2014

Física

Programa de Apoyo y Contención
Universidad Nacional de La Plata

[Cinemática Traslacional]

La descripción del movimiento

Cinemática Parte I

La descripción del Movimiento: el espacio, el tiempo, la posición y el desplazamiento

Diego Petrucci y Juan Cruz Moreno

Índice

1. El Modelo de Partícula 2
2. El espacio y el tiempo 3
3. Posición. 4
4. Desplazamiento 9
5. Trayectoria 10

1. El Modelo de Partícula

Este apunte determina las bases para el estudio de los movimientos de traslación. De todas las formas posibles de describir movimientos, en Física se prefieren aquellas que resultan por un lado precisas, y por el otro prácticas, es decir que resulten lo menos engorrosas posible. Esta descripción del movimiento es necesaria para entender luego las leyes del movimiento (en Dinámica). Recordando lo visto en Herramientas Metodológicas, cuando hemos identificado el problema a estudiar, delimitamos el objeto de estudio lo cual implica en este caso definir de qué cuerpo u objeto estudiaremos su traslación.

Una vez delimitado el objeto de estudio, procederemos a modelizarlo de acuerdo el Marco Teórico. En el caso de la Cinemática, el modelo es el llamado **modelo de partícula**. Como hemos planteado, al modelizar consideramos ciertos aspectos del sistema y descartamos otros, en función de nuestros intereses. Cuando nos interesa describir el movimiento de un objeto (que es lo que veremos en Cinemática Traslacional) y entender por qué se mueve así (Dinámica Traslacional), lo más simple es identificar la posición del objeto con la posición de un punto en el espacio. Es decir que identificamos un punto del espacio que va a representar la posición del objeto de estudio. En Dinámica también nos interesará su masa. Entonces descartaremos aspectos tales como su forma, volumen, orientación, velocidad de rotación, aspecto, color, textura, etc. Este modelo justamente se emplea cuando nos interesa estudiar el desplazamiento en el espacio y/o la velocidad de traslación de un sistema. En algunos textos es llamado "punto material".

Se suele asociar partícula con un objeto muy pequeño, por ejemplo una partícula de polvo. Sin embargo, un modelo es una representación abstracta, sin existencia real. Podemos modelizar a la Tierra como una partícula si nos interesa describir su trayectoria alrededor del Sol, y es muy probable que elijamos al centro de la Tierra como el punto del espacio que la representa. Aunque si queremos podemos escoger que el punto que represente a la Tierra como partícula se encuentre ubicado donde está el Obelisco. El punto que represente al objeto no necesariamente tiene que se parte de él, por ejemplo para modelizar un anillo como partícula es muy probable que escojamos su centro geométrico, que justamente no es parte del anillo!

Un auto o un bloque de madera pueden ser modelizados como partículas. Imaginemos a un puma lanzado a la carrera, si bien cada parte de su cuerpo tendrá diferente velocidad, al considerarlo como partícula, nos referiremos a la velocidad de un punto, que preferentemente sería su centro de gravedad.

2. El espacio y el tiempo

Para completar la descripción de la traslación de un objeto no alcanza sólo con el modelizarlo como partícula. Necesitaremos las nociones físicas de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración más otros conceptos necesarios, como el de marco de referencia. La mayoría de nosotros tenemos nuestras ideas sobre lo que significan estas palabras, que pueden diferir de unos a otros y ser difusas. Los significados los hemos ido construyendo a medida que los necesitábamos, a lo largo de nuestras vidas, sin la preocupación de definirlas con precisión, como es necesario hacerlo en Física.

Comencemos desde los fundamentos mismos. La cinemática se ocupa de describir las posiciones de los cuerpos en el espacio a medida que transcurre el tiempo. Sobre estas ideas dijo Newton (1687) (citamos la reedición de 1997):

> *"Tiempo, espacio, lugar y movimiento son palabras conocidísimas para todos. Es de observar, con todo, que el vulgo sólo concibe esas cantidades partiendo de la relación que guardan con las cosas sensibles. Y de ello surgen ciertos prejuicios, para cuya remoción será conveniente distinguir allí entre lo absoluto y lo relativo, lo verdadero y lo aparente, lo matemático y lo vulgar.*
>
> *I. El tiempo absoluto, verdadero y matemático, en sí y por su propia naturaleza sin relación a nada externo fluye uniformemente, y se dice con otro nombre de duración."* (Newton, 1997, pp. 32).
>
> *"II. El espacio absoluto, tomado en su naturaleza, sin relación a nada externo, permanece siempre similar e inmóvil..."* (Newton, 1997, p. 33)

Se manifiestan aquí las ideas de tiempo y espacio que prevalecieron durante más de doscientos años en ámbitos científicos y que hoy en día utilizamos en nuestra vida cotidiana. Podemos decir que actualmente se han transformado en conceptos "vulgares".

El **tiempo** al que se refiere la teoría de Newton es un tiempo absoluto, en el sentido de que es el mismo para todos los observadores, sin importar dónde esté ni a qué velocidad se desplace. Es decir que si un observador registra un evento y observa que transcurrieron diez minutos en su reloj, cualquier otro observador que considere los mismos instantes iniciales y finales también verá que han pasado 10 minutos en su reloj. Esto nos parece muy obvio porque se cumple siempre en nuestro mundo cotidiano. Sin embargo no es así en muchas situaciones del mundo físico: son las que contempla la Teoría de la Relatividad. Pero ese análisis escapa a los alcances de este apunte y del curso, así que en definitiva el tiempo que usaremos en este curso es el que medimos con nuestros relojes.

Las unidades que los hombres siempre han usado para medir el tiempo tuvieron su origen en el cielo. El ciclo de las estaciones, dadas por la traslación de la Tierra alrededor del Sol ha sido usado para definir al año. Las fases de la luna dieron origen al mes. Y el tiempo que tarda el Sol, visto desde la Tierra, en volver al mismo lugar en el cielo, definen un día. Visto desde el Sol, es el tiempo que tarda la Tierra en dar una vuelta completa sobre su eje. Los meses fueron divididos en semanas y los días en horas, minutos y segundos.

Newton también propone la idea de un **espacio** absoluto. Este espacio es homogéneo es decir que tiene las mismas propiedades en todos sus lugares. También es eterno, es inmutable ante todo. No le afecta el paso del tiempo ni la presencia de materia, es un espacio eterno. Es un espacio infinito y continuo. La geometría euclidiana sentó las bases del espacio que postula la teoría de Newton: un espacio euclidiano.

3. Posición.

Luego Newton introduce la primera noción necesaria para describir el movimiento de los cuerpos en el espacio:

> *"III. El lugar es la parte del espacio que un cuerpo ocupa, siendo relativo o absoluto en razón del espacio. Las posiciones no tienen propiamente cantidad, y no son tanto los lugares mismos como las propiedades de los lugares."* (Newton, 1997, p. 33).

Newton no usa las nociones de lugar y de posición. Definiremos a la **Posición** como la magnitud que se utiliza para identificar el lugar de los cuerpos en el espacio. Veamos un ejemplo. Supongamos que queremos identificar la posición de un nadador en su andarivel (Ilustración 1). Ahora comenzamos a utilizar las herramientas metodológicas:

1. El nadador es nuestro objeto de estudio.
2. Lo modelizamos como una **partícula**. Al modelizarlo como partícula elegimos un punto del nadador que lo va a representar. La posición de ese punto es la posición que representaremos. En este caso elegimos el centro del cuerpo.
3. También idealizamos el movimiento, para simplificarlo, considerando que se mueve en línea recta.
4. Ubicamos un eje coordenado (de los que se usan en matemática) en la dirección del movimiento eligiendo poner el cero dónde más nos guste.
5. Graduamos el eje con las unidades que utilizaremos, metros, por ejemplo.
6. Ya estamos en condiciones de determinar una primera aproximación a la posición del nadador (partícula): nos basta con leer en el eje dónde está el nadador. En el ejemplo se encuentra en la posición 4 m.

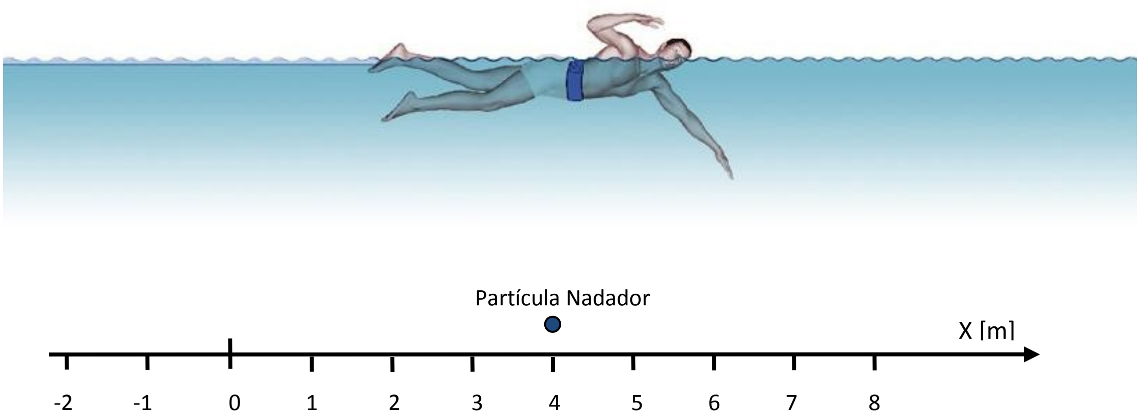


Ilustración 1: *Representación del movimiento de un nadador en un esquema (arriba). Modelización del objeto de Estudio como partícula y su ubicación en un eje coordenado (abajo).*

En ocasiones deberemos determinar posiciones en dos dimensiones, por ejemplo:

- *B - 4* en la Batalla Naval, juego clásico que se ha jugado y se juega ¡en las clases de física!
- *38 ° latitud Norte, 15 ° longitud Oeste* es la posición de un punto sobre nuestro planeta.

Vemos que en general para determinar una posición se dan dos coordenadas. A veces debemos incluir la tercera dimensión:

- *Calle 115 esquina calle 46, 1 ° piso.* Esto es un departamento de una esquina de la ciudad de La Plata, cuyas calles están numeradas

Hay muchos sistemas diferentes para ubicar posiciones. El número de datos parece coincidir con el número de dimensiones, aunque podríamos inventarnos un sistema complicado donde el número de datos sea mucho mayor. U otro donde sea menor: supongamos que numeramos uno por uno los departamentos de un edificio. Con sólo un número determinamos cuál es el nuestro, pero los visitantes deberán recorrer todo el edificio hasta dar con nuestra casa. La forma adoptada es la de ubicar el departamento con dos datos: el piso y el número o letra del departamento. En Física hay acuerdo en que los vectores son un muy buen sistema para determinar posiciones en el espacio. El sistema no cambia demasiado para una, dos o tres dimensiones, nos permite trabajar con ecuaciones y hacer cuentas, lo cual resulta muy útil.

Un vector es un elemento matemático que representaremos: (a, b) en dos dimensiones y (a, b, c) en tres. También podemos indicarlo mediante el módulo, la dirección y el sentido. La primera representación es analítica y la segunda gráfica[1]. Recordá que podés consultar el Apunte sobre Vectores que se encuentra en el Módulo 2.

Newton nos dice algo más sobre la determinación de la posición:

> *"Pero como las partes del espacio no pueden verse o distinguirse unas de otras mediante nuestros sentidos, les aplicamos medidas sensibles. Pues por las posiciones y distancias de las cosas respecto de cualquier cuerpo que se considere inmovido definimos todos los lugares; y luego calculamos todos los movimientos, usando como referencia esos lugares y*

[1] Los conocimientos necesarios sobre vectores para comprender este apunte se encuentran en el apunte sobre Vectores.

considerando a los cuerpos transferidos de unos a otros. Por lo cual usamos lugares y movimientos relativos en vez de absolutos, sin inconveniente alguno en los asuntos comunes…" (Newton, 1997, p. 35).

Se nos hace un complicado el lenguaje que plantea Newton. La interpretación sería: Newton dice que *por las posiciones y distancias de las cosas respecto de cualquier cuerpo que se considere inmovido definimos todos los lugares…* con lo que nos quiere indicar que para definir una posición debemos referenciarla a un objeto que consideremos inmóvil.

