RECUEIL D'EXERCICES DE MATHEMATIQUES

CLASSE DE 1ères S1S2

TOME 1

Compilé par :

Mouhamadou KA

Professeur au Lycée Cheikh Oumar Foutiyou TALL de Saint-Louis

Préface de M. Abdou SOW,
Professeur émérite au Lycée Cheikh Oumar Foutiyou TALL de Saint-Louis

Saint-Louis, Novembre 2006

Dédicace

A mon frère, ami et promotionnaire Cheikh Sadibou NDIAYE, enseignant dévoué à son travail, compétent et sérieux,

A tous les enseignants qui, comme lui, dans l'anonymat des classes et malgré des conditions de travail défavorables, donnent chaque jour le meilleur d'eux-mêmes pour faire reculer les frontières de l'ignorance.

L'un des problèmes cruciaux de l'enseignement des mathématiques dans le cycle secondaire, à l'heure actuelle, est le manque de diversité d'ouvrages de référence. A part la collection C.I.A.M, c'est presque le vide.
Ce recueil d'exercices et de problèmes destiné à nos classes de Premières scientifiques vient donc à son heure dans la mesure où il nous permettra, nous autres enseignants, d'enrichir notre documentation, mais aussi d'apporter un début de réponse à cette question lancinante posée généralement par les élèves et leurs parents en début d'année : « quel ouvrage acheter ? ».
Enseigner les mathématiques est une activité complexe, toute en nuances, que chacun de nous essaie de pratiquer de son mieux. Il est néanmoins incontestable qu'une solide réputation de difficulté, voire d'ésotérisme, reste attachée à notre discipline. Bien des théories ou méthodes que nous développons en classe sont des mystères pour les élèves. Cela pose avec encore plus d'acuité le problème du choix judicieux des illustrations (situations simples qui aident l'élève à comprendre les théories) et des applications (situations plus difficiles que seule une maîtrise parfaite de la théorie permettent de cerner) . Les éléments de ce recueil peuvent aider à faire ces choix ô combien difficiles.

Les premiers destinataires de ce recueil, les élèves, y trouveront une large gamme de situations qui les aideront d'une part à vérifier leur acquisition des connaissances du cours, d'autre part à tester leur capacité à adapter celles-ci à des cas plus complexes.

Je me permets de parler au nom de tous ceux qui aiment les mathématiques et leur enseignement pour encourager l'auteur à persévérer dans ce travail remarquable, qui consiste en la mise à disposition des élèves de la Seconde à la Terminale de tels recueils qui les aideront, j'en suis sûr, à prendre goût à l'apprentissage des mathématiques.

Abdou SOW

AVANT-PROPOS

« Il n'est pas de mathématiques sans larmes », disait Laurent Schwarz ([3]). Il entendait par là que pour être un bon chercheur en mathématiques ou un bon ingénieur, il faut avoir lu une grande quantité de cours et étudié de très nombreux théorèmes mathématiques.
Au niveau plus modeste de l'enseignement secondaire dans les lycées, cette remarque reste vraie : pour être performant en Maths, l'élève de série scientifique, aussi doué soit-il, doit s'astreindre à résoudre de très nombreux exercices et problèmes, ce qui est d'ailleurs l'essence même de l'activité mathématique.
Malheureusement, au Sénégal, il est difficile de trouver un manuel d'exercices au niveau de la classe de Première S conforme aux exigences du programme en vigueur. Il faudrait recourir à une douzaine de livres pour réunir des exercices et problèmes suffisamment nombreux et variés pour à la fois illustrer efficacement les notions du Cours et donner à l'élève des situations plus complexes où il peut exercer ses connaissances, voire acquérir un embryon de culture scientifique.
Pour simplifier le travail des élèves et des collègues, nous proposons une sélection des meilleurs exercices et problèmes qui ont été proposés dans plusieurs lycées du Sénégal en classe de Première S1 ou S2 au cours des douze dernières années, ou que nous avons eu à collecter dans divers manuels . Chaque chapitre est précédé de rappels de cours . Nous y ajoutons les textes de 30 épreuves de devoirs surveillés ou de compositions.
Ce premier tome couvre environ la moitié du programme. Il traite des sujets généralement abordés au premier Semestre de l'année scolaire. Les exercices et problèmes plus particulièrement destinés aux élèves de la Première S1 sont signalés par un point (•). Des thèmes généraux (Programmation linéaire, Puissance d'un point pour un cercle, etc….) sont regroupés sous forme de Travaux Pratiques. Il appartient aux collègues de juger de l'opportunité de traiter tel ou tel thème. Enfin une indication de durée a été donnée pour chaque devoir.
Nous espérons que cet humble travail intéressera les collègues et les élèves. Nous remercions par avance toute personne qui voudra bien nous signaler des erreurs matérielles (inévitables !) qui se seraient glissées dans le texte ou formuler des suggestions .

L'Auteur

Contact : serigneka@yahoo.co.uk

[1] Eminent mathématicien français, Professeur à l'Ecole Polytechnique, titulaire de la médaille Fields, l'équivalent du Prix Nobel en Mathématiques

TABLE DES MATIERES

ELEMENTS DE LOGIQUE

Note Pédagogique
Ce chapitre ne fait pas partie du programme des Premières S. Nous pensons cependant qu'il est utile d'initier nos élèves aux règles élémentaires du raisonnement mathématique, sans pour autant faire une théorie formelle des quantificateurs et des propositions.On évite ainsi de nombreux écueils pouvant se dresser devant leur compréhension des démonstrations.

Si p et q sont des phrases, $p \Rightarrow q$ signignifie :si p est vraie, alors q est vraie.

$p \Leftrightarrow q$ signifie qu'on a à la fois $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow p$.

On note $\overline{p}$ la négation de la proposition p .

Une proposition qui porte sur tous les éléments d'un ensemble se note $\forall$ x , p . Sa négation est : $\exists$ x , $\overline{p}$.

