Cinematica dei sistemi rigidi
Meccanica 1

Francesco Demontis

0.1 Premessa

Questo materiale didattico è stato costruito due anni fa. Infatti nell'anno accademico 2009/2010 tenni una serie di lezioni sulla cinematica dei sistemi rigidi per il corso di Meccanica 1 (corso di Laurea in Matematica dell'Università di Cagliari). Il Prof. van der Mee (che era il titolare del corso) mi stimolò a raccogliere il materiale utilizzato per quelle lezioni sotto forma di dispense che lui stesso completò in alcune parti e inserì fra il materiale da distribuire agli studenti che hanno seguito Meccanica 1 negli anni accademici 2009/2010 e 2010/2011.

Questi due capitoli sulla cinematica dei sistemi rigidi sono, ora, messi a disposizione degli studenti che seguono il corso di Meccanica 2 (C.d.L. in Matematica) nell'anno accademico 2012/2013 con la speranza che siano per loro utili. Sono rilasciati così come sono e possono quindi contenere errori (spero non concettuali) e sviste. Sarò a grato a chiunque mi voglia segnalare i punti in cui la trattazione è poco chiara e/o lacunosa. Gli studenti troveranno tutto ciò che ho trattato in classe (anche se alcuni argomenti sono stati sviluppati in modo diverso da come sono descritti in queste dispense).

I libri che maggiormente ho consultato per elaborare questo materiale (e a cui rimando per eventuali approfondimenti) sono:

- T. Levi-Civita e U. Amaldi, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Volume 1, Zanichelli, Bologna 1974.
- G. Grioli, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Edizioni Libreria Cortina, Padova, 1994
- G. Ferrarese, *Lezioni di Meccanica Razionale*, Volume 1, Pitagora Editrice, Bologna, 1980

Chapter 1

Cinematica dei sistemi rigidi

In questo capitolo studiamo la cinematica dei **sistemi rigidi** formati da un numero finito o infinito di punti contenuti in una regione uni, bi o tridimensionale dello spazio ambiente. Ci occupiamo cioè di un qualunque sistema che, durante il moto, conserva inalterate le mutue distanze fra i suoi punti. In altre parole, un sistema di punti è detto rigido se, prendendo i punti a due a due in tutti i modi possibili, la distanza di ogni coppia non varia nel tempo.

1.1 Equazioni generali del moto

Supponiamo di aver fissato nello spazio ambiente una terna levogira $\Omega\xi\eta\zeta$ (i cui versori indichiamo con $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$) e di voler riferire ad esso il moto del nostro sistema rigido S. Consideriamo poi un'altra terna levogira $Oxyz$ (i cui versori denotiamo con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) invariabilmente collegata ad S. Chiamiamo *solidale* la terna $Oxyz$, mentre la terna $\Omega\xi\eta\zeta$ è detta *fissa*. Ogni punto P di S avrà posizione invariata rispetto a $Oxyz$ (cioè le coordinate di P sono costanti rispetto a $Oxyz$) pur muovendosi rispetto a $\Omega\xi\eta\zeta$ (cioè le coordinate di P sono funzioni del tempo rispetto a $\Omega\xi\eta\zeta$). Perciò il moto del generico punto P di S rispetto al sistema fisso è completamente determinato quando si conosca sia la posizione di P rispetto al riferimento solidale (tramite le coordinate costanti x, y, z di P rispetto a $Oxyz$) sia la posizione, istante per istante, del riferimento solidale rispetto a quello fisso (assegnando in funzione del tempo in riferimento a $\Omega\xi\eta\zeta$ l'origine O e i versori $\vec{i}, \vec{j}$ e $\vec{k}$ della terna solidale).

L'equazione del moto del generico punto P di S è la seguente

$$P = O + x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \tag{1.1.1}$$

dove $O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sono definiti in funzione del tempo relativamente alla terna fissa, mentre x, y, z sono costanti rispetto alla terna solidale. Indicate con ξ, η, ζ e con

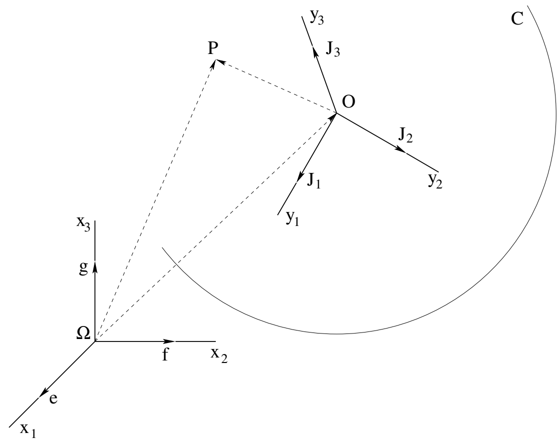


Figure 1.1.1: Coordinate fisse e solidali al sistema rigido.

α, β, γ le coordinate rispettivamente di P e O rispetto alla terna fissa, introdotti i coseni direttori di $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ come

$$\alpha_1 = \vec{i} \cdot \vec{e}, \quad \beta_1 = \vec{i} \cdot \vec{f}, \quad \gamma_1 = \vec{i} \cdot \vec{g}, \tag{1.1.2a}$$
$$\alpha_2 = \vec{j} \cdot \vec{e}, \quad \beta_2 = \vec{j} \cdot \vec{f}, \quad \gamma_2 = \vec{j} \cdot \vec{g}, \tag{1.1.2b}$$
$$\alpha_3 = \vec{k} \cdot \vec{e}, \quad \beta_3 = \vec{k} \cdot \vec{f}, \quad \gamma_3 = \vec{k} \cdot \vec{g}, \tag{1.1.2c}$$

si può proiettare l'equazione (1.1.1) lungo gli assi della terna fissa, ottenendo

$$\xi = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z, \tag{1.1.3a}$$
$$\eta = \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z, \tag{1.1.3b}$$
$$\zeta = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z, \tag{1.1.3c}$$

essendo $\vec{e}$, $\vec{f}$ e $\vec{g}$ i versori della terna fissa. Le (1.1.3) sono dette *equazioni generali del moto di un sistema rigido* poichè definiscono in funzione del tempo le coordinate del generico punto P di S rispetto alla terna fissa. Nelle (1.1.3) appaiono dodici funzioni del tempo: le coordinate di O (α, β, γ) e i nove coseni direttori $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ per $i = 1, 2, 3$. È utile però osservare che queste funzioni non sono indipendenti perchè i coseni direttori soddisfano le seguenti relazioni:

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1, \qquad \text{per } i = 1, 2, 3, \tag{1.1.4}$$
$$\alpha_i \alpha_h + \beta_i \beta_h + \gamma_i \gamma_h = 0, \quad \text{per } i \neq h = 1, 2, 3. \tag{1.1.5}$$

Quindi le (1.1.3) sono completamente individuate a meno di **sei** funzioni indipendenti e questo si esprimerà[1] dicendo che un sistema rigido è un sistema con sei gradi di libertà.

[1]La terminologia qui adottata stata introdotta in Meccanica 1.

È importante osservare che le (1.1.3) valgono, non solo per ogni punto del sistema rigido S, ma, anche, per ogni altro punto le cui coordinate sono costanti (durante il moto) rispetto alla terna solidale $Oxyz$. Quindi, dal moto di S resta definito un moto dell'*intero spazio dei punti rigidamente connessi a* S. In altre parole, si può pensare ad uno spazio solidale con il sistema S in moto rispetto allo spazio fisso[2] e sovrapposto a quest'ultimo. Quando si parla di moto rigido si intende proprio il moto di un intero *spazio rigido*. A tal proposito va anche rimarcato che un sistema rigido si muove senza dubbio di moto rigido, ma un moto può essere rigido sebbene l'ente fisico a cui esso si riferisce (cioè il sistema di punti S) sia deformabile.

Non è superfluo ribadire che supporremmo le funzioni α, β, γ e $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ continue e derivabili almeno fino al secondo ordine per tutto l'intervallo di tempo in cui è definito il moto.

1.2 Prima proprietà caratteristica dei moti rigidi

In un sistema rigido S comunque si prendano due punti P e Q, la loro distanza rimane inalterata durante tutto il moto. Questo fatto viene espresso in formule come

$$(P - Q)^2 = r^2, \tag{1.2.1}$$

essendo r costante. Derivando questa equazione rispetto al tempo si trova

$$2\,(P - Q) \cdot \left(\frac{dP}{dt} - \frac{dQ}{dt} \right) = 0, \tag{1.2.2}$$

o, equivalentemente

$$(P - Q) \cdot \frac{dP}{dt} = (P - Q) \cdot \frac{dQ}{dt}. \tag{1.2.3}$$

La (1.2.3) esprime l'uguaglianza delle componenti delle velocità dei punti P e Q secondo la retta congiungente i punti P e Q. La proprietà espressa dalla (1.2.3) caratterizza i moti rigidi nel senso seguente. Se il moto è rigido allora necessariamente vale la (1.2.3). Viceversa se vale la (1.2.3) per ogni coppia di punti allora il moto è rigido. Infatti la (1.2.3) è equivalente alla (1.2.2) e da quest'ultima si risale alla (1.2.1) per integrazione essendo r costante. Riassumendo i moti rigidi sono caratterizzati dalla seguente

> **Prima Proprietà Caratteristica:** *I moti rigidi di un sistema di punti sono caratterizzati dal fatto che, in ogni istante, le velocità di due punti qualunque del sistema hanno la stessa componente secondo la retta congiungente i due punti.*

[2]per spazio fisso si intende lo spazio solidale alla terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$

1.3 Moti rigidi particolari

In questa sezione vengono presentati alcuni tipi di moto rigido di grande importanza nelle applicazioni.

1.3.1 Moti rigidi traslatori

Un moto rigido si dice *traslatorio* se ogni vettore $P_2 - P_1$, determinato da due qualunque punti in moto, rimane costante in modulo, direzione e verso.

Evidentemente se un moto è traslatorio i tre versori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ del riferimento solidale devono restare costanti (per definizione di moto traslatorio). Non è difficile provare che vale anche il viceversa: se in un moto rigido i tre versori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ rimangono costanti allora il moto è traslatorio. Infatti, poichè $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ sono costanti per ipotesi, per ogni punto P il vettore $P - O$ rimane costante, e potendosi scrivere $P_2 - P_1 = (P_2 - O) - (P_1 - O)$ anche $P_2 - P_1$ si mantiene costante durante il moto e quindi il moto è traslatorio.

Non è difficile ottenere le equazioni cartesiane di un moto traslatorio. A tal fine, supponiamo di aver scelto gli assi della terna solidale in modo che inizialmente siano paralleli e abbiano lo stesso verso degli assi della terna fissa. Trattandosi di un moto traslatorio i versori $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ rimangono costanti durante il moto conservando le loro componenti (rispetto agli assi fissi) $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$, e le (1.1.3) diventano

$$\xi = \alpha + \alpha(t), \tag{1.3.1a}$$

$$\eta = \beta + \beta(t), \tag{1.3.1b}$$

$$\zeta = \gamma + \gamma(t), \tag{1.3.1c}$$

dove α, β, γ denotano le coordinate di un qualunque punto O solidale al sistema mobile.

L'identità che caratterizza i moti traslatori

$$P_2 - P_1 = \vec{c}, \tag{1.3.2}$$

dove $\vec{c}$ è un vettore costante, esprime il fatto che il moto di P_2 si può definire come quello dell'estremo di un vettore applicato costante, il cui punto di applicazione coincide istante per istante con P_1. Dalla (1.3.2) discende che *in un moto traslatorio le traiettorie dei singoli punti sono uguali e percorse con la stessa legge.* In particolare, derivando la (1.3.2) si trova

$$\frac{dP_2}{dt} = \frac{dP_1}{dt}. \tag{1.3.3}$$

La (1.3.3) afferma che in *un moto traslatorio tutti i punti del sistema hanno, istante per istante, la stessa velocità.*

Viceversa, se in un moto rigido in ogni istante tutti i punti hanno la stessa velocità allora il moto è traslatorio. Infatti, per ipotesi la (1.3.3) si mantiene per ogni coppia di punti P_1 e P_2 e, per integrazione, da questa si ottiene la (1.3.2) che caratterizza i moti traslatori. Quindi ogni moto traslatorio è caratterizzato da un vettore (che dipende esclusivamente dal tempo) che istante per istante fornisce la velocità comune a ogni punto del sistema. Questo vettore è detto velocità del moto traslatorio e si può eleggere come suo rappresentante la velocità di uno qualunque dei punti del sistema, per esempio quella del punto O.

Derivando la (1.3.3) rispetto al tempo si vede subito che in un moto traslatorio tutti i punti hanno istante per istante la stessa accelerazione. Quindi, in un moto traslatorio, è sensato parlare di accelerazione del moto traslatorio e tale vettore è individuato, in un dato istante, dall'accelerazione di un qualunque punto del sistema rigido.

1.3.2 Moti rigidi rotatori

Un altro notevole esempio di moto rigido è il *moto rotatorio*, cioè il moto in cui rimangono fissi tutti i punti di una retta che si chiama asse di *rotazione.* Per la condizione di rigidità, si ottiene un simile moto fissando due punti di tale asse, che d'ora in avanti chiameremo asse z.

Consideriamo un sistema mobile S animato di moto rotatorio rispetto all'asse z e sia P un punto del sistema non appartenente all'asse di rotazione. Se indichiamo con Q il punto d'intersezione fra la retta passante per P e perpendicolare all'asse z e l'asse z, per l'ipotesi di rigidità la lunghezza del segmento di estremi P e Q non varia e tale segmento rimane sempre perpendicolare all'asse z. In altre parole, un generico punto P del sistema mobile non appartente all'asse di rotazione si muove sulla circonferenza del piano ortogonale all'asse z il cui centro Q appartiene all'asse z. Quindi, la posizione del sistema mobile sarà individuata quando si conosce, istante per istante, la posizione di un suo punto P non appartenente all'asse. Equivalentemente, la posizione del sistema mobile è individuata qualora sia nota la posizione di un semipiano p uscente dall'asse e solidale con S. Tale posizione di p è assegnata, in ogni istante, tramite l'angolo (o anomalia) $\theta = \widehat{\pi p}$ formato fra un determinato semipiano π uscente dall'asse z e solidale alla terna fissa di riferimento e il semipiano p (anch'esso uscente da z ma solidale alla terna mobile). È conveniente dare un segno all'angolo θ appena introdotto. A tale scopo, orientato ad arbitrio l'asse z, si assume come verso positivo di θ quello destro rispetto all'asse z orientato. L'anomalia è una funzione del tempo $\theta(t)$ che supporremo essere continua e derivabile (almeno fino al secondo ordine). È interessante notare che, sebbene l'intervallo da 0 a 2π sia sufficiente a individuare tutte le possibili posizioni del semipiano p attorno all'asse z, per garantire la sopra accennata continuità della funzione $\theta(t)$ si è soliti ammettere che θ vari anche al di là di questo intervallo.

Osserviamo che, se in un certo intervallo di tempo Δt, l'anomalia del semipiano p varia di $\Delta\theta$, allora tutti i punti del sistema mobile S (in quello stesso intervallo di tempo) descrivono sulle rispettive traiettorie circolari archi di circonferenza il cui angolo al centro è $\Delta\theta$; perciò considerando il seguente limite

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta},$$

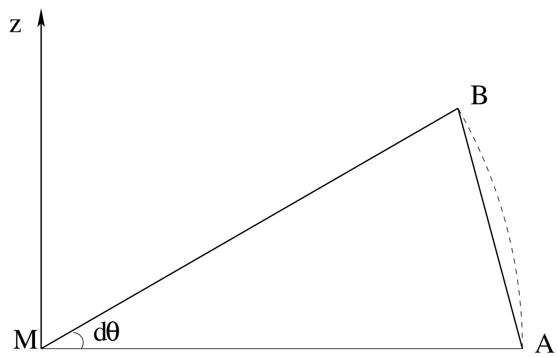


Figure 1.3.1: Angolo di rotazione.

possiamo concludere che: *ad ogni istante tutti i punti di un sistema S animato di moto rotatorio hanno la stessa velocità angolare $\dot{\theta}$.* La velocità angolare è una funzione del tempo e il suo segno positivo o negativo indica, ad ogni istante, se il moto rotatorio è destro o sinistro rispetto all'asse orientato.