Puede considerarse como cuerpo inmovido a la Tierra, aunque si viajamos en barco podremos usar el barco. Lo que siempre debemos hacer es explicitar "desde dónde" vamos a observar. Esto significa determinar un **marco de referencia** que es el lugar desde el cual vamos a observar. Es un lugar considerado fijo, desde el cual se refieren las posiciones. Algunos autores se refieren a él como *sistema de referencia*.

Marco de Referencia: es un punto físico del espacio considerado fijo desde el cual se refieren las posiciones. En la práctica se suelen utilizar cuerpos físicos como marcos de referencia (el suelo, la mesa, un auto). El observador, es decir quien describe la situación, se encuentra en reposo respecto el marco de referencia. Para la mayoría de las situaciones que suceden en el entorno de la superficie terrestre podemos elegir al planeta Tierra como marco de referencia (Recuadro 1).

Marco de Referencia:

- Es un punto físico del espacio considerado fijo, desde el cual se miden las posiciones.
- En la práctica lo asociamos frecuentemente a un cuerpo: la Tierra, un vagón, el Sol, etc.
- Es un lugar en reposo respecto al observador.

Recuadro 1: Marco de Referencia.

Ya sabemos entonces que para definir la posición debemos identificar respecto a qué la vamos determinar, ese es el sentido del Marco de Referencia. Pero necesitamos cuantificar la posición: por lo tanto el paso siguiente para poder trabajar con vectores, es ubicar un **Sistema de coordenadas** en nuestro marco de referencia. El Sistema de Coordenadas es un elemento matemático, compuesto por ejes ordenados ortogonales y una escala de longitudes. El sistema de Coordenadas es el instrumento necesario para **medir** la posición. Cuando queremos determinar la posición de un objeto modelizado como partícula debemos elegir a dónde colocar el origen del sistema de coordenadas y también cómo orientar los ejes.

Sistema de Coordenadas: elemento matemático compuesto por ejes ortogonales. Está asociado al Marco de Referencia y fijo a él. Incluye una escala para medir longitudes

Recuadro 2: Sistema de Coordenadas.

Ya estamos en condiciones de definir el concepto físico de **posición.** Es aquél vector que va desde el origen del sistema de coordenadas hasta el lugar en que se encuentra el punto que representa al objeto modelizado como partícula.

Posición: vector que va desde el origen del sistema de coordenadas al lugar en que se encuentra el punto que representa al objeto.

Recuadro 3: Posición.

En la Ilustración 2 determinamos que la posición del banderín según el observador **A** (con un Marco de Referencia S_A fijo a la Tierra) es $\vec{r}_A$, mientras que para el observador **B** (con un Marco de Referencia S_B un fijo al barco) es $\vec{r}_B$. Cada Marco de Referencia tiene un Sistema de Coordenadas asociado.

Es importante prestar atención a un procedimiento necesario en nuestras representaciones: en la

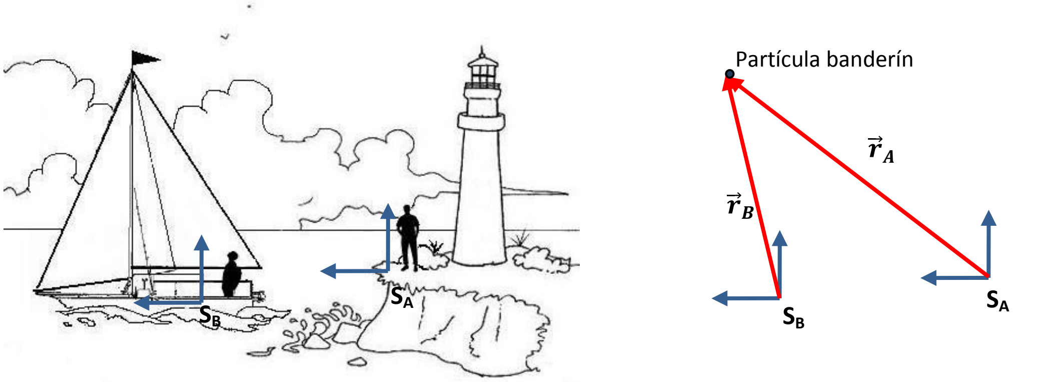


Ilustración 2: *Gráfico de un vector posición desde dos Marcos de Referencia. El Marco de Referencia **A** lo determina el observador situado sobre el acantilado y está fijo a éste último. El Marco de Referencia **B** lo establece el observador situado en el bote y está fijo a la embarcación. Representamos la situación en un esquema (izquierda) estableciendo los Marcos de Referencia S_A y S_B, asociando a cada uno un Sistema de coordenadas. Modelizamos al objeto de estudio como una partícula (en este caso el banderín), lo graficamos como un punto y luego representamos los vectores respecto a cada uno de los sistemas de coordenadas asociados (derecha).*

parte de la derecha de la ilustración tenemos un esquema representativo de la situación, en definitiva un dibujo de la situación. En ese dibujo sólo agregamos los sistemas de coordenadas para saber desde donde mediremos las posiciones. En la parte de la derecha está la representación gráfica de la modelización, donde vemos al objeto de estudio modelizado como

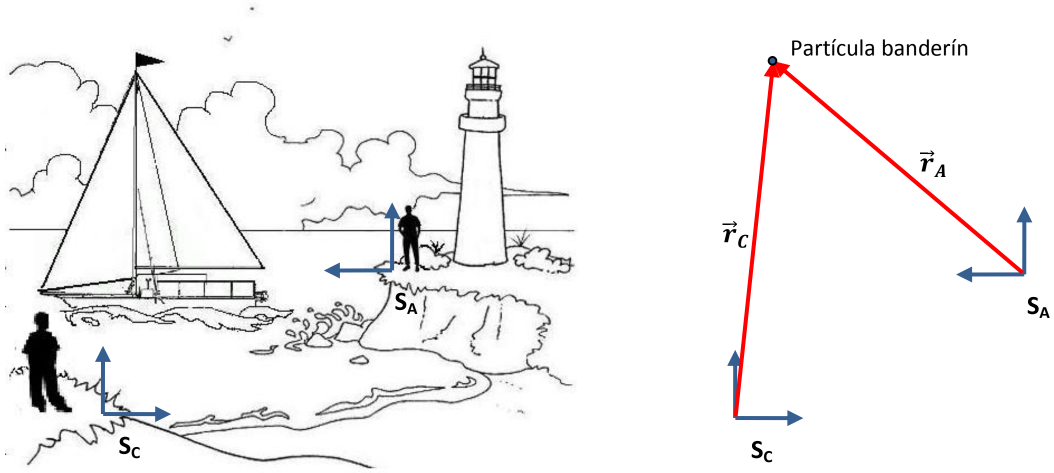


Ilustración 3: *Gráfico de vectores posición desde dos Marcos de Referencia que no se mueven entre sí. El Marco de Referencia **A** lo determina el observador situado sobre el acantilado y está fijo a éste último. El Marco de Referencia **C** lo establece el observador situado en la otra punta de la bahía y está fijo a ella (izquierda). Asociamos a cada uno de los Marcos de Referencia un Sistema de Coordenadas y determinamos la posición del banderín modelizado como partícula (derecha)*. ***La posición depende del Marco de Referencia y el Sistema de Coordenadas asociado.***

partícula, los sistemas de coordenadas y los vectores posición. ¿Por qué no incluir todo en un solo gráfico? Porque queremos diferenciar lo que es la situación (izquierda) de lo que es la modelización física (derecha).

El Marco de Referencia ***B*** de la Ilustración 2 estaba moviéndose respecto al Marco de Referencia ***A***, y vemos que determinan diferentes vectores posición. Notemos ahora algo más general para dos Marcos de Referencia que no se mueven entre sí, al colocar dos sistemas de coordenadas iguales pero con el origen en distinto lugar y diferentes orientaciones de sus ejes, cada sistema determina un vector posición diferente (ver Ilustración 3 y recuadro 4). Esto resume algo que tal vez ya habías deducido: **la posición de un objeto modelizado como partícula depende del Marco de Referencia y del Sistema de Coordenadas.**

> **Para discutir en el Foro**
> Dos observadores están en distinto lugar, con sus sistemas de coordenadas fijos entre sí, ¿miden la misma posición de un objeto de estudio modelizado como partícula?

Veamos en el ejemplo de la Ilustración 4 qué ocurre con la posición del banderín cuando usamos dos Marcos de Referencia. Un Marco de Referencia está fijo a la Tierra y el otro en un barco a toda vela. Uno de los vectores posición irá desde el origen del sistema fijo al barco hasta el banderín y no cambiará en el tiempo, mientras que el otro vector irá desde el origen del sistema fijo a la Tierra hasta el banderín, y sí cambiará con el tiempo (Ver recuadro 4). Continuaremos con este ejemplo en el apartado siguiente. Pero antes recomendamos realizar la actividad "Para discutir en el Foro".

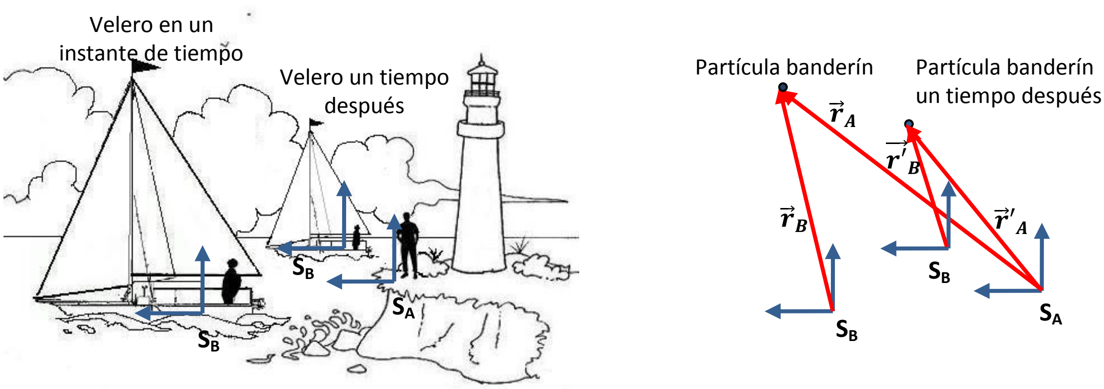


Ilustración 4: *Gráfico de un vector posición desde dos Marcos de Referencia que se mueven entre sí. El Marco de Referencia **A** lo determina el observador situado sobre el acantilado y está fijo a éste último. El Marco de Referencia **B** lo establece el observador situado en el bote y está fijo a él (izquierda). Asociamos a cada uno de los Marcos de Referencia un Sistema de Coordenadas para determinar la posición del banderín (derecha). La posición medida desde el Marco de Referencia **A** cambia con el tiempo ($\vec{r}_A \neq \vec{r}'_A$) pero la posición medida desde el Marco de Referencia **B** es siempre la misma ($\vec{r}_B = \vec{r}'_B$).*

4. Desplazamiento

Newton nos dice después:

> *"IV. El movimiento absoluto es la traslación de un cuerpo desde un lugar absoluto a otro, y el movimiento relativo la traslación de un lugar relativo a otro."* (Newton, 1997, p. 33).

A partir de esta idea, definiremos el concepto de **desplazamiento**. Supongamos que un objeto (un banderín, por ejemplo) en un instante se encuentra en una posición y un tiempo después se encuentra en otra posición, el vector desplazamiento se define como la resta de ambos[2]:

$$\vec{d}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \qquad (1)$$

Es importante destacar que no estamos haciendo sólo una resta de vectores posición, el desplazamiento es la diferencia de los vectores posición del mismo objeto de estudio modelizado como partícula, en dos instantes de tiempo diferentes. Notemos una propiedad que se da al utilizar dos sistemas de referencia que tienen diferente origen pero fijos entre sí (por ejemplo, ambos fijos al barco, uno en proa y otro en popa, ilustración 5). Si bien la posición de nuestro banderín es diferente para cada sistema, sus desplazamientos serán los mismos.