Principales méthodes de raisonnement en mathématiques :
— *Raisonnement par implications successives* : On part d'une proposition admise ou d'une hypothèse de l'énoncé, notée p_1 , puis on montre qu'elle en implique une autre p_2, puis que p_2 en implique une troisième p_3 etc…, jusqu'à ce qu'on aboutisse à celle qu'on veut démontrer p .
— *Raisonnement par l'absurde* : on suppose vraie la négation de la proposition que l'on souhaite démontrer et on montre que cela mène à une contradiction.
— *Raisonnement par disjonction des cas* : on montre qu'il n y a que n ($n \geq 2$) cas possibles et que, dans chacun de ces cas, la proposition à démontrer est vraie.
— *Raisonnement par contraposition* : Au lieu de montrer que $p \Rightarrow q$, on montre que $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.
— *Raisonnement par contre-exemple* : pour montrer qu'une proposition est fausse, on donne un exemple pour lequel elle n'est pas vérifiée.
— *Raisonnement par récurrence* : on souhaite montrer une propriété dépendant de l'entier n et valable à partir d' un certain rang n_0. On procède en trois étapes :
a) On montre qu'elle est vraie pour le premier entier n_0.
b) On montre que si elle est vraie pour l'entier k, elle l'est également pour l'entier k + 1.
c) On conclut qu'elle est vraie pour tous les entiers considérés.

EXERCICE 1
Pour chacune des paires de phrases suivantes, dire si $p \Rightarrow q$ ou si $q \Rightarrow p$.
1°) p : Mamadou vit à Saint-Louis q : Mamadou vit au Sénégal
2°) p : $x = 4$ q : $3x - 2 = 10$
3°) p : $x = 4$ q : $3x - 2 = 11$
4°) ABCD est un carré .
p : la longueur de AB est 3 cm . q : L'aire de ABCD est 9 cm^2 .
5°) ABCD est un rectangle .
p : la longueur de AB est 5 cm et celle de BC 3 cm . q : L'aire de ABCD est 15 cm^2 .
6°) ABCD est un quadrilatère .
p : la longueur de AB est 5 cm et celle de BC 3 cm . q : L'aire de ABCD est 15 cm^2 .
7°) p : $x^2 - 3x + 2 = 0$. q : $x = 1$.

8°) p : x est un parallélogramme . q : x est un carré .
9°) p : x est une banane . q : x est un fruit .
10°) p : x est un cheval . q : x est un fruit .

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, écrire $\overline{p}$ quand p est la phrase :

1°) Tous les sportifs se dopent . 2°) Tous les politiciens sont des menteurs .
3°) Tout nombre réel peut s'écrire sous forme de fraction .
4°) Il y a un élève de 1ère S1 qui aime le sport .
5°) Je traverse le pont Faidherbe chaque jour .
6°) Tous les quadrilatères sont des rectangles .
7°) Tous les profs de maths du lycée portent des lunettes .

EXERCICE 3

Reprendre les phrases de l'exercice 1 . Dans chaque cas, écrire $\overline{p}$ et $\overline{q}$ et dire si on a $\overline{p} \Rightarrow \overline{q}$ ou $\overline{q} \Rightarrow \overline{p}$.

EXERCICE 4

Dire parmi les assertions suivantes quelles sont celles qui sont vraies et quelles sont celles qui sont fausses .

1°) $x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$. 2°) $x = 2 \Rightarrow x^2 = 5$ 3°) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$.
4°) $x^2 = 4 \Rightarrow x = 2$. 5°) $x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 4$ 6°) $x \neq 2 \Rightarrow x^2 \neq 5$.
7°) $x \neq 4 \Rightarrow x^2 \neq 2$.

EXERCICE 5

Enoncer les contraposées des phrases suivantes :
1°) si un nombre est plus grand que 5, il est strictement positif .
2°) si un nombre est multiple de 6, alors il est pair .

EXERCICE 6

Quelle conclusion peut-on tirer des trois phrases suivantes ?
A : Les bébés sont illogiques .
B : Nul n'est méprisé quand il peut venir à bout d'un crocodile .
C : Les gens illogiques sont méprisés .
(*d'après Lewis Caroll)*

EXERCICE 7

Les professions de trois frères, Ali, Baba et Cory sont : pharmacien, dentiste et chirurgien
Sachant que les implications suivantes sont vraies, déterminer la profession de chacun

(∗) Si Ali est chirurgien, alors Baba est dentiste.

(∗) Si Baba n'est pas chirurgien, alors Cory est dentiste.

(∗) Si Ali est dentiste, alors Baba est pharmacien.

(∗) Si Cory est pharmacien, alors Ali est dentiste.

EXERCICE 8

1°) Soient a et b deux nombres de même parité. Démontrer que a + b est pair.
2°) Démontrer que tout nombre de la forme *aaa* , avec *a* chiffre non nul, est un multiple de 37

3°) Déterminer les entiers naturels compris entre 10 et 1000 dont le produit des chiffres est 6.
4°) Soit n un entier naturel tel que n^2 est impair ; démontrer que n est impair.

EXERCICE 9

Parmi une douzaine d'œufs apparemment identiques, 11 ont la même masse, alors qu'une autre est de masse différente.
Trouver en quatre pesées si cet œuf est plus léger ou plus lourd que les autres.
Comment le reconnaître ?

EXERCICE 10

Un seau contient 8 litres d'eau. Un autre a une contenance de 5 litres et un troisième de 3 litres, mais ces deux derniers sont vides.
Expliquer comment avoir 4 litres en 6 transvasements.

EXERCICE 11

Effectuer les démonstrations suivantes en appliquant la méthode de raisonnement indiquée :
1°) Montrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes (*Raisonnement par implications successives*)
2°) $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel (*Raisonnement par l'absurde*)
3°) $\mathcal{D}$ est la médiatrice du segment [AB]. Π est le demi-plan ouvert de frontière $\mathcal{D}$ contenant A , Π' le demi-plan ouvert de frontière $\mathcal{D}$ contenant B . Montrer que tout point M du plan tel que MA < MB appartient à Π . (*Raisonnement par disjonction des cas*) .

