CHAPTER 6.
Ruang Hasil Kali Dalam

- Hasil Kali Dalam
- Sudut dan Ortogonal dalam Ruang Hasil Kali Dalam
- Orthonormal Bases; Gram-Schmidt Process; QR-Decomposition
- ~~Best Approximation; Least Squares~~
- Orthogonal Matrices; Change of Basis

6.1. HASIL KALI DALAM

Ingatlah **Definisi Hasil Kali dalam Euclidean** →Perkalian titik Euclidean 2 buah vektor dalam R^n yang dinotasikan **u.v**

- Jika **u**=(u_1,u_2,...,u_n), **v**=(v_1,v_2,..., v_n) adalah vektor-vektor dalam R^n , maka **Euclidean Inner Product** **u** **v** dinyatakan oleh

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{u}_\mathbf{n} \mathbf{v}_\mathbf{n}$$

Pada bab ini **u.v** dinotasikan juga dalam **<u,v>**

Definisi Inner Product

Suatu **hasil kali dalam** pada suatu ruang vektor real **V** adalah suatu fungsi yang menghubungkan suatu bilangan real $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ dengan setiap pasangan vektor **u** dan **v** dalam **V** sehingga aksioma2 berikut dipenuhi untuk semua vektor **u**, **v** dan **w** dalam **V** dan semua skalar ***k***.

- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
- $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
- $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = k \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 0$ and $\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0$ if and only if $\mathbf{u} = \mathbf{0}$

Semua ruang vektor real **V** dengan suatu hasil kali dalam disebut **suatu ruang hasil kali dalam**.

Definisi Inner Product

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah vektor – vektor dalam R^n, maka ;

$$\langle u,v \rangle = u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n$$

Mendefinisikan $\langle \mathbf{u},\mathbf{v} \rangle$ sebagai hasil kali dalam Euclidean pada R^n.

- Jika terdapat $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sebagai bilangan real positif dan $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ adalah vektor2 dalam R^n,

  $$\rightarrow \langle u,v \rangle = u \,.\, v = w_1u_1v_1 + w_2u_2v_2 + \ldots + w_nu_nv_n$$

  mendefinisikan **suatu hasil kali dalam Euclidean terboboti dengan bobot $w_1, w_2, \ldots, w_n$.**
- $w_1, w_2, \ldots, w_n \rightarrow$ weights/bobot

Example

Jika $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ dan $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ adalah vektor-vektor dalam R^2. Tunjukkan bahwa hasil kali dalam Euclidean terboboti

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ memenuhi ke-4 aksioma hasil kali dalam.

Jawab:

1. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$.
2. $\mathbf{w} = (w_1, w_2)$

   $\rightarrow \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (3u_1v_1)\, w_1 + (2u_2v_2)w_2$

   $\rightarrow \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = (3u_1w_1 + 2u_2w_2) + (3v_1w_1 + 2v_2w_2) = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$

3. $\langle k\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3(ku_1)v_1 + 2(ku_2)v_2 = k(3u_1v_1 + 2u_2v_2) = k \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4. $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 3v_1v_1 + 2v_2v_2 = 3v_1^2 + 2v_2^2$.

   $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 3v_1^2 + 2v_2^2 \geq 0$.

   $\rightarrow \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 3v_1^2 + 2v_2^2 = 0$ if and only if $v_1 = v_2 = 0$.

   That is , if and only if $\mathbf{v} = (v_1, v_2) = 0$.

Definisi : Panjang dan Jarak dalam Ruang Hasil Kali Dalam

Dalam ruang berdimensi n Euclidean dengan 2 titik sebarang $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ dan $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ maka:

- Jika V adalah suatu ruang hasil kali dalam, maka norma (panjang) suatu vektor u dalam V dinyatakan dengan:

$$\|\mathbf{u}\| = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u})^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}$$

- Jarak antara dua titik (vektor) u dan v dinyatakan d(**u**,**v**)

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = [(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})]^{1/2}$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v} \rangle^{1/2} = [(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v})]^{1/2}$$
$$= \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \cdots + (u_n - v_n)^2}$$

Contoh

- Misal **u** = (1,0) ; **v** = (0,1) dalam R² dengan hasil kali dalam Euclidean ;

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \|(1,-1)\| = \sqrt{1^2 - (-1)^2} = \sqrt{2}$$

- Untuk Hasil Kali Dalam Euclidean terboboti:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2$$

Didapat →

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = [3(1)(1) + 2(0)(0)]^{1/2} = \sqrt{3}$$

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| = \left\{(1, -1), (1, -1)\right\}^{1/2}$$

$$= [3(1)(1) + 2(-1)(-1)]^{1/2} = \sqrt{5}$$

Lingkaran dan Bola Satuan Ruang Hasil Kali Dalam

Jika V adalah suatu ruang hasil kali dalam, maka himpunan titik-titik dalam V yang memenuhi

$\|u\| = 1$ → bola satuan / lingkaran satuan dalam V.