En Resumen:

- Marco de Referencia es un concepto físico mientras que Sistema de Coordenadas es un elemento matemático.
- Un Marco de Referencia respecto de otro puede: trasladarse, estar acelerado o rotar.
- Dos Sistemas de Coordenadas que no se desplacen entre sí pertenecen a dos Marcos de Referencia que no se desplazan entre sí.
- Desde dos Marcos de Referencia diferentes, con Sistemas de Coordenadas diferentes, determino distintos vectores posición de un objeto modelizado como partícula.

Recuadro 4: Resumen de Marco de Referencia y Sistema de Coordenadas.

[2] Nota aclaratoria matemática I: al trabajar con las componentes esta resta se realiza restando las componentes: $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

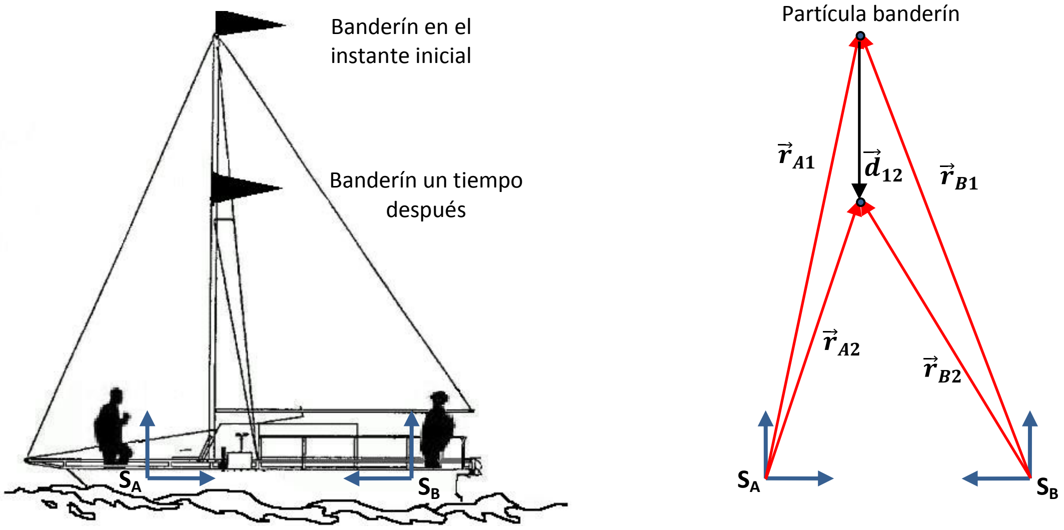


Ilustración 5: *El vector desplazamiento no depende del Sistema de Coordenadas. El Marco de Referencia **A** lo determina el observador situado sobre la proa y está fijo al bote. El Marco de Referencia **B** lo establece el observador situado en la popa y está fijo también al bote. Asociamos a cada uno de los Marcos de Referencia un Sistema de Coordenadas.*

Veamos qué agrega Newton a nuestro ejemplo:

> *"En un barco a toda vela el lugar relativo de un cuerpo es aquella parte del barco que el cuerpo posee, o aquella parte de la cavidad llenada por el cuerpo y que por eso mismo se mueve junto con el barco. El reposo relativo es la continuidad del cuerpo en el mismo lugar del barco o de su cavidad. Pero el reposo real, absoluto es la continuidad del cuerpo en la misma parte de ese espacio inmóvil donde se mueve el barco mismo, su cavidad y todo cuanto contiene. Por lo cual, si la Tierra está realmente en reposo, el cuerpo que reposa relativamente en el barco se moverá real y absolutamente con la misma velocidad que el barco tiene sobre la Tierra. Pero si la Tierra se mueve también…"* (Newton, 1997, pp. 33 a 34).

Newton parte de la idea de que existe un espacio absoluto. Luego deduce que debe existir un reposo absoluto, pero para nosotros, simples mortales, nos resulta imposible determinarlo:

> *"Es una propiedad del reposo el hecho de que los cuerpos realmente en reposo reposan los unos respecto de los otros. Y por eso es posible que en las regiones de las estrellas fijas, o aún más lejos, pueda existir algo que esté en absoluto reposo; pero, siendo imposible saber por la posición de los cuerpos unos respecto de otros en nuestras regiones si alguno mantiene la misma posición con respecto a ese cuerpo remoto, se sigue que el reposo absoluto no puede determinarse partiendo de la posición de los cuerpos en nuestras regiones."* (Newton, 1997, p. 35).

5. Trayectoria

Otro concepto que suele usarse en cinemática es el de **trayectoria**. Es la línea que indica el recorrido del objeto. Puede definirse también como la sucesión de puntos del extremo del vector posición. La trayectoria puede graficarse (ver Gráfico 1), para movimientos planos, en los ejes coordenados (x, y). Pese a ser una curva de trazo continuo, <u>la trayectoria no es la representación gráfica de una función matemática</u>, esto significa que para un mismo valor de la coordenada X puede haber más de un valor de la coordenada Y. Esto es así porque no olvidemos que representa la posición de la partícula en diferentes instantes de tiempo.

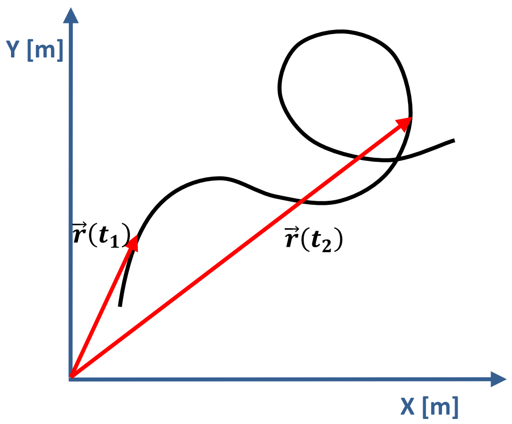


Gráfico 1: Representación de la trayectoria de una partícula. Identificamos la posición en los instantes t_1 y t_2.

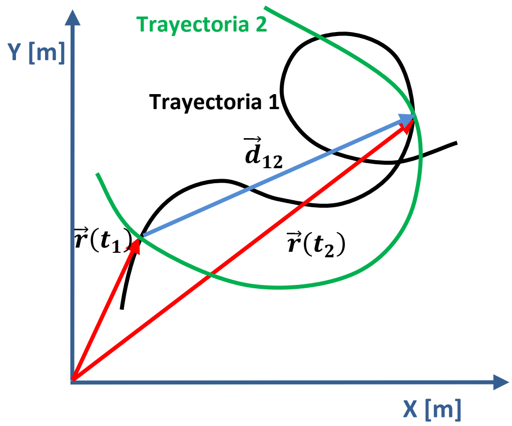


Gráfico 2: Representación de la trayectoria de dos partículas. Identificamos sus posiciones en los instantes t_1 y t_2. El desplazamiento $\vec{d}_{12}$ en la trayectoria 1 es el mismo que el de la trayectoria 2.

En cuanto a su representación gráfica, debemos agregar que la trayectoria no incluye flechas graficadas indicando el sentido del movimiento. Para saber hacia dónde se mueve la partícula debemos conocer la posición en instantes de tiempo sucesivos. Recordando la definición de desplazamiento como la diferencia de la posición de la partícula en dos instantes diferentes, observamos que el desplazamiento entre instantes t_1 y t_2 por la trayectoria 1 (Gráfico 2) puede ser idéntico al desplazamiento entre instantes t_3 y t_4 por la trayectoria 2 (no es necesario que t_1=t_3 y t_2=t_4).

El concepto de trayectoria resulta útil para definir la Velocidad.

A continuación presentamos un ejemplo de problema en el que se aplican los conceptos hasta aquí tratados.

Problema 1

Objetivo: Identificar, graficar e interpretar vectores posición y desplazamiento.

Un estudiante sale de su casa (vive en una esquina) y va a comprar un lápiz a una librería que queda en la esquina opuesta de la misma manzana. Regresa completando una vuelta a la manzana.

a. Realizar un esquema de la situación
b. Elegir un marco de referencia.
c. Ubicar un sistema de coordenadas.
d. En un gráfico *(x, y)* representar al vector posición del estudiante cuando ha recorrido una, dos, tres y cuatro cuadras (cada cuadra mide 100 m).
e. En otro gráfico *(x, y)* representar los vectores desplazamiento:
    1. Desde que salió de su casa y hasta que llegó al negocio.

2. Desde que salió del negocio y hasta que llegó a la siguiente esquina.
3. Entre que salió y regresó de su casa.

f. En otro gráfico *(x, y)* representar la trayectoria.

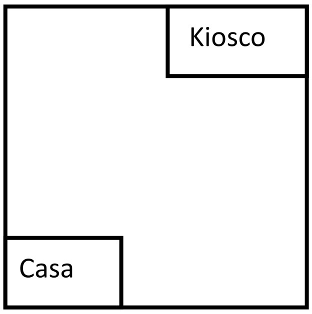
g. Representar en dos gráficos la variación de las componentes de la posición en función del tiempo *x(t)* e *y(t)*. Para eso deberás usar un par de ejes *(x,t)* y otro *(y,t)* en cada gráfico.

h. Repetir todo el ejercicio colocando el origen del sistema de coordenadas en otro lugar.

Nota: el enunciado no indica el sentido en que da la vuelta a la manzana, así como tampoco los tiempos en que tienen lugar los movimientos. Es un problema abierto. Para resolverlo se deben tomar algunas decisiones. Por ejemplo, se puede medir o estimar el tiempo se tarda en caminar una cuadra, para resolver el inciso g.

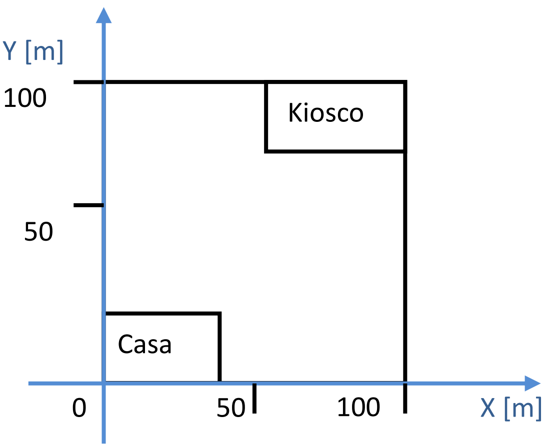
Resolución

a. Se realiza el siguiente esquema:

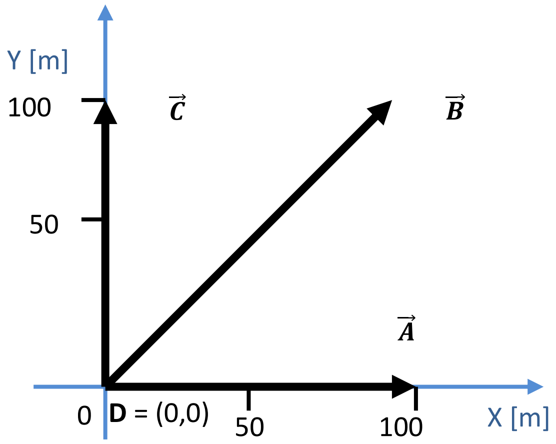


b. Se elige un Marco de Referencia fijo a la Tierra (si bien puede elegirse cualquier otro, este marco simplificará la resolución de los incisos siguientes). En este caso elegimos como Marco de Referencia el cordón de la vereda.