4°) Démontrer que si le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ est non nul, alors les droites (AB) et (CD) sont sécantes (*Raisonnement par contraposition*) .
5°) Démontrer que
a) $\forall\ n \geq 1 : 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $\forall\ n \geq 5$, $2^n > n^2$.
(*Raisonnement parrécurrence*)

EQUATIONS, INEQUATIONS, SYSTEMES

Note Pédagogique

Ce chapitre est fondamental. Beaucoup des compétences qui y sont acquises (savoir résoudre des équations, savoir déterminer le signe d'une expression, savoir discuter sur une expression dépendant d'un paramètre, savoir traduire un problème concret en termes algébriques,…) seront réinvesties tout au long des chapitres ultérieurs. Ainsi, la détermination du domaine de définition d'une fonction, le calcul d'une limite,l'étude du signe de la dérivée d'une fonction se ramènent très souvent à la résolution d'un équation ou d'une inéquation .

1. Equation du premier degré

Soit l'équation du premier degré $ax + b = 0$ (E_1) .

Si $a \neq 0$, elle a une solution unique $x = -\dfrac{b}{a}$.

Si $a = 0$, alors $\begin{cases} \text{si } b = 0 : (E_1) \text{ a une infinité de solutions . } S = \mathbb{R} . \\ \text{si } b \neq 0, (E_1) \text{ n'a pas de solutions. } S = \varnothing . \end{cases}$

2. Signe du binôme du premier degré

Le binôme du premier degré $ax + b$ est du signe de son premier coefficient a , pour les valeurs de x supérieures à sa racine $-\dfrac{b}{a}$, et du signe contraire de a pour les valeurs de x supérieures à sa racine.

La résolution d'une inéquation du premier degré se ramène souvent à l'étude du digne d'un binôme du premier degré .

3. Résolution d'un système 2 × 2 par la méthode de Cramer

Pour résoudre le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

on pose $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$; $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$; $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$.

• **Si $D \neq 0$, le système a une solution unique : le couple (x_0, y_0) avec $x_0 = \dfrac{D_x}{D}$ et $y_0 = \dfrac{D_y}{D}$.**

$$S = \{ (x_0 , y_0) \}$$

• **Si $D= 0$, le système est soit impossible soit indéterminé (c'est-à-dire qu'il admet une infinité de solutions). Il existe un réel λ tel que $a' = \lambda a$ et $b' = \lambda b$**

— Si $c' = \lambda c$ alors le système admet une infinité de couples solutions :

$$S = \{ (x , y) / ax + by + c = 0 \}$$

— Si $c' \neq \lambda c$ alors le système n'admet pas de couple solution :

$$S = \varnothing$$

4. Résolution d'un système 3 × 3 par la méthode du pivot de Gauss

Soit le système : $\begin{cases} ax + by + cz = d & L_1 \\ a'x + b'y + c'z = d' & L_2 \\ a''x + b''y + c''z = d'' & L_3 \end{cases}$

Pour le résoudre, on suit les étapes suivantes :

• 1ère étape : A l'aide d'opérations $L_k \leftarrow L_k + \lambda L_1$ (remplacement de la ligne L_k par la ligne $L_k + \lambda L_1$) pour k = 2 et k = 3, on annule les coefficients de x dans L_2 et L_3.

• 2ème étape : On annule le coefficient de y dans la ligne L_3 en utilisant l'opération : $L_3 \leftarrow L_3 + \mu L_2$) μ étant un réel convenable, autrement dit, on suit le même procédé qu'à la première étape mais avec la ligne L_2 comme pivot.
On obtient alors un système triangulaire .

• On résout le système triangulaire obtenu à la deuxième étape en « remontant » à partir de la dernière ligne :on calcule succesivement z, puis y puis x.
Cette méthode s'étend aisément aux systèmes 4 × 4 , 5 × 5 , etc…

5.<u>Equation du second degré</u>

On appelle ainsi l'équation (E) : $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

a) *<u>Résolution</u>*

On utilise la quantité $\Delta = b^2 - 4ac$ appelée discriminant de l'équation .
— Si $\Delta < 0$, alors (E) n'a pas de solution et f (x) n'est pas factorisable.
— Si $\Delta = 0$, alors
(E) a une solution $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, appelée racine double et
$f(x) = a(x - x_0)^2$.
— Si $\Delta > 0$, alors (E) a deux solutions (ou racines) distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ; \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et on a : } f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) .$$

b) *<u>Somme et produit des racines</u>*

Si l'équation (E) a deux racines x ' et x '' , on a :

$$x' + x'' = S = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad x'x'' = P = \frac{c}{a} .$$

Si deux nombres ont pour somme S et pour produit P, alors ils sont solutions de l'équation $X^2 - SX + P = 0$.
On peut calculer certaines expressions en fonction de S et P. Par exemple :

$$x'^2 + x''^2 = (x' + x'')^2 - 2x'x'' = S^2 - 2P.$$

$$x'^3 + x''^3 = (x' + x'')^3 - 3x'x''(x' + x'') = S^3 - 3PS .$$

$$\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{S}{P} .$$

c) *<u>Signe des racines</u>*

Le signe des racines se déduit de l'étude des signes de S et de P.
— Si $P < 0$: $x' < 0 < x''$
— Si $P > 0$: $\begin{cases} S < 0 : x' < x'' < 0 \\ S > 0 : 0 < x' < x'' . \end{cases}$

d) *<u>Signe du trinôme. Inéquations du second degré</u>*

— Si $\Delta < 0$, alors pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ est du sigtne de a.

— Si $\Delta = 0$, alors $f(x) = 0$ pour $x = -\dfrac{b}{2a}$ et f (x) est du signe de a pour $x \neq -\dfrac{b}{2a}$.