Dalam R^2 an R^3 ini adalah titik-titik yang terletak 1 satuan dari titik asal.

Contoh : Lingkaran dalam R^2

- Sketsa lingkaran satuan dalam suatu xy-coordinate system dalam R^2 dengan menggunakan Euclidean inner product

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

- Jawab

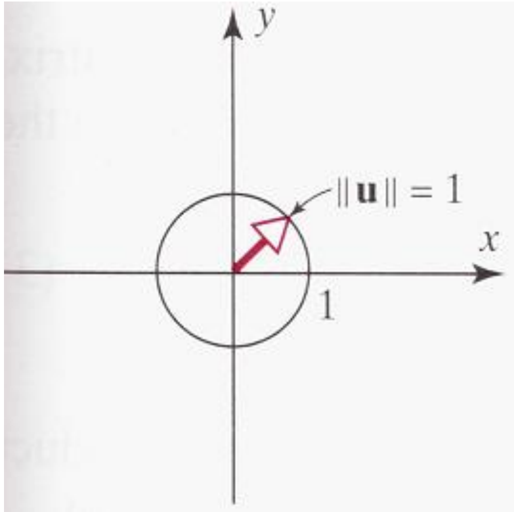
Jika $\mathbf{u} = (x,y)$, maka $\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Shg pers. Lingkaran satuan :

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

Dengan mengkuadratkan kedua ruas:

$$x^2 + y^2 = 1$$



Hasil Kali Dalam by Matriks

- Jika $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ and $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$ adalah vektor-vektor dalam R^n

  (dinyatakan dalam matriks $n \times 1$), dan anggap matriks standard *A* $n \times n$ invertible, maka :

  Jika u .v adalah hasil kali dalam Eucl. pada R^n ;

$$\boxed{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}}$$

→ mendefinisikan hasil kali dalam pada R^n yang dibangkitkan oleh *A*

Hasil Kali Dalam by Matriks

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$$

- Hasil kali dalam Eucl. $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ bisa ditulis sebagai hasil kali matrik $\mathbf{v}^T\mathbf{u}$ sehingga $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = A\mathbf{u} \cdot A\mathbf{v}$ dapat ditulis dalam bentuk alternatif

  $u.v = \mathbf{v}^T\mathbf{u} \rightarrow \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = (A\mathbf{v})^T A\mathbf{u},$

  secara ekivalen, $\quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^T A^T A\mathbf{u}$

- Hasil kali dalam pada R^n yang dibangkitkan oleh matriks identitas nxn adalah hasil kali dalam Euclidean, dan dengan mensubsitusikan $A = I$ didapat:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = I\mathbf{u} \cdot I\mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

Example :Inner Product Generated by the Identity Matrix

- Untuk hasil kali dalam Euclidean terboboti

  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = w_1 u_1 v_1 + w_2 u_2 v_2 + \ldots + w_n u_n v_n$

  → adalah hasil kali dalam R^n yang dibangkitkan oleh:

$$A = \text{diagonal}\,(\sqrt{w_1}, \sqrt{w_2}, \cdots, \sqrt{w_n})$$

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix}$$

Inner Product Generated by the Identity Matrix

Contoh :

Hasil kali dalam Euclidean terboboti $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$ merupakan hasil kali dalam R^2 yang dibangkitkan oleh:

, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}^T A^T A \mathbf{u}$

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{w_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{w_2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{w_n} \end{bmatrix} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$\langle u, v \rangle = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

Example : An Inner Product on M_{22}

Jika $U = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ u_3 & u_4 \end{bmatrix}$ and $V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{bmatrix}$

Adalah matriks 2 x2, maka definisi hasil kali dalam M_{22}

$$\langle U, V \rangle = \mathrm{tr}(U^T V) = \mathrm{tr}(V^T U) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 + u_4 v_4$$

- Norma matriks U : $\|U\| = \langle U, U \rangle^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2}$
- Bola satuan dalam ruang terdiri dari semua matriks U, 2x2, yang semua anggotanya memenuhi persamaan $\|u\| = 1$
- Dan dengan mengkuadratkannya didapat:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 1$$