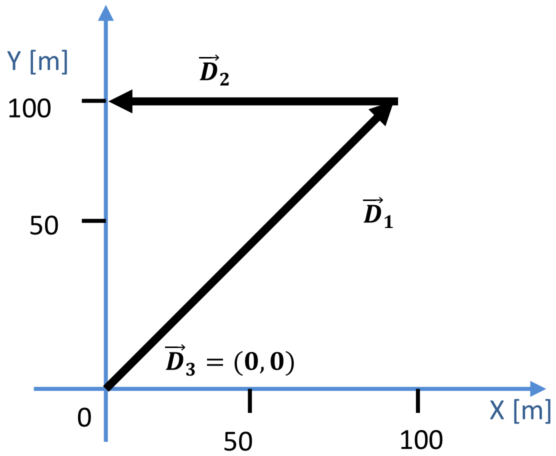
c. Se ubica en el esquema un sistema de coordenadas, por ejemplo:



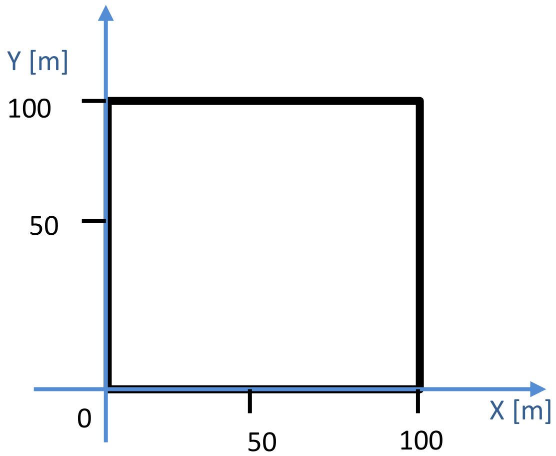
d. Si el estudiante gira la manzana en sentido antihorario, los vectores posición son, considerando al estudiantes como una partícula, los siguientes ($\vec{A}$, $\vec{B}$, $\vec{C}$ y $\vec{D}$):



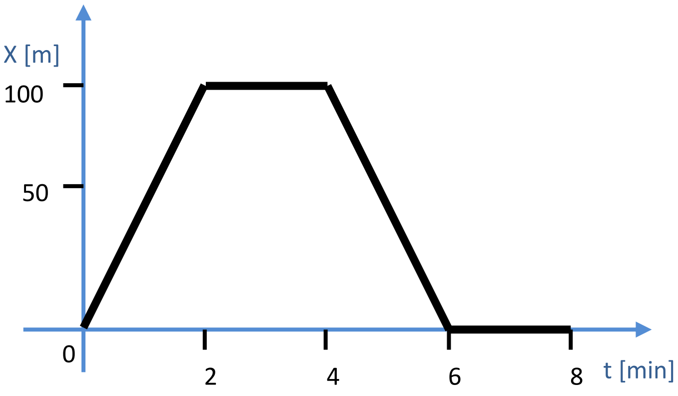
e. Los vectores desplazamiento son los siguientes ($\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$ y $\vec{D}_3$):

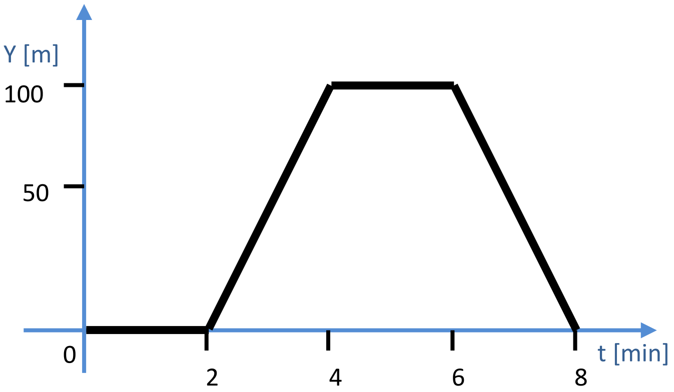


f. La trayectoria se representa:



g. Suponiendo que tarda 2 minutos en recorrer cada cuadra y que cuando camina lo hace siempre igual de rápido, se realizan los siguientes gráficos:





h.Se deja por cuenta de los lectores…

***Escolio*[3]**

Realizar un esquema suele ser muy útil para iniciar la resolución de un problema. Es aconsejable hacerlo al resolver problemas en Física. También es importante explicitar cuál Marco de Referencia se ha elegido y dónde está el origen del Sistema de Coordenadas y cómo están orientados sus ejes. De esta manera se puede ubicar y explicitar el sistema de coordenadas. En este problema, hay más de un esquema que puede considerarse correcto, así como el sistema de coordenadas puede ubicarse de diversos modos.

¿Por qué es necesario usar el modelo de partícula? Nos permite representar la posición solamente con un vector, sin preocuparnos por el tamaño o la orientación del objeto de estudio.

En la resolución de los incisos f y g se aprecia la diferencia entre representación de la trayectoria y las gráficas de la funciones *x(t)* e *y(t)* que se suelen confundir. Notar que en las gráficas la posición es una función del tiempo, ya que representa cómo varía cada una de sus coordenadas.

Para recordar:
Los vectores posición se representan gráficamente (como flechas) en los sistemas coordenados *(x, y)*. En esos sistemas también se representan las trayectorias. Pero cuando graficamos la variación de las componentes de la posición con el tiempo, lo hacemos en gráficos *(x, t)* e *(y, t)* y no dibujamos flechas. En estos gráficos dibujamos una función matemática que tiene un significado físico.

Recuadro 5: Recordatorios de cómo se grafica.

[3] Escolio es una nota que se pone a un texto para explicarlo.

Parte II

La descripción del Movimiento: velocidad

Diego Petrucci y Juan Cruz Moreno

Índice

1. Velocidad 155
1.1. Movimiento en una dimensión.. 155

1. Velocidad

En la vida cotidiana, y aún en los cursos de Física, suele hablarse de distintas velocidades, velocidad media, instantánea, rapidez, etc. Su definición no suele ser muy precisa. **Nosotros llamaremos velocidad a la medida del cambio en la posición**. Esto quiere decir que dependerá del cambio en la posición (el desplazamiento) y del tiempo. Para comenzar definiremos velocidad para movimientos en una sola dimensión, por esta razón trabajaremos inicialmente con una única componente.

1.1. Movimiento en una dimensión

Supongamos que un auto se desplaza como se muestra en el gráfico de la ilustración 5. Deseamos analizar y describir ese movimiento. Comenzamos utilizando las herramientas metodológicas:

- Determinamos que nuestro **objeto de estudio** es el automóvil.
- Lo **modelizamos** como una partícula.
- **Idealizamos** la situación: consideramos que el movimiento se desarrolla en una recta, despreciando vibraciones e irregularidades del camino para comenzar por el caso más simple.
- Elegimos un **Marco de Referencia**. Por sencillez optamos por el que se halla fijo a la Tierra. En ese Marco de Referencia nos encontramos como observadores.
- Establecemos un **Sistema de coordenadas**. Es conveniente elegir un eje ***X*** en la dirección en que se desarrolla el movimiento. Ponemos el origen de coordenadas donde se encuentra el observador y definimos el sentido positivo hacia donde se dirige el auto.

En la Ilustración 6 se indica también la componente *x* de la posición inicial *(x_0)*. El gráfico muestra la variación de la componente x de la posición como función del tiempo. La pendiente de la recta en el gráfico nos indica cuánto está cambiando la componente de la posición en función del tiempo: a mayor pendiente, más rápido cambiará la posición, lo que es justamente: **¡la velocidad!** Para este caso, como la pendiente es constante, puede escribirse[4]:

$$\boldsymbol{v_X}(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad (2)$$

[4] Nota aclaratoria matemática II: Δ (delta) se usa para denotar una resta, en general $\Delta x = x_2 - x_1$. Lo mismo vale para $\Delta t = t_2 - t_1$.

donde hemos usado v_X para indicar que es la componente *x* de la velocidad. En este ejemplo la velocidad es constante, es el conocido Movimiento Rectilíneo y Uniforme o MRU. Es decir que para cualquier par de puntos que tomemos (x_0, t_0); (x_1, t_1); (x_2, t_2) o cualquier otro, para hacer la resta, va a dar el mismo resultado para *v*.

Si un cuerpo se mueve con velocidad constante, y la conocemos, y si también conocemos donde estaba cuando *t = 0*, entonces podremos conocer la posición para cualquier instante de tiempo *t.* Para ello volvamos a nuestro ejemplo de movimiento en una dimensión, retomando la ecuación (2) y reescribiéndola como

$$v_X(t) = \frac{x - x_0}{t - t_0} \qquad (3)$$

Recordemos que $t_0 = 0$ entonces:

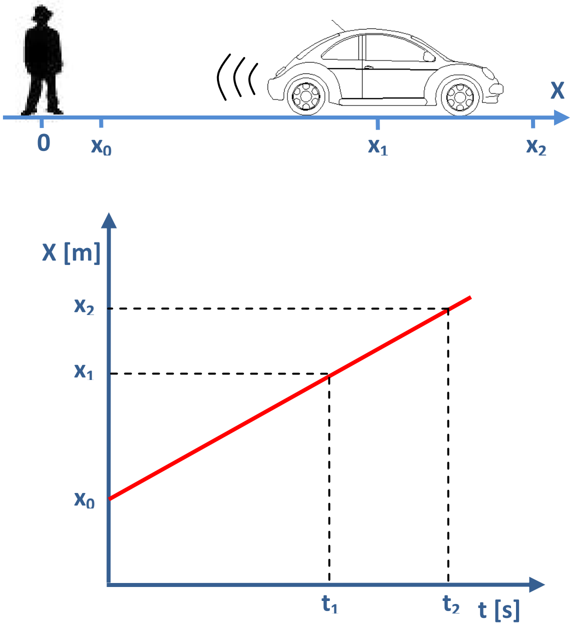


Ilustración 6: *Movimiento de un automóvil y el gráfico que representa la variación de la coordenada X de la posición como función del tiempo.*

$$v_X(t) = \frac{x - x_0}{t} \qquad (4)$$

Si de aquí despejamos *x* obtenemos

$$x(t) = x_0 + v_x \cdot t \qquad (5)$$

Notemos que matemáticamente, la expresión (5) es una función. Inicialmente resulta difícil familiarizarse con una función que se llame ***x*** y no ***f*** y más aún si la variable no se llama *x*, sino *t*. Pero debe quedarte claro: la expresión (5) es la función que describe la variación de la componente *x* de la posición como función del tiempo en un movimiento en una dimensión y con velocidad constante. Para acostumbrarte a usarla es útil resolver problemas y ejercicios sobre el tema.

Veamos un ejemplo de movimiento para **cuando la velocidad no es constante**. Se deja caer una pelota por una pista con pendiente (Ilustración 7). Queremos saber cuál es la velocidad en un instante en particular en que la pelota está subiendo. Para ello:

- Nuestro **objeto de estudio** es la pelota.
- La **modelizamos** como una partícula.
- **Idealizamos** la situación: despreciamos "combas" e irregularidades del plano.
- Elegimos el **Marco de Referencia** fijo a la Tierra y el **Observador** del movimiento fijo a él.
- Ubicamos el **Sistema de coordenadas** con el eje *x* en la dirección en que se desarrolla el movimiento, el origen detrás del sitio del que se lanza la pelota y definimos el sentido positivo hacia arriba.

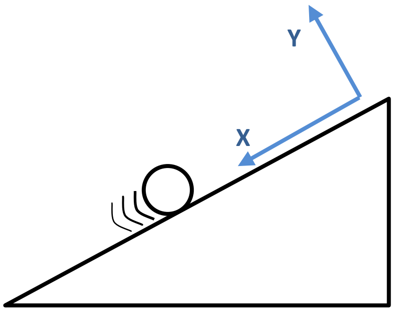


Ilustración 7: Pelota subiendo por pendiente

Supongamos que el gráfico 3 representa la variación de la componente *x* de la posición en función del tiempo. Si en el instante t_1 la pelota se halla en la posición x_1 y en un tiempo dado t_2 se halla en la posición x_2 llamaremos **velocidad media**[5] $v_{x_{12}}$ a:

$$v_{x_{12}}(t) = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \qquad (6)$$

Notemos que el numerador es la componente *x* del vector desplazamiento de la pelota:

$$d_{x_{12}} = x_2 - x_1 \qquad (7)$$

Como planteamos anteriormente, la velocidad media también es un vector: en este caso sólo tiene una componente que vale $v_{x_{12}}$ en el eje $\boldsymbol{x}$. El módulo del vector velocidad media cotidianamente se llama **velocidad promedio**, por ejemplo cuando calculamos que de Córdoba a Buenos Aires un avión tarda 1 hora y su desplazamiento es de 600 kilómetros, la velocidad promedio es de 600 km/h. En Física, al módulo de la velocidad le llamaremos **rapidez**, por lo que el módulo de la **velocidad media** será la **rapidez media**.