— Si $\Delta > 0$, alors f (x) est du signe de a pour $\in \,]-\infty ; x_1[\cup]x_2 ; +\infty[$ (extérieur des racines) et du signe de — a pour $x \in \,]x_1 ; x_2[$(intérieur des racines) .

d) *<u>Position d'un nombre par rapport aux racines d'une équation du 2nd degré</u>*

On rappelle que $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ est une équation du second degré notée (E) .
Pour comparer un nombre α aux racines de (E) , on forme $a \cdot f(\alpha)$.

— Si $a \cdot f(\alpha) < 0$, (E) a deux racines distinctes x' et x'', et on a : $x' < \alpha < x''$.
— Si $a \cdot f(\alpha) = 0$, alors α est l'une des racines de (E) .
— Si $a \cdot f(\alpha) > 0$, et si $\Delta > 0$, alors (E) admet deux racines distinctes x' et x'' et α est à l'extérieur des racines.

*** Si $\frac{S}{2} - \alpha < 0$, alors on a : $x' < x'' < \alpha$.**

*** Si $\frac{S}{2} - \alpha > 0$, alors on a : $\alpha < x' < x''$.**

6. Equations et inéquations irrationnelles

L'équation $\sqrt{A} = B$ est équivalente à : $\begin{cases} B \geq 0 \\ A = B^2 . \end{cases}$

L' inéquation $\sqrt{A} < B$ est équivalente à : $\begin{cases} A \geq 0 \\ B > 0 \\ A < B^2 \end{cases}$

L' inéquation $\sqrt{A} \geq B$ est équivalente à la réunion des systèmes suivants :

$\begin{cases} A \geq 0 \\ B < 0 \end{cases}$ ou bien $\begin{cases} B \geq 0 \\ A \geq B^2 \end{cases}$

PREMIER DEGRE

EXERCICE 12

Résoudre les équations suivantes :

a) $\frac{(2x - 5)(2x + 1)}{8} - \frac{(x + 3)^2}{6} = \frac{(x - 3)x}{3}$

b) $(2x + 3)((4x + 5) - (4x^2 - 9) + (7x - 3)(2x + 3) = 0$

c) $\frac{x - 1}{x - 2} - \frac{x - 2}{x - 3} = \frac{x - 4}{x - 5} - \frac{x - 5}{x - 6}$ d) $\frac{1}{x - 1} - \frac{2}{x} + \frac{1}{x + 1} = \frac{4x - 5}{x(x^2 - 1)}$

EXERCICE 13

Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\frac{x + 1}{4} < \frac{1 - 3x}{5} + \frac{1 - x}{10}$ b) $\frac{x}{x - 2} < 3$ c) $\frac{3x - 2}{5 - 3x} > 1$ d) $\frac{x + 1}{x} > \frac{x - 1}{2x}$

EXERCICE 14

Résoudre les systèmes d'inéquations suivants :

a) $\begin{cases} \frac{x}{x - 1} < 4 \\ \frac{3x}{x + 1} < 2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{(x - 2)(x + 1)}{2x - 3} > 0 \\ \frac{(1 - x)(x + 2)}{x} < 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \frac{2x - 5}{x + 7} > 1 \\ (x^2 + 2)(x + 5) < (x^2 + 2)(2x + 4) \end{cases}$

EXERCICE 15

Résoudre et discuter les équations et inéquations suivantes (x *étant l'inconnue et* m *un paramètre)* :

1°) $(m^2 + 1)\,x - 5 = 0$ et $(m^2 + 1)x - 5 \geq 0$

2°) $(m + 1)\,x - 5 = 0$ et $(m + 1)\,x - 5 < 0$

3°) $(m + 1)\,x - m - m^2 = 0$ et $(m + 1)\,x - m - m^2 > 0$

4°) $(2m + 3)\,x + m - 2 = 0$ et $(2m + 3)\,x + m - 2 \geq 0$

5°) $\dfrac{m(x+1)}{2} + \dfrac{2m(x-1)}{3} = (3m - 2)\dfrac{x}{2} + m - 1$.

6°) $\dfrac{x - m}{m - 2} = 3 - x$ et $\dfrac{x - m}{m - 2} > 3 - x$

• EXERCICE 16

Résoudre et discuter les équations suivantes (x *étant l'inconnue et* m *un paramètre)* :

a) $m\,(mx - 5) = 4(4x - 5)$ b) $m\,(mx + 1) = 2(2x - 1)$ c) $\dfrac{mx + 5}{x - 2} = \dfrac{1 - m}{3}$

d) $\dfrac{m}{x - 2} = \dfrac{3m - 1}{x + 1}$ e) $m^2\,x + 4 = m\,(x + 4)$.

EXERCICE 17

Résoudre et discuter les équations suivantes (a *et* b *étant des paramètres*) :

a) $\dfrac{x - a}{a - b} - \dfrac{x + b}{a + b} = \dfrac{2ax}{a^2 - b^2}$ b) $\dfrac{x + a}{x + b} = \dfrac{a + 1}{b}$

• EXERCICE 18

Résoudre et discuter les inéquations suivantes (x *étant l'inconnue et* m *un paramètre)* :

a) $\dfrac{mx + 5}{x - 2} < \dfrac{1 - m}{3}$ b) $\dfrac{m}{x - 2} > \dfrac{3m - 1}{x + 1}$

• EXERCICE 19

Résoudre et discuter les équations suivantes (m *et* p *étant des paramètres*) :

a) $\left|\, 2x - |2x - 1| \,\right| = -m^2 x$. b) $\left|\, |x + 2| - 1 \,\right| = p$

• EXERCICE 20

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l' inéquation suivante : $\dfrac{2x + 1 + |x|}{x + |x - 2|} < 2$.