Example : An Inner Product on M_{22}

- Misal : $U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ and $V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

maka $\langle U, V \rangle = 1(-1) + 2((0) + 3(3) + 4(2) = 16$

Example : An Inner Product on P_2

- Jika $\mathbf{p} = a_0 + a_1x + a_2x^2$ dan $\mathbf{q} = b_0 + b_1x + b_2x^2$ adalah sembarang dua vektor dalam P_2,
  → hasil kali dalam pada P_2:
  $$\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2$$
- Norma polinom **p** relatif terhadap hasil kali dalam adalah;
  $$\|\mathbf{p}\| = <\mathbf{p},\ \mathbf{p}>^{1/2} = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}$$
- Bola satuan dalam ruang ini terdiri dari semua polinom **p** dalam P_2 yang koefisien-koefisiennya memenuhi || **p** || = 1, dan dengan mengkuadratkan didapat:
  $$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1$$

Theorema 6.1.1

Beberapa Sifat Hasil Kali Dalam:

Jika **u**, **v**, dan **w** adalah vektor-vektor dalam suatu ruang hasil kali dalam real, dan k adalah sebarang skalar, maka:

- $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
- $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = k \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
- $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

Sifat Hasil Kali Dalam

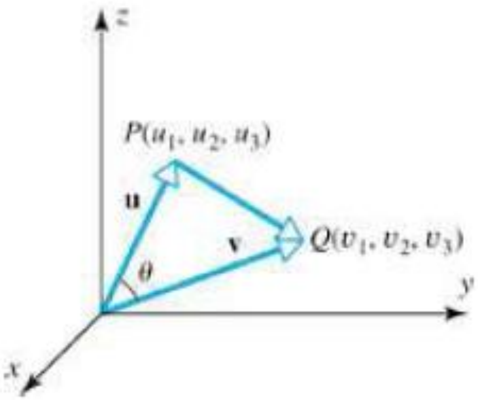
Contoh:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{u} - 2\mathbf{v}, 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v} \rangle &= \langle \mathbf{u}, 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v} \rangle - \langle 2\mathbf{v}, 3\mathbf{u} + 4\mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, 3\mathbf{u} \rangle + \langle \mathbf{u}, 4\mathbf{v} \rangle - \langle 2\mathbf{v}, 3\mathbf{u} \rangle - \langle 2\mathbf{v}, 4\mathbf{v} \rangle \\
&= 3\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - 6\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle - 8\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\
&= 3\|\mathbf{u}\|^2 + 4\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - 6\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - 8\|\mathbf{v}\|^2 \\
&= 3\|\mathbf{u}\|^2 - 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - 8\|\mathbf{v}\|^2
\end{aligned}$$

- $\langle \mathbf{0}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{0} \rangle = 0$
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$
- $\langle \mathbf{u}, k\mathbf{v} \rangle = k\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
- $\langle \mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
- $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} - \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle - \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$

6.2
Sudut dan Ortogonal dalam Ruang Hasil Kali Dalam

Just Remind : DOT PRODUCT



Formula $\quad \bar{u}.\bar{v} = \|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|\cos\theta \quad$ can be written as

$$\cos\theta = \frac{\bar{u}.\bar{v}}{\|\bar{u}\|\,\|\bar{v}\|}$$

Formula of dot product can be used to obtain information about the angle (θ) between two vectors

θ is acute	if and only if	**u.v > 0**
θ is obtuse	if and only if	**u.v < 0**
$\theta = \pi/2$	if and only if	**u.v = 0**

Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz; Sifat Panjang; Jarak Dalam Ruang Hasil Kali Dalam

- **Teori Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz**

  Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam real, maka

  $$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \, \|\mathbf{v}\|$$

- **Teori Sifat Panjang Dalam Ruang Hasil Kali Dalam**

  Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam **V** dan **k** adalah sebarang skalar, maka:

  - $|| \mathbf{u} || \geq 0$
  - $|| \mathbf{u} || = 0$ if and only if $\mathbf{u} = \mathbf{0}$
  - $|| k\mathbf{u} || = | k | \, || \mathbf{u} ||$
  - $|| \mathbf{u} + \mathbf{v} || \leq || \mathbf{u} || + || \mathbf{v} ||$ (ketidaksamaan segitiga)

Properties of Distance

- **Teori Jarak Dalam Ruang Hasil Kali Dalam**

  Jika **u**, **v** dan **w** adalah vektor-vektor dalam ruang hasil kali dalam **V** dan **k** adalah sebarang skalar, maka:

  - $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 0$
  - $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$ if and only if $\mathbf{u} = \mathbf{v}$
  - $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = d(\mathbf{v}, \mathbf{u})$
  - $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \leq d(\mathbf{u}, \mathbf{w}) + d(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ (Ketidaksamaan segitiga)

