

# Chapitre 1

# Algèbre linéaire

Hermann **Grassmann**, mathématicien allemand, publie en 1844 un ouvrage qui contient tous les germes de l'algèbre linéaire : combinaisons linéaires, indépendance linéaire, bases, ainsi que des notions plus complexes qui serviront soixante ans plus tard en géométrie différentielle. Très confus, son ouvrage ne sera pas compris de ses contemporains. Il faudra attendre 1888 pour que le mathématicien italien Giuseppe **Peano** en saisisse toute l'importance et introduise l'axiomatique des espaces vectoriels, proche de celle que nous utilisons de nos jours. Quant à Grassmann, il préféra se tourner vers la linguistique et mit son intelligence au service de la traduction en allemand des textes sacrés védiques.



**Hermann Grassmann**  
1809-1877

## ■■ Objectifs

### ■ Les incontournables

- ▷ Montrer qu'une famille est libre, génératrice dans un espace vectoriel de dimension quelconque.
- ▷ Justifier qu'une application est linéaire.
- ▷ Reconnaître un hyperplan.
- ▷ Approfondir les notions de somme et de somme directe de sous-espaces vectoriels, ainsi que de sous-espaces vectoriels supplémentaires, et donc de projecteur.
- ▷ Déterminer le rang d'une famille de vecteurs ou d'une application linéaire.
- ▷ Utiliser le théorème du rang.

### ■ Et plus si affinités...

- ▷ Établir que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires dans un espace vectoriel de dimension finie ou non.
- ▷ Calculer la trace d'un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

# ■ ■ Résumé de cours

Dans ce chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne l'ensemble  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

## ■ Familles génératrices, familles libres, bases

Soit  $I$  un ensemble quelconque.

### ◆ Combinaisons linéaires

**Définition :** Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ . On appelle **combinaison linéaire** de la famille  $(x_i)_{i \in I}$  toute somme  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i$  dans laquelle  $(\lambda_i)_{i \in I}$  est une famille de scalaires appelés **coefficients**, tous nuls sauf éventuellement un nombre fini.

**Commentaire :** L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille  $(x_i)_{i \in I}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , noté  $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ . On l'appelle le **sous-espace vectoriel engendré par la famille**  $(x_i)_{i \in I}$ .

### ◆ Familles libres, familles génératrices

**Définition :** Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est **libre** si la seule combinaison linéaire nulle de cette famille est la combinaison linéaire dont tous les coefficients sont nuls.

**Commentaires :** La famille  $(x_i)_{i \in I}$  est libre si toute combinaison linéaire  $\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0$  vérifie  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i \in I$ .

▷ La famille  $(x_i)_{i \in I}$  est dite **liée** lorsqu'elle n'est pas libre. Dans ce cas, il existe une partie finie  $J$  de  $I$ , et une famille de scalaires  $(\lambda_j)_{j \in J}$  non tous nuls tels que

$$\sum_{j \in J} \lambda_j x_j = 0.$$

**Proposition 1.1** — Soit  $(x_i)_{i \in I}$  une famille de  $E$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille libre ;
- (ii) pour toute partie finie  $J$  de  $I$ , la famille  $(x_j)_{j \in J}$  est libre.

**Commentaire :** Si  $J$  est une partie de  $I$ , la famille  $(x_j)_{j \in J}$  est une sous-famille de la famille  $(x_i)_{i \in I}$ . La proposition précédente se résume de la manière suivante : une famille est libre si et seulement si toutes ses sous-familles finies sont libres.

**Exemple :** Toute famille de polynômes non nuls de  $\mathbb{K}[X]$  de degrés échelonnés est libre.

**Définition :** La famille  $(x_i)_{i \in I}$  de vecteurs de  $E$  est une famille **génératrice** de  $E$  si tout vecteur de  $E$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs  $x_i$ .

**Commentaire :** Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(x_i)_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $E$  ;
- (ii)  $\text{Vect}(x_i)_{i \in I} = E$  ;

- (iii) pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , il existe une famille de scalaires  $(\lambda_i)_{i \in I}$  tous nuls sauf un nombre fini telle que :

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i.$$

#### ◆ Base

**Définition :** Une famille libre et génératrice de  $E$  est appelée une **base** de  $E$ .

**Proposition 1.2** — Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs de  $E$ . Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $(e_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$ ;
- (ii) tout vecteur de  $E$  s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs  $e_i$ .