EXERCICE 21

Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} (\sqrt{3} - 1)\,x + 2y = -2\,. \\ x + (\sqrt{3} - 1)\,y = -1 - \sqrt{3} \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2\sqrt{x} + 3\sqrt{y} = 7 \\ 3\sqrt{x} + 5\sqrt{y} = 11 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2 + 5\,y^2 = 17 \\ 2x^2 + 11\,y^2 = 37 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{3}{y - 1} - \dfrac{1}{x + 2} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{5}{y - 1} + \dfrac{3}{x + 2} = \dfrac{29}{12} \end{cases}$ e) $\begin{cases} \dfrac{x}{7} = \dfrac{y}{8} = \dfrac{z}{2} \\ x + y + z = 85 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 4\,|x| - 2\,|y| = 8 \\ 6\,|x| - 5\,|y| = 5 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + y + z = a \\ y + z + t = b \\ z + t + x = c \\ t + x + y = d \end{cases}$ h) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = a \\ \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = b \\ \dfrac{1}{z} + \dfrac{1}{x} = c \end{cases}$

EXERCICE 22

Résoudre par la méthode du pivot chacun des systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 3x - 2y + 7z = -36 \\ -10x - 7y + z = -29 \\ 6x + 4y - 3z = 29 \end{cases}$ (*Solution : (1, 2, — 5)*)

d) $\begin{cases} -5x - 5y - 4z + t = 73 \\ 4y + 3z + 2t = -29 \\ 5y - 5z - t = -73 \\ 3x + 5y - 3z + 2t = -96 \end{cases}$ (*Solution : (— 9, — 10, 5, — 2)*)

b) $\begin{cases} 3x + 4y + 9z = 53 \\ 7x - 10y + 3z = -23 \\ 2x + 9y - 5z = -18 \end{cases}$ (*Solution : (— 3, 2, 6)*)

c) $\begin{cases} 9x + 3y + z + 9t = 34 \\ 3x + 2y - 9z + 7t = 6 \\ -x + y - 6z + 5t = -3 \\ 7x - 4y + 4z - 6t = 29 \end{cases}$ (Solution *: (3, — 4, 1, 2)*)

EXERCICE 23

m étant un paramètre, résoudre et discuter les systèmes :

$\begin{cases} 2mx + (m + 1)y = 2 \\ (m + 2)x + (2m + 1)y = m + 2 \\ 5x + (2m - 1)y - 3z = 3(m + 2) \end{cases}$ $\begin{cases} 9x + my - z = 4 \\ 4mx - 2y + (m - 1)z = m \\ 5x + (2m - 1)y - 3z = 3(m + 2) \end{cases}$

• EXERCICE 24

Résoudre et discuter les systèmes suivants en supposant a, b, c distincts :

a) $\begin{cases} x + ay + a^2 z + a^3 = 0 \\ x + by + b^2 z + b^3 = 0 \\ x + cy + c^2 z + c^3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + ay + a^2 z + a^4 = 0 \\ x + by + b^2 z + b^4 = 0 \\ x + cy + c^2 z + c^4 = 0 \end{cases}$ c) $\begin{cases} x + y + z = a + b + c \\ bx + cy + az = ab + bc + ca \\ cx + ay + bz = ab + bc + ca \end{cases}$

Résoudre et discuter les systèmes suivants en supposant que m est un paramètre réel :

d) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$ e) $\begin{cases} x + my - 2m = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x = 0 \end{cases}$ (*Pour quelles valeurs de* m *les solutions obtenues sont-elles constituées de nombres x et y tous deux positifs* ?)

• EXERCICE 25

1°) Résoudre en discutant suivant les valeurs du paramètre, le système suivant :

$$\begin{cases} 2(x+1) = m(5y - 5m - 14) \\ 3x + 2y = 11m + 5 \end{cases}$$

2°) Pour quelles valeurs du paramètre m, x et y prennent-ils des valeurs positives ?
Comparer dans ce cas les deux nombres x et y .

3°) Les conditions précédentes étant remplies, peut-on choisir m pour que x et y soient les mesures des côtés d'un triangle isocèle . (Envisager tous les cas géométriques possibles).

EXERCICE 26 : Un problème de robinets

On dispose de trois robinets A, B et C pour remplir une piscine. Avec les robinets A et B, il faut 10 min, avec B et C, 20min et avec C et A 12 min.
Déterminer le temps mis par chaque robinet fonctionnant seul pour remplir la piscine.

EXERCICE 27 : Un problème d'Euler

Trois frères ont acheté un champ pour cent louis. Le Cadet dit qu'il pourrait le payer seul si le Second lui donnait la moitié de l'argent qu'il a ; le Second dit que si l'Aîné lui donnait le tiers seulement de son argent, il payerait le champ seul ; enfin, l'Aîné ne demande que le quart de l'argent du Cadet pour payer le champ seul.
Combien chacun avait-il d'argent ?
(*D'après Euler , Eléments d'algèbre , 1774*)

EXERCICE 28

Déterminer un nombre de trois chiffres sachant que :

- la somme de ces chiffres est égale à 17 ;
- si on permute le chiffre des dizaines et celui des centaines, le nombre augmente de 360 ;
- si on permute le chiffre des unités et celui des centaines, le nombre diminue de 198 .

TRAVAUX DIRIGES 1 : PROGRAMMATION LINEAIRE

Une entreprise produit deux types d'objets A et B.
Pour des questions de vente, l'entreprise doit produire chaque semaine au moins 20 objets A et au moins 30 objets B, et, au maximum, 100 objets A et 80 objets B.
Par ailleurs, 440 heures hebdomadaires de travail sont disponibles dans l'entreprise : la confection d'un objet A nécessite 2 heures de travail, tandis que celle d'un objet B nécessite 4 heures de travail.
on désignera par x le nombre d'objets A et par y le nombre d'objets B produits.
Indications : on raisonnera tout d'abord comme si x et y étaient des réels positifs quelconques ; on considérera,ensuite, le fait qu'ils doivent être entiers.