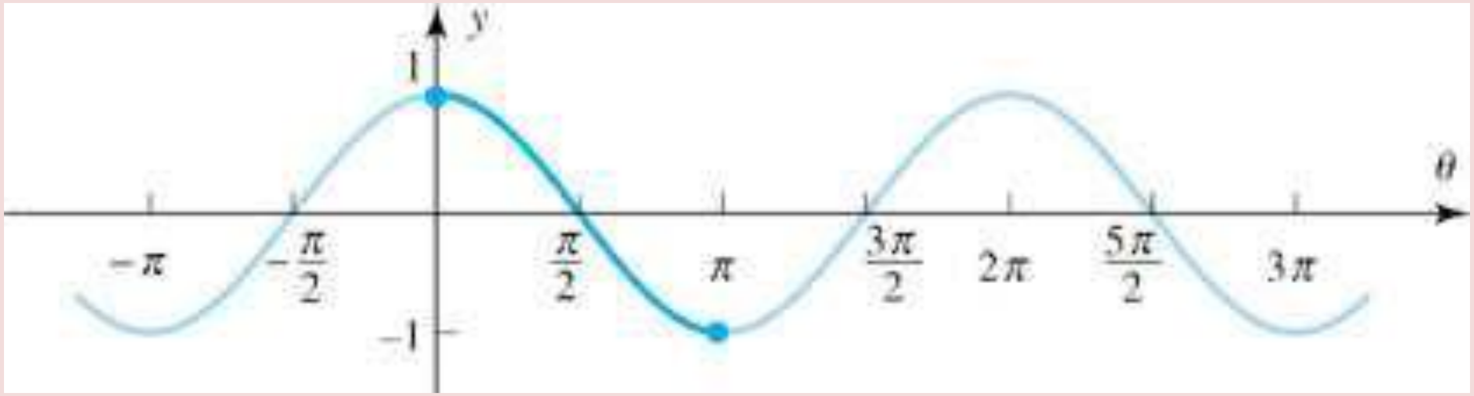
Sudut Antar Vektor

- Ketidaksamaan Cauchy-Schwarz dapat digunakan untuk mendefinisikan sudut dalam ruang hasil kali dalam berdasarkan hubungan $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$

- θ adalah sudut antara u dan v dimana

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \quad \text{and} \quad 0 \le \theta \le \pi$$

$$-1 \le \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} \le 1$$



Contoh:

Anggap R^4 memiliki Euclidean inner product. Tentukan cosinus sudut θ antara u dan v dimana **u** = (4, 3, 1, -2) ; **v** = (-2, 1, 2, 3).

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{30}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{18}, \quad \text{and} \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = -9$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|} = -\frac{9}{\sqrt{30}\sqrt{18}} = -\frac{3}{2\sqrt{15}}$$

Orthogonality

Dua vektor **u** dan v dalam suatu hasil kali dalam disebut **ortogonal** jika $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Contoh:

Jika M_{22} memiliki hasil kali $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ and $V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

maka u dan v orthogonal karena

$$\langle U, V \rangle = 1(0) + 0(2) + 1(0) + 1(0) = 0.$$

Example : Orthogonal Vectors in P_2

- Anggap P_2 mempunyai hasil kali dalam $< \mathbf{p}, \mathbf{q} >= \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$ dimana **p** = x and **q** = x^2.

- Maka $\|\mathbf{p}\| =< \mathbf{p}, \mathbf{p} >^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} xxdx \right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^2 dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$$\|\mathbf{q}\| =< \mathbf{q}, \mathbf{q} >^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^2 x^2 dx \right]^{1/2} = \left[\int_{-1}^{1} x^4 dx \right]^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$< \mathbf{p}, \mathbf{q} >= \int_{-1}^{1} xx^2 dx = \int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$

karena $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = 0$, vektor-vektor **p** = x dan **q** = x^2 ortogonal relatif terhadap hasil kali dalam.