**Commentaire :** Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$ . Pour tout vecteur  $x$  de  $E$ , il existe une unique famille de scalaires  $(\lambda_i)_{i \in I}$  tous nuls sauf un nombre fini telle que :

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i.$$

Pour tout  $i$ , le scalaire  $\lambda_i$  s'appelle **la  $i^{\text{ième}}$  coordonnée** ou **composante** de  $x$  dans la base  $(e_i)_{i \in I}$ .

**Exemples :**  $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{K}[X]$  appelée **base canonique** de  $\mathbb{K}[X]$ .

▷ La famille  $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ , où  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  (le 1 se trouvant en  $i^{\text{ième}}$  position) forme une base de  $\mathbb{K}^n$  appelée base canonique de  $\mathbb{K}^n$ .

▷ Toute famille  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de polynômes vérifiant, pour tout  $k$ ,  $\deg(P_k) = k$ , est une base de  $\mathbb{K}[X]$ .

#### ◆ Cas des espaces vectoriels de dimension finie

On étend à des familles indexées par un ensemble quelconque les propriétés rencontrées en PTSI dans le cadre de famille finie.

**Proposition 1.3** — Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

- (i) De toute famille génératrice, on peut extraire une base de  $E$ .
- (ii) Toute famille libre de  $E$  est finie et a au plus  $n$  éléments.
- (iii) Toute base de  $E$  est finie et contient  $n$  éléments.

### ■ Somme, somme directe de sous-espaces vectoriels

**Définition :** Une partie  $F$  de  $E$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i)  $0_E \in F$ ;
- (ii)  $x, y \in F \implies x + y \in F$ ;
- (iii)  $x \in F$  et  $\lambda \in \mathbb{R} \implies \lambda x \in F$ .

**Commentaire :** L'ensemble  $F$ , avec les lois induites par celles de  $E$ , est un espace vectoriel. Ceci justifie la terminologie « sous-espace vectoriel ».

◆ **Somme**

Soit  $m$  un entier non nul et  $(F_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$ .

**Définition :** On appelle **somme** des sous-espaces vectoriels  $(F_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  le sous-espace vectoriel :

$$\sum_{i=1}^m F_i = \left\{ \sum_{i=1}^m f_i \mid (f_i) \in \prod_{i=1}^m F_i \right\}.$$

**Commentaire :** Il s'agit bien d'un sous-espace vectoriel de  $E$  car il est non vide, stable par combinaison linéaire. On le note également  $F_1 + F_2 + \dots + F_m$  et il s'agit du plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant tous les  $F_i$ .

◆ **Somme directe**

Soit  $m$  un entier non nul et  $(F_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  une famille finie de sous-espaces vectoriels de  $E$  ; on note  $F$  la somme des  $F_i$  :

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_m.$$

**Définition :** On dit que la somme  $F$  des  $F_i$  est **directe** si tout vecteur de  $F$  se décompose de manière unique en une somme de vecteurs de  $F_i$ . On note alors :

$$F = \bigoplus_{i=1}^m F_i = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_m.$$

**Proposition 1.4** — Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) la somme  $F$  des  $F_i$  est directe ;
- (ii) les hypothèses  $f_1 \in F_1, f_2 \in F_2, \dots, f_m \in F_m$  et  $f_1 + f_2 + \dots + f_m = 0$  impliquent

$$f_1 = f_2 = \dots = f_m = 0.$$

◆ **Décomposition en somme directe**

**Définition :** On dit que  $E$  est **somme directe** des  $F_i$  si la somme des  $F_i$  est directe et égale à  $E$ , autrement dit si :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \dots \oplus F_m.$$

**Commentaires :** Lorsque  $E$  est somme directe des  $F_i$ , on dit que la famille  $(F_i)_{i \in \llbracket 1, m \rrbracket}$  est une **décomposition en somme directe de  $E$** .