Quindi per definire un moto rotatorio occorre specificare la velocità angolare $\dot{\theta}$ e l'asse di rotazione z. Per questo motivo, si è soliti intodurre il **vettore velocità angolare** $\vec{\omega}$. Tale vettore è definito come segue: ha per lunghezza il modulo della velocità angolare $\dot{\theta}$ (cioè, $|\dot{\theta}|$), per direzione quella dell'asse di rotazione e per verso quello rispetto al quale il moto appare destro. In base a questa definizione, se $\vec{k}$ rappresenta il versore dell'asse z, possiamo scrivere

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}\,. \tag{1.3.4}$$

Osserviamo che il vettore velocità angolare ha modulo generalmente variabile, ma direzione costante.

L'introduzione del vettore velocità angolare consente di ottenere facilmente la velocità di ogni punto P del sistema rotante S. Infatti, da quanto scritto sopra sappiamo che:

a. ogni punto P non appartenente all'asse z si muove di moto circolare nel piano ortogonale a tale asse lungo la circonferenza avente centro nel punto Q proiezione ortogonale di P su z;

b. Il punto P percorre la circonferenza descritta sopra con velocità angolare $\dot{\theta}$.

Quindi, tenendo conto delle proprietà dei moti circolari, possiamo affermare che la velocità (vettoriale) del punto P ha modulo $\dot{\theta}\,\overline{QP}$, è, istante per istante, diretta tangenzialmente alla circonferenza di centro Q e raggio QP (nel piano ortogonale all'asse di rotazione) e, per le convenzioni adottate, appare destra rispetto al vettore $\vec{\omega}$. Quindi la velocità del punto P risulta essere simultaneamente ortogonale a $\vec{\omega}$ e al vettore $P-Q$ risultando inoltre destra rispetto a $\vec{\omega}$. Allora, ricordando la definizione di momento rispetto a un punto di un vettore applicato, si osserva facilmente che la velocità $\vec{v}_P$ del punto P è proprio espressa dal momento rispetto a P del vettore $\vec{\omega}$ rispetto a un qualunque punto dell'asse z. Indicato con Ω il generico punto dell'asse z di rotazione, si ha

$$\vec{v}_P = (\Omega - P) \wedge \vec{\omega},$$

e, per le proprietà del prodotto vettoriale,

$$\vec{v}_P(t) = \vec{\omega}(t) \wedge (P(t) - \Omega) \ , \tag{1.3.5}$$

dove $\vec{\omega}$ è un vettore di direzione fissa (quella dell'asse di rotazione) e Ω è un qualunque punto (fisso) dell'asse. La (1.3.5) esprime quindi la velocità angolare di un generico punto P di un sistema rotante.

Ricavare l'accelerazione del generico punto P di un sistema rotante è ora molto semplice; basta infatti derivare la (1.3.5) rispetto al tempo, ottenendo

$$\vec{a}_P(t) = \dot{\vec{\omega}}(t) \wedge (P(t) - \Omega) + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_P(t) \, . \tag{1.3.6}$$

Si prova facilmente che la (1.3.6) può scriversi, in modo equivalente, nel seguente modo

$$\vec{a}_P(t) = \dot{\vec{\omega}}(t) \wedge (P(t) - \Omega) - |\vec{\omega}|^2 (P - Q) \, , \tag{1.3.7}$$

essendo Q la proiezione del punto P sull'asse di rotazione. Per verificare l'uguaglianza delle formule (1.3.6) e (1.3.7) basta sostituire la (1.3.5) nella (1.3.6) e tener conto della regola del doppio prodotto vettoriale. I dettagli di questi calcoli sono omessi in quanto sono molto simili a quelli che svilupperemo per ricavare la (1.5.6).

Osserviamo ora che la (1.3.5) caratterizza completamente i moti rotatori. Infatti, se un sistema è animato di moto rotatorio, allora (per quanto mostrato sopra) tutti i punti del sistema hanno velocità espresse tramite la (1.3.5). Viceversa, possiamo provare che se tutti i punti del sistema hanno velocità espresse dalle (1.3.5) allora il moto è un moto rigido rotatorio. Dimostrare quest'ultima proprietà è abbastanza semplice. Siano infatti P_1 e P_2 due generici punti del sistema tali che le loro velocità siano espresse (conformemente alla (1.3.5)) da:

$$\vec{v}_{P_1}(t) = \vec{\omega}(t) \wedge (P_1(t) - \Omega) \ , \quad \vec{v}_{P_2}(t) = \vec{\omega}(t) \wedge (P_2(t) - \Omega) \, .$$

Sottraendo membro a membro dalla prima delle ultime due equazioni la seconda si trova

$$\vec{v}_{P_1}(t) - \vec{v}_{P_2}(t) = \vec{\omega}(t) \wedge (P_1(t) - P_2(t)) \ , \tag{1.3.8}$$

e, tenuto conto che per definizione di prodotto vettoriale $\vec{\omega}(t) \wedge (P_1(t) - P_2(t))$ è perpendicolare a $P_1(t) - P_2(t)$, moltiplicando scalarmente ambo i membri di (1.3.8) per $P_1(t) - P_2(t)$, troviamo

$$(\vec{v}_{P_1}(t) - \vec{v}_{P_2}(t)) \cdot (P_1(t) - P_2(t)) = 0$$

che (confronta con (1.2.3)) esprime il fatto che il moto è rigido. Per dimostrare che tale moto è anche rotatorio, è sufficiente osservare che dalla (1.3.5) segue che tutti i punti P per cui il vettore $P - \Omega$ è parallelo al vettore di direzione fissa $\vec{\omega}$ (cioè i punti della retta parallela ad $\vec{\omega}$ passante per Ω) hanno velocità nulla, cioè sono fissi.

Chiudiamo questa sezione ricavando dalle (1.1.3) le equazioni di un moto rotatorio nella forma più semplice possibile. A tal fine supponiamo che l'asse di rotazione coincida con l'asse z della terna mobile e supponiamo che a sua volta quest'asse coincida con l'asse ζ della terna fissa. Fissiamo l'origine comune $O = \Omega$ in un punto qualsiasi dell'asse z e assumiamo come semiassi positivi x e ξ (rispettivamente della terna mobile e di quella fissa) i due semiassi perpendicolari all'asse z e appartenenti rispettivamente al semipiano p e π introdotti in questo paragrafo per definire l'anomalia θ. Allora, per definizione della funzione θ si avrà, $\widehat{\xi x} = \theta(t)$ e $\widehat{\xi y} = \theta(t) + \frac{\pi}{2}$ dove con y si è denotato l'asse y della terna mobile. Ora, usando le (1.1.2) si trova subito

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1 = \vec{i} \cdot \vec{e} = \cos\theta, \quad \beta_1 = \vec{i} \cdot \vec{f} = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = \sin\theta, \quad \gamma_1 = \vec{i} \cdot \vec{g} = 0, \\
&\alpha_2 = \vec{j} \cdot \vec{e} = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = -\sin\theta, \quad \beta_2 = \vec{j} \cdot \vec{f} = \cos\theta, \quad \gamma_2 = \vec{j} \cdot \vec{g} = 0, \\
&\alpha_3 = \vec{k} \cdot \vec{e} = 0, \quad \beta_3 = \vec{k} \cdot \vec{f} = 0, \quad \gamma_3 = \vec{k} \cdot \vec{g} = 1,
\end{aligned}
$$

e, poichè $\alpha = \beta = \gamma = 0$ dalle (1.1.3) si trovano le equazioni cercate per il moto rotatorio, cioè

$$
\begin{cases}
\xi = x\cos\theta - y\sin\theta\,, \\
\eta = x\sin\theta + y\cos\theta\,, \\
\zeta = z\,,
\end{cases}
\tag{1.3.9}
$$

essendo θ funzione del tempo. Se si eseguisse la derivata delle (1.3.9) si ricaverebbero le proiezioni dell'equazione (1.3.5) lungo gli assi della terna fissa.

1.3.3 Moti rigidi rototraslatori

Nelle due precedenti sezioni abbiamo incontrato due particolari moti rigidi:

1. I moti traslatori che si caratterizzano per il fatto che ad ogni istante tutti i punti hanno la stessa velocità che sarà perciò rappresentata da un vettore $\vec{\tau}$, dipendente esclusivamente dal tempo;

2. I moti rotatori in cui la velocità di ogni punto è espressa da

   $$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - \Omega)\ ,$$

   essendo Ω un punto fisso (arbitrariamente fissato sull'asse di rotazione) e $\vec{\omega}$ un vettore puramente temporale avente direzione fissa (parallela all'asse di rotazione).

Possiamo allora considerare un moto in cui la velocità del generico punto P sia espressa nel seguente modo:

$$\vec{v}_P = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P - \Omega)\ , \tag{1.3.10}$$

con $\vec{\tau}$, Ω e $\vec{\omega}$ che soddisfano le stesse proprietà che avevano, rispettivamente, nei moti traslatori e rotatori. Un moto in cui la velocità del generico punto P è data da (1.3.10) è necessariamente un moto rigido. Infatti, se P_1 e P_2 sono due punti arbitrari del sistema mobile, allora le loro velocità, conformemente a (1.3.10), saranno

$$\vec{v}_{P_1} = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P_1 - \Omega) \ , \quad \vec{v}_{P_2} = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P_2 - \Omega) \ .$$

Sottraendo dalla seconda di queste ultime equazioni la prima, si trova

$$\vec{v}_{P_2} - \vec{v}_{P_1} = \vec{\omega} \wedge (P_2 - P_1) \ ,$$

e, moltiplicando scalarmente questa equazione per $P_2 - P_1$, otteniamo

$$(\vec{v}_{P_1} - \vec{v}_{P_2}) \cdot (P_1 - P_2) = 0 \, ,$$

che, in base a quanto mostrato nella Sezione 1.2, assicura la rigidità del moto.

Il moto rigido così definito si dice *rototraslatorio*. Tale nome evidenzia come, in un moto rototraslatorio, la velocità di un generico punto P è, istante per istante, somma delle due velocità $\vec{\tau}$ e $\vec{\omega} \wedge (P - \Omega)$ che al punto P competerebbero in due dati moti rigidi, uno traslatorio e uno rotatorio.

Consideriamo ora un punto O solidale al sistema rigido animato di moto rototraslatorio. Allora per la (1.3.10), la velocità di tale punto sarà data da

$$\vec{v}_O = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P - O) \ , \tag{1.3.11}$$

e sottraendo questa identità membro a membro dalla (1.3.10) si ottiene

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P - O) \ . \tag{1.3.12}$$

La (1.3.12) presenta una notevole somiglianza con la (1.3.10) da cui differisce per il fatto che il punto O non è un punto fisso ma solidale al sistema. Quindi la decomposizione espressa da (1.3.12) è differente dalla (1.3.10) usata per definire un moto rototraslatorio. Tuttavia osserviamo che la (1.3.11) mette in evidenza che il vettore $\vec{v}_O$ è puramente temporale (come $\vec{\tau}$) e inoltre, il prodotto vettoriale $\vec{\omega} \wedge (P - O)$ è analogo al prodotto vettoriale $\vec{\omega} \wedge (P - \Omega)$ solo rispetto a un sistema di riferimento in cui il punto O è fisso e $\vec{\omega}$ ha direzione fissa. Una simile terna è (tenendo conto che la direzione degli assi della terna fissa è invariabile) quella che ha l'origine in O e assi paralleli a quelli della terna fissa e che, quindi, si muove con O di moto traslatorio con velocità $\vec{v}_O$.

La decomposizione fornita dalla (1.3.10) si dice *propria*, mentre la decomposizione espressa dalla (1.3.12) si dice *impropria*. Si noti che, al variare della scelta del punto O solidale al sistema, si ottengono per le velocità di uno stesso moto rototraslatorio infinite decomposizioni improprie diverse.

1.3.4 Moti rigidi elicoidali

Fra i moti rototraslatori rivestono un particolare interesse quelli in cui i vettori $\vec{\tau}$ e $\vec{\omega}$ sono entrambi costanti rispetto alla terna fissa. Tali moti vengono detti *rototraslatori uniformi* o anche *moti elicoidali*. I moti elicoidali sono caratterizzati dal seguente

Theorem 1.3.1 *In ogni moto elicoidale esiste, per la velocità del generico punto P del sistema mobile, una decomposizione propria in cui il componente traslatorio è parallelo alla velocità angolare del componente rotatorio.*

Proof. La velocità del generico punto P in un dato moto elicoidale è data da

$$\vec{v}_P = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (P - \Omega)\,, \tag{1.3.13}$$

con $\vec{\tau}$ e $\vec{\omega}$ costanti. Escludiamo i casi in cui il moto sia rotatorio ($\vec{\tau} = \vec{0}$), traslatorio ($\vec{\omega} = \vec{0}$) o il caso in cui $\vec{\tau}//\vec{\omega}$ (in quest'ultimo caso non c'è nulla da dimostrare!). Possiamo allora decomporre $\vec{\tau}$ nel componente $\vec{\tau}_p$ secondo la direzione fissa di $\vec{\omega}$ e nel componente $\vec{\tau}_n$ normale alla direzione di $\vec{\omega}$ in modo che si abbia

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_p + \vec{\tau}_n, \tag{1.3.14}$$

dove $\vec{\tau}_p$ e $\vec{\tau}_n$ sono costanti e $\vec{\tau}_n$ è non nullo. Poichè $\vec{\tau}_n$ e $\vec{\omega}$ sono ortogonali, esiste un vettore $\vec{a}$, ortogonale a $\vec{\tau}_n$ e $\vec{\omega}$, tale che

$$\vec{\tau}_n = -\vec{\omega} \wedge \vec{a}. \tag{1.3.15}$$

Per determinare il vettore $\vec{a}$ basta moltiplicare vettorialmente a sinstra ambo i membri della precedente equazione per $\vec{\omega}$ e, tenendo conto della regola del doppio prodotto vettoriale, si trova

$$\vec{\omega} \wedge \vec{\tau}_n = -\left(\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{a})\right) = -(\vec{\omega} \cdot \vec{a})\vec{\omega} + |\vec{\omega}|^2 \vec{a} = |\vec{\omega}|^2 \vec{a},$$

da cui $\vec{a} = \dfrac{\vec{\omega} \wedge \vec{\tau}_n}{|\vec{\omega}|^2}$. Utilizzando le (1.3.13), (1.3.14) e (1.3.15) si ottiene

$$\vec{v}_P = \vec{\tau}_p + \vec{\omega} \wedge (P - \Omega) - \vec{\omega} \wedge \vec{a} = \vec{\tau}_p + \vec{\omega} \wedge (P - (\Omega + \vec{a}))\,,$$

e, poichè $\vec{a}$ è un vettore costante, il punto $\Omega_1 = \Omega + \vec{a}$ risulta fisso. Perciò l'ultima equazione fornisce

$$\vec{v}_P = \vec{\tau}_p + \vec{\omega} \wedge (P - \Omega_1)\,, \tag{1.3.16}$$

e questa equazione fornisce la decomposizione propria di cui il teorema afferma l'esistenza. ∎

La decomposizione (1.3.16) mostra che, ad eccezione del caso in cui $\vec{\tau}_p = \vec{0}$ (corrispondente a un moto rotatorio), la velocità di un punto P è data dalla somma di due vettori $\vec{\tau}_p$ e $\vec{\omega} \wedge (P - \Omega_1)$. Il primo di questi due vettori è parallelo a $\vec{\omega}$ mentre il secondo è ortogonale a $\vec{\omega}$. Questo suggerisce di considerare la retta ζ passante per il punto fisso Ω_1 e parallela a $\vec{\omega}$ e il piano π passante per Ω_1 e perpendicolare a $\vec{\omega}$. Infatti, i due addendi $\vec{\tau}_p$ e $\vec{\omega} \wedge (P - \Omega_1)$ rappresentano le velocità delle proiezioni ortogonali P_ζ e P_1 di P su ζ e π rispettivamente. Poichè

$\vec{\tau}_p$ è costante, il moto di P_ζ è rettilineo uniforme. Per quanto riguarda il moto di P_1, potendosi scrivere

$$P - \Omega_1 = (P - P_1) + (P_1 - \Omega_1),$$

con $P - P_1$ parallelo a $\vec{\omega}$, si ha

$$\vec{v}_{P_1} = \vec{\omega} \wedge (P_1 - \Omega_1)\,,$$

e tale moto è, quindi, rotatorio uniforme intorno a Ω_1. Quindi il moto risultante del generico punto P del sistema è elicoidale uniforme (essendo ottenuto componendo un moto rettilineo uniforme e un moto rotatorio uniforme) e l'asse di tale moto è la retta ζ passante per Ω_1 e avente la direzione di $\vec{\omega}$ e $\vec{\tau}_p$.