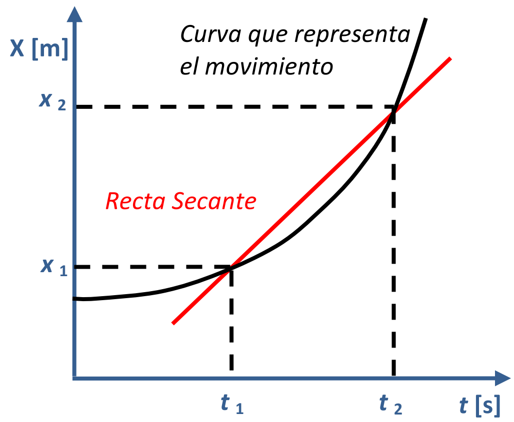


Gráfico 3: Componente de la posición en función del tiempo y recta tangente.

Pero volvamos a la velocidad propiamente dicha. Para saber cuál es la velocidad del cuerpo en un instante preciso, por ejemplo t_1 debemos achicar el Δt, es decir, tomar un intervalo infinitamente pequeño. Los matemáticos han resuelto como hacer esto, y en el caso de la componente *x* se anota:

$$v_X(t) = \frac{dx}{dt} \qquad (8)$$

Esta última expresión es la **definición matemática de velocidad instantánea o velocidad**, para el caso de una dimensión. Para entender mejor esta expresión, volvamos al gráfico 3. ¿Qué significa achicar Δt? Si hacemos que t_2 sea cada vez menor, de modo que se acerque a t_1, la pendiente de la recta que pasa por ambos puntos irá creciendo, pues el punto correspondiente a t_2 se acerca por la curva. Lo acercamos t_2 a t_1 lo suficiente para que la recta llegue a ser tangente a la curva (Gráfico 4). La pendiente de esta recta tangente es el valor del módulo de la componente *x* de la velocidad de la pelota en el instante t_1.

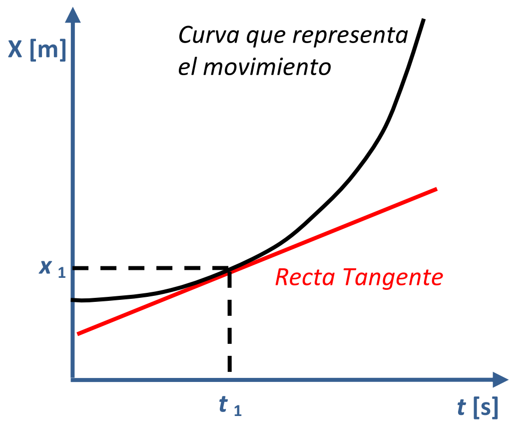


Gráfico 4: La recta tangente a la curva tiene la pendiente de la curva en el punto.

La expresión (8) fue hecha para el movimiento en una dimensión. Para movimientos en el espacio toma la forma:

$$\vec{v}\,(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (9)$$

Esta expresión se lee <u>"el vector velocidad es la derivada del vector posición con respecto al</u>

[5] en realidad es la componente *x* de la velocidad media

tiempo". El concepto de derivada proviene del área de la matemática llamado Cálculo Diferencial, pero no profundizaremos más en este terreno. Sólo aclararemos que físicamente representa el cambio de la posición respecto del tiempo. Siempre asociaremos la palabra derivada con la noción de cambio instantáneo. La definición (9) induce a representar gráficamente a la velocidad como un vector tangente a la trayectoria en ese punto.

Esta velocidad que acabamos de definir corresponde a un instante de tiempo y un punto de la trayectoria. Es decir que –además- la velocidad es un vector que es función del tiempo, por ello la escribimos $\vec{v}(t)$. Si conocemos esa función podremos calcular la velocidad en cualquier instante.

Notemos que al realizar un gráfico *(x, t)* estamos representando gráficamente la componente *x* de la posición en función del tiempo. En el problema que se presenta a continuación, proponemos una expresión analítica para esta función. A partir de allí discutiremos algunas cuestiones físicas.

Problema 2

Objetivos: Comprender la función posición (en función del tiempo) como una representación de un movimiento. Comprender cómo una gráfica de posición en función del tiempo contiene la misma información que la expresión analítica.

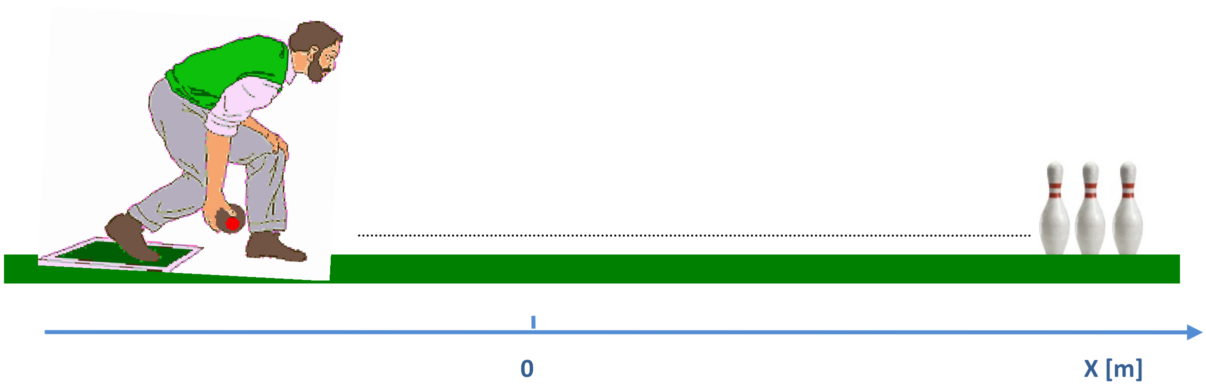


Ilustración 8: *Estudio del movimiento de bola de bowling. Ubicación del sistema de coordenadas.*

Una pelota de *bowling* se mueve sobre una línea recta (eje ***X***). Tomando la posición en metros y el tiempo en segundos el movimiento es descrito según la función:

$$x(t) = 3m/s\ t - 4m.$$

a. Calcular su posición para los instantes *t=0*, *t=2* y *t=3*.

b. Graficar la función *x(t)* (recurriendo a nuestros conocimientos sobre la ecuación de la recta: y = mx + b; donde **m** es la pendiente y **b** la ordenada al origen)[6]

c. Identificar en el gráfico los puntos correspondientes al inciso a.

Resolución

[6] Formalmente no es correcto el término "**ecuación de la recta**", porque no es una ecuación, ¡es una **función**! El término adecuado es función lineal y su representación gráfica es una recta.

a. Lo que debemos hacer es evaluar la función *x (t)* que nos da el enunciado en los instantes sugeridos.

1. Para $t = 0$ s
   $x(0s) = 3m/s \cdot 0s - 4m.$
   $x(0s) = -4m.$

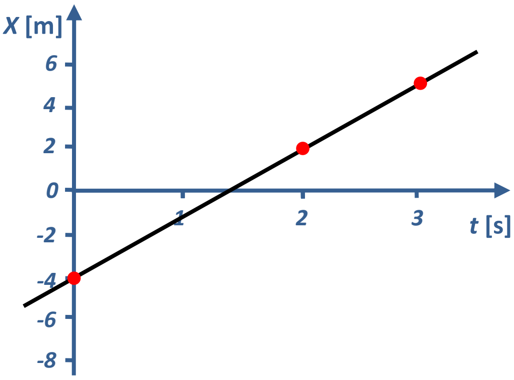
2. Para $t = 2$ s
   $x(2s) = 3m/s \cdot 2s - 4m.$
   $x(2s) = 2m.$

3. Para $t = 3$ s
   $x(3s) = 3m/s \cdot 3s - 4m.$
   $x(3s) = 5m.$

b y c. Hacemos un gráfico con los ejes ***X*** y *t* recordando poner las unidades correspondientes. Como la función lineal es y(x) = m x + b (donde m es la pendiente y b es la ordenada al origen), cuando comparamos con *x (t) = 3m/s t - 4m* hacemos las equivalencias:

$$\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{x} \to \boldsymbol{t}, \qquad \boldsymbol{m} \to 3\, m/s, \qquad \boldsymbol{b} \to -4\, m$$

Lo que implica graficar una recta de pendiente *3* que corte al eje vertical en *t = - 4*.



Para identificar en el gráfico los puntos del inciso a, sabemos que las coordenadas de esos puntos son *t* en el eje horizontal y ***X*** en el vertical. O sea los puntos tienen coordenadas (*0 s*, *-4 m*), (*2 s*, *2 m*) y (*3 s*, *5 m*)

Para discutir en el Foro:

1. ¿Cuál es un posible Marco de Referencia en el problema del *bowling*?
2. ¿Cuál es la posición inicial de la bola? ¿Cómo te diste cuenta?
3. ¿Cuál es la velocidad inicial de la bola? ¿Cómo te diste cuenta?

Escolio

Este problema parece de matemática. Pero atrás hay conceptos físicos. ¿Qué ocurre físicamente? El **objeto de estudio** es la pelota de *bowling*, modelizada como **partícula**, su movimiento fue **idealizado** restringiéndolo a una recta. Para continuar, proponemos una actividad. Te sugerimos que pienses cuáles son las respuestas antes de continuar.

Establecemos el **Marco de Referencia** al comienzo de la cancha. De esta manera el Marco está fijo a la Tierra y al observador. El origen del **Sistema de Coordenadas** está ubicado *4m* por delante del lugar donde comienza el movimiento. La coordenada *x* de la posición inicial (habitualmente llamada x_0) es la posición de nuestro sistema cuando *t = 0*. En este caso $x_0 = -4m$. Pero en ningún lado se ha relacionado estos valores con lo que ocurre en la cancha de *bowling*. En ella se debe haber ubicado un eje coordenado *x* orientado en la dirección del movimiento de la pelota, con sentido positivo hacia los bolos y con origen a 4 *m* del sitio en que comenzó el movimiento. Los dibujos o esquemas que representen la situación, como el de la Ilustración 8, facilitan mucho la visualización del sistema de coordenadas.

La velocidad mide el cambio de la posición. Este cambio es la pendiente de la recta, por lo tanto $v_x = 3m/s$. La velocidad es constante, no cambia en el tiempo. De modo que es ¡el famoso movimiento rectilíneo uniforme! (Observá nuevamente lo que planteamos en la resolución del inciso b : x =3m/s t – 8m tiene la forma de y= mx+b y es justamente un caso particular de la expresión (5))

Nótese que bastan dos de los tres puntos obtenidos para la posición para graficar la recta debido a que conocemos la forma analítica de la función posición.

Parte III

La descripción del Movimiento: aceleración

Juan Cruz Moreno y Diego Petrucci

Índice

1. Aceleración en una dimensión.. 221

1. Aceleración en una dimensión

Así como la velocidad nos indica el cambio de la posición, la aceleración es la medida del cambio en la velocidad en el tiempo. Como la velocidad es un vector, la aceleración también lo es y la representaremos como $\vec{\boldsymbol{a}}$. Al igual que cuando trabajamos con el concepto de velocidad, podemos expresar el cambio instantáneo de la velocidad con el tiempo como

$$\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad (10)$$

recordando que llegamos a esta expresión tomando un cambio en la velocidad cada vez más pequeño. Análogamente a la definición de velocidad, la aceleración es la derivada de la velocidad con respecto al tiempo.

Pero en este curso estudiaremos los movimientos de traslación donde la aceleración no cambia. Exploremos un poco esta idea. Un cuerpo que se halla continuamente en reposo o se mueve con velocidad constante tendrá aceleración cero. Por lo tanto su velocidad en el tiempo se describe con la función constante:

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \vec{\boldsymbol{v}}_0 \qquad (11)$$

Pero si la velocidad cambia tendremos aceleración.