A. Les contraintes

1°) Justifier que les données du problème peuvent se traduire par le système d'inéquations : $\begin{cases} 20 \leq x \leq 100 \\ 30 \leq y \leq 80 \\ 2x + 4y \leq 440 \end{cases}$

le système obtenu s'appelle **système des contraintes**.

2°) Représenter graphiquement, dans un repère du plan, l'ensemble des points dont les coordonnées sont solutions du système d'inéquations précédent.
Indications :choisir 2cm, en abscisse et en ordonnée, pour représenter 10 unités.
L'ensemble des solutions d'une inéquation est l'ensemble des des coordonnées des points d'un demi-plan ; on appelle **domaine des contraintes**, ou polygone des contraintes, l'intersection de tous les demi-plans ainsi obtenus.

B. L'optimisation
Le profit de l'entreprise sur la vente d'un objet A est 150F et sur la vente d'un objet B est de 270F.
On suppose toute la production vendue.
1°) Exprimer en fonction de x et y le profit hebdomadaire p(x ;y) résultant de la vente de x objets A et de y objets B.
2°) tracer les trois droites parallèles définies par les équations :
p(x ;y) = 11 000 ; p(x ;y) = 21 000 ; p(x ;y) = 29 400
3°) Soit k un réel. Exprimer en fonction dek l'ordonnée à l'origine b_k de la droite d'équation p(x ;y) = k.
Montrer que lorsque k augmente, alors b_k augmente. En déduire graphiquement les coordonnées (x ;y) du point du domaine des contraintes pour lequel le profit est maximal et vérifier que ces coordonnées x et y sont des entiers.
Calculer le profit maximal.

EXERCICE 29
Une entreprise de serrures fabrique deux types de serrure, S_1 et S_2 , dont les prix de vente sont respectivement 400F et 300F l'unité.
Pour les fabriquer, elle utilise trois types de produit, A, B et C, dans les proportions fixées par le tableau suivant :

Produit / serrures	A	B	C
S_1	15	10	5
S_2	9	10	10
Stock disponible	900	700	600

L'objectif est de rendre maximale la recette totale en combinant au mieux les productions des deux serrures.
1°) Choisir les deux inconnues x et y .
Traduire les trois contraintes de stock en inéquations à deux inconnues x et y.
2°) Traduire graphiquement les inéquations.
En déduire la zone Z des productions (x ;y) possibles.
3°) Tracer sur le graphique précédent les droites de production que réaliseraient une recette totale de 24 000F, une autre de 18 000F.
4°) En déduire le sommet T de Z qui rend cette recette totale maximale. Calculer les coordonnées de T. Combien produira-t-on alors de serrures S_1 et S_2 ?
5°) Calculer la recette totale maximale.

SECOND DEGRE

EXERCICE 30

Résoudre les équations suivantes :

a) $-6x^2 + x + 1 = 0$ b) $-x^2\sqrt{2} + (1-\sqrt{2})x + 2 = 0$ c) $2x^2 + x\sqrt{6} - 6 = 0$

d) $-x^2\sqrt{3} + \sqrt{3}(1-\sqrt{3})x + 3 = 0$ e) $\dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-2a} + \dfrac{1}{x-3a} = 0$ (a paramètre)

f) $\dfrac{x}{|x+1|} + \dfrac{7x+3}{x} = 1$ • g) $\dfrac{m}{(a-m)^2}\,\dfrac{(a-x)^2}{x} + \dfrac{m}{(a+m)^2}\,\dfrac{(a+x)^2}{x} = 1$(m et a réels donnés)

h) $(2x+1)^2 - 3(2x+1) + 2 = 0$ i) $\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{3}{x} + 1 = 0$ j) $\dfrac{-2}{(x+1)^2} + \dfrac{1}{x+1} - 5 = 0$

EXERCICE 31

Soit l'équation (E) : $4x^4 + 8x^3 - 37x^2 + 8x + 4 = 0$.

1°) Montrer que 0 ne peut pas être solution de (E) .

En déduire que (E) est équivalente à (E ') : $4x^2 + 8x - 37 + \dfrac{8}{x} + \dfrac{4}{x^2} = 0$.

2°) En posant $X = x + \dfrac{1}{x}$, déterminer une équation (E ") d'inconnue X déduite de (E ') .

3°) Résoudre (E ") . En déduire les solutions de (E) .

EXERCICE 32

1°) Factoriser les expressions suivantes :

$A = x^2 - (a-b)x - ab$ $B = x^2 - 2(a^2+b^2)x + (a^2-b^2)^2$

$C = ax^2 + (b+c)x - a + b + c$ $D = 2x^2 + xy - y^2 - 5x + 4y - 3$.

2°) Simplifier les fractions rationnelles suivantes :

$E = \dfrac{2x^2 - \sqrt{2}(1+\sqrt{2})x + \sqrt{2}}{2x^2 - 3x\sqrt{2} + 2}$ $F = \dfrac{abx^2 - (a^2+b^2)x + ab}{bx^2 - (a+b)x + a}$

EXERCICE 33

Dans chacun des cas suivants, former l'équation du second degré ayant pour racines les nombres indiqués :

a) $\dfrac{2}{3}$ et $-\dfrac{1}{4}$ b) $2-\sqrt{3}$ et $2+\sqrt{3}$ c) $\dfrac{1}{1+m}$ et $\dfrac{m}{1+m}$ d) $\dfrac{a}{b}$ et $\dfrac{b}{a}$ e) $\dfrac{a+b}{ab}$ et $\dfrac{a-b}{ab}$

EXERCICE 34

Etudier l'existence et le signe des racines des équations suivantes :

a) $mx^2 - 2mx + m - 8 = 0$ b) $(m-3)x^2 + (2m-1)x + m + 2 = 0$

c) $(2m-1)x^2 - 2(2m-1)x + m + 7 = 0$ d) $m(m+2)x^2 - (m+2)x - m + 1 = 0$

EXERCICE 35

1°) Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation : $mx^2 - (2m-7)x + m + 5 = 0$ a-t-elle deux solutions positives ?