Chiudiamo questa sottosezione ricavando le equazioni del moto elicoidale. A tale scopo scegliamo come terna mobile $Oxyz$ una qualunque terna solidale con il sistema rigido in modo che l'asse z coincida con la retta ζ e sia orientato come $\vec{\omega}$; si scelga invece come terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$ la posizione assunta da $Oxyz$ all'istante $t = 0$.

Si verifica immediatamente che la componente di $\vec{\tau}_p$ lungo $\Omega\zeta$ sarà $\pm|\vec{\tau}_p|$ a seconda che $\vec{\tau}_p$ e $\vec{\omega}$ abbiano verso concorde oppure no.

Se ora consideriamo le proiezioni P_ζ e P_1 del generico punto P rispettivamente lungo l'asse ζ e sul piano $\xi\eta$, avremo:

a. Il punto P_ζ descrive la retta ζ con moto uniforme avente velocità $\pm|\vec{\tau}_p|$. Poichè per $t = 0$ si ha $\zeta = z$, l'equazione del moto è

$$\zeta = \pm|\vec{\tau}_p|t + z. \tag{1.3.17}$$

b. Il punto P_1 ruota invece nel piano $\xi\eta$ di moto circolare uniforme intorno a Ω con velocità angolare $\dot{\theta} = \omega$ essendo θ l'anomalia dell'asse mobile Ox rispetto a quello fisso $O\xi$. Chiaramente si ha $\theta = \omega t$. Quindi le equazioni del moto di P_1 si ottengono ponendo $\theta = \omega t$ nelle prime due equazioni di (1.3.9), ottenendo:

$$\begin{cases} \xi = x\cos\omega t - y\sin\omega t\,, \\ \eta = x\sin\omega t + y\cos\omega t\,. \end{cases} \tag{1.3.18}$$

Le equazioni cercate si ottengono mettendo insieme le (1.3.17) e (1.3.18); si perviene così alle equazioni del moto elicoidale:

$$\begin{cases} \xi = x\cos\omega t - y\sin\omega t\,, \\ \eta = x\sin\omega t + y\cos\omega t\,, \\ \zeta = \pm|\vec{\tau}_p|t + z\,. \end{cases} \tag{1.3.19}$$

1.4 Moti rigidi generali

In questa sezione vengono studiati i moti rigidi nel caso più generale.

1.4.1 Formule di Poisson

Per determinare la velocità di un generico punto P di un sistema rigido S occorre derivare la (1.1.1) ottenendo

$$\vec{v}_P = \vec{v}_O + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}.$$

Quindi, per poter esprimere in modo opportuno la velocità del punto P occorre considerare le derivate dei versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ rispetto al tempo. Per comodità introduciamo la seguente notazione: indichiamo i versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ rispettivamente con $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$. Sussiste il seguente

Theorem 1.4.1 (*Formule di Poisson*[3]) *Esiste un unico vettore $\vec{\omega}$ (lo stesso per tutti e tre gli assi x, y e z) tale che*

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_1, \quad \frac{d\vec{j}_2}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_2, \quad \frac{d\vec{j}_3}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{j}_3. \tag{1.4.1}$$

Proof. Dividiamo la dimostrazione in tre parti

1. Costruzione del vettore $\vec{\omega}$ (**il vettore velocità angolare**);
2. Verifica che il vettore velocità angolare soddisfa le (1.4.1);
3. Verifica che il vettore $\vec{\omega}$ non dipende dalla particolare terna solidale scelta.

Per costruire il vettore $\vec{\omega}$ procediamo nel seguente modo: Dopo aver moltiplicato vettorialmente a destra la (1.4.1) per $\vec{j}_1$, troviamo (utilizzando la regola del doppio prodotto vettoriale):

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} \wedge \vec{j}_1 = \left(\vec{\omega} \wedge \vec{j}_1\right) \wedge \vec{j}_1 = \left(\vec{\omega} \cdot \vec{j}_1\right) \vec{j}_1 - \left(\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_1\right) \vec{\omega} = \omega_x \vec{j}_1 - \vec{\omega}\,, \tag{1.4.2}$$

essendo ω_x la componente del vettore $\vec{\omega}$ rispetto all'asse x. Facendo calcoli molto simili, si ottengono le seguenti relazioni:

$$\frac{d\vec{j}_2}{dt} \wedge \vec{j}_2 = \omega_y \vec{j}_2 - \vec{\omega}, \tag{1.4.3a}$$

$$\frac{d\vec{j}_2}{dt} \wedge \vec{j}_3 = \omega_z \vec{j}_3 - \vec{\omega}\,, \tag{1.4.3b}$$

dove ω_y, ω_z rappresentano le componenti del vettore $\vec{\omega}$ rispetto agli assi y e z, rispettivamente. Quindi, sommando (1.4.2), (1.4.3a) e (1.4.3b), abbiamo:

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{d\vec{j}_i}{dt} \wedge \vec{j}_i = \omega_x \vec{j}_1 - \vec{\omega} + \omega_y \vec{j}_2 - \vec{\omega} + \omega_z \vec{j}_3 - \vec{\omega} = \left(\omega_x \vec{j}_1 + \omega_y \vec{j}_2 + \omega_z \vec{j}_3\right) - 3\vec{\omega} = -2\vec{\omega}\,.$$

[3]Siméon Denis Poisson nato a Pithiviers nel 1781 morto nel 1840 a Parigi dove insegnò Meccanica Razionale alla École Polytechnique. Le formule riportate in questo teorema si trovano nel suo testo Traité de Mécanique.

In altre parole, abbiamo ottenuto

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{d\vec{j}_i}{dt} \wedge \vec{j}_i = -2\vec{\omega}$$

e, tenendo conto delle proprietà del prodotto vettoriale, quest'ultima equazione può riscriversi come

$$\sum_{i=1}^{3} \vec{j}_i \wedge \frac{d\vec{j}_i}{dt} = 2\vec{\omega}.$$

Quindi il vettore $\vec{\omega}$ è dato da

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \left(\vec{j}_i \wedge \frac{d\vec{j}_i}{dt} \right) . \tag{1.4.4}$$

Abbiamo così costruito il vettore $\vec{\omega}$ di cui il teorema afferma l'esistenza. È utile verificare che il vettore dato dalla (1.4.4) soddisfa le (1.4.1). Eseguiamo tale verifica solo per la prima delle (1.4.1) in quanto la verifica per le altre due equazioni è simile. Ci serviremo delle due proprietà contenute nel seguente

Lemma 1.4.2 *Abbiamo le seguenti identità:*

$$\frac{d\vec{j}_r}{dt} \cdot \vec{j}_s = -\frac{d\vec{j}_s}{dt} \cdot \vec{j}_r, \tag{1.4.5a}$$

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_2 \right) \vec{j}_2 + \left(\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_3 \right) \vec{j}_3 \,. \tag{1.4.5b}$$

Proof. La dimostrazione di (1.4.5a) segue dal fatto che, indicato con δ_{rs} il Delta di Kronecker, si ha $0 = \frac{d(\vec{j}_r \cdot \vec{j}_s)}{dt} = \frac{d\vec{j}_r}{dt} \cdot \vec{j}_s + \frac{d\vec{j}_s}{dt} \cdot \vec{j}_r$.
La dimostrazione di (1.4.5b) è immediata se nella seguente (ben nota!) identità

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{j}_1)\vec{j}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{j}_2)\vec{j}_2 + (\vec{v} \cdot \vec{j}_3)\vec{j}_3,$$

si pone $\vec{v} = \frac{d\vec{j}_1}{dt}$ e si tiene conto che $\frac{d\vec{j}_1}{dt} \cdot \vec{j}_1 = 0$ avendo $\vec{j}_1$ modulo costante. ∎

Possiamo ora facilmente verificare la prima delle (1.4.1). Infatti, si ha:

$$
\begin{aligned}
&\vec{\omega} \wedge \vec{j}_1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} \vec{j}_i \wedge \frac{d\vec{j}_i}{dt}\right) \wedge \vec{j}_1 \\
&= \frac{1}{2}\left[(\vec{j}_1 \wedge \frac{d\vec{j}_1}{dt}) \wedge \vec{j}_1 + (\vec{j}_2 \wedge \frac{d\vec{j}_2}{dt}) \wedge \vec{j}_1 + (\vec{j}_3 \wedge \frac{d\vec{j}_3}{dt}) \wedge \vec{j}_1\right] \\
&= \frac{1}{2}\Bigg[(\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_1)\frac{d\vec{j}_1}{dt} - (\vec{j}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_1}{dt})\vec{j}_1 + (\vec{j}_1 \cdot \vec{j}_2)\frac{d\vec{j}_2}{dt} - (\vec{j}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_2}{dt})\vec{j}_2 + (\vec{j}_3 \cdot \vec{j}_1)\frac{d\vec{j}_3}{dt} \\
&- (\vec{j}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_3}{dt})\vec{j}_3\Bigg] = \frac{1}{2}\left[\frac{d\vec{j}_1}{dt} - (\vec{j}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_2}{dt})\vec{j}_2 - (\vec{j}_1 \cdot \frac{d\vec{j}_3}{dt})\vec{j}_3\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{d\vec{j}_1}{dt} + (\vec{j}_2 \cdot \frac{d\vec{j}_1}{dt})\vec{j}_2 + (\vec{j}_3 \cdot \frac{d\vec{j}_1}{dt})\vec{j}_3\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{d\vec{j}_1}{dt} + \frac{d\vec{j}_1}{dt}\right] = \frac{d\vec{j}_1}{dt},
\end{aligned}
$$

dove nelle ultime due uguaglianze ci si è serviti di (1.4.5a) e (1.4.5b).

Resta solo da provare che il vettore $\vec{\omega}$ non dipende dalla scelta della terna solidale. A tal fine sia $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ un altro riferimento (ortonormale) solidale e, per assurdo, sia $\vec{\omega}_1 (\neq \vec{\omega})$ il vettore costruito tramite le (1.4.4), si avrebbe quindi:

$$
\vec{\omega}_1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \wedge \frac{d\vec{e}_i}{dt}\right). \tag{1.4.6}
$$

Se indichiamo con α_{rs}, $(r,\, s = 1, 2, 3)$ i coseni direttori che i versori $\vec{e}_r$ formano con gli assi $\vec{j}_s$, cioè esplicitamente

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{11} = \vec{j}_1 \cdot \vec{e}_1, \quad \alpha_{12} = \vec{j}_2 \cdot \vec{e}_1, \quad \alpha_{13} = \vec{j}_3 \cdot \vec{e}_1, \\
&\alpha_{21} = \vec{j}_1 \cdot \vec{e}_2, \quad \alpha_{22} = \vec{j}_2 \cdot \vec{e}_2, \quad \gamma_{23} = \vec{j}_3 \cdot \vec{e}_2, \\
&\alpha_{31} = \vec{j}_1 \cdot \vec{e}_3, \quad \beta_{32} = \vec{j}_2 \cdot \vec{e}_3, \quad \gamma_{33} = \vec{j}_3 \cdot \vec{e}_3,
\end{aligned}
$$

possiamo esprimere i versori $\vec{e}_r$ in funzione di $\vec{j}_s$ facilmente nel seguente modo:

$$
\vec{e}_1 = \alpha_{11}\vec{j}_1 + \alpha_{12}\vec{j}_2 + \alpha_{13}\vec{j}_3 = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{1s}\vec{j}_s\,, \tag{1.4.7}
$$

$$
\vec{e}_2 = \alpha_{21}\vec{j}_1 + \alpha_{22}\vec{j}_2 + \alpha_{23}\vec{j}_3 = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{2s}\vec{j}_s\,, \tag{1.4.8}
$$

$$
\vec{e}_3 = \alpha_{31}\vec{j}_1 + \alpha_{32}\vec{j}_2 + \alpha_{33}\vec{j}_3 = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{3s}\vec{j}_s\,. \tag{1.4.9}
$$

Usando le (1.4.7), si trova

$$
\begin{aligned}
\vec{\omega}_1 &= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \wedge \frac{d\vec{e}_i}{dt}\right) = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_1 \wedge \frac{d\vec{e}_1}{dt} + \vec{e}_2 \wedge \frac{d\vec{e}_2}{dt} + \vec{e}_3 \wedge \frac{d\vec{e}_3}{dt}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\sum_{s=1}^{3} \alpha_{1s}\vec{j}_s \wedge \left(\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{3} \alpha_{1k}\vec{j}_k\right)\right) + \sum_{s=1}^{3} \alpha_{2s}\vec{j}_s \wedge \left(\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{3} \alpha_{2k}\vec{j}_k\right)\right)\right. \\
&\left. + \sum_{s=1}^{3} \alpha_{3s}\vec{j}_s \wedge \left(\frac{d}{dt}\left(\sum_{k=1}^{3} \alpha_{3k}\vec{j}_k\right)\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\sum_{s=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} (\alpha_{1s}\alpha_{1k})\,\vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt} + \sum_{s=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} (\alpha_{2s}\alpha_{2k})\,\vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt}\right. \\
&\left. + \sum_{s=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} (\alpha_{3s}\alpha_{3k})\,\vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\sum_{s=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{l=1}^{3} \alpha_{ls}\alpha_{lk}\right)\vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt}\right\}. \qquad (1.4.10)
\end{aligned}
$$

Si è cioè ottenuto

$$
\vec{\omega}_1 = \frac{1}{2}\left\{\sum_{s=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{l=1}^{3} \alpha_{ls}\alpha_{lk}\right)\vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt}\right\}.
$$

A questo punto si può facilmente verificare che il coefficiente del vettore $\vec{j}_s \wedge \frac{d\vec{j}_k}{dt}$ vale 1 se $s = k$, 0 se $s \neq k$, quindi

$$
\vec{\omega}_1 = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} \vec{j}_i \wedge \frac{d\vec{j}_i}{dt}\right),
$$

e la dimostrazione è ora completa. ∎

1.4.2 Derivata temporale di un vettore solidale al sistema rigido

È possibile compattare le formule di Poisson in un'unica formula. A tal fine ricordiamo che $\vec{a}$ rappresenta un vettore solidale al corpo rigido in moto se le componenti a_x, a_y, a_z di tale vettore rispetto alla terna solidale $\vec{j}_1$, $\vec{j}_2$, $\vec{j}_3$ non dipendono dal tempo. Quindi, derivando rispetto al tempo l'identità

$$
\vec{a} = a_x\vec{j}_1 + a_y\vec{j}_2 + a_z\vec{j}_3
$$

e tenendo conto delle formule di Poisson (1.4.1), si trova

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{a}}{dt} &= a_x\frac{d\vec{i}}{dt} + a_y\frac{d\vec{j}}{dt} + a_z\frac{d\vec{k}}{dt}\\ &= a_x(\vec{\omega}\wedge\vec{i}) + a_y(\vec{\omega}\wedge\vec{j}) + a_z(\vec{\omega}\wedge\vec{k}) = \vec{\omega}\wedge a_x\vec{i} + \vec{\omega}\wedge a_y\vec{j} + \vec{\omega}\wedge a_z\vec{k}\\ &= \vec{\omega}\wedge(a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}) = \vec{\omega}\wedge\vec{a}\,,\end{aligned}$$

in altre parole, abbiamo ricavato

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{a}\,. \tag{1.4.11}$$

La (1.4.11) contiene come caso particolare le formule di Poisson.