▷ Dans le cas où  $m = 2$ , dire que  $E$  est somme directe de  $F_1$  et  $F_2$  est équivalent à dire que  $F_1$  et  $F_2$  sont supplémentaires dans  $E$ .

Des résultats précédents, on déduit les caractérisations suivantes.

**Proposition 1.5** — Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $E$  est somme directe des  $F_i$  ;
- (ii) tout vecteur de  $E$  se décompose de manière unique en une somme de vecteurs de  $F_i$  ;
- (iii)  $E = F_1 + F_2 + \dots + F_m$  et les hypothèses  $f_1 \in F_1, f_2 \in F_2, \dots, f_m \in F_m, f_1 + f_2 + \dots + f_m = 0$  impliquent  $f_1 = f_2 = \dots = f_m = 0$ .

### ◆ Base adaptée à une décomposition en somme directe

On suppose que  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et que la famille  $(F_i)_{i \in [1, m]}$  est une décomposition en somme directe de  $E$  :

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_m.$$

**Proposition 1.6** — Pour  $i \in [1, m]$ , soit  $\mathcal{B}_i$  une base de  $F_i$ . La réunion des bases  $\mathcal{B}_i$  est une base de  $E$ .

**Définition** : On appelle *base adaptée à la décomposition en somme directe*  $E = \bigoplus_{i=1}^m F_i$  toute base obtenue comme réunion de bases des  $F_i$ .

### ◆ Caractérisation des supplémentaires en dimension finie

On rappelle ci-dessous les différentes caractérisations des sous-espaces vectoriels supplémentaires, lorsque  $E$  est de dimension finie.

**Théorème 1.7** — Soit  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  ;
- (ii)  $E = F + G$  et  $\dim E = \dim F + \dim G$  ;
- (iii)  $F \cap G = \{0_E\}$  et  $\dim E = \dim F + \dim G$ .

## ■ Hyperplan d'un espace vectoriel de dimension finie

On suppose que  $E$  est de dimension  $n \geq 2$ .

**Définition** : On appelle *hyperplan* de  $E$  tout sous-espace vectoriel de  $E$  de dimension  $n - 1$ .

**Proposition 1.8** — Un sous-espace vectoriel de  $E$  est un hyperplan de  $E$  si et seulement s'il admet une droite comme supplémentaire.

### ◆ Équation d'un hyperplan

**Théorème 1.9** — Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i)  $F$  est un hyperplan de  $E$  ;
- (ii) il existe des scalaires  $a_1, \dots, a_n$  non tous nuls tels que pour tout  $x \in E$  :

$$x \in F \quad \Longleftrightarrow \quad a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0 ;$$

égalité dans laquelle  $x_1, \dots, x_n$  sont les coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{B}$ .

**Commentaire** : Les hyperplans de  $\mathbb{K}^2$  sont les droites vectorielles. Un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}^2$  est une droite vectorielle si et seulement s'il admet une équation du type  $ax + by = 0$ , où  $(a, b) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

**Théorème 1.10** — Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et deux familles de scalaires non tous nuls,  $(a_1, \dots, a_n)$  et  $(b_1, \dots, b_n)$ , telles que pour tout  $x \in E$  de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathcal{B}$  :

$$a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad b_1x_1 + \dots + b_nx_n = 0.$$

Il existe alors un scalaire  $\lambda$  tel que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad b_i = \lambda a_i.$$

**Commentaire :** Fixons  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et soit  $F$  un hyperplan de  $E$ . D'après le théorème 1.9, il existe une famille non nulle de scalaires  $(a_1, \dots, a_n)$  telle que pour tout  $x \in E$  de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathcal{B}$  :

$$x \in F \quad \Longleftrightarrow \quad a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0.$$

D'après le théorème 1.10, ces scalaires sont définis à une constante multiplicative près. On dit que  $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0$  est une *équation de l'hyperplan  $F$  dans la base  $\mathcal{B}$* .

## ■ Application linéaire, matrice (rappel de TS11)

On désigne par  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

**Définition :** Une application  $u : E \rightarrow F$  est dite *linéaire* si elle vérifie :

$$\forall (x, y) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y)$$

**Notation :** On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  vers  $F$ .

**Commentaires :**  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Lorsque  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, on a :  $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim(E) \times \dim(F)$ .