Aceleración	$\longrightarrow$	**Medida del cambio de la velocidad**
Aceleración constante	$\longrightarrow$	**Cambio constante de la velocidad**

La aceleración constante es un tipo de movimiento ideal que se aproxima muy bien a varias situaciones reales. Por ello nos concentraremos en este tipo de movimiento. Para darle continuidad a lo planteado en la deducción de las funciones de movimiento para velocidad constante, trabajaremos nuevamente con el estudio del movimiento en una dimensión de un **objeto de estudio** modelizado como **partícula**, desde un **Marco de Referencia** fijo a la Tierra y un **Sistema de Coordenadas** con el eje ***X*** en la dirección del movimiento. En estas condiciones, cuando la aceleración es constante, se define:

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad (12)$$

Puede notarse la similitud de esta ecuación con la Ecuación (2) que expresa la medida del cambio de la componente de la posición. Reescribamos la expresión anterior para obtener la componente de la velocidad en función del tiempo:

$$a_x = \frac{v_x - v_{0_x}}{t - t_0} \qquad (13)$$

Luego, tomando $t_0 = 0$ y acomodando términos:

$$a_x t = v_x - v_{0_x} \qquad (14)$$

Y finalmente:

$$v_x = v_{0_x} + a_x t \qquad (15)$$

Otra vez nos encontramos con una expresión que tiene la forma de la función de la recta (similar a la (5)). En este caso la pendiente tiene el valor de la aceleración.

Sólo nos falta conocer la expresión de la variación de la componente de la posición como función del tiempo, para el caso de aceleración constante. La deducción de esta expresión requiere conocimientos básicos de cálculo diferencial e integral, que si bien no son muy complejos podrían complicarnos innecesariamente. Es por eso que no lo deduciremos y lo expresaremos directamente: <u>la función que describe la variación de la componente de la posición con el tiempo para un movimiento con aceleración constante es</u>:

$$x(t) = x_0 + v_{0_x} t + \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad (16)$$

Problema 3

Objetivos: Aplicar los conceptos de Cinemática sobre representaciones del movimiento, modelización, y operar con las expresiones analíticas y gráficas de las funciones de movimiento.

Hace 400 años, Galileo comienza su estudio de la interacción gravitatoria. Para eso deja caer – entre otras cosas - una bala de cañón desde lo alto de la torre de Pisa.

a) Hacer una representación esquemática pictórica de la situación.
b) ¿Cuál o cuáles son los objetos de estudio? ¿Cómo los modelizás? ¿Por qué?
c) Elegí un Marco de Referencia y un sistema de Coordenadas.

Si la altura desde la cual Galileo suelta la bala es de 45 metros

d) ¿Con qué velocidad llega al suelo?
e) Graficar la variación de las coordenadas de la posición, la velocidad y la aceleración como funciones del tiempo.
f) Repetir los puntos d) y e) desde otro Sistema de Coordenadas.

Resolución

a) Esquema de la situación

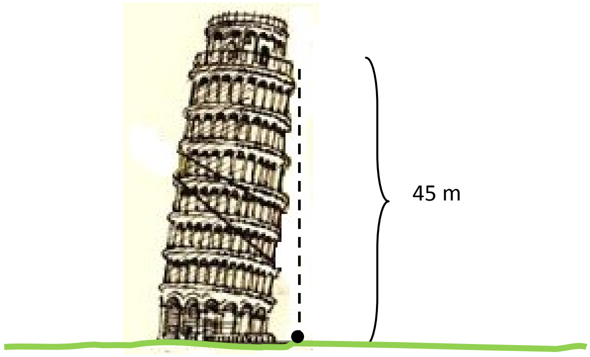


Ilustración 9: *Esquema pictórico de la situación. Representación de la trayectoria*

b) Como objeto de estudio voy a tomar a la bala de cañón porque es el elemento del que voy a estudiar la traslación. Por este último motivo lo voy a modelizar como partícula y el punto que la representa está en el centro geométrico de la bala.

c) El Marco de Referencia elegido es una de las columnas del nivel del suelo. Me considero un observador situado en el suelo por lo que el Marco de Referencia está fijo respecto a mí. El sistema de Coordenadas lo elijo con el origen donde Galileo suelta la bala (pero no se mueve con la bala) y el eje Y apuntando en la dirección del centro de la Tierra con sentido hacia arriba y el eje X paralelo al suelo. De esta manera el movimiento e produce solo en el eje Y.

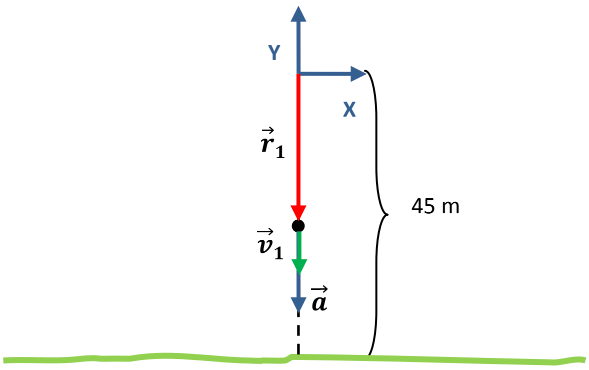


Ilustración 10: *Esquema gráfico de la modelización de la situación. Representación de las trayectorias, el Sistema de Coordenadas la partícula bala y los vectores posición (en rojo), velocidad (en verde) y aceleración(en azul) en el instante intermedio t_1 de la caída. Notar que como la aceleración es constante en la caída no la hemos identificado con un subíndice*

- La posición la graficamos siempre desde el origen del Sistema de Coordenadas al lugar donde está ubicada la bala modelizada como partícula.
- La velocidad la graficamos siempre tangente a la trayectoria.

- La aceleración es constante, debido a la interacción gravitatoria y siempre apunta hacia el centro de la Tierra.

d) Para conocer la velocidad con la cual la bala llega al suelo utilizaremos las siguientes funciones del movimiento:

$$y(t) = y_0 + v_{0_y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \qquad (A)$$

$$v_y(t) = v_{0_y} + a_y t \qquad (B)$$

Analizaremos ahora cada una de las cantidades involucradas.

- Para el Sistema de Coordenadas escogido, la coordenada Y de la posición inicial es $y_0 = 0\,m$ (porque su origen se encuentras desde donde parte la bala).
- La componente Y de la velocidad inicial es $v_{0_y} = 0\,m/s$, eso se deduce a partir de que Galileo "deja caer" la bala.
- La aceleración en juego es la debida a la interacción con la Tierra. Sabemos que es constante en todo el movimiento y de valor $a_y = -g = -9.8\,m/s^2$. El valor de la aceleración en el eje ***Y*** es negativo porque el vector aceleración apunta hacia el lado negativo de lo que definimos en nuestro Sistema de Coordenadas (Definimos ***Y*** positivo hacia arriba). Acordaremos denominar siempre $g = 9.8\,m/s^2$, es decir siempre un valor positivo. El signo de acuerdo al sistema de Coordenadas se agrega aparte.

A partir de estos puntos, las funciones que describen el movimiento de la bala para el Sistema de Coordenadas elegido resultan

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 \qquad (C)$$

$$v_y(t) = -gt \qquad (D)$$

$$a_y(t) = -g \qquad (E)$$

Llamemos t_S al instante en que la bala llega al suelo. En ese instante tendremos: $y(t_S) = -45\,m$, (para ver estos valores sólo tenemos que graficar el vector posición en t_1 en el esquema gráfico de la modelización que hicimos en el inciso c) y ver sus componentes).

Con lo cual la expresión (C) nos queda

$$y(t_S) = -45\,m = -\frac{1}{2}g{t_S}^2 \qquad (F)$$

Cancelando los signos a ambos lados, y pasando dividiendo el término $\frac{1}{2}g$ nos queda

$${t_S}^2 = \frac{90\,m}{9.8\,m/s^2} \qquad (G)$$

Con lo cual el tiempo que tarda la bala en llegar al piso es

$$t_S = \sqrt{\frac{90\,m}{9.8\,m/s^2}} \cong 3.03\,s \qquad (H)$$

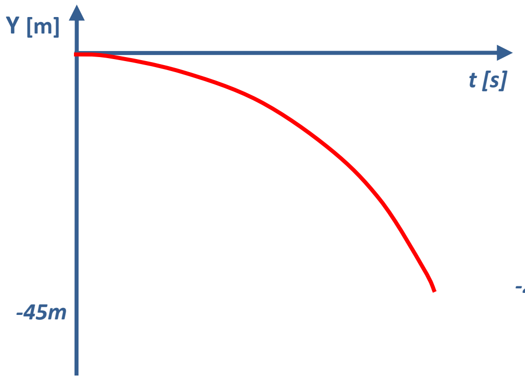
Reemplazando este resultado en (D), encontramos que la componente Y de la velocidad con la que la bala llega al suelo es

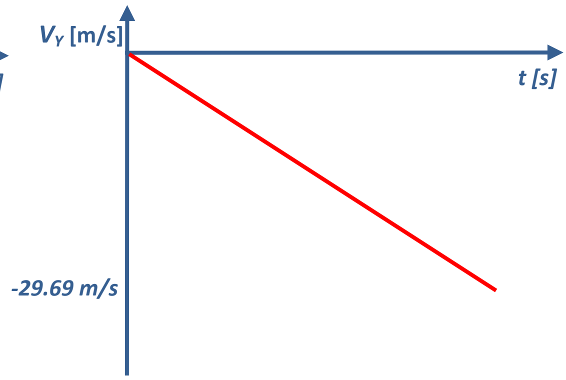
$$v_y\,(t_S) = -g t_S = -9.8\frac{m}{s^2} \cdot 3.03\ s = -29.69\ m/s$$

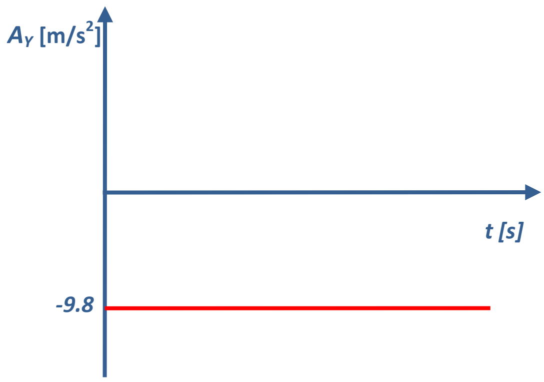
Pero la velocidad es un vector, así que el resultado del problema es entonces: La velocidad con la que llega la bala suelo es

$$\vec{v}\,(t_S) = (0, -29.69\,\frac{m}{s})$$

e) En este ítem debemos graficar las funciones obtenidas *(C)*, *(D) y (E)*. Estas gráficas son:







f) Para practicar, elijamos un Sistema de Coordenadas no tan convencional, por ejemplo con origen en el Suelo pero con el eje Y positivo hacia el centro de la Tierra y el eje X paralelo al suelo.

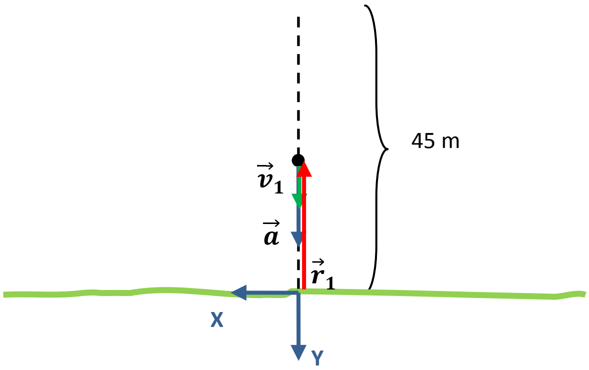


Ilustración 11: *Esquema gráfico del cambio del Sistema de Coordenadas. Se observan nuevamente los vectores posición (en rojo), velocidad (en verde) y aceleración (en azul) en el instante intermedio t_1 de la caída. Notar que sólo cambia el vector posición.*

- Para el Sistema de Coordenadas escogido, la coordenada Y de la posición inicial es $y_0 = -45\ m$ (porque la bala parte 45 m en el sentido negativo del eje Y).
- La velocidad no cambia, la componente Y de la velocidad inicial es $v_{0_y} = 0\ m/s$.
- El vector aceleración es el mismo pero ahora apunta para lo que definimos coo Y positivo, por lo cual $a_y = g = 9.8\ m/s^2$.