1.4.3 Derivata temporale di un vettore non solidale al sistema rigido

Come calcolare, più in generale, la derivata di un vettore le cui componenti non rimangono costanti rispetto alla terna solidale? Per rispondere a tale domanda indichiamo con $\vec{b}$ il vettore di cui si vuole calcolare la derivata e siano $b_1(t)$, $b_2(t)$, $b_3(t)$ le componenti di tale vettore rispetto alla terna solidale. Tenendo conto delle (1.4.1) e dei calcoli sviluppati per arrivare alla (1.4.11), si ottiene:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{b}}{dt} &= \dot{b}_1(t)\vec{j}_1 + b_1(t)\frac{d\vec{i}}{dt} + \dot{b}_2(t)\vec{j}_2 + b_2(t)\frac{d\vec{j}}{dt} + \dot{b}_3(t)\vec{j}_3 + b_3(t)\frac{d\vec{k}}{dt}\\ &= \sum_{i=1}^{3}\dot{b}_i(t)\vec{j}_i + \vec{\omega}\wedge(b_1(t)\vec{i} + b_2(t)\vec{j} + b_3(t)\vec{k}) = \sum_{i=1}^{3}\dot{b}_i(t)\vec{j}_i + \vec{\omega}\wedge\vec{b}\,,\end{aligned}$$

cioè

$$\frac{d\vec{b}}{dt} = \sum_{i=1}^{3}\dot{b}_i(t)\vec{j}_i + \vec{\omega}\wedge\vec{b} = \dot{\vec{b}}(t) + \vec{\omega}\wedge\vec{b}\,. \tag{1.4.12}$$

Un caso particolare e molto significativo della (1.4.12) lo si ottiene considerando $\vec{b} = \vec{\omega}$. Si avrebbe

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_{i=1}^{3}\dot{\omega}_i(t)\vec{j}_i + \vec{\omega}\wedge\vec{\omega} = \sum_{i=1}^{3}\dot{\omega}_i(t)\vec{j}_i = \dot{\vec{\omega}}(t)\,, \tag{1.4.13}$$

essendo $\dot{\omega}_i(t)$ le componenti della velocità angolare rispetto agli assi solidali. Questa formula è molto interessante perchè esprime il fatto che il vettore $\vec{\omega}$ ha il medesimo derivato temporale sia rispetto agli assi fissi che rispetto agli assi mobili. In particolare, se $\vec{\omega}$ ha direzione costante rispetto agli assi solidali avrà direzione costante anche rispetto agli assi fissi. Per dimostrarlo, si indichi con $\vec{l}$ il versore di $\vec{\omega}$. Conviene osservare preliminarmente che $\vec{l}$ ha modulo costante e quindi risulta ortogonale al suo derivato $\frac{dl}{dt}$. Dalla (1.4.13), scrivendo $\vec{\omega} = \omega\vec{l}$ si ricava inoltre che

$$\frac{d\omega}{dt}\vec{l} + \omega\frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{\omega}\vec{l} + \omega\dot{\vec{l}},$$

e poichè $\vec{l}$ è ortogonale a $\frac{d\vec{l}}{dt}$ e $\dot{\vec{l}}$, l'equazione di sopra è soddisfatta se e solo se

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega}, \quad \frac{d\vec{l}}{dt} = \dot{\vec{l}}.$$

L'ultima delle due equazioni scritte sopra afferma proprio che se la direzione di $\vec{l}$ è fissa nel riferimento solidale è tale anche in quello fisso e viceversa.

1.4.4 Componenti della velocità angolare rispetto al riferimento solidale

Per sfruttare bene la (1.4.13) sarebbe utile conoscere le componenti del vettore $\vec{\omega}$ rispetto alla terna mobile. Solitamente tali componenti si denotano con p, q, r, si ha cioè $\vec{\omega} = \omega_1\vec{j}_1 + \omega_2\vec{j}_2 + \omega_3\vec{j}_3$. Al fine di ottenere tali formule ripartiamo dall'identità

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = (\frac{d\vec{j}_1}{dt}\cdot\vec{j}_1)\vec{j}_1 + (\frac{d\vec{j}_1}{dt}\cdot\vec{j}_2)\vec{j}_2 + (\frac{d\vec{j}_1}{dt}\cdot\vec{j}_3)\vec{j}_3.$$

Tenuto conto che $\frac{d\vec{j}_1}{dt}\cdot\vec{j}_1 = 0$ e della (1.4.5a), quest'ultima equazione si può scrivere come

$$\frac{d\vec{j}_1}{dt} = (\frac{d\vec{j}_1}{dt}\cdot\vec{j}_2)\vec{j}_2 - (\frac{d\vec{j}_3}{dt}\cdot\vec{j}_1)\vec{j}_3.$$

Poichè $\vec{j}_3 = -\vec{j}_2 \wedge \vec{j}_1$, $\vec{j}_2 = \vec{j}_3 \wedge \vec{j}_1$ e $\vec{0} = \vec{j}_1 \wedge \vec{j}_1$ possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{j}_1}{dt} &= (\frac{d\vec{j}_1}{dt}\cdot\vec{j}_2)\vec{j}_3 \wedge \vec{j}_1 + (\frac{d\vec{j}_3}{dt}\cdot\vec{j}_1)\vec{j}_2 \wedge \vec{j}_1 + (\frac{d\vec{j}_2}{dt}\cdot\vec{j}_3)\vec{j}_1 \wedge \vec{j}_1 \\ &= \left[(\frac{d\vec{j}_2}{dt}\cdot\vec{j}_3)\vec{j}_1 + (\frac{d\vec{j}_3}{dt}\cdot\vec{j}_1)\vec{j}_2 + (\frac{\vec{j}_1}{dt}\cdot\vec{j}_2)\vec{j}_3\right] \wedge \vec{j}_1 \,. \end{aligned} \tag{1.4.14}$$

Quindi confrontando la prima delle (1.4.1) con la (1.4.14), si trovano le componenti del vettore del velocità angolare nel riferimento solidale:

$$\omega_1 = \frac{d\vec{j}_2}{dt}\cdot\vec{j}_3, \tag{1.4.15}$$

$$\omega_2 = \frac{d\vec{j}_3}{dt}\cdot\vec{j}_1, \tag{1.4.16}$$

$$\omega_3 = \frac{d\vec{j}_1}{dt}\cdot\vec{j}_2. \tag{1.4.17}$$

1.5 Velocità e accelerazione in un moto rigido generale

1.5.1 Velocità in un moto rigido

Se P e O sono due punti di un sistema rigido, il vettore $P-O$ è necessariamente un vettore solidale al corpo rigido e quindi possiamo applicare a tale vettore la formula (1.4.11) ottenendo

$$\frac{d(P-O)}{dt} = \vec{\omega} \wedge (P-O)\,.$$

Se si indicano con $\vec{v}_P$ e $\vec{v}_O$ le velocità $\dfrac{dP}{dt}$ e $\dfrac{dO}{dt}$ dei punti P e O, si perviene alla seguente

$$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P-O)\,.} \tag{1.5.1}$$

Quindi abbiamo trovato l'espressione della velocità di un generico punto di un sistema rigido in moto. I vettori $\vec{v}_O$ (rimarchiamo che O rappresenta un qualunque punto solidale del sistema rigido e quindi non necessariamente coincide con l'origine) e $\vec{\omega}$ sono entrambi funzioni del tempo e indipendenti dal punto P.

Viceversa, supponiamo che siano assegnati due vettori $\vec{v}_O$ e $\vec{\omega}$ dipendenti dal tempo e che un sistema si muova in modo tale che la velocità del suo generico punto P sia espressa dalla (1.5.1). Allora il sistema è necessariamente rigido. Per provare questa affermazione ragioniamo come segue. Siano P_1 e P_2 due punti del sistema e indichiamo con $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ le loro velocità. Per le ipotesi fatte possiamo scrivere

$$\begin{aligned}
\vec{v}_1 &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P_1 - O)\,,\\
\vec{v}_2 &= \vec{v}_O + \vec{\omega} \wedge (P_2 - O)\,.
\end{aligned}$$

Sottraendo dalla prima equazione la seconda, si trova

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_2 + \vec{\omega} \wedge (P_1 - P_2)$$

che esprime il fatto che il vettore $\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ risulta perpendicolare al vettore $P_1 - P_2$, perciò

$$(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \cdot (P_1 - P_2) = 0.$$

Ma questa equazione caratterizza i moti rigidi (confronta con (1.2.2)) come si voleva provare.

Possiamo perciò concludere che *l'equazione* (1.5.1) *è caratteristica per le velocità dei punti di un moto rigido.* Quindi, rispetto alla terna fissa, un moto rigido risulta determinato quando si prefissino i vettori puramente temporali $\vec{v}_O$ (essendo O un punto qualsiasi del sistema mobile) e $\vec{\omega}$ che, per questo motivo, sono detti *vettori caratteristici del moto rigido rispetto al polo O.*

Tenendo conto che abbiamo indicato con p, q, r le componenti di $\vec{\omega}$ rispetto alla terna solidale (vedi formule (1.4.15)), se denotiamo con u, v, w le componenti di $\vec{v}_O$, possiamo proiettare la (1.5.1) lungo gli assi della terna solidale ottenendo

$$v_x = u + qz - ry\,, \tag{1.5.2}$$
$$v_y = v + rx - pz\,, \tag{1.5.3}$$
$$v_x = w + py - qx. \tag{1.5.4}$$

1.5.2 Accelerazione in un moto rigido

Possiamo ora facilmente determinare **l'accelerazione del generico punto** P di un sistema rigido. A tal fine basta derivare la (1.5.1), ottenendo

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O + \vec{\omega} \wedge \frac{d(P-O)}{dt} + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O)\,, \tag{1.5.5}$$

dove $\vec{a}_P$ e $\vec{a}_O$ rappresentano le accelerazioni di P e O rispettivamente. Per via della (1.5.1) possiamo scrivere

$$\vec{\omega} \wedge \frac{d(P-O)}{dt} = \vec{\omega} \wedge (\vec{v}_P - \vec{v}_O) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P-O)).$$

Consideriamo ora la retta r passante per O e parallela a $\vec{\omega}$ (supponiamo $\vec{\omega} \neq \vec{0}$) e sia Q la proiezione ortogonale di P su r. Ovviamente si ha: $P - O = (P - Q) + (Q - O)$ essendo $Q - O$ parallelo a $\vec{\omega}$ e $P - Q$ ortogonale a $\vec{\omega}$ (si veda la figura). Quindi, usando anche la regola del doppio prodotto vettoriale

$$\begin{aligned} &\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P-O)) = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P-Q)) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (Q-O)) \\ &= \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge (P-Q)) = (\vec{\omega} \cdot (P-Q))\vec{\omega} - |\vec{\omega}|^2 (P-Q) = -|\vec{\omega}|^2 (P-Q), \end{aligned}$$

si ha

$$\vec{\omega} \wedge \frac{d(P-O)}{dt} = -|\vec{\omega}|^2 (P-Q).$$

In definitiva, la (1.5.5) può essere riscritta come

$$\vec{a}_P = \vec{a}_O - |\vec{\omega}|^2 (P-Q) + \dot{\vec{\omega}} \wedge (P-O)\,, \tag{1.5.6}$$

che esprime l'accelerazione del generico punto P (in funzione di quella di un prefissato punto O del sistema e del vettore dipendente dal tempo $\vec{\omega}$). La retta r sopra introdotta è nota come *asse di istantanea rotazione*. Un caso particolare è quello di un moto rigido rotatorio uniforme. In tal caso si annullano $\vec{a}_O$ e $\dot{\vec{\omega}}$ ($\vec{\omega}$ è infatti costante) e la (1.5.6) diventa

$$\vec{a}_P = -|\vec{\omega}|^2 (P-Q)\,. \tag{1.5.7}$$

In tal caso, l'accelerazione si dice *centripeta* essendo diretta verso il centro della circonferenza descritta da P.

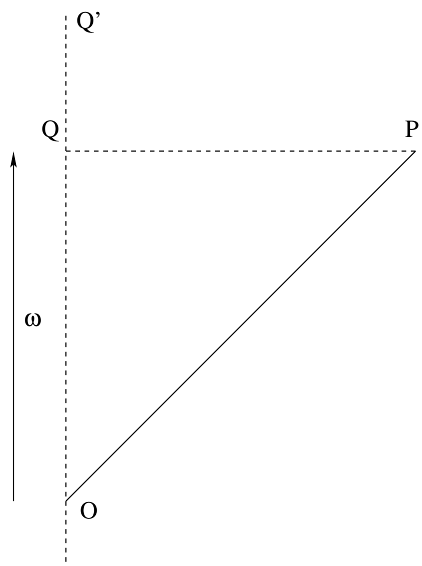


Figure 1.5.1: Asse di istantanea rotazione.

1.6 Atto di moto

1.6.1 Definizione d atto di moto e asse di moto.

Sebbene il concetto di atto di moto possa essere introdotto per sistemi anche non rigidi, per motivi di semplicità si tratterà solo il caso di sistemi rigidi.

Il moto di un sistema di punti può essere studiato seguendo due approcci diversi:

a. Approccio *lagrangiano*;

b. Approccio *euleriano*.

Il punto di vista lagrangiano consiste nell'esprimere i caratteri del moto in funzione della generica particella del sistema e del tempo. Finora abbiamo sempre seguito un approccio di questo tipo. Per esempio, la notazione $\vec{v}_P(t)$ denota la velocità (in funzione del tempo) di una generica particella del sistema. Quindi $\vec{v}_P$ rappresenta la velocità lagrangiana.

Il punto di vista euleriano consiste invece nell'esprimere i caratteri del moto in funzione del tempo e di una fissata posizione A dello spazio ambiente. In questo caso il campo delle velocità del sistema sarà espresso in funzione del tempo e del generico posto A. Più precisamente, la notazione $\vec{e}_A(t)$ rappresenta la velocità in A all'istante t (velocità euleriana). Si può pensare alla velocità euleriana come alla velocità che compete alla particella P del sistema che all'istante t transita per la posizione A. È opportuno rimarcare che al variare dell'istante considerato cambia la particella che transita per A.

Fissato un certo istante temporale t, l'insieme dei vettori applicati $(A, \vec{e}_A(t))$ è detto **atto di moto del sistema all'istante considerato**. Tale terminologia fu introdotta da Maggi[4]. Si tratta di un campo di vettori che precisa la distribuzione istantanea delle velocità nello spazio di riferimento, senza considerare la loro dipendenza dal tempo (infatti l'istante t è fissato). Volendo usare un'immagine pittoresca per descrivere la definizione di atto di moto, possiamo dire che esso corrisponde a una fotografia in cui, per ogni punto A dello spazio ambiente, è rappresentato il vettore velocità della particella solidale al sistema rigido che all'istante del clic passa per A (sempre che tale particella esista!).

Poichè nelle sezioni precedenti abbiamo sempre considerato il punto di vista lagrangiano, è naturale cercare di tradurre le relazioni trovate in termini della formulazione euleriana. In particolare, interessa avere una rappresentazione in forma euleriana della formula fondamentale della cinematica (1.5.1). Per ottenere tale rappresentazione, si indichino con A e B le posizioni dello spazio ambiente per cui transitano i punti P e O del sistema rigido nell'istante t fissato. Denotiamo quindi con $\vec{e}_A$ e $\vec{e}_B$ le velocità dei punti P e O nell'istante t. Evidentemente nell'istante t si ha $\vec{e}_A = \vec{v}_P$ e $\vec{e}_B = \vec{v}_O$ e quindi la (1.5.1) può riscriversi come

$$\vec{e}_A = \vec{e}_B + \vec{\omega} \wedge (A - B) . \tag{1.6.1}$$

L'equazione (1.6.1) caratterizza ad ogni istante fissato la distribuzione delle velocità in un qualunque moto rigido.

Analogamente, la proprietà caratteristica dei moti rigidi espressa in termini lagrangiani dall'equazione (1.2.3), seguendo un approccio di tipo euleriano diventa

$$\vec{e}_A \cdot (A - B) = \vec{e}_B \cdot (A - B) , \tag{1.6.2}$$

qualunque siano le posizioni A e B.

Studiamo il comportamento dei due vettori caratteristici $\vec{\omega}$ e $\vec{e}_B$ al variare della posizione B.

> Prima proprietà: Il vettore $\vec{\omega}$ non dipende da come si sceglie la posizione B.

Per dimostrare tale proprietà iniziamo a verificare che il vettore $\vec{\omega}$ non cambia se, mantenendo fisso B, si riferisce il sistema rigido ad una terna solidale $Bx_1y_1z_1$ avente orientazione diversa dalla "solita" terna solidale $Bxyz$ (confronta anche con la terza parte della dimostrazione delle formle di Poisson). Infatti, se denotassimo con $\vec{\omega}^\dagger$ la velocità angolare calcolata nel sistema di riferimento $Bx_1y_1z_1$, avremo che la velocità in A sarà data da

$$\vec{e}_A = \vec{e}_B + \vec{\omega}^\dagger \wedge (A - B) .$$

[4]Gian Antonio Maggi nato a Milano nel 1856 e morto nel 1937 a Milano. Insegnò Calcolo nelle Università di Modena e Messina e Meccanica Razionale a Pisa e Milano. Si interessò di Dinamica Analitica, teoria del potenziale, elasticità e elettromagnetismo. Svolse inoltre accurate ricerche sui fondamenti della Meccanica classica e Relativistica.