▷ Une application linéaire de  $E$  dans  $E$  est appelée *endomorphisme* de  $E$ .

▷ Une application linéaire de  $E$  dans  $F$  bijective est appelée *isomorphisme*.

▷ On dit que deux espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de  $E$  vers  $F$ .

▷ Deux espaces vectoriels de dimension finie sont isomorphes si et seulement s'ils ont la même dimension. En particulier tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  est isomorphe à  $\mathbb{K}^n$ .

### ◆ Définition d'une application linéaire par image d'une base

**Théorème 1.11** — Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs appartenant à un espace vectoriel  $F$ .

(i) Il existe une unique application linéaire  $u$  de  $E$  vers  $F$  telle que :

$$\forall i \in I, \quad u(e_i) = f_i.$$

(ii) Pour que  $u$  soit injective, il faut et il suffit que la famille  $(f_i)_{i \in I}$  soit libre.

(iii) Pour que  $u$  soit surjective, il faut et il suffit que la famille  $(f_i)_{i \in I}$  engendre  $F$ .

(iv) Pour que  $u$  soit bijective, il faut et il suffit que la famille  $(f_i)_{i \in I}$  soit une base de  $F$ .

**Commentaire :** Une application linéaire  $u$  de  $E$  vers  $F$  est entièrement déterminée par son action sur une base de  $E$ .

▷ Supposons que  $E$  et  $F$  aient pour dimensions respectives  $n$  et  $p$ .

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (f_1, \dots, f_p)$  une base de  $F$ . Une application linéaire  $u$  de  $E$  vers  $F$  est entièrement déterminée par la donnée des vecteurs  $u(e_j)$ , qui, eux-mêmes, sont déterminés par leurs coordonnées dans la base  $\mathcal{C}$ .

**Définition :** On appelle **matrice de  $u$  par rapport aux bases  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$**  et on note  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u)$ , la matrice de  $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$  dont la  $j^{\text{ième}}$  colonne est formée des coordonnées du vecteur  $u(e_j)$  dans la base  $\mathcal{C}$ .

**Commentaire :** Si on note  $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(u) = (a_{ij})$ , on a pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$  :  $u(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} f_i$ .

**Notation :** Lorsque  $E = F$  et  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ , on note  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  cette même matrice.

#### ◆ Noyau, image d'une application linéaire

**Définition :** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle **noyau** de  $u$  l'ensemble noté  $\ker(u)$ , défini par

$$\ker(u) = u^{-1}(\{0_F\}) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}$$

**Proposition 1.12** — Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

- (i) Le noyau de  $u$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
- (ii) L'application  $u$  est injective si et seulement si son noyau est réduit à  $\{0_E\}$ .

**Définition :** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . On appelle **image** de  $u$  l'ensemble noté  $\text{Im}(u)$  défini par :

$$\text{Im}(u) = u(E) = \{u(x) \mid x \in E\} = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = u(x)\}$$

**Proposition 1.13** — Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . L'image de  $u$  est sous-espace vectoriel de  $F$ .

#### ◆ Notion de rang

**Définition :** Le **rang d'une application linéaire  $u$  de  $E$  vers  $F$**  est la dimension de son image. Il est noté  $\text{rg}(u)$ .

**Commentaire :** Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension  $n$  et  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , le rang de  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est le rang de la famille de vecteurs  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ .

**Définition :** Le **rang d'une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$**  est le rang de ses  $p$  vecteurs colonnes dans  $\mathbb{K}^n$ . Il est noté  $\text{rg}(A)$ .

**Commentaires :** Le rang de  $A$  est un entier vérifiant  $\text{rg}(A) \leq \min(n, p)$ . Il s'agit du nombre maximal de colonnes de  $A$  linéairement indépendantes dans  $\mathbb{K}^n$ .

▷ Le rang d'une matrice est le rang de toute application linéaire qu'elle représente.

▷ Le rang d'une matrice de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est également le rang de ses  $n$  vecteurs lignes dans  $\mathbb{K}^p$ . Autrement dit, une matrice et sa transposée ont même rang.