Con estas consideraciones las ecuaciones (A) y (B) nos quedan

$$y(t) = -45\ m + \frac{1}{2}gt^2 \qquad (C')$$

$$v_y\,(t) = gt \qquad (D')$$

Llamando nuevamente t_S al instante en que la bala llega al suelo. En ese instante tendremos: $y(t_S) = 0\ m.$ Con lo cual la expresión (C ') nos queda

$$y(t_S) = 0\ m = -45\ m + \frac{1}{2}g{t_S}^2 \qquad (E')$$

Que en definitiva es la misma ecuación (E), <u>porque el tiempo no depende del Sistema de Coordenadas</u>, así que está claro que el resultado es

$$t_S \;\cong 3.03\ s \qquad (H)$$

Reemplazando en (D') tenemos que

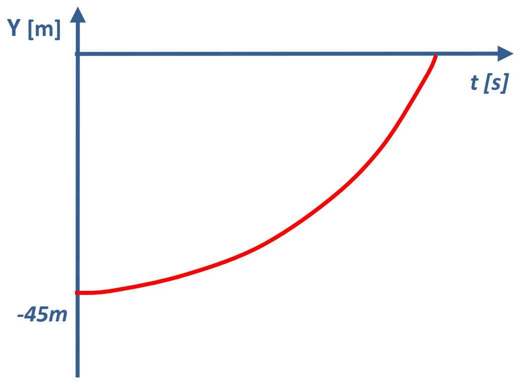
$$v_y\,(t_S) = gt_S = 9.8\frac{m}{s^2}\cdot 3.03\ s = 29.69\ m/s$$

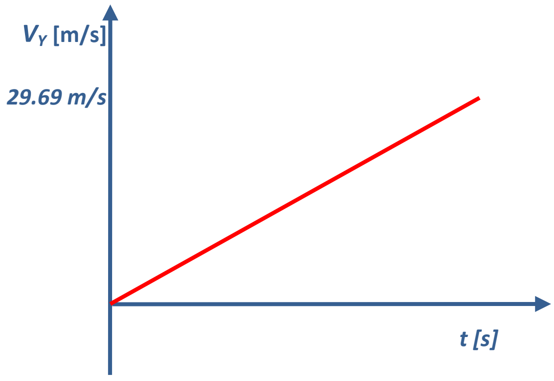
Y como corresponde <u>es una componente positiva de acuerdo a mi Sistema de Coordenadas</u>

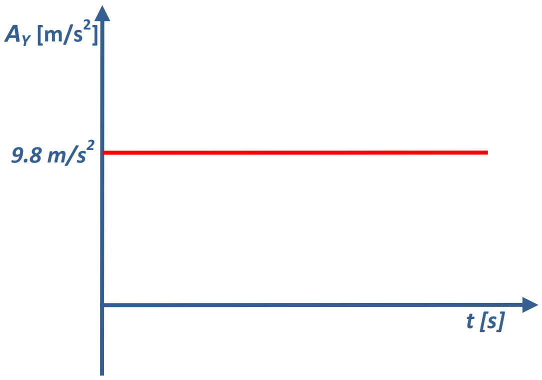
Y la velocidad cuando llega al suelo queda entonces

$$\vec{v}\,(t_S) = (0, 29.69\frac{m}{s})$$

Por otro lado, las gráficas resultantes son


Y [m]
t [s]
-45m


V_Y [m/s]
29.69 m/s
t [s]


A_Y [m/s^2]
9.8 m/s^2
t [s]

Parte IV
Movimiento en dos dimensiones

Juan Cruz Moreno y Diego Petrucci

Índice

1. Movimiento en dos dimensiones 28
2. Representaciones de los movimientos en dos dimensiones 299
3. Esquema metodológico para la resolución de problemas en Cinemática 299
Ejemplo de Problema 302

1. Movimiento en dos dimensiones

Cuando el movimiento es en dos dimensiones, debemos usar el carácter vectorial de la posición, de la velocidad y la aceleración; y para ello lo más conveniente es describir el movimiento de cada componente. Para ello es necesario ubicar un sistema de coordenadas consistente en un par de ejes cartesianos, que por convención se suelen llamar al eje horizontal ***X*** y al vertical ***Y***. De este modo, conociendo las funciones *x(t)* e *y(t)* conocemos la posición del objeto en el plano para cualquier instante de tiempo: el par ordenado *(x, y)*.

A modo de resumen, vemos que las funciones generales que describen el movimiento con aceleración constante serán

Posición: $$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = \vec{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{0}} + \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} t + \frac{1}{2} \vec{\boldsymbol{a}}\, t^2 \qquad (17)$$

Velocidad: $$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = \vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}} + \vec{\boldsymbol{a}}\, t \qquad (18)$$

Aceleración: $$\vec{\boldsymbol{a}}(t) = \vec{\boldsymbol{a}} \qquad (19)$$

Donde $\vec{\boldsymbol{r}}_{\mathbf{0}}$ es la posición inicial del objeto, $\vec{\boldsymbol{v}}_{\mathbf{0}}$ la velocidad en el instante inicial y $\vec{\boldsymbol{a}}$ la aceleración del objeto. Estas últimas expresiones expresadas en componentes son

Velocidad: $$\begin{cases} v_x(t) = v_{0_x} + a_x t & (22) \\ v_y(t) = v_{0_y} + a_y t & (23) \end{cases}$$

Aceleración: $$\begin{cases} a_x(t) = a_x & (24) \\ a_y(t) = a_y & (25) \end{cases}$$

¿Cómo volvemos de las funciones en componentes a las funciones vectoriales? Si es necesario obtener los vectores posición, velocidad o aceleración, es cuestión de componerlo:

$$\vec{\boldsymbol{r}}(t) = (x(t), y(t)) \qquad (26)$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}(t) = (v_x(t), v_y(t)) \qquad (27)$$

$$\vec{a}(t) = (a_x(t), a_y(t)) \qquad (28)$$

2. Representaciones de los movimientos en dos dimensiones

Previamente hemos comentado acerca de las representaciones de los movimientos. Haremos aquí un resumen recordando este tema[7]. El movimiento puede ser descripto de varias formas. Algunas de ellas son las siguientes:

- Verbal, tal como se presenta en los problemas típicos de final de capítulo de los libros de texto.
- Diagramática, con la posición, la velocidad y la aceleración mostradas en diagramas de movimiento.
- Visual, mostrando los puntos inicial y final tanto como las coordenadas y los símbolos.
- Gráfica, a través de gráficas de posición, velocidad y aceleración en función del tiempo.
- Matemática Analítica, mediante las ecuaciones más importantes de la cinemática.

Consideramos que aprender Cinemática implica poder moverse fluidamente entre estas diferentes representaciones de modo de incorporar un sentido preciso e intuitivo del movimiento. Cuando resolvemos problemas, las representaciones que utilizamos son:

- **Representación esquemática o pictórica:** es la que interpreta el enunciado escrito o verbal y lo traduce en un esquema o dibujo que no incluyen modelizaciones físicas. Puede incluir el Sistema de Coordenadas.
- **Representación gráfica de la modelización:** es la que expresa la modelización utilizada, en este caso de partícula e incluye el Sistema de Coordenadas, los vectores posición, velocidad y aceleración.
- **Representación analítica matemática:** es la que expresa el contenido del problema en forma de funciones y ecuaciones. Estas expresiones matemáticas deben ser coherentes con el Sistema de Coordenadas y se representan analíticamente como vectores o coordenadas.
- **Representación gráfica matemática:** es la representación gráfica de las funciones que expresan la variación de las componentes de posición, velocidad y aceleración como funciones del tiempo. Son las gráficas $x(t)$, $y(t)$, $v_x(t)$, $v_y(t)$, $a_x(t)$ y $a_y(t)$.

Lo más importante de estas representaciones es que todas están incluidas en una suerte de circuito, de manera tal que <u>todas describen el movimiento y consecuentemente todas deben ser coherentes entre sí</u>.

3. Esquema metodológico para la resolución de problemas en Cinemática

La propuesta desarrollada en este apunte conlleva un esquema coherente para la resolución de problemas de Cinemática traslacional. El esquema propuesto, que sugerimos fuertemente seguir, es el siguiente.

- Leer el enunciado completo del problema

[7] Parte de este análisis proviene del artículo "Five Easy Lessons: Strategies for Successful Physics Teaching", Randall D. Knight, Addison Wesley, San Francisco, 2002

- Realizar un esquema de la situación (representación pictórica).
- Identificar explícitamente el objeto de estudio.
- Modelizarlo como partícula.
- Elegir un Marco de Referencia (sitio desde el que se va a referir el movimiento que se encuentra en reposo respecto al observador).
- Ubicar un Sistema de Coordenadas con su escala (notar que no necesariamente el Sistema de Coordenadas, está ubicado fijo al Marco de Referencia).
- Realizar un esquema gráfico de la situación modelizada. En este esquema deben identificarse el Sistema de Coordenadas y el objeto de estudio modelizado como partícula.
- Identificar los instantes iniciales y finales del movimiento a estudiar
- Identificar las posiciones iniciales y finales del movimiento a estudiar
- Identificar las condiciones iniciales.
- Plantear las representaciones analíticas (funciones de posición y velocidad) o realizar o interpretar representaciones gráficas.
- Operar con las representaciones gráficas y analíticas hasta obtener el resultado buscado.
- Interpretar físicamente los resultados.

Apliquemos esta propuesta a la resolución concreta de un problema:

Ejemplo de Problema

Objetivos: Aplicar los conceptos de Cinemática sobre representaciones del movimiento, modelización, y operar con las expresiones analíticas y gráficas de las funciones de movimiento.

Martín patea una pelota que está en suelo, y ésta comienza a moverse formando un ángulo de 60° con la horizontal y con rapidez inicial de 20,5 m/s. En el instante en que la pelota comienza a moverse, Gastón se encuentra a 30,5 m de distancia de Martín en la dirección del lanzamiento corriendo a velocidad constante. Gastón se aleja de Martín con el objetivo de recibir la pelota justo antes de que toque el suelo.

g) Hacer una representación esquemática pictórica de la situación.
h) ¿Cuál o cuáles son los objetos de estudio? ¿Cómo los modelizás?¿Por qué?
i) Elegí un Marco de Referencia.

Utilizando un Sistema de Coordenadas cuyo origen esté situado en el lugar en que estaba Gastón cuando comienza a moverse la pelota y orientado como quieras.

j) Hacer una representación gráfica de la situación modelizada. Graficando explícitamente la posición, la velocidad y la aceleración en dos instantes cualesquiera que elijas.
k) Hallar la posición en que se encuentran Gastón y la pelota.
l) Hallar la velocidad con que debe correr Gastón para agarrar la pelota justo antes de que caiga al suelo. (Suponer que corre a velocidad constante)

m) Graficá las componentes de la posición, velocidad y aceleración de la pelota en función del tiempo.

Resolución

g) Esquema de la situación

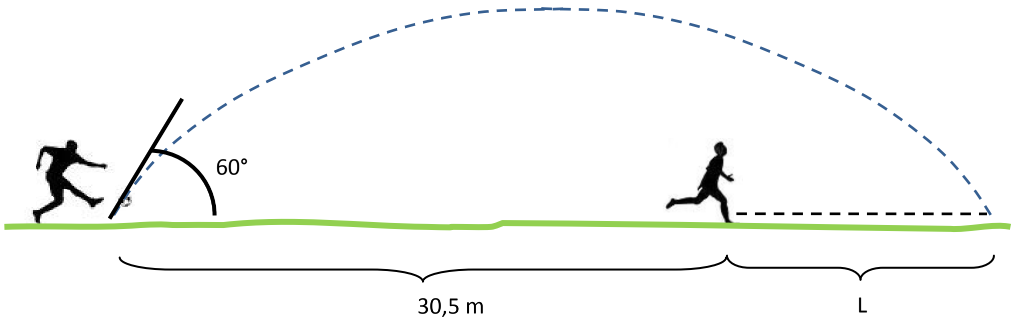


Ilustración 12: *Esquema pictórico de la situación. Representación de los personajes y las trayectorias.*

h) Como objeto de estudio voy a tomar a la pelota primero y luego a Gastón. Ambos objetos de estudio serán modelizados como partícula ya que me interesa estudiar sus movimientos de traslación.

i) El Marco de Referencia elegido es el suelo de la cancha. Me considero un observador situado en la cancha por lo que el Marco de Referencia está fijo respecto a mí.