Ma, relativamente alla prima terna solidale $Bxyz$, tale velocità vale

$$\vec{e}_A = \vec{e}_B + \vec{\omega} \wedge (A - B)\,.$$

Per cui, eguagliando le due espressioni trovate per la velocità nel punto A si trova

$$\vec{\omega}^\dagger \wedge (A - B) = \vec{\omega} \wedge (A - B)\,,$$

che possiamo riscrivere come $\left(\vec{\omega}^\dagger - \vec{\omega}\right) \wedge (A - B) = \vec{0}$. Poichè quest'ultima equazione deve essere soddisfatta qualunque sia la posizione di A che si scelga (ovvero per qualunque scelta del vettore $A-B$), deve necessariamente verificarsi che $\vec{\omega}^\dagger - \vec{\omega} = \vec{0}$, ossia $\vec{\omega}^\dagger = \vec{\omega}$. Ora cambiamo la posizione portandola da B a B'. Poichè abbiamo appena dimostrato che la velocità angolare non dipende dall'orientazione della particolare terna solidale con assi concorrenti in B' a cui si riferisce il moto, non è restrittivo considerare la terna avente gli assi paralleli e equiversi alla prima terna solidale $Bxyz$ e origine in B'. Poichè in questo modo non variano i versori fondamentali, non varia in base alla (1.4.4) neanche la velocità angolare $\vec{\omega}$.

Seconda propietà: Il vettore $\vec{e}_B$ varia al variare della posizione B in accordo alla seguente legge:

$$\vec{e}_{B'} = \vec{e}_B + \vec{\omega} \wedge (B' - B) = \vec{e}_B + (B - B') \wedge \vec{\omega}. \tag{1.6.3}$$

La dimostrazione è immediata e discende direttamente dalla legge (1.6.1). Le due proprietà ora ricavate permettono di concludere che: *i vettori caratteristici di un moto rigido $\vec{\omega}$ e $\vec{e}_B$ si comportano, al variare del polo, rispettivamente come il risultante e il momento risultante di un sistema di vettori applicati, al variare del polo.*

In particolare, nella Teoria dei Momenti si è definito l'asse centrale di un dato sistema di vettori applicati come il luogo geometrico dei punti rispetto ai quali il momento risultante è parallelo al risultante (supposto diverso dal vettore nullo). In analogia a tale concetto introduciamo l'**asse del moto rigido all'istante** t (o *asse di Mozzi*[5]) come il luogo dei punti di velocità parallela alla velocità angolare $\vec{\omega}$ (supponendo $\vec{\omega} \neq \vec{0}$). Il componente della velocitá nella direzione di ω non dipende dal polo B. Quindi se B è un punto dell'asse di moto si ha $\vec{e}_B = \vec{\tau}//\vec{\omega}$ e, tenendo conto di ciò, la (1.6.3) assume la forma

$$\vec{e}_A = \vec{\tau} + \vec{\omega} \wedge (A - B)\,, \text{ essendo } \vec{\tau}//\vec{\omega} \text{ e } B \text{ indipendente da } A. \tag{1.6.4}$$

Questa equazione rende esplicito che il vettore $\vec{\tau}$ rappresenta il componente di $\vec{e}_B$ parallelo ad ω, tale vettore è anche detto *velocità di traslazione del sistema rigido all'istante t.*

Avendo in mente l'espressione lagrangiana stabilita per le velocità nella sezione "Moti rigidi particolari", possiamo interpretare la (1.6.4) nel seguente

[5] Giulio Mozzi nato a Firenze nel 1730 e morto a Firenze nel 1813. Pubblicò un solo lavoro scientifico: quello in cui viene evidenziata l'esistenza dell'asse di moto.

modo: **In un moto rigido, in ogni istante, l'atto di moto è elicoidale**, nel senso che si compone di una traslazione lungo l'asse di moto e di una rotazione attorno allo stesso asse. Quest'ultima affermazione è solitamente nota con il nome di Teorema di Mozzi. Osserviamo che come casi particolari della (1.6.4), troviamo i seguenti:

- *Atto di moto traslatorio.* Equivale a prendere $\vec{\omega} = \vec{0}$ nella (1.6.4) che quindi fornisce la seguente equazione:

  $$\vec{e}_A = \vec{\tau}.$$

  Quindi in un atto di moto traslatorio la velocità non dipende dal posto. Se un moto rigido è traslatorio l'atto di moto è traslatorio in ogni istante.

- *Atto di moto rotatorio.* Equivale alla possibilità di scegliere B in modo che la (1.6.4) diventi

  $$\vec{e}_A = \vec{\omega} \wedge (A - B)\,,$$

  essendo $\vec{\tau} = \vec{0}$ e con B e $\vec{\omega}$ indipendenti da A. Ogni moto rotatorio ha l'atto di moto sempre rotatorio con $\vec{\omega}$ di direzione invariabile.

Dalle definizioni sopra presentate di atto di moto rotatorio e traslatorio segue che: in ogni istante t in cui si annulla $\vec{\omega}$ l'atto di moto è traslatorio, mentre ogni istante in cui si annulla $\vec{\tau}$ corrisponde a un atto di moto rotatorio. Dalla (1.6.4), moltiplicando scalarmente per $\vec{\omega}$, otteniamo

$$\vec{\omega} \cdot \vec{e}_A = \vec{\omega} \cdot \vec{\tau} = \pm|\vec{\omega}||\vec{\tau}| = up + vq + wr,$$

essendo (u, v, w) le componenti di $\vec{e}_A$ e (p, q, r) le componenti della velocità angolare. La quantità $\vec{\omega} \cdot \vec{e}_A$ è detta trinomio invariante. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un atto di moto rigido sia traslatorio o rotatorio è che si annulli, in quel dato istante, il trinomio invariante.*

Non è difficile verificare che l'asse di moto è altresì caratterizzato dal fatto di essere *la retta dei punti di minima velocità.* Infatti ogni punto dell'asse di Mozzi ha, per definizione, velocità in modulo uguale a $|\tau|$. Sia ora A una qualunque posizione del sistema che, nell'istante t, non appartiene all'asse di moto e si indichi con d_A la distanza di tale punto dall'asse. In base alla (1.6.4) il modulo della velocità $\vec{e}_A$ è $|\vec{e}_A| = \sqrt{|\tau|^2 + |\omega|^2 d_A^2} \geq |\tau|$ e vale l'uguale se e solo se $d_A = 0$.

1.6.2 Composizione di atti di moto rigidi

Se i vettori $\vec{e}_A$ e $\vec{f}_A$ rappresentano in un dato istante t, le velocità euleriane nella posizione A di due distinti atti di moti rigidi, il vettore

$$\vec{g}_A = \vec{e}_A + \vec{f}_A$$

caratterizza, nello stesso istante t, il cosiddetto atto di moto composto. È abbastanza semplice provare che l'atto di moto composto di due atti di moto rigido è anche esso un atto di moto rigido. Infatti, poichè per ipotesi $\vec{e}_A$ e $\vec{f}_A$ sono atti di moto rigido, per ciascuno di essi la (1.6.2) assicura che

$$\vec{e}_A \cdot (A - B) = \vec{e}_B \cdot (A - B)\,, \quad \vec{f}_A \cdot (A - B) = \vec{f}_B \cdot (A - B)\,,$$

qualunque siano le posizioni A e B dello spazio ambiente. Sommando membro a membro queste relazioni si trova

$$\left(\vec{e}_A + \vec{f}_A\right) \cdot (A - B) = \left(\vec{e}_B + \vec{f}_B\right) \cdot (A - B)$$

che comporta

$$\vec{g}_A \cdot (A - B) = \vec{g}_B \cdot (A - B)$$

ossia che l'atto di moto composto è rigido. Per lo studio diretto della composizione degli atti di moto rigidi è necessaria la seguente osservazione. Se $\vec{e}_O$ e $\vec{\omega_1}$ sono i vettori caratteristici del primo atto di moto rigido, mentre $\vec{f}_O$ e $\vec{\omega_2}$ sono i vettori caratteristici del secondo atto di moto rigido in modo che

$$\vec{e}_A = \vec{e}_O + \vec{\omega_1} \wedge (A - B)\,,$$
$$\vec{f}_A = \vec{f}_O + \vec{\omega_2} \wedge (A - B)$$

allora l'atto di moto rigido risultante è dato da

$$\vec{g}_A = \left(\vec{e}_O + \vec{f}_O\right) + (\vec{\omega_1} + \vec{\omega_2}) \wedge (A - B)\,,$$

cioè *i vettori caratteristici, rispetto a una qualumque posizione, di un atto di moto rigido composto si ottengono sommando vettorialmente gli omonimi vettori caratteristici degli atti di moto componenti rispetto alla medesima posizione.*

Essenzialmente usando quest'ultima proprietà si perviene ai seguenti teoremi di cui omettiamo la dimostrazione:

Theorem 1.6.1 *L'atto di moto composto di due atti di moto rotatori intorno ad assi concorrenti in un punto è anch'esso rotatorio intorno ad un asse passante per quel punto, ed ha per velocità angolare la somma algebrica delle velocità angolari degli atti di moto componenti.*

Theorem 1.6.2 *L'atto di moto composto di due atti di moto rotatori intorno ad assi paralleli r e r' e di velocità angolari $\vec{\omega_1}$ e $\vec{\omega_2}$ non opposte, è anch'esso rotatorio intorno ad un asse parallelo a r e r' e giace nel piano della striscia r e r' dividendola in parti inversamente proporzionali a $\vec{\omega_1}$ e $\vec{\omega_2}$ (internamente o esternamente a seconda che $\vec{\omega_1}$ e $\vec{\omega_2}$ siano di verso concorde o meno).*

Theorem 1.6.3 *L'atto di moto composto di due atti di moto rotatori intorno ad assi paralleli r e r' e di velocità angolari $\vec{\omega_1}$ e $\vec{\omega_2}$ opposte, è puramente traslatorio in direzione ortogonale al piano degli assi r e r' e ha per velocità il momento della coppia delle velocità angolari $\vec{\omega_1}$ e $\vec{\omega_2}$ ciascuna di esse localizzata lungo il rispettivo asse.*

1.7 Angoli di Eulero

1.7.1 Definizione degli angoli di Eulero

Nella sezione 1.1 si è già sottolineato che per determinare la posizione di un sistema rigido rispetto a un'assegnata terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$ basta conoscere la posizione di una terna $Oxyz$ solidale con il sistema rigido rispetto alla terna prefissata $\Omega\xi\eta\zeta$. In particolare, le equazioni (1.1.3) mostrano che la posizione della terna $Oxyz$ rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$ è nota quando si conoscono le coordinate α, β, γ dell'origine O e i nove coseni direttori $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ dei versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Questi ultimi non sono tutti indipendenti fra loro, ma devono soddisfare le sei relazioni espresse dalle (1.1.4). Quindi i parametri indipendenti che consentono di specificare la posizione del sistema rispetto alla prefissata terna $\Omega\xi\eta\zeta$ sono sei: le coordinate α, β, γ dell'origine e tre dei nove coseni direttori $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$.

È opportuno introdurre dei parametri che consentono una più agevole (e visuale) identificazione della posizione di $Oxyz$ rispetto a $\Omega\xi\eta\zeta$. Poichè il modo più semplice di localizzare l'origine O è tramite le sue coordinate, cerchiamo tre parametri indipendenti atti a individuare in modo univoco l'orientazione della terna Ωxyz (parallela alla terna $Oxyz$ ma con l'origine in Ω) rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$. Tre parametri che consentono di identificare facilmente l'orientazione di Ωxyz rispetto a $\Omega\xi\eta\zeta$ sono i cosiddetti **angoli di Eulero**. L'introduzione di tali angoli può essere fatta come segue: Supponiamo che i piani xy e $\xi\eta$ non coincidano. In tal caso questi piani si intersecheranno lungo una retta che è perpendicolare sia all'asse z che all'asse ζ (essendo comune a due piani rispettivamente ortogonali all'asse z e all'asse ζ) e quindi al piano da questi individuato. La retta ottenuta come intersezione dei piani xy e $\xi\eta$ e orientata in modo che rispetto ad essa appaia destro l'angolo $\hat{\zeta z}$ delle due rette orientate ζ e z, viene detta linea dei nodi e si denota con N, mentre l'angolo $\hat{\zeta z}$ si chiama *angolo di nutazione* e si denota con θ (per definizione si ha $0 < \theta < \pi$). Si chiama *angolo di precessione* e si denota con ψ l'angolo $\hat{\xi N}$ misurato nel verso destro rispetto a ζ; infine, l'angolo $\hat{N x}$ misurato nel verso destro rispetto a z si dice *angolo di rotazione propria* e si indica con ϕ. I tre angoli θ, ψ e ϕ definiti in questo modo si chiamano *angoli di Eulero* della terna Ωxyz rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$ e sono soggetti alle seguenti limitazioni:

$$\begin{cases} 0 < \theta < \pi, \\ 0 \leq \psi < 2\pi, \\ 0 \leq \phi < 2\pi. \end{cases} \tag{1.7.1}$$

È altresì facile osservare che, assegnati tre valori arbitrari a θ, ψ e ϕ in modo che le limitazioni espresse dalla (1.7.1) siano verificate, resta individuata la posizione della terna Ωxyz rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$. Infatti, nel piano $\xi\eta$ l'angolo ψ consente di tracciare la linea dei nodi N. Quindi nel piano per Ω perpendicolare alla linea dei nodi, l'asse z è individuato come quello che, nel verso destro rispetto a N, forma un angolo θ con l'asse ζ. Inoltre nel piano passante per Ω e perpendicolare all'asse z, l'asse x è localizzato dalla sua anomalia ϕ rispetto

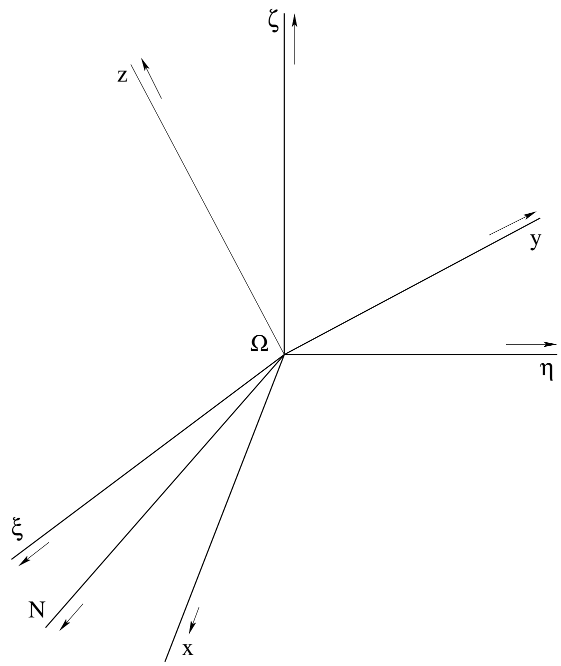


Figure 1.7.1: Angoli di Eulero.

alla linea dei nodi (nel verso destro rispetto all'asse z). Infine l'asse y risulta univocamente individuato come quello che con gli assi x e z forma una terna trirettangola destra.

Rimane da considerare il caso in cui i piani $\xi\eta$ e xy coincidono. In tal caso l'angolo di nutazione θ è uguale a 0 o a π. In tal caso la linea dei nodi è indeterminata e lo stesso si può dire per gli angoli ψ e ϕ. Rimane invece determinata la somma degli angoli ψ e ϕ che in questo caso sono complanari. Infatti, ovunque si pensi tracciata la linea dei nodi, si ha $\psi + \phi = \hat{\xi x}$, e quest'angolo basta a individuare univocamente la terna $Oxyz$ rispetto alla terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$.

Chiudiamo questo paragrafo sottolineando che gli angoli di Eulero di un sistema rigido in moto rispetto ad una terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$ sono funzioni determinate del tempo e fino a che il moto è continuo queste funzioni sono funzioni continue.

