Chapitre 7 : Proportionnalité

PARTIE 1 : RAPPELS SUR LES CALCULS

A] Proportionnalité. Qu'est-ce que c'est ?

Deux grandeurs sont proportionnelles si lorsque je multiplie par 2, 3, 4... l'une alors l'autre est aussi multiplié par 2, 3, 4...

Vidéos

Exercice interactif

B] Propriétés de base de la proportionnalité

Exercice interactif

Additivité

2 beignets ⟶ 300g

3 beignets ⟶ 450g

2 + 3 beignets ⟶ 300 + 450 g

Si on ajoute des beignets,
on ajoute leur masse au total.

Multiplicativité

2 beignets ⟶ 300g

2 × 3 beignets ⟶ 300 × 3 g

Si je prends 3 fois plus de beignets
alors la masse totale sera 3 fois plus importante.

Vidéo

C] Tableau et coefficient de proportionnalité

Pour illustrer une situation de proportionnalité, on utilise souvent un tableau appelé **tableau de proportionnalité**. Dans un tel tableau, on peut obtenir les nombres de la seconde ligne en multipliant ceux de la première ligne par un **coefficient de proportionnalité**.

Remarque : Tous les tableaux ne sont pas de tableaux de proportionnalité. Il faudra vérifier chaque colonne pour savoir.

Exemple : Le prix payé est-il proportionnel au nombre de stylos ?

Nombre de stylos	3	5	7
Prix payé (en €)	12	20	28

$12 \div 3 = 4$ $\quad$ $20 \div 5 = 4$ $\quad$ $28 \div 7 = 4$

4 est donc un coefficient de proportionnalité.
Le prix payé est bien proportionnel au nombre de stylos.

Méthode pour trouver un coefficient de proportionnalité :
On trouve les coefficients en divisant une valeur de la 1^{e} grandeur par la valeur associée de la 2^{e} grandeur (ou inversement selon le calcul qui vous semble le plus simple)

Remarque : Il y a toujours deux coefficients de proportionnalité mais souvent on en utilise qu'un seul, en multipliant ou divisant selon le nombre à trouver.

D] Règle de trois

La règle de trois est appelée ainsi car c'est un raisonnement en trois étapes !
On peut effectuer un retour à l'unité ou utiliser un diviseur commun.

- **Sans retour à l'unité :**
  Exemple : Le prix des roses est proportionnel au nombre de roses. Si 32 roses coûtent 44 €, combien coûtent 48 roses ?

÷ 2 × 3

Nombre de roses	32	16	48
Prix payé (€)	44	22	66

÷ 2 × 3

Etape 1 : Ce que je sais
Etape 2 : Etape intermédiaire
Etape 3 : Ce que je cherche

48 roses coûtent 66 €

- **Avec retour à l'unité :**
  Exemple : Le prix des roses est proportionnel au nombre de roses. Si 3 roses coûtent 4,5 €, combien coûtent 5 roses ?

÷ 3 × 5

Nombre de roses	3	1	5
Prix payé (€)	4,5	1,5	7,5

÷ 3 × 5

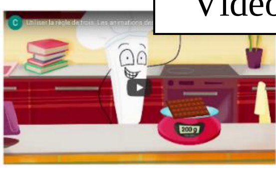
Etape 1 : Ce que je sais
Etape 2 : Retour à l'unité
Etape 3 : Ce que je cherche

5 roses coûtent 7,50 €

Remarque :
Le retour à l'unité permet également de déterminer le coefficient de proportionnalité. On voit que pour passer de la 1^{e} à la 2^{e} ligne on peut multiplier par 1,5.

Exercices interactifs sur la proportionnalité

Vidéo



E] Egalité des produits en croix

Remarque : Lorsque **deux grandeurs sont proportionnelles**, leur **quotient est constant** (et est égal à un des deux coefficients de proportionnalité) donc on peut se servir de cette règle pour **trouver une 4e proportionnelle** lorsque l'on en connait déjà trois.

Le coefficient de proportionnalité est constant, peu importe la colonne donc :

$$a \div b = \text{coeff} = c \div d$$

1e grandeur	a	c
2e grandeur	b	d

Règle de l'égalité des produits en croix :

(avec a, b, c et d entiers relatifs différents de zéro)

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $a \times d = c \times b$.

La réciproque est vraie :
Si $a \times d = c \times b$ alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Si les quotients des colonnes sont égaux (ce qui est le cas lorsqu'il y a proportionnalité, car ils sont égaux au coefficient de proportionnalité) alors les produits en croix sont égaux.

Démonstration :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \xrightarrow{\times b} \quad a = \frac{c}{d} \times b \quad \xrightarrow{\times d} \quad a \times d = c \times b$$

Exemple :

Chez un fleuriste, le nombre de roses achetées est proportionnel au prix payé.
Si 25 roses coûtent 45€, combien coûtent 18 roses ?

