, noté β

Notons P'' : La prime unique commerciale

$$\text{On a donc } P'' = C \cdot {}_nK_x + C \cdot g_n \ddot{a}_x + \alpha \cdot C + \beta \cdot P''$$

Notons PA'' : la prime annuelle commerciale sur m période , donc on a $P'' = PA'' \cdot {}_m\ddot{a}_x$

$$\text{On a donc } PA'' \cdot {}_m\ddot{a}_x = C \cdot {}_nK_x + C \cdot g_n \ddot{a}_x + \alpha \cdot C + \beta \cdot PA'' \cdot {}_m\ddot{a}_x$$

Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 3. Estimation des provisions mathématiques

Provisions mathématiques Commerciales

Définition des Provisions Mathématiques Commerciales

La PM commerciale à une date donnée est calculée par la différence entre les VAP des engagements futurs des deux parties.

- Au niveau des engagements de l'assureur : On retient ceux qui sont exprimés envers l'assuré et ceux exprimés envers lui-même pour couvrir tous ses frais.
- Au niveau des engagements de l'assuré : On retient le paiement de la prime commerciale.

Formule générale de la PM Commerciale

Notons $PM''(t)$, la PM commerciale à une date donnée t , d'un contrat Vie/décès donné tel qu'il est défini plus haut.

La différence entre la VAP des engagements futurs des deux parties:

$$PM''(t) = C \cdot {}_{n-t}K_{x+t} + C \cdot g \cdot {}_{n-t}\ddot{a}_{x+t} + \beta \cdot PA'' \cdot {}_{m-t}\ddot{a}_{x+t} - PA'' \cdot {}_{m-t}\ddot{a}_{x+t}$$

Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 3. Estimation des provisions mathématiques

Provisions mathématiques Commerciales

Application au contrat capital différé

Pour un contrat de capital différé contacté par un assuré d'âge x sur une période n , la PM commerciale calculée à la fin de la $t^{\text{ième}}$ année de la date de conclusion du contrat, s'écrit comme suit:

- Si la prime est annuelle, payée sur m périodes:

$$PM''(t) = C \cdot {}_{n-t}E_{x+t} + C \cdot g \cdot {}_{n-t}\ddot{a}_{x+t} + \beta \cdot PA'' \cdot {}_{m-t}\ddot{a}_{x+t} - PA'' \cdot {}_{m-t}\ddot{a}_{x+t}$$

- Si la prime est unique:

$$PM''(t) = C \cdot {}_{n-t}E_{x+t} + C \cdot g \cdot {}_{n-t}\ddot{a}_{x+t}$$

Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 3. Estimation des provisions mathématiques

Provisions mathématiques Commerciales

Exercice d'application

Une compagnie d'assurance vend en mars 2005, un contrat capital différé de 500.000 dh à un client âgé de 30 ans pour une durée de 20 ans.

Les frais de gestion sont de l'ordre de 2,5 ./.. (pour mille) du capital.

Les frais d'acquisition sont de l'ordre de 3%

Les frais d'encaissement de la prime est de 10%

- Calculer les PM commerciale à fin 2016 pour une prime unique?