Possono sorgere difficoltà legate alla continuità del moto come conseguenza delle limitazioni (1.7.1). Infatti, può capitare che per rispettare tali limitazioni occorra far saltare bruscamente qualcuno degli angoli di Eulero da un valore estremo all'altro senza che ciò corrisponda a una discontinuità nel moto. Per evitare tali discontinuità artificiali si può rilassare qualcuna delle limitazioni espresse dalle (1.7.1): in questo modo si perde però la biunivocità nella corrispondenza fra i punti dello spazio e terne di valori θ, ψ, ϕ degli angoli di Eulero.

1.7.2 Espressione dei coseni direttori in funzione degli angoli di Eulero

Ci occupiamo di trovare le formule che esprimono i coseni direttori $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ dei versori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ in funzione degli angoli di Eulero θ, ψ, ϕ. A tal fine osserviamo che la terna mobile Ωxyz a cui competono tre assegnati angoli di Eulero θ, ψ e ϕ si ottiene a partire dalla terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$ eseguendo tre successive rotazioni destre rispetto al rispettivo asse orientato di rotazione. Le rotazioni da eseguire sono le seguenti:

1. La prima rotazione è una rotazione di angolo ψ intorno all'asse ζ. In questo modo si ottiene la terna $\Omega\xi_1\eta_1\zeta$ essendo l'asse ξ_1 proprio la linea dei nodi. In base a (1.3.9) le equazioni di tale rotazione sono:

$$\begin{cases} \xi = \xi_1 \cos\psi - \eta_1 \sin\psi\,, \\ \eta = \xi_1 \sin\psi + \eta_1 \cos\psi\,, \\ \zeta = \zeta\,. \end{cases} \tag{1.7.2}$$

   In altre parole, in forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta \end{pmatrix}.$$

2. La seconda rotazione è una rotazione di angolo θ intorno alla linea dei nodi. In questo modo si ottiene la terna $\Omega\xi_1 y_1 z$ essendo l'asse y_1 la retta del piano ζz tale che $y_1\hat{} z = \frac{\pi}{2}$ e $\eta_1\hat{} y_1 = \theta$. Usando le (1.3.9) possiamo scrivere le equazioni di tale rotazione:

$$\begin{cases} \xi_1 = \xi_1\,, \\ \eta_1 = y_1 \cos\theta - z \sin\theta\,, \\ \zeta = y_1 \sin\theta + z \cos\theta\,. \end{cases} \tag{1.7.3}$$

   In altre parole, in forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \eta_1 \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ y_1 \\ z \end{pmatrix}.$$

3. L'ultima rotazione è una rotazione di angolo ϕ intorno all'asse z che porta la linea dei nodi a sovrapporsi all'asse x (e l'asse y_1 su y). In questo modo si ottiene la terna Ωxyz. Sfruttando le (1.3.9) le equazioni di tale rotazione sono:

$$\begin{cases} \xi_1 = x \cos\phi - y \sin\phi\,, \\ y_1 = x \sin\phi + y \cos\phi\,, \\ z = z\,. \end{cases} \tag{1.7.4}$$

In altre parole, in forma matriciale si ha

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ y_1 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Sostituendo le (1.7.3) e (1.7.4) nelle (1.7.2) e svolgendo semplici prodotti matriciali si trova:

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \tag{1.7.5}$$

dove $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sono i coseni direttori le cui espressioni sono legate agli angoli di Eulero dalla seguenti espressioni:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \cos\phi\cos\psi - \sin\phi\cos\theta\sin\psi\,, \\ \alpha_2 = -\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\cos\theta\sin\psi\,, \\ \alpha_3 = \sin\theta\sin\psi\,, \\ \beta_1 = \cos\phi\sin\psi + \sin\phi\cos\theta\cos\psi\,, \\ \beta_2 = -\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\theta\cos\psi\,, \\ \beta_3 = -\sin\theta\cos\psi\,, \\ \gamma_1 = \sin\phi\sin\theta\,, \\ \gamma_2 = \cos\phi\sin\theta\,, \\ \gamma_3 = \cos\theta\,. \end{cases} \tag{1.7.6}$$

1.7.3 Espressione della veocità angolare in funzione degli angoli di Eulero

Ci proponiamo di trovare l'espressione della velocità angolare $\vec{\omega}$ nel moto rigido istantaneo corrispondente al passaggio dalla posizione individuata dagli angoli di Eulero θ, ψ, ϕ a quella individuata dagli angoli $\theta + d\theta, \psi + d\psi, \phi + d\phi$. Dalla definizione degli angoli di Eulero sappiamo che l'incremento $d\theta$ dell'angolo di nutazione θ corrisponde ad una rotazione elementare di angolo $d\theta$ intorno alla linea dei nodi. Analogamente gli incrementi $d\phi$ e $d\psi$ di ϕ e ψ equivalgono a due rotazioni attorno agli assi z e ζ rispettivamente. Quindi la velocità angolare $\vec{\omega}$ si otterrà nel seguente modo:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{N} + \dot{\phi}\vec{k} + \dot{\psi}\vec{x}\,, \tag{1.7.7}$$

dove $\vec{N}, \vec{k}, \vec{x}$ sono i versori rispettivamente della linea dei nodi, dell'asse z e dell'asse ζ.

Per ottenere le componenti di $\vec{\omega}$ rispetto alla terna mobile e a quella fissa in funzione degli angoli di Eulero occorre quindi trovare le componenti dei versori $\vec{N}, \vec{k}, \vec{x}$ rispetto ai sistemi di riferimento mobile $Oxyz$ e fisso $\Omega\xi\eta\zeta$. A tale scopo, iniziamo a scrivere la (1.7.5) in forma matriciale nella forma (1.7.5),dove i coefficienti direttori $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ per $i = 1, 2, 3$ sono i coseni direttori dati dalle

(1.7.6). Osserviamo che la matrice formata da tali coefficienti è ortogonale (cioè la sua trasposta coincide con l'inversa) e quindi si ha anche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} . \tag{1.7.8}$$

Tenendo conto delle (1.7.5) e (1.7.8) è ora immediato trovare le componenti di $\vec{k}, \vec{x}$ rispetto alla terna fissa e a quella mobile. Per quanto riguarda il versore $\vec{k}$ le sue componenti rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$ sono, in base alla (1.7.8), $(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3)$, mentre rispetto al riferimento $Oxyz$ tale vettore avrà componenti $(0, 0, 1)$. Invece il versore $\vec{x}$ avrà componenti $(0, 0, 1)$ rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$ e, in base a (1.7.5), $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ rispetto al riferimento mobile $Oxyz$. Per determinare le componenti di $\vec{N}$ rispetto alla terna $\Omega\xi\eta\zeta$ basta osservare che, rispetto alla terna $\Omega\xi_1\eta_1\zeta$, tale versore si può rappresentare mediante il vettore applicato in Ω che ha l'estremo libero $\xi_1 = 1$ e $\eta_1 = \zeta = 0$. Quindi sostituendo nelle (1.7.2) i valori $\xi_1 = 1$ e $\eta_1 = \zeta = 0$, si trovano le componenti rispetto alla terna fissa $(\cos\psi, \sin\psi, 0)$. Analogamente, potendosi rappresentare $\vec{N}$ rispetto alla terna $\Omega\xi_1 y_1 z$ mediante il vettore applicato in Ω che ha l'estremo libero $\xi_1 = 1$ e $\eta_1 = \zeta = 0$, sostituendo $\xi_1 = 1$ e $\eta_1 = \zeta = 0$ nella (1.7.4) si ottengono le componenti di $\vec{N}$ rispetto a $Oxyz$ che sono $(\cos\phi, -\sin\phi, 0)$.

Utilizzando quanto sopra trovato nella (1.7.7) e indicando con $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ i versori della terna mobile e con $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ i versori della terna fissa, si ottiene

$$\vec{\omega} = \left(\dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\gamma_1\right)\vec{i} + \left(-\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\psi}\gamma_2\right)\vec{j} + \left(\dot{\phi} + \dot{\psi}\gamma_3\right)\vec{k}\,, \tag{1.7.9}$$

perciò indicando con p, q e r le componenti di ω rispetto alla terna mobile si ha

$$\begin{cases} p = \dot{\theta}\cos\phi + \dot{\psi}\gamma_1\,, \\ q = -\dot{\theta}\sin\phi + \dot{\psi}\gamma_2\,, \\ r = \dot{\phi} + \dot{\psi}\gamma_3\,. \end{cases} \tag{1.7.10}$$

Procedendo analogamente si trova

$$\vec{\omega} = \left(\dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\alpha_3\right)\vec{e} + \left(-\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\beta_3\right)\vec{f} + \left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\gamma_3\right)\vec{g}\,, \tag{1.7.11}$$

e denotando le componenti di $\vec{\omega}$ rispetto alla terna fissa con π, ξ, ρ abbiamo

$$\begin{cases} \pi = \dot{\theta}\cos\psi + \dot{\phi}\alpha_3\,, \\ \xi = -\dot{\theta}\sin\psi + \dot{\phi}\beta_3\,, \\ \rho = \dot{\psi} + \dot{\phi}\gamma_3\,. \end{cases} \tag{1.7.12}$$

1.8 Esercizi

ESERCIZIO 1: Un corpo rigido ruota attorno ad un asse fisso con velocità angolare

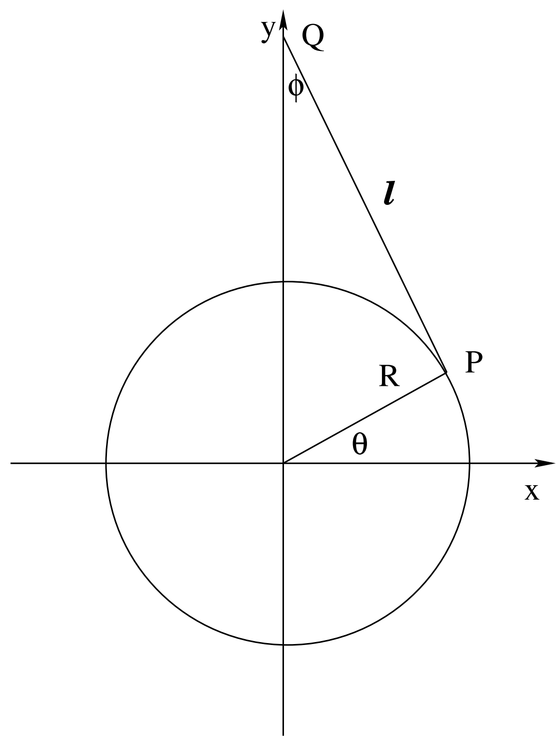
$$\boldsymbol{\vec{\omega}} = \frac{1}{1+t^2}\,\vec{u},$$

essendo $\vec{u}$ il versore dell'asse di rotazione.

a. Calcolare la velocità e il suo modulo di un punto P situato a distanza d dell'asse di rotazione.

b. Calcolare l'accelerazione e il suo modulo di un punto P situato a distanza d dell'asse di rotazione.

ESERCIZIO 2: Nel piano cartesiano Oxy si consideri l'asta PQ vincolata con l'estremo P a ruotare uniformemente sulla circonferenza di centro O e raggio R nel senso antiorario, e vincolata con l'estremo Q sul semiasse positivo delle y, essendo ℓ ($\ell > 2R$) la lunghezza dell'asta. Inizialmente (cioè, per $t = 0$) il punto P si trova sul semiasse negativo delle y.



a. Calcolare la velocità del punto P.

b. Calcolare la velocità del punto Q.

c. Calcolare la velocità angolare dell'asta, sapendo che il punto P si muove sulla circonferenza con velocità angolare ω. Suggerimento: Usare la formula fondamentale della cinematica dei corpi rigidi.

d. Determinare la traiettoria del punto medio S dell'asta. Basta trovarla nella forma implicita $F(x, y) = 0$ per un'opportuna funzione F.

SOLUZIONE: a) Sia θ l'angolo polare tale che il punto P ha le coordinate cartesiane

$$x_P = R\cos\theta, \qquad y_P = R\sin\theta,$$

dove $\theta = -(\pi/2) + \omega t$. Quindi la velocità del punto P è data dall'espressione $\vec{v}_P = \dot{x}_P\vec{i} + \dot{y}_P\vec{j}$, dove

$$\dot{x}_P = \omega R\cos(\omega t), \qquad \dot{y}_P = \omega R\sin(\omega t).$$

b) Essendo ϕ l'angolo tra l'asta e l'asse y tale che $0 \le \phi \le \arctan(\frac{R}{\ell}) < \frac{\pi}{4}$, abbiamo l'equazione

$$\ell\sin\phi = R\cos\theta = R\cos(-\tfrac{1}{2}\pi + \omega t) = R\sin(\omega t).$$

Calcolando la derivata rispetto a t otteniamo

$$\ell\dot{\phi}\cos\phi = \omega R\cos(\omega t),$$

dove $\cos\phi > 0$ e quindi

$$\dot{\phi} = \frac{\omega R\cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2\sin^2(\omega t)}}.$$

Le coordinate del punto Q sono

$$x_Q = 0,\ y_Q = R\sin(-\tfrac{\pi}{2} + \omega t) + \ell\cos\phi = -R\cos(\omega t) + \sqrt{\ell^2 - R^2\sin^2(\omega t)}.$$

Calcolando le derivate rispetto a t arriviamo alla velocità del punto Q, cioè $\vec{v}_Q = \dot{y}_Q\vec{j}$, dove

$$\dot{y}_Q = \omega R\sin(\omega t) - \frac{\omega R^2\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2\sin^2(\omega t)}}.$$

c) Abbiamo

$$\vec{v}_Q - \vec{v}_P = \vec{\omega}_0 \wedge (PQ),$$

dove $\vec{\omega}_0$ è la velocità angolare dell'asta. In altre parole,

$$\begin{aligned} &-\omega R\cos(\omega t)\vec{i} - \frac{\omega R^2\sin(\omega t)\cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2\sin^2(\omega t)}}\vec{j} = \\ &= \vec{\omega}_0 \wedge \left(-R\sin(\omega t)\vec{i} + \sqrt{\ell^2 - R^2\sin^2(\omega t)}\,\vec{j}\right). \end{aligned}$$

Siccome il moto dell'asta avviene nel piano Oxy, risulta $\vec{\omega}_0 = \omega_0\vec{k}$ per un'opportuna velocità angolare scalare ω_0. Utilizzando $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ e $\vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}$, otteniamo

$$\omega_0 = \frac{\omega R\cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2\sin^2(\omega t)}}.$$

Un altro modo per calcolare la velocità angolare $\vec{\omega}_0$ si basa sulla seguente formula:

$$\begin{aligned}
\vec{\omega}_0 &= \frac{(\vec{v}_P - \vec{v}_Q) \wedge (P - Q)}{\ell^2} \\
&= \frac{1}{\ell^2} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega R \cos(\omega t) & -\dfrac{\omega R^2 \sin(\omega t)\cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}} & 0 \\ R\sin(\omega t) & \sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)} & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{\omega R \cos(\omega t)}{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}} \vec{k}.
\end{aligned}$$

d) Le coordinate del punto S a metà strada tra P e Q sono

$$x_S = \tfrac{1}{2} R \sin(\omega t), \qquad y_S = -R\cos(\omega t) + \tfrac{1}{2}\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)}.$$

Ora bisogna eliminare la variabile t dalle espressioni per x_S e y_S e arrivare ad un'equazione del tipo $F(x_S, y_S) = 0$. Il trucco è di sfruttare l'uguaglianza $\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$. Infatti,

$$\begin{aligned}
\sin(\omega t) &= \frac{2x_S}{R}, \\
\cos(\omega t) &= \frac{\sqrt{\ell^2 - R^2 \sin^2(\omega t)} - 2y_S}{2R} = \frac{\sqrt{\ell^2 - 4[x_S]^2} - 2y_S}{2R}.
\end{aligned}$$

Di conseguenza,

$$4[x_S]^2 + \left(\sqrt{\ell^2 - 4[x_S]^2} - 2y_S\right)^2 = 4R^2.$$

Chapter 2

Moti relativi

Questo capitolo è organizzato nel seguente modo: in una prima sezione si studia il moto di un punto in moto rispetto a due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro. Nella seconda sezione si studia il moto di un sistema rigido in moto rispetto a due terne in moto l'una rispetto all'altra. Infine, nella terza sezione, i principi generali stabiliti sui moti relativi vengono sfruttati per studiare alcuni importanti esempi di moti rigidi (moti rigidi piani e moti di precessione).