2°) Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation : $mx^2 - (2m+3)x + m + 1 = 0$ a-t-elle deux solutions négatives ?

3°) Pour quelles valeurs du paramètre m l'équation : $mx^2 - 2(4+m)x + 15 + m = 0$

a-t-elle deux solutions de signes contraires ?

EXERCICE 36

Résoudre les systèmes suivants :

1°) $\begin{cases} x - y = 2 \\ x^2 + y^2 = 164 \end{cases}$ 2°) $\begin{cases} xy = -6 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{cases}$ 3°) $\begin{cases} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = -\frac{25}{12} \\ xy = -\frac{1}{3} \end{cases}$

4°) $\begin{cases} 3x + 4xy + 3y = -5 \\ x - 2xy + y = 5 \end{cases}$ 5°) $\begin{cases} x + y + xy = -7 \\ x^2y + xy^2 = 6 \end{cases}$ 6°) $\begin{cases} 2x + xy + 2y = -4 \\ x^2y + xy^2 = \frac{3}{2} \end{cases}$

EXERCICE 37

Résoudre les systèmes suivants :

1°) $\begin{cases} a^2 + b^2 - 2a - 3b = 9 \\ 3a^2 + 3b^2 - a + 5b = 1 \end{cases}$ 2°) $\begin{cases} a + b - ab = \frac{2m - 1}{m^2 - 1} \\ (a + 1)(b + 1) = \frac{m(m + 2)}{m^2 - 1} \end{cases}$ 3°) $\begin{cases} \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = m + 1 \\ ab = m - 2 \end{cases}$

(a, b inconnues) *(a, b inconnues, m paramètre)* *(a, b inconnues)*

EXERCICE 38

Soit le système : $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 y^2 + 4xy - m^2 + 4 = 0 \end{cases}$ *(x, y inconnues, m paramètre)* .

Discuter l'existence et le nombre de solutions de ce système suivant les valeurs du paramètre m .

EXERCICE 39

Une équation du second degré a ses racines x' et x'' telles que :

$\begin{cases} mx' + mx'' - m = 4 - 2x' - 2x'' \\ mx'x'' + m = 2 - 2x'x'' \end{cases}$

1°) Former cette équation dont les coefficients dépendent du paramètre m .

2°) Montrer qu'il existe entre x' et x'' une relation indépendante de m.

3°) Utiliser cette relation pour déterminer les racines doubles de l'équation obtenue.

4°) Comment faut-il choisir m pour que les deux racines soient positives ?

EXERCICE 40

1°) Montrer que l'équation (E) : $2x^2 - 8x - 18 = 0$ admet deux racines distinctes x' et x'' .

2°) Sans calculer x' et x'' , déterminer :

$$x' - x'',\ x'^2 + x''^2,\ x'^3 + x''^3,\ \frac{1}{x'} + \frac{1}{x''},\ \frac{x' - 1}{x''} + \frac{x'' - 1}{x'} .$$

3°) Former l'équation dont les racines sont : $X' = \frac{x'^2 + x''}{x''}$ et $X'' = \frac{x''^2 + x'}{x'}$.

EXERCICE 41

Dans chacun des cas suivants, montrer que l'équation proposée (E) a 2 racines x' et x'' .
Puis calculer la valeur numérique des expressions A et B .

1°) (E) : $2x^2 - 3x - 1 = 0$ $A = 2(x'^3 + x''^3) - (x'^2 + x''^2) - 5(x' + x'')$.

$B = (x'^2 - 1)(x''^2 - 1)$.

2°) $x^2 — 4x + 1 = 0$ $\quad A = \dfrac{1}{x'^2} + \dfrac{1}{x''^2} + \dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}$ $\quad B = \dfrac{x' — 1}{x'' — 1} + \dfrac{x' + 1}{x'' + 1}$

EXERCICE 42

Soit le trinôme du second degré P défini par : $P(x) = ax^2 + bx + c$ et α un nombre réel.

1°) Montrer que si $a \times P(\alpha) < 0$, alors P admet deux racines distinctes et α est compris entre ces racines.

2°) Montrer que si $a \times P(\alpha) = 0$, alors α est une racine de P.

3°) Montrer que si $a \times P(\alpha) > 0$, et si $\Delta > 0$, alors P admet deux racines distinctes et α est situé à l'extérieur de ces racines.

4°) <u>Application</u> : Classer les nombres $—\dfrac{1}{2}$ et 2 par rapport aux racines de l'équation :

$$x^2 — 2x — 3 = 0 .$$

• EXERCICE 43

Etudier suivant les valeurs de m la position des nombres donnés par rapport aux racines des équations suivantes :

1°) $(m — 1)x^2 — 2(m + 1)x + m + 2 = 0$. *Nombre donné* : 3

2°) $(3m — 2)x^2 — 2(5m — 2)x + 3(2m + 1) = 0$. *Nombre donné* : — 2

3°) $(m^2 + 2)x^2 + 12x + 10 — 16m^2 = 0$. *Nombre donné* : 5

4°) $(m + 3)x^2 — 5x + 3m + 12 = 0$. *Nombres donnés* : — 1 et 1

5°) $m(m — 3)x^2 — 2m^2 x + m^2 — \dfrac{3}{2} = 0$. *Nombres donné* : $—\dfrac{1}{2}$ et 1 .