Partie 1: Actuariat Vie

Corrigé exercices de formulation théorique

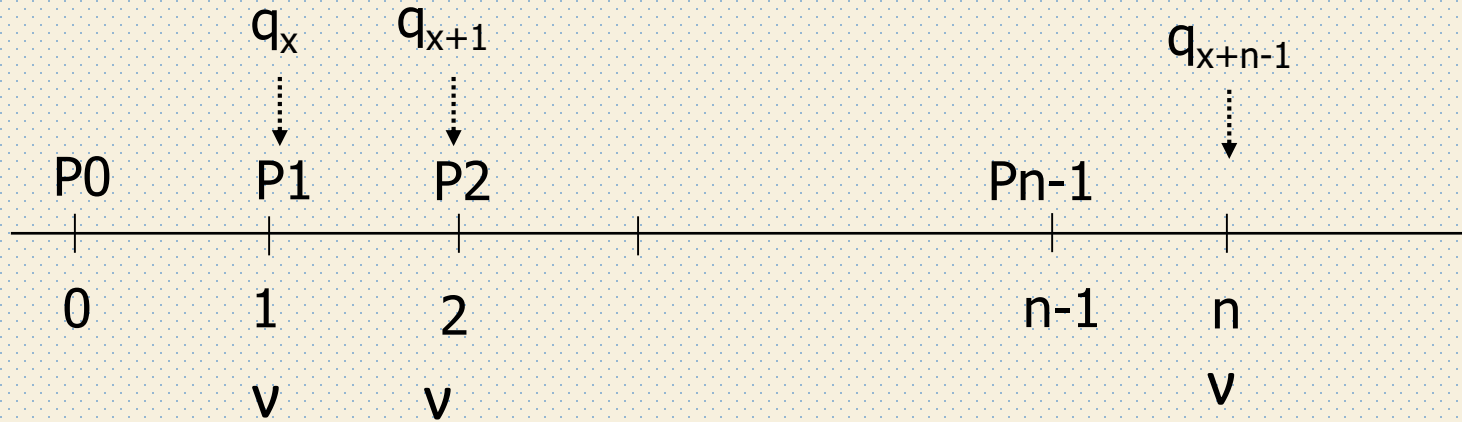
Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 2. Techniques actuarielles pour le calcul de la prime de risque Généralisation du calcul de la prime pure

Temporaire décès

2- Capital versé à la fin de l'année du décès/ PU-PA

Corrigé



$${}_nA_x = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{v^i q_x}{(1+t)^{i+1}} = \sum_{i=0}^{n-1} v^{i+1} \cdot \frac{d_{x+i}}{I_x} = \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \dots + C_{x+n-1}}{D_x}$$

$${}_nA_x = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

$$PA = \frac{M_x - M_{x+n}}{N_x - N_{x+n}}$$

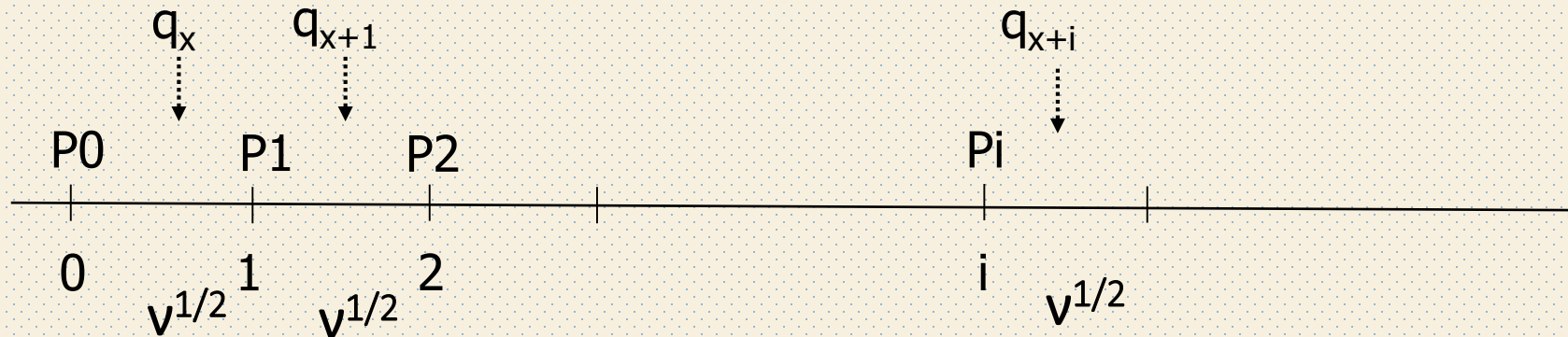
Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 2. Techniques actuarielles pour le calcul de la prime de risque Généralisation du calcul de la prime pure

Vie entière

2- Capital versé au moment du décès/ PU

Corrigé



La suite des primes de risques successives P0, P1,probabilisées est $v^{1/2} \cdot {}_0|q_x$, $v^{1/2} \cdot {}_1|q_x$, $v^{1/2} \cdot {}_2|q_x$, ...