2.1 Generalità

Consideriamo due terne trirettangole levogire $\Omega\xi\eta\zeta$ e $Oxyz$ l'una in moto rispetto all'altra. Convenzionalmente chiamiamo fissa la terna $\Omega\xi\eta\zeta$ e diciamo mobile la terna $Oxyz$. Sia P un punto mobile rispetto alle due terne. Nel passare dal riferimento fisso a quello mobile le grandezze cinematiche (per esempio la velocità e l'accelerazione) associate al punto P in generale cambiano. Si pone quindi il problema di trovare il legame fra tali grandezze qualora il moto di P sia osservato contemporaneamente da due osservatori (uno solidale alla terna fissa e l'altro solidale a quella mobile). Per risolvere tale problema premettiamo le seguenti definizioni: Si chiama **moto assoluto** il moto del punto P rispetto alla terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$, **moto relativo** il moto del punto P rispetto alla terna mobile $Oxyz$ e **moto di trascinamento** il moto rigido della terna mobile rispetto a quella fissa (cioè il moto dello spazio rigido solidale alla terna mobile rispetto alla terna fissa).

Indichiamo con $\vec{e}, \vec{f}, \vec{g}$ i versori degli assi della terna fissa e con $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$ i versori degli assi della terna mobile. Siano inoltre $\xi(t), \eta(t), \zeta(t)$ le coordinate del punto P rispetto alla terna fissa mentre $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ individuino P rispetto alla terna mobile. La dipendenza dal tempo delle coordinate di P è giustificata dal fatto che esso è in moto rispetto ad entrambe le terne.

Supponiamo che siano date le equazioni del moto relativo di P

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ x_3 = x_3(t), \tag{2.1.1}$$

e che sia assegnato il moto di trascinamento della terna mobile rispetto a quella fissa tramite le funzioni $O(t), \vec{j}_1(t), \vec{j}_2(t), \vec{j}_3(t)$. L'equazione del moto assoluto di

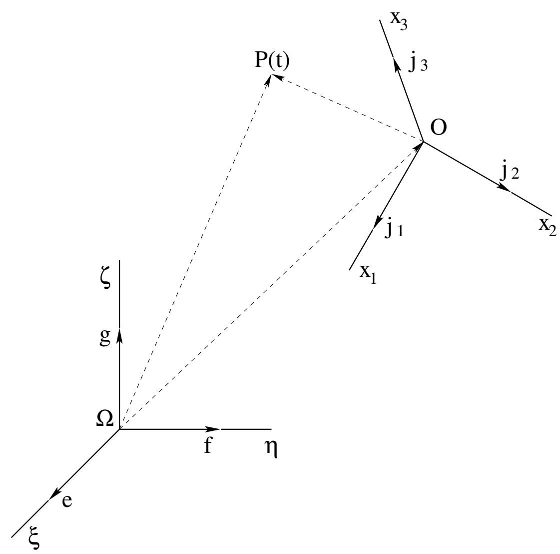


Figure 2.1.1: Moto del punto P rispetto a due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro.

P in forma vettoriale è

$$P = O + x_1\vec{j}_1 + x_2\vec{j}_2 + x_3\vec{j}_3, \tag{2.1.2}$$

dove x_1, x_2, x_3 sono date dalle (2.1.1). Le equazioni (2.1.2) differiscono dalle (1.1.1) perchè le coordinate di P non sono costanti rispetto alla base $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$. Proiettando le (2.1.2) lungo gli assi della terna fissa si ottengono le equazioni del moto assoluto di P

$$\xi = \alpha + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \tag{2.1.3a}$$
$$\eta = \beta + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3, \tag{2.1.3b}$$
$$\zeta = \gamma + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3 x_3, \tag{2.1.3c}$$

essendo $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ $(i = 1, 2, 3)$ i coseni direttori di $\vec{j}_1, \vec{j}_2, \vec{j}_3$ introdotti in (1.1.2). Le (2.1.3) sono molto simili alle (1.1.3) ma, rispetto ad esse, x_1, x_2, x_3 dipendono dal tempo (essendo date dalle (2.1.1)). Quindi, se sono noti il moto relativo di P e quello di trascinamento, è possibile scrivere esplicitamente le equazioni del moto assoluto di P. Viceversa, assegnati il moto assoluto e quello di trascinamento, invertendo le (2.1.3) si possono scrivere esplicitamente le equazioni del moto relativo di P.

2.1.1 Legge di composizione delle velocità e teorema di Coriolis

Denotiamo la velocità e l'accelerazione del punto P rispetto alla terna fissa rispettivamente con $\vec{v}^{(a)}$ e $\vec{a}^{(a)}$ (il pedice a sta per "assoluto"), mentre la velocità e l'accelerazione del punto P rispetto alla terna mobile si denoteranno con $\vec{v}^{(r)}$ e $\vec{a}^{(r)}$ (qui il pedice r sta per "relativo"). Infine denoteremo con $\vec{v}^{(t)}$ e $\vec{a}^{(t)}$ la velocità e l'accelerazione di trascinamento. Per velocità di trascinamento si intende la velocità di quel punto dello spazio rigido solidale alla terna mobile che, nell'istante considerato, è sovrapposto al punto P. In maniera analoga si definisce l'accelerazione di trascinamento.

Per stabilire il legame fra velocità assoluta, relativa e di trascinamento deriviamo la (2.1.2) rispetto al tempo e otteniamo

$$\frac{d(P-\Omega)}{dt} = \frac{d(O-\Omega)}{dt} + \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \vec{j}_i + \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{d\vec{j}_i}{dt}. \tag{2.1.4}$$

Se consideriamo il quadrinomio $\dfrac{dO}{dt} + \sum_{i=1}^{3} x_i \dfrac{d\vec{j}_i}{dt}$ si osserva subito che esso fornisce, istante per istante, la velocità del punto dello spazio rigido solidale alla terna mobile in moto di trascinamento rispetto alla terna fissa. Infatti, se, a partire da un certo istante $t = t^*$, il punto P si arrestasse nel suo moto rispetto alla terna $Oxyz$ la (2.1.4) darebbe (a partire dall'istante $t = t^*$) la velocità di un punto le cui componenti sono costanti rispetto alla terna mobile (e quindi tale punto appartiene allo spazio rigido solidale alla terna $Oxyz$). Perciò possiamo porre

$$\vec{v}^{(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dO}{dt} + \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{d\vec{j}_i}{dt}, \tag{2.1.5}$$

mentre, per definizione di velocità relativa si ha

$$\vec{v}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \vec{j}_i. \tag{2.1.6}$$

Quindi la (2.1.4) si può riscrivere come

$$\vec{v}^{(a)} = \vec{v}^{(r)} + \vec{v}^{(t)}. \tag{2.1.7}$$

L'equazione (2.1.7) costituisce il **principio dei moti relativi** che asserisce che *ad ogni istante la velocità assoluta di un punto è la risultante della sua velocità relativa e della sua velocità di trascinamento.*

Per stabilire il legame fra accelerazione assoluta, relativa e di trascinamento, iniziamo con il derivare la (2.1.4)

$$\frac{d^2P}{dt^2} = \frac{d^2O}{dt^2} + \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i \vec{j}_i + 2\sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \frac{d\vec{j}_i}{dt} + \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{d^2\vec{j}_i}{dt^2}. \tag{2.1.8}$$

Introducendo la cosiddetta **accelerazione complementare** (o *accelerazione centrifuga composta*) come

$$\vec{a}^{(c)} \stackrel{\text{def}}{=} 2\sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \frac{d\vec{j}_i}{dt}, \tag{2.1.9}$$

e poichè, per definizione di accelerazione di trascinamento e relativa, si ha

$$\vec{a}^{(t)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d^2O}{dt^2} + \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{d^2\vec{j}_i}{dt^2}, \qquad \vec{a}^{(r)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{3} \ddot{x}_i \vec{j}_i, \tag{2.1.10}$$

possiamo scrivere la (2.1.8) nel seguente modo

$$\vec{a}^{(a)} = \vec{a}^{(r)} + \vec{a}^{(t)} + \vec{a}^{(c)}. \tag{2.1.11}$$

Quest'ultima equazione esprime il teorema di Coriolis: *ad ogni istante l'accelerazione assoluta è la somma vettoriale delle accelerazioni di trascinamento, relativa e complementare.*

L'accelerazione complementare si può scrivere in un modo più significativo se si tiene conto delle formule di Poisson e della definizione di velocità relativa (cioè della (2.1.6)). Infatti, si trova subito:

$$\begin{aligned}\vec{a}^{(c)} &\stackrel{\text{def}}{=} 2\sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \frac{d\vec{j}_i}{dt} = 2\sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{j}_i = 2\sum_{i=1}^{3} \vec{\omega}^{(t)} \wedge \dot{x}_i \vec{j}_i \\ &= 2\vec{\omega}^{(t)} \wedge \left(\sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \vec{j}_i\right) = 2\vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{v}^{(r)},\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

essendo $\vec{\omega}^{(t)}$ la velocità angolare della terna mobile rispetto a quella fissa (*velocità angolare di trascinamento*).

Il teorema di Coriolis mette in evidenza come le accelerazioni di un medesimo punto misurate in due sistemi di riferimento in moto l'uno rispetto all'altro, siano in generale diverse. Sorge allora spontanea la curiosità di individuare rispetto a quali classi di sistemi di riferimento l'accelerazione rimanga invariata. A tale interrogativo risponde il seguente teorema:

Theorem 2.1.1 *Condizione necessaria e sufficiente affinchè l'accelerazione sia invariante nel passaggio da un riferimento in moto rispetto ad un altro è che tale riferimento si muova di moto traslatorio e uniforme rispetto al primo.*

Proof. Supponiamo che il moto della terna mobile sia traslatorio uniforme. In tal caso si ha

$$\vec{\omega}^{(t)} = \vec{0}, \qquad \frac{d^2O}{dt^2} = \vec{0}.$$

Quindi, per la (2.1.10) e la (2.1.12), l'accelerazione di trascinamento e quella complementare si annullano e la (2.1.11) fornisce $\vec{a}^{(a)} = \vec{a}^{(r)}$.

Viceversa supponiamo che si abbia $\vec{a}^{(a)} = \vec{a}^{(r)}$ per ogni moto di P. Per la (2.1.11) deve quindi aversi

$$\vec{0} = \vec{a}^{(t)} + \vec{a}^{(c)} = \frac{d^2O}{dt^2} + \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{d^2\vec{j}_i}{dt^2} + 2\vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{v}^{(r)}. \tag{2.1.13}$$

Si osservi che la velocità di trascinamento dipende solo dalla posizione del punto P e non dal moto relativo di P, perciò $\vec{a}^{(t)}$ e $\vec{a}^{(c)}$ sono ambedue (separatamente) nulle, cioè:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2O}{dt^2} + \sum_{i=1}^{3} x_i \dfrac{d^2\vec{j}_i}{dt^2} = \vec{0}, \\ \vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{v}^{(r)} = \vec{0}. \end{cases} \tag{2.1.14}$$

La seconda di queste due equazioni deve essere soddisfatta per ogni moto di P, ovvero per qualunque valore di $\vec{v}^{(r)}$ e, conseguentemente, essa è equivalente alla condizione $\vec{\omega}^{(t)} = \vec{0}$. Quindi il moto è traslatorio. Inoltre, tenendo conto delle formule di Poisson e della formula fondamentale dei corpi rigidi (eq. (1.5.1)), possiamo riscrivere l'espressione dell'accelerazione di trascinamento nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \vec{a}^{(t)} &= \frac{d^2O}{dt^2} + \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{d^2\vec{j}_i}{dt^2} = \frac{d^2O}{dt^2} + \sum_{i=1}^{3} x_i \frac{d(\vec{\omega}^{(t)} \wedge \vec{j}_i)}{dt} \\ &= \frac{d^2O}{dt^2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{d\left(\vec{\omega}^{(t)} \wedge (P-O)\right)}{dt} \\ &= \frac{d^2O}{dt^2} + \sum_{i=1}^{3} \left(\dot{\vec{\omega}}^{(t)} \wedge (P-O)\right) + \sum_{i=1}^{3} \left(\vec{\omega}^{(t)} \wedge \frac{d}{dt}(P-O)\right). \end{aligned} \tag{2.1.15}$$

Se ora si tiene conto della prima delle (2.1.15) e che $\vec{\omega}^{(t)} = \vec{0}$, si trova

$$\vec{a}^{(t)} = \frac{d^2O}{dt^2} = \vec{0}, \tag{2.1.16}$$

e questo assicura che il moto della terma mobile rispetto alla terna fissa oltre che traslatorio è anche uniforme. ■

2.2 Moto di un sistema rigido rispetto a due riferimenti mobili

Nella sezione precedente abbiamo studiato il moto di un singolo punto in moto rispetto a due sistemi di riferimento in moto reciproco. Consideriamo lo stesso problema qualora anzichè un singolo punto, si ponga l'attenzione su un sistema rigido S in moto rispetto a due terne in moto l'una rispetto all'altra. Ciò che interessa è determinare il legame fra le caratteristiche cinematiche del moto di S

ad un fissato istante t rispetto ai due sistemi di riferimento. Anche in questo caso indichiamo con $\Omega\xi\eta\zeta$ la terna fissa e con $Oxyz$ la terna mobile. In base a quanto esposto nel capitolo dedicato ai moti rigidi, per poter individuare l'atto di moto del sistema S (in un fissato istante t) basta conoscere i due vettori caratteristici $\vec{v}_Q$ e $\vec{\omega}$ che rappresentano, rispettivamente, la velocità di un punto Q, comunque prefissato e solidale ad S, e la velocità angolare di S. Poichè nella sezione precedente abbiamo imparato (tramite il teorema dei moti relativi) a esplicitare il legame tra le velocità di un qualunque punto di S rispetto ai due riferimenti in moto reciproco, rimane solo da trovare il legame fra le velocità angolari. A tal fine indichiamo con $\vec{\omega}^{(a)}$ e $\vec{\omega}^{(r)}$ rispettivamente le velocità angolari di S rispetto al riferimento fisso e rispetto al riferimento mobile, mentre si è già introdotta la velocità angolare di trascinamento $\vec{\omega}^{(t)}$ come la velocità angolare del moto rigido della terna $Oxyz$ rispetto alla terna fissa $\Omega\xi\eta\zeta$.