Teorema Phytagoras

Jika **u** dan **v** adalah vektor-vektor orthogonal dalam suatu ruang hasil kali dalam, maka

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Example

- Jika **p** = x dan **q** = x ^{2} orthogonal relatif terhadap hasil kali dalam P_2.

$$<\mathbf{p}, \mathbf{q}> = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx \quad \longrightarrow \quad \|\mathbf{p}+\mathbf{q}\|^2 = \|\mathbf{p}\|^2 + \|\mathbf{q}\|^2$$

- Dari contoh sebelumnya didapat: $\|\mathbf{p}+\mathbf{q}\|^2 = (\sqrt{\frac{2}{3}})^2 + (\sqrt{\frac{2}{5}})^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$

- Yang dapat dicek dengan integral secara langsung:

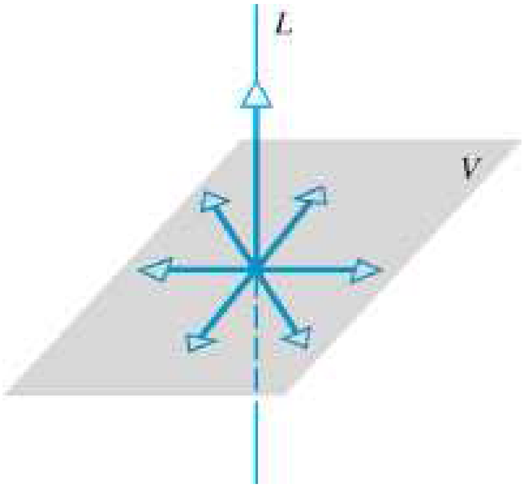
$$\|\mathbf{p}+\mathbf{q}\|^2 = <\mathbf{p}+\mathbf{q}, \mathbf{p}+\mathbf{q}> = \int_{-1}^{1} (x+x^2)(x+x^2)dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2 dx + 2\int_{-1}^{1} x^3 dx + \int_{-1}^{1} x^4 dx = \frac{2}{3} + 0 + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}$$

Orthogonality

Semua himpunan vektor-vektor di dalam ruang perkalian dalam disebut **himpunan ortogonal jika semua pasangan vektor-vektor yang beda didalam himpunan tersebut ortogonal**.

Komplemen Orthogonal



Jika **V** adalah suatu bidang yang melalui titik asal R^3 dengan hasil kali dalam Euclidean, maka himpunan semua vektor yang ortogonal terhadap setiap vektor dalam **V** membentuk garis L yang melalui titik asal yang tegak lurus dengan bidang **V**. Garis dan bidang disebut **komplemen ortogonal** satu sama lain.

Anggap W adalah suatu subruang dari suatu hasil kali dalam V.

- Jika **u** ortogonal terhadap setiap vektor dalam **W**→ vektor **u** dalam **V orthogonal terhadap W**; dan
- Himpunan semua vektor dalam **V** yang ortogonal terhadap **W** disebut **komplemen ortogonal dari W**.

Sifat Komplemen Orthogonal

Jika **W** adalah subruang dari suatu ruang hasil kali dalam berdimensi terhingga **V**, maka:

- **W**$^{\perp}$ (W perp : komponen orthogonal dari suatu sub ruang W) adalah sub ruang dari **V**.
- Satu-satunya vektor dimana **W** dan **W**$^{\perp}$ adalah **0**;
- Komplemen ortogonal dari **W**$^{\perp}$ adalah **W** yaitu $(\mathbf{W}^{\perp})^{\perp} = \mathbf{W}$.

Karena **W**$^{\perp}$ adalah **W adalah komplemen orthogonal satu sama lain maka W**$^{\perp}$ adalah **W adalah komplemen-komplemen orthogonal**

Kaitan Geometris, Ruang Baris, Ruang Kolom, Ruang Kosong

Jika A adalah $m \times n$ matrix, maka :

- **Ruang Kosong A** & **Ruang baris A** adalah **komplemen-komplemen ortogonal dalam R^n** berkenaan dengan Euclidean inner product.
- **Ruang Kosong A^T** & **Ruang Kolom A** adalah **komplemen-komplemen ortogonal dalam R^m** berkenaan dengan Euclidean inner product.

Equivalent Statements

If A is an $m \times n$ matrix, and if $T_A: R^n \to R^n$ is multiplication by A, then the following are equivalent:

- A isinvertible.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ has only the trivial solution.
- The reduced row-echelon form of A is I_n.
- A is expressible as a product of elementary matrices.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ is consistent for every $n \times 1$ matrix $\mathbf{b}$.
- $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ has exactly one solution for every $n \times 1$ matrix $\mathbf{b}$.
- $\det(A) \neq 0$.
- The range of T_A is R^n.
- T_A is one-to-one.
- The column vectors of A are linearly independent.
- The row vectors of A are linearly independent.
- The column vectors of A span R^n.
- The row vectors of A span R^n.
- The column vectors of A form a basis for R^n.
- The row vectors of A form a basis for R^n.
- A has rank n.
- A has nullity 0.
- The orthogonal complement of the nullspace of A is R^n.
- The orthogonal complement of the row of A is $\{\mathbf{0}\}$.