Nombre de roses	25	18
Prix payé (€)	45	x

Moyen mnémotechnique :

$$\frac{25}{45} = \frac{18}{x}$$

Comme il y a proportionnalité alors d'après l'égalité des produits en croix j'obtiens :

($25 \times x = 45 \times 18$ donc :)

$$x = \frac{45 \times 18}{25} = 32{,}4$$

Les 18 roses coûtent 32,40 €.

PARTIE 2 : Echelle

Définition : Une **échelle** est le **quotient d'une longueur du dessin sur celle qui lui correspond dans la réalité, exprimées dans la même unité** :

$$\text{Echelle} = \frac{\text{Longueur sur le dessin}}{\text{Longueur en réalité}}$$ **dans la même unité**

Vidéo

Déterminer une échelle

Exemple n°1 :
Sur une maquette, la distance entre deux maisons est de 15 cm. Sachant que dans la réalité cette distance est de 30 m, **quelle est l'échelle de cette maquette ?**

30 m = 3 000 cm

Je mets tout dans la même unité !
(Ici j'ai choisi de tout mettre en centimètres.)

J'indique ma formule !

$$\text{Echelle} = \frac{\text{Longueur sur maquette}}{\text{Longueur en réalité}}$$ même unité

$= \frac{15}{3000}$ **J'utilise ma formule !**

$= \frac{1}{200}$ **Je donne la réponse sous la forme $\frac{1}{...}$ car c'est une réduction !**

L'échelle de la maquette est $\frac{1}{200}$.

Remarque : Comment passer de $\frac{15}{3000}$ à $\frac{1}{200}$?

Avec les fractions égales :

$$\frac{15}{3000} = \frac{15 \div 3}{3000 \div 3} = \frac{5}{1000} = \frac{5 \div 5}{1000 \div 5} = \frac{1}{200}$$

÷ 15

Avec la proportionnalité :

Maquette (cm)	15	1
Réalité (cm	3000	200

÷ 15

Exemple n°2 :

Voici un agrandissement d'une fourmi africaine.

Quelle est l'échelle de cette photo ?

Sur le plan, le segment « échelle » mesure 1 cm.

Je mesure directement sur la photo !

1 cm = 10 mm

Je mets tout dans la même unité !
(Ici j'ai choisi de tout mettre en millimètres.)

J'indique ma formule !

$$\text{Echelle} = \frac{\text{Longueur sur le plan}}{\text{Longueur en réalité}}$$ même unité

$= \frac{10}{1}$ **J'utilise ma formule !**

$= 10$ **Je donne la réponse sous la forme d'un entier car c'est un agrandissement !**

L'échelle de cette photo est $\times$ 10.

Utiliser une échelle

Exemple n°1 :

Sur une carte, la distance à vol d'oiseau (ligne droite) entre deux villes est de 15 cm. Sachant que l'échelle de cette carte est $\frac{1}{200\,000}$, **quelle distance les sépare en réalité ?**

Echelle = $\frac{\text{Longueur sur carte}}{\text{Longueur en réalité}}$ même unité **J'indique ma formule !**

Ici l'échelle est $\frac{1}{200\,000}$ donc 1 cm sur le plan correspond à 200 000 cm en réalité c'est à dire 2 km. **Je « traduis » la situation grâce à ma formule !**

Je pense à utiliser l'unité la plus adaptée.

15 × 2 = 30 km **Je calcule directement ou avec un tableau de proportionnalité.**

La distance réelle entre les deux villes est de 30 km.

PARTIE 3 : Vitesse

Définition : La vitesse moyenne d'un corps est le rapport de la distance parcourue sur le temps :

$$\textbf{Vitesse moyenne} = \frac{\textbf{distance parcourue}}{\textbf{temps}}$$

Exemple :
Un cycliste a parcouru 12 km en 26 min.

Pour calculer sa vitesse moyenne arrondie au dixième, en m/s, il faut tout d'abord convertir la distance en mètres : d = 12 km = 12 000 m

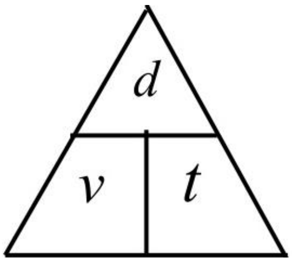
Puis il faut convertir le temps du parcours en secondes, soit : $t = 26 \times 60 = 1560\ s$

On calcule alors la vitesse moyenne du cycliste : $v = \frac{d}{t} = 12\,000 \div 1560 \approx 7{,}7\ m/s$.

$$\mathbf{V = \frac{d}{t}}$$

$$\mathbf{t = \frac{d}{v}}$$

$$\mathbf{d = v \times t}$$

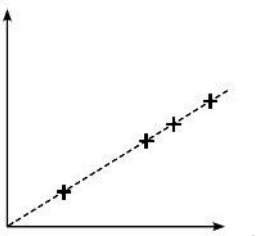


Exercices interactifs

PARTIE 4 : GRAPHIQUE

- Dans la représentation graphique d'une **situation de proportionnalité**, les **points sont alignés avec l'origine du repère**.