Quindi se P è un punto di S e Q è un prefissato punto solidale a S, allora rispetto alla terna fissa si avrà

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_Q^{(a)} + \vec{\omega}^{(a)} \wedge (P - Q), \tag{2.2.1}$$

mentre rispetto alla terna mobile si ha

$$\vec{v}_P^{(r)} = \vec{v}_Q^{(r)} + \vec{\omega}^{(r)} \wedge (P - Q). \tag{2.2.2}$$

Inoltre, se si considerano i punti dello spazio rigido solidale alla terna mobile che nell'istante considerato sono sovrapposti a P e Q, le velocità di trascinamento di questi soddisfano ancora alla (1.5.1) e pertanto si ha:

$$\vec{v}_P^{(t)} = \vec{v}_Q^{(t)} + \vec{\omega}^{(t)} \wedge (P - Q). \tag{2.2.3}$$

Teniamo ora presente che il teorema di moti relativi richiede che $\vec{v}^{(a)} = \vec{v}^{(r)} + \vec{v}^{(t)}$ e, se sommiamo membro a membro la (1.5.1) e la (1.5.2), perveniamo alla seguente equazione:

$$\begin{aligned}\vec{v}_P^{(a)} &= \vec{v}_P^{(r)} + \vec{v}_P^{(t)} = \left(\vec{v}_Q^{(r)} + \vec{v}_Q^{(t)}\right) + \left(\vec{\omega}^{(r)} + \vec{\omega}^{(t)}\right) \wedge (P - Q) \\ &= \vec{v}_Q^{(a)} + \left(\vec{\omega}^{(r)} + \vec{\omega}^{(t)}\right) \wedge (P - Q),\end{aligned}$$

cioè

$$\vec{v}_P^{(a)} = \vec{v}_Q^{(a)} + \left(\vec{\omega}^{(t)} + \vec{\omega}^{(r)}\right) \wedge (P - Q). \tag{2.2.4}$$

Confrontando la (2.2.4) con la (2.2.1) si ottiene

$$\vec{\omega}^{(a)} \wedge (P - Q) = \left(\vec{\omega}^{(r)} + \vec{\omega}^{(t)}\right) \wedge (P - Q),$$

e poichè tale relazione deve valere qualunque siano i punti P e Q che si scelgono, essa conduce alla seguente importante equazione

$$\vec{\omega}^{(a)} = \vec{\omega}^{(r)} + \vec{\omega}^{(t)}. \tag{2.2.5}$$

Questa equazione rappresenta l'analogo per le velocità angolari dell'equazione (2.1.7). La (2.2.4) afferma che: *In un moto rigido qualunque la velocità angolare assoluta è, istante per istante, uguale alla somma vettoriale delle velocità angolari relativa e di trascinamento.*

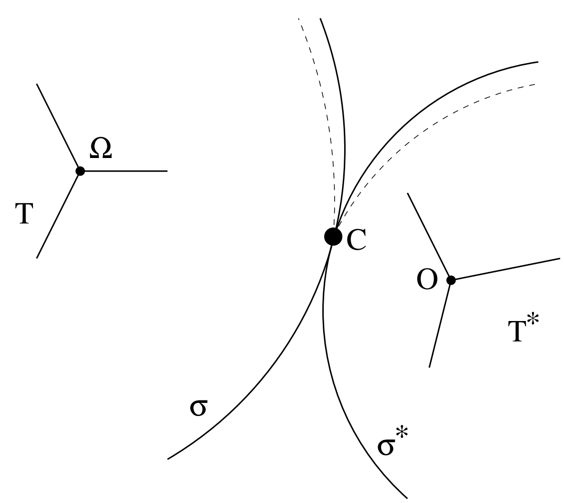
Si verifica facilmente che la velocità angolare rimane invariata nel passaggio da un riferimento in moto rispetto ad un altro solo se il moto del riferimento mobile è traslatorio (cioè se $\vec{\omega}^{(t)} = \vec{0}$.)

2.3 Applicazioni ai moti rigidi

In questa sezione discutiamo tre importanti applicazioni della teoria dei moti relativi ai moti rigidi: il rotolamento di due superfici rigide, i moti rigidi piani e i moti di precessione.

2.3.1 Rotolamento di due superfici rigide

Siano σ^* e σ due superfici rigide delle quali la prima è fissa mentre la seconda si muove mantenendo sempre il contatto con la prima almeno in un punto C (naturalmente, si suppongono soddisfatte tutte le condizioni di regolarità necessarie, in particolare, l'esistenza del piano tangente comune alle due superfici dove questi piani hanno punti in comune). Il moto di σ rispetto a σ^* si dice *moto di rotolamento*. Sia C uno qualunque dei punti di contatto (potrebbe anche essere l'unico, come accade se σ^* e σ sono due superfici sferiche). Esso varia generalmente sia su σ^* che su σ, descrivendo due curve. La velocità di



quel punto di σ che nell'istante considerato si trova sovrapposto a C si chiama *velocità di strisciamento* in C. Evidentemente, essa risulta parallela al piano tangente in C alle due superfici. Infatti, se T^* e T sono due terne rispettivamente solidali a σ^* e σ, la T^* si può considerare come una terna fissa, la T

come una terna mobile e interpretare il moto di C su σ^* come moto assoluto, quello su σ come moto relativo. Il moto di trascinamento è il moto di rotolamento di σ su σ^* e, pertanto, la velocità di strisciamento esprime proprio la velocità di trascinamento. Dette $\vec{v}_a^{(C)}$, $\vec{v}_r^{(C)}$ e $\vec{v}_\tau^{(C)}$ le velocità assoluta, relativa e di trascinamento di C, il principio dei moti relativi dà

$$\vec{v}_a^{(C)} = \vec{v}_r^{(C)} + \vec{v}_\tau^{(C)}. \tag{2.3.1}$$

I vettori $\vec{v}_a^{(C)}$, $\vec{v}_r^{(C)}$, esprimendo velocità di punti che si muovono su σ^* e su σ rispettivamente, sono parallele al piano tangente comune alle due superfici. La (2.3.1) dimostra, pertanto, che anche il vettore $\vec{v}_\tau^{(C)}$ è ad esso parallelo.

Il moto di σ su σ^* si dice di *puro rotolamento* se la velocità di strisciamento è nulla in ogni punto C. In tal caso si dice che σ rotola senza strisciare su σ^*.

Dato l'annularsi di $\vec{v}_\tau^{(C)}$, è chiaro, in base alla (2.3.1), che in un moto di puro rotolamento le due traiettorie descritte da C su σ^* e su σ hanno la medesima tangente in C e vengono da C percorse con uguali velocità. Inoltre, risultando nulla la velocità del punto solidale a σ sovrapposto a C, l'atto di moto rigido cui è soggetto σ è ad ogni istante un atto di moto rotatorio intorno a un asse passante per C.

2.3.2 Moti di precessione

Consideriamo un sistema rigido S avente un punto solidale $O = \Omega$ all'origine comune alla terna fissa T^* e alla terna solidale T avente costantemente la velocità nulla. In tal caso la velocità $\vec{v}_P$ di un qualsiasi punto solidale P diviene

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge (P - \Omega). \tag{2.3.2}$$

Ad ogni istante sia a la retta uscente da Ω e parallela ad $\vec{\omega}$ (supposto non nullo). Tale retta è, in generale, variabile sia nello spazio (cioè, rispetto alla terna fissa T^*), sia nel sistema mobile (cioè, rispetto alla terna solidale T). Passando la a sempre per il punto fisso O, essa descriverà due coni, uno nello spazio ambiente, l'altro nello spazio mobile. Tali coni si chiamano *coni di Poinsot*. Se si considera un qualunque punto P della retta del sistema rigido S a cui in ogni determinato istante la a è sovrapposta, la velocità di P risulta nulla. Infatti, in tal caso $P - \Omega$ risulta parallelo ad $\vec{\omega}$ e quindi $\vec{v}_P = \vec{0}$ (vedi la (2.3.2)). Dunque abbiamo dimostrato l'esistenza di una retta a, il cosiddetto *asse di moto*, tale che ogni punto di a appartenente allo spazio mobile ha velocità nulla. In generale, la retta a non è solidale allo spazio mobile.[1]

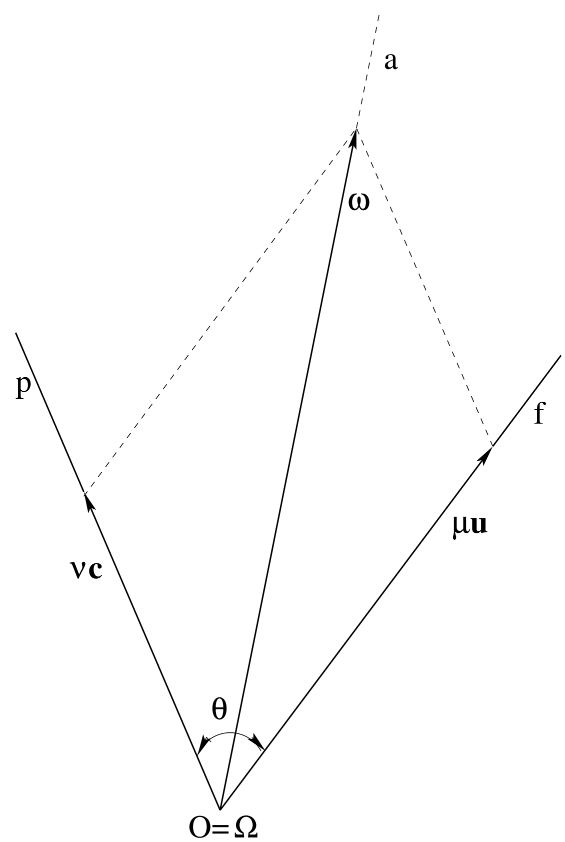
Particolare interesse tra i moti rigidi con un punto fisso rivestono i *moti di precessione*. In tal caso una retta, f, uscente da O e solidale al sistema mobile forma un angolo invariabile, θ, con una retta, p, anch'essa uscente da O ma fissa nello spazio ambiente. La retta f si chiama *asse di figura*, la retta p *asse di precessione*, il punto O *polo della precessione*. La velocità angolare, $\vec{\omega}$, risulta somma di due vettori, uno di direzione invariabile nel sistema mobile, l'altro

[1] Se lo fosse, il moto sarebbe rotatorio.

di direzione invariabile nello spazio ambiente. Tale proprietà si esprime con la relazione

$$\vec{\omega} = \mu\,\vec{u} + \nu\,\vec{c}, \tag{2.3.3}$$

dove $\vec{u}$ è un versore solidale al sistema mobile (versore di f) e $\vec{c}$ è un versore invariabile nello spazio ambiente (versore di $\vec{p}$, supposto non parallelo a $\vec{u}$). Le quantità μ e ν si chiamano rispettivamente *velocità di rotazione propria* e *velocità di precessione*. Risultano le seguenti due identità:



$$\vec{c} \cdot \vec{u} = \cos\theta = \text{costante}, \tag{2.3.4a}$$

$$\vec{c} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{u}) = \vec{c} \cdot \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{c} \cdot \vec{u}) - \frac{d\vec{c}}{dt} \cdot \vec{u} = 0. \tag{2.3.4b}$$

Di conseguenza, la velocità angolare $\vec{\omega}$ è parallela al piano dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{c}$. L'annularsi di una delle velocità μ, ν, riduce il moto a un moto rotatorio.

Il moto di precessione si dice *precessione regolare* se ambedue le velocità μ, ν, sono delle costanti. In tal caso, la (2.3.3) evidenzia come $\vec{\omega}$ sia la somma di due vettori, uno costante nel sistema mobile, l'altro nello spazio ambiente.

Poichè in tal caso gli angoli che la retta, a, uscente da O e parallela ad $\vec{\omega}$, forma con f e p sono costanti, si deduce che i due coni di Poinsot sono rotondi.

L'esempio più noto di questo tipo di moto rigido è la precessione dell'asse della Terra. In tal caso, sotto l'ipotesi che la Terra abbia la forma di una sfera, l'origine O coincide con il centro della Terra, l'asse di precessione p è la retta che attualmente passa per i due poli nord e sud, e $\theta \simeq 23,5°$. In prima approssimazione, la precessione è regolare: il periodo di rotazione propria è 24 ore incirca, mentre il periodo di precessione vale 26.000 anni.

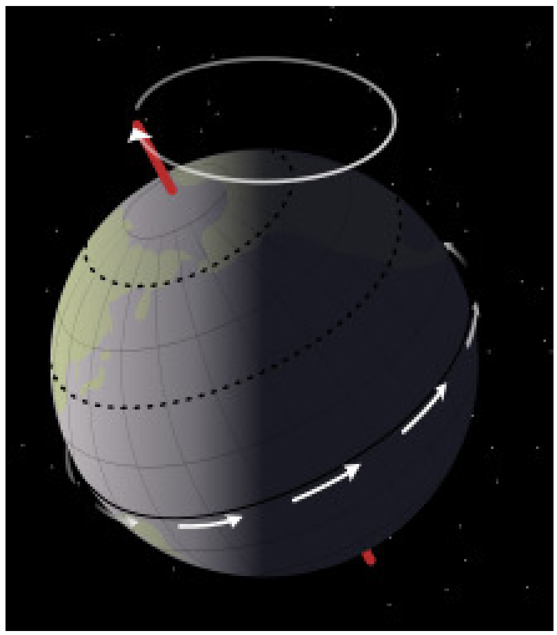


Figure 2.3.1: La precessione dell'asse della Terra. Vedi Wikipedia.

Ritorniamo ora a discutere i coni di Poinsot, dimostrando che il cono mobile, σ, rotola senza strisciare sul cono fisso, σ^*. Sia, infatti, λ^* una qualunque curva tracciata su σ^* e che abbia un'intersezione semplice con ogni generatrice e sia C l'intersezione di λ^* con la generatrice che nell'istante considerato costituisce l'asse di moto. Durante il moto il punto C descrive su σ una curva λ ben determinata. Interpretando il moto di C su σ^* con traiettoria λ^* come moto assoluto e quello su σ con traiettoria λ come moto relativo, il moto di trascinamento è il moto di σ (cioè, il moto del sistema rigido). Ne segue che la velocità di trascinamento di C è nulla, appartenendo tale punto all'asse di moto in un atto di moto rotatorio.

Per il principio dei moti relativi, si ha, pertanto,

$$\vec{v}_a^{(C)} = \vec{v}_r^{(C)}. \tag{2.3.5}$$

Dalla (2.3.5) risulta che λ^* e λ hanno la medesima tangente e ciò, essendo quella tangente distinta dalla generatrice comune ai due coni, implica che i due coni abbiano in comune il piano tangente. Inoltre, la velocità di trascinamento nel moto di σ su σ^* è, evidentemente, nulla. Si tratta, pertanto, di un moto di puro rotolamento.

Chapter 3

Testi degli esercizi svolti in classe

- Due punti P_1 e P_2 di un sistema S in moto- ad un dato istante t_0- occupano le posizioni $A_1 = (1, 2, 1)$, $A_2 = (-1, 3, 1)$ con le velocità $\vec{v}_1 = 5\vec{i} + \mu\vec{k}$, $\vec{v}_2 = 3\vec{i} - \lambda^2\vec{j} + \vec{k}$ con λ, $\mu \in \mathbb{R}$. Per quali λ, μ il moto può essere rigido? Influisce su tale possibilità μ?

- Un sistema in moto è costituito da n punti materiali. Se tali punti hanno ad ogni istante la stessa accelerazione il moto è rigido?

- Sia dato un moto rigido piano. Provare che nell'ipotesi in cui $\omega^4 + \dot{\omega}^2 \neq 0$, esiste un polo Ω avente accelerazione nulla.

- Siano P_1, P_2 e P_3 tre punti di un corpo rigido in movimento. Rispetto a una terna solidale, le loro coordinate siano $P_1 = (0, 0, 1)$, $P_2 = (0, 0, 0)$, $P_3 = (0, 2, 0)$. Sono date le velocità di P_1 e di P_2 ad un certo istante mentre di P_3 si sa solo che la velocità in quell'istante è parallela al piano yz. Si ha $\vec{v}_1 = (3, 1, -2)$, $\vec{v}_2 = (-1, 2, -2)$, $\vec{v}_3 = (0, \dot{y}, \dot{z})$. Determinare:

  1. $\vec{v}_3$ e la velocità angolare $\vec{\omega}$,
  2. stabilire se l'atto di moto può essere traslatorio o rotatorio.

- Fissata una terna di riferimento solidale a un corpo rigido, le velocità dei punti (rispetto al riferimento solidale) $P_1 = (1, 0, 2)$, $P_2 = (0, 0, 3)$ sono date- in uno stesso istante t_0- da $\vec{v}_1 = (1, 2, -3)$, $\vec{v}_2 = (2, 1, -2)$. Dopo aver stabilito la classe delle possibili determinazioni del vettore velocità angolare all'istante t_0, dire se l'atto di moto può essere rotatorio.

- Fissata una terna di riferimento solidale a un corpo rigido S, siano $P_1 = (1, 0, -1)$ e $P_2 = (2, 3, -1)$ due punti solidali. Possono i vettori $\vec{u}_1 = (3, 2, 1)$, $\vec{u}_2 = (1, -1, -1)$ rappresentare, la velocità di P_1 e P_2 in uno stesso istante?

- L'atto di moto di un sistema S in moto è- ad ogni istante- $(P, \vec{v}_P)$ con:

$$\vec{v}_P = f(t)(z\vec{i} - x\vec{k}) + g(t)\vec{j}$$

con $\{O, \vec{i}\,\vec{j}\,\vec{k}\}$ riferimento ortornormale e $f(t)$ e $g(t)$ funzioni regolari (almeno di classe $C^2(\mathbb{R})$). Dopo aver provato che il moto è rigido, determinare

  1. il moto elicoidale uniforme tangente (al generico istante t) specificando, in particolare l'equazione dell'asse di moto;
  2. per quali f e g il moto è traslatorio, rotatorio o elicoidale.

- Usando il formalismo lagrangiano, dimostrare il teorema di Coriolis (legge di composizione delle accelerazioni).