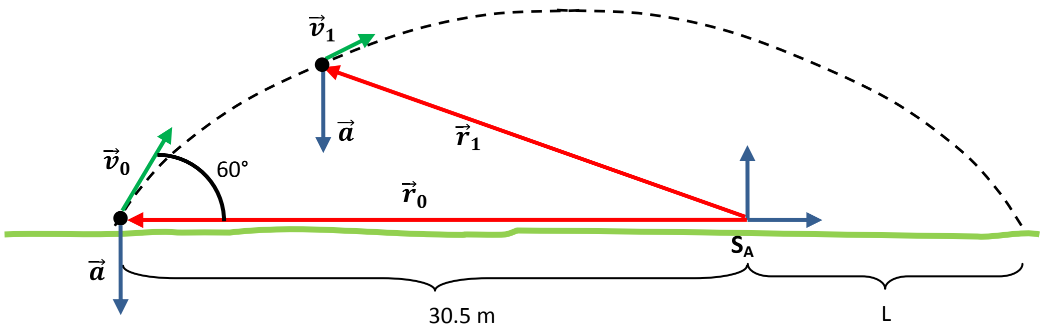


Ilustración 13: *Esquema gráfico de la modelización de la situación para la pelota como Objeto de Estudio. Representación de las trayectorias, el Sistema de Coordenadas* S_A*, la partícula pelota y los vectores posición, velocidad y aceleración en dos instantes de tiempo del movimiento.*

j) La representación gráfica de la modelización es

La posición la graficamos siempre desde el origen del Sistema de Coordenadas al lugar donde está ubicada la pelota modelizada como partícula.

La velocidad la graficamos siempre tangente a la trayectoria.

La aceleración es la de la gravedad que siempre apunta hacia el centro de la Tierra.

k) Para conocer la posición donde se encontrarán la pelota y Gastón, vamos a estudiar ahora el movimiento de la pelota porque es el objeto de quien tenemos los datos iniciales en la velocidad. Vamos a estudiar el movimiento en el intervalo comprendido desde que la pelota comienza a moverse hasta que alcanza el suelo nuevamente.
Los datos iniciales que tenemos son:

- De acuerdo a la orientación del Sistema de Coordenadas, la posición inicial está dada por las coordenadas $x = -30.5\,m$ e $y = 0\,m$. Notemos que en x el valor es negativo porque nosotros definimos las coordenadas positivas hacia la derecha en nuestro Sistema de Coordenadas.
- De acuerdo a la orientación del Sistema de Coordenadas, la velocidad inicial está dada por:

$$v_{0_x} = v_0 \cos 60° = 20.5\,m/s\ \cos 60°$$
$$v_{0_y} = v_0 \,\mathrm{sen}\, 60° = 20.5\,m/s\ \mathrm{sen}\, 60°$$

Debido a que la rapidez es $v_0 = 20.5\,m/s$. En la Ilustración 3 podemos observar cómo se desprenden los valores de las componentes utilizando las relaciones trigonométricas

- La aceleración en todo el movimiento es la de la gravedad, y como apunta hacia el centro de la Tierra tiene componentes $a_x = 0\,m/s^2$ y $a_y = -9.8\,m/s^2$. El valor de la aceleración en el eje ***Y*** es negativo porque el vector aceleración apunta hacia el lado negativo de lo que definimos en nuestro Sistema de Coordenadas (Definimos ***Y*** positivo hacia arriba).

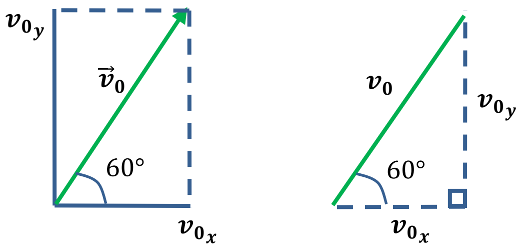


Ilustración 14: *Representación gráfica del vector velocidad inicial (izq). Si tomamos el módulo del vector, formamos un triángulo rectángulo de lados v_{0_x} y v_{0_y} e hipotenusa v_0. Con la información del ángulo y las relaciones trigonométricas podemos deducir los valores de las componentes.*

Con estas consideraciones las funciones que describen el movimiento de la pelota dadas por las expresiones (20), (21) y (22), (23) son

Posición:
$$\begin{cases} x(t) = -30.5\,m + \ 20.5\,m/s\ \cos 60°\, t & (A) \\ y(t) = 0\,m + \ 20.5\,m/s\ \mathrm{sen}\, 60°\, t\ - \frac{1}{2} 9.8 \frac{m}{s^2}\ t^2 & (B) \end{cases}$$

Velocidad:
$$\begin{cases} v_x(t) = 20.5\,m/s\ \cos 60° & (C) \\ v_y(t) = 20.5\,m/s\ \mathrm{sen}\, 60°\ -\ 9.8 \frac{m}{s^2}\ t & (D) \end{cases}$$

Aceleración:
$$\begin{cases} a_x(t) = 0\,m/s^2 & (E) \\ a_y(t) = -\,9.8 \frac{m}{s^2} & (F) \end{cases}$$

Donde se observa que en la componente *x* de la posición no hay aceleración, lo que deriva en que la componente *x* de la velocidad sea constante.

Llamemos t_1 al instante en que la pelota llega al suelo y se encuentra con Gastón. En ese instante tendremos: $x(t_1) = L,\ y(t_1) = 0$ (para ver estos valores sólo tenemos que graficar el vector posición en t_1 en el esquema gráfico de la modelización que hicimos en el inciso c) y ver sus componentes). Desconocemos el valor de *L*. Usando estos datos en la expresiones *(A)* y *(B)* tenemos:

$$x(t_1) = L = -30.5\,m + \ 20.5\,m/s\ \cos 60°\ t_1 \qquad (G)$$

$$y(t_1) = 0\,m = \ 20.5\,m/s\ \mathrm{sen}\, 60°\, t_1\ - \frac{1}{2} 9.8 \frac{m}{s^2}\ {t_1}^2 \qquad (H)$$

Despejando t_1 de la ecuación *(H)*, tenemos

$$t_1 = \frac{2 \cdot 20.5\, m/s \text{ sen } 60°}{9.8 \frac{m}{s^2}} = 3.62\, s \qquad (I)$$

Que reemplazamos en *(G)* para obtener

$$L = -30.5\, m + 20.5 \frac{m}{s} \cos 60° \; 3.62\, s = 6.63\, m \qquad (J)$$

Por lo tanto la posición en la cual Gastón encontrará la pelota es $\vec{r}(t_1) = (6.63\, m, 0\, m)$.

l) Ahora nuestro objeto de estudio es Gastón que también modelizamos como partícula. De acuerdo a nuestro Sistema de Coordenadas su movimiento está concentrado en el eje ***X***. Según plantea el enunciado, Gastón se mueve a velocidad constante que llamamos v_G, y como en el instante inicial se encuentra en el origen del Sistema de Coordenadas, las funciones que describen el movimiento de Gastón en función del tiempo son

$$\text{Posición:} \quad \begin{cases} x_G(t) = 0\, m + v_{G_x}\, t & (K) \\ y_G(t) = 0\, m & (L) \end{cases}$$

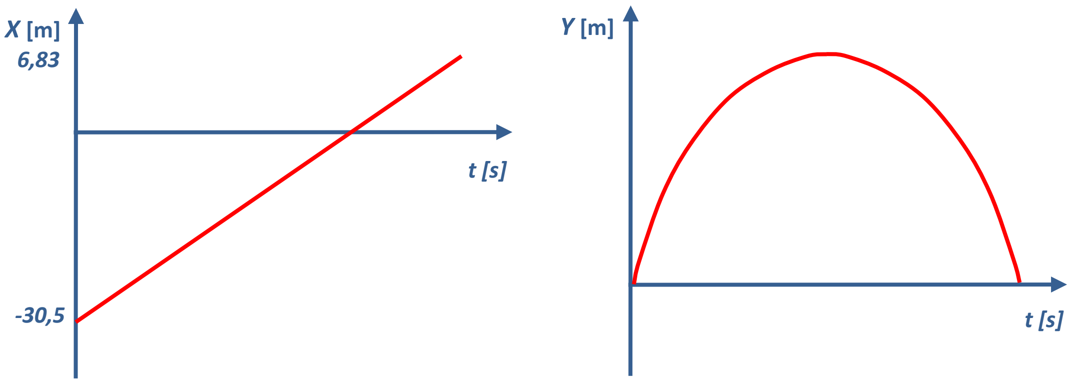
$$\text{Velocidad:} \quad \begin{cases} v_x(t) = v_{G_x} & (M) \\ v_y(t) = 0\, m/s & (N) \end{cases}$$

donde el subíndice G indica que estamos refiriéndonos a Gastón. Sabemos que en el instante de tiempo t_1, Gastón se encuentra justo en el lugar de la pelota. Es decir $x_G(t_1) = L$. Con lo cual la expresión *(K)* se transforma en la ecuación:

$$x_G(t_1) = L = v_{G_x}\, t_1 \qquad (O)$$

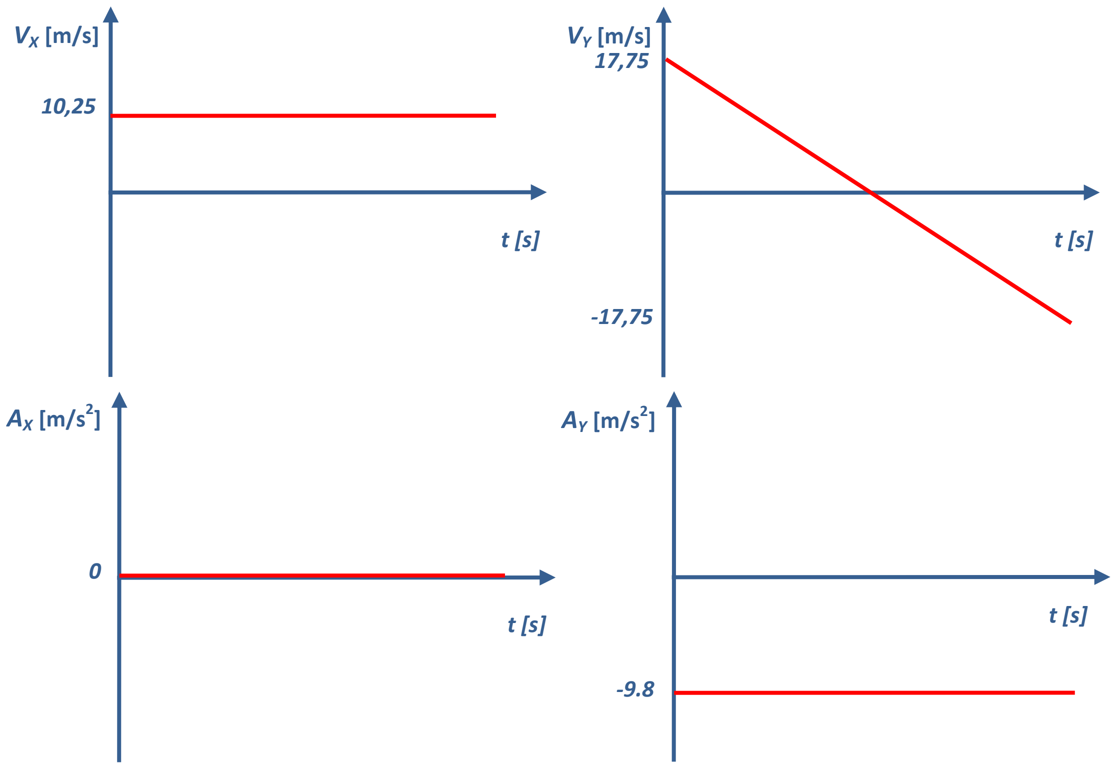
de donde podemos despejar v_G para obtener

$$v_{G_x} = \frac{L}{t_1} = \frac{6.63\, m}{3.62\, s} = 1.83\, m/s \qquad (P)$$



Con lo cual la velocidad con la que debía moverse Gastón era $\vec{v}(t) = (1.83\, m/s, 0\, m/s)$.

m) En este ítem debemos graficar las funciones obtenidas *(A)*, *(B)*, *(C)*, *(D)*, *(E)* y *(F)*. Estas gráficas son:


V_X [m/s]
10,25
t [s]
V_Y [m/s]
17,75
-17,75
t [s]
A_X [m/s^2]
0
t [s]
A_Y [m/s^2]
-9.8
t [s]