$$\overline{A}_x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{v^{1/2} \cdot {}_i|q_x}{(1+t)^i} = \sum_{i=0}^{\infty} v^{i+1/2} \frac{d_{x+i}}{l_x} = \frac{\overline{C}_x + \overline{C}_{x+1} + \overline{C}_{x+2} + \dots}{D_x}$$

$$\overline{A}_x = \frac{\overline{M}_x}{D_x}$$

Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 2. Techniques actuarielles pour le calcul de la prime de risque Généralisation du calcul de la prime pure

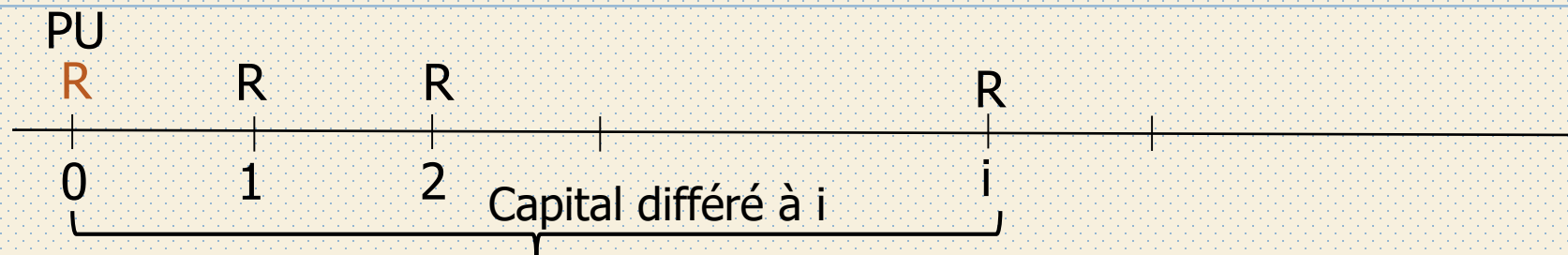
Rente viagère

2- Rente viagère anticipative

Corrigé

L'assureur s'engage à :

- Verser des paiements périodiques de 1 unité à partir de l'instant 0, à un assuré âgé de x , tant qu'il est en vie
- Les paiements s'arrêteront au décès de l'assuré
- PU? Le capital constitutif de la rente



$$\ddot{a}_x = 1 + {}_1E_x + {}_2E_x + {}_3E_x + \dots$$

$$\ddot{a}_x = \frac{D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \dots}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

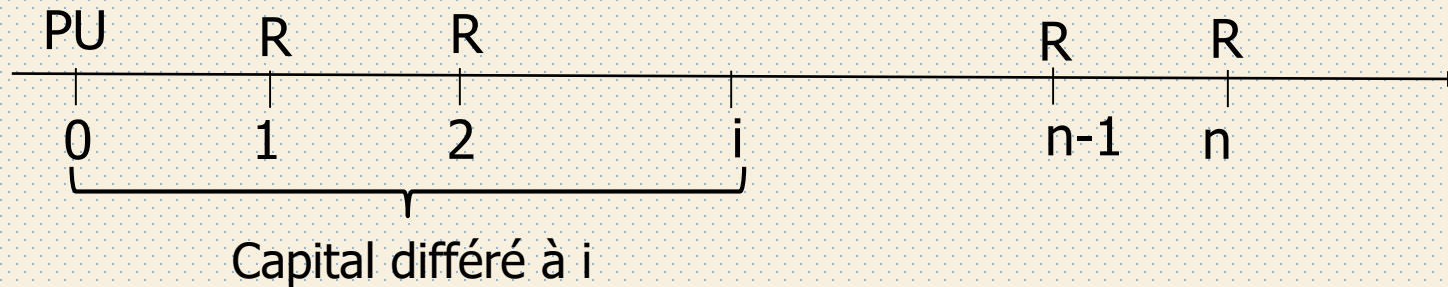
Partie 1: Actuariat Vie

Chapitre 2. Techniques actuarielles pour le calcul de la prime de risque Généralisation du calcul de la prime pure

Rente viagère temporaire

2- Rente viagère temporaire à terme échu

Corrigé



$${}_n a_x = {}_1 E_x + {}_2 E_x + \dots + {}_n E_x$$

$${}_n a_x = \frac{D_{x+1} + D_{x+2} + \dots + D_{x+n}}{D_x}$$

$${}_n a_x = \frac{N_{x+1} - N_{x+n+1}}{D_x}$$