Exemple :

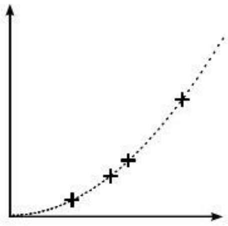


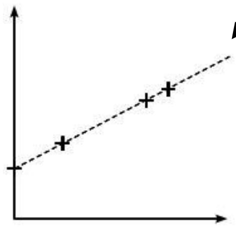
La représentation graphique d'une situation de proportionnalité est une droite passant par l'origine.

- Si dans une représentation graphique, les **points ne sont pas alignés entre eux ou pas alignés avec l'origine** alors la situation représentée **n'est pas une situation de proportionnalité**.

Exemples :

Ici la représentation n'est pas une droite.





Ici la représentation est une droite mais ne passe pas par l'origine.

Exercice interactif

PARTIE 5 : POURCENTAGES et TAUX

- Un pourcentage est une écriture particulière d'un nombre.

40 %	=	$\frac{40}{100}$	=	$\frac{2}{5}$	=	0,4
Pourcentage		Fraction au dénominateur 100		Fraction irréductible		Nombre décimal

- Pour prendre 25 % de 45 je peux faire : 25 % $\times$ 45

Appliquer un pourcentage /un taux :

On peut utiliser les méthodes vues 5e/4e ou bien celle de 3e :

Méthode 3e : Utiliser un taux

- **Augmenter un nombre de N % revient à multiplier ce nombre par $\left(1+\frac{N}{100}\right)$.**
- **Diminuer un nombre de N % revient à multiplier ce nombre par $\left(1-\frac{N}{100}\right)$.**

Exemples :

- **REDUCTION** Dans un magasin, un T-shirt est affiché à 19 € au départ. Le jour des soldes il est affiché avec une remise de 20%. **Quel est son prix soldé ?**

Vidéo

Méthode 5^e^ / 4^e^ :

20% × 19 = 3,80 €	On économise 3,80€.
19 – 3,80 = 15,20 €	Le prix soldé est de 15,20 €.

Astuce : On peut penser à faire directement : 80% × 19 = 15,20 €

Méthode 3^e^ : $12{,}90 \times \left(1 - \frac{20}{100}\right) = 10{,}32$ € Le prix soldé est 10,32 €.

- **AUGMENTATION** J'ai mis 1500 € sur un livret à 1,75 % d'intérêts par an.
  Quelle est la somme sur mon livret, un an après ?

Exercice interactif

Méthode 5^e^ / 4^e^ :

$1{,}75\% \times 1500 = 26{,}25$ $1500 + 26{,}25 = 1526{,}25$ €
La somme sur mon livret, un an après, est 1526,25 €.

Astuce : On peut penser à faire directement : $101{,}75\% \times 1500 = 1526{,}25$
J'ai compris que j'aurais 100% de ma somme de départ, plus 1,75% soit en tout 101,75 % de la somme de départ !

Méthode 3^e^ : $1500 \times \left(1 + \frac{1{,}75}{100}\right) = 1526{,}25$
La somme sur mon livret, un an après, est 1526,25 €.

Calculer le pourcentage/taux :

Rappels 5^e^/4^e^ :

Exemples :

- Dans un club de badminton de 40 joueurs, il y a 16 filles.
  Quel est le pourcentage de filles dans le club ?

Exercice interactif

$\frac{16}{40} = 0{,}4 = \frac{40}{100} = 40\ \%$ Il y a 40 % de filles dans ce club !

- Pour une robe à 25€, j'utilise un bon d'achat de 4€.
  Quel est le pourcentage de remise ?

$\frac{4}{25} = \frac{16}{100} = 16\ \%$ Il y a 16 % de remise !

Vidéos

Astuce : Je **trouve l'écriture décimale (par division) ou une fraction égale** et ensuite je **mets en pourcentage** !

Déterminer un taux (3e) :

Méthodes : $\textbf{Taux} = 1 - \frac{\text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}$ **ou** $\textbf{Taux} = \frac{\text{valeur initiale} - \text{valeur finale}}{\text{valeur initiale}}$

Entraînement 1 :
Karim a acheté des actions en bourse de l'entreprise GOLDMATH, fabriquant de règles en or depuis plus de 2000 ans, au prix de 125 euros l'unité. Et au bout de 3 mois, il les revend au prix de 135 euros l'unité.
Quel taux lui a rapporté ces actions ?

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………

Entraînement 2 :
Karim étant un boursier amateur parfois un peu imprudent et pensant que les actions GOLDMATH vont continuer de grimper décide d'en acheter de nouveau au prix de 135 euros l'unité. Mais cette fois les actions chutent fortement à 102,60 euros l'unité en quelques semaines.
De quel taux ont-elles chuté ?

………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………………