• EXERCICE 44

Déterminer m pour que les équations suivantes aient deux racines x ' et x " satisfaisant aux conditions indiquées :

1°) $(m — 1)x^2 — 2(m + 1)x + 2m — 1 = 0$. $\quad — 6 < x' < 4 < x''$

2°) $3(m + 1)x^2 — 3(3m + 2)x + 2(3m + 2) = 0$. $\quad — 1 < x' < x'' < 1$

$— 3x^2 + (m + 1)x + 1 = 0$. $\quad — 1 < x' < x''$

EXERCICE 45

Résoudre les inéquations ou systèmes d'inéquations suivants :

1°) $4x^2 — 3x — 10 < 0$ $\quad$ 2°) $(2x^2 — 5x + 7)^2 — (x^2 — 12x + 7)^2 > 0$

3°) $\dfrac{x^4 — 5x^2 + 4}{x^4 — 2x^2 — 3} < 0$ $\quad$ 4°) $\dfrac{x^4 + x}{x^4 — 5x^2 + 3} < 1$ $\quad$ • 5°) $(mx + 1)(3x + 5) < 0$

• 6°) $\dfrac{4}{3} < \dfrac{x^2 — 2mx + m^2}{x^2 — 6x — 7}$ $\quad$ **7°)** $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 2} + \dfrac{1}{x + 3} < 0$ $\quad$ **8°)** $—\dfrac{1}{2} < \dfrac{x — 1}{x^2 — x + 1} < \dfrac{1}{4}$

8°) $\begin{cases} x^2 + 4x — 5 < 0 \\ (x + 3)(x — 4) < 0 \end{cases}$ $\quad$ 9°) $\begin{cases} \dfrac{x + 3}{x — 4} > 0 \\ x^2 — 5x + 4 > 0 \end{cases}$ $\quad$ 10°) $\begin{cases} \dfrac{2x^2 — 5x + 2}{x^2 — 3x + 4} > 2 \\ x — \dfrac{1}{x} > 1 \end{cases}$

9°) $— 1 < \dfrac{2x + 1}{3x — 1} \leq 2$ $\quad$ 10°) $2x + 5 < 2x^2 + 5x < 2x + 10$.

EXERCICE 46

Pour quelles valeurs de m les inéquations suivantes sont-elles vérifiées quel que soit x ?

a) $mx^2 — (5m + 1)x + 3(2m + 1) > 0$ $\quad$ b) $(m + 2)x^2 — (m + 4)x — m + 2 > 0$

c) $(m + 3)x^2 — 2(m + 2)x + m + < 0$. $\quad$ d) $(4m + 3)x^2 — (3m — 1)x + m + 1 \geq 0$

EXERCICE 47

Déterminer les conditions que doivent remplir le paramètre m pour que les équations suivantes aient deux racines positives .

a) $(m - 4)x^2 + (m + 2)x - m = 0$ b) $(m - 2)x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$

• EXERCICE 48

Résoudre et discuter, suivant les valeurs du paramètre m, les inéquations suivantes:

1°) $\frac{x}{m} > \frac{m}{x-1}$ (*ne pas chasser les dénominateurs ; étudier le signe d'une fraction ; il faudra placer 1 par rapport aux racines d'une équation du second degré*) .

2°) $-3 < \frac{x^2 - mx + 1}{x^2 + x + 1} < 3$ (*on établira que* $\forall x,\ x^2 + x + 1 > 0$)

3°) $\frac{x + 2m}{x - 1} < 2 + \frac{m}{x}$ (*il faudra placer 0 et 1 par rapport aux racines d'une équation du second degré*) .

EXERCICE 49

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

1°) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ 2°) $2x^4 - 3x^2 - 5 = 0$ 3°) $3x^4 - 28x^2 + 9 = 0$

4°) $3x^4 + 13x^2 + 4 = 0$ 5°) $x^4 - 7x^2 + 6 > 0$ 6°) $2x^4 - 5x^2 - 7 < 0$

7°) $2x^4 + x^2 + 1 > 0$ 8°) $x^4 + x^2 + 1 < 0$ 9°) $-x^4 + 3x^2 + 4 \geq 0$

10°) $\begin{cases} x^4 - 5x^2 + 4 < 0 \\ x^4 - 8x^2 - 9 < 0 \end{cases}$

EXERCICE 50

Résoudre et discuter les équations suivantes :

1°) $(m - 1)x^4 - 2(m + 1)x^2 + m - 2 = 0$ 2°) $(2m - 1)x^4 - 2x^2 + m = 0$

3°) $(m + 1)x^4 - 2mx^2 + m - 2 = 0$ 4°) $(2m - 1)x^4 - (m + 2)x^2 + m - 1 = 0$

• EXERCICE 51

On donne l'équation $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Lorsque l'équation admet quatre racines, calculer leur somme et leur produit .

EXERCICE 52

Résoudre les équations et inéquations irrationnelles suivantes :

1°) $-2x + 1 = \sqrt{x^2 + 5}$ **2°)** $x + \sqrt{25 - x^2} = -7$ **3°)** $\sqrt{2x^2 + 5x + 4} = x - 2$

4°) $x + \sqrt{2x^2 - 5x - 3} = 3$ **5°)** $\sqrt{-2x + 10} + 2\sqrt{3x + \frac{5}{2}} = \sqrt{20x + 39}$

6°) $\sqrt{11 - x} = \sqrt{5x + 15} - \sqrt{3x - 2}$ **7°)** $9 - \sqrt{x^2 + x - 6} = -2x$

8°) $\sqrt{-x + 12} + \sqrt{x - 7} = \sqrt{2x - 13}$ 9°) $\sqrt{x^2 + 4x - 5} = 2x + 12$

10°) $2x + \sqrt{x + 5} = 3 - \sqrt{-5x + 4}$ 11 °) $x - 2 < \sqrt{x + 1}$ 12°) $x - 4 \geq \sqrt{x^2 - 4}$

12°) $\sqrt{x + 1} < 3 - x$ 13°) $2x - 5 > \sqrt{x^2 + x + 1}$ 14°) $x + 1 > \sqrt{x^2 + 2x}$

15°) $x < 2 + \sqrt{x^2 - 8x + 4}$ 16°) $x^2 - 3x + 5 = 2\sqrt{x^2 - 3x + 2}$ (Poser : $\sqrt{x^2 - 3x + 2} = X$) 17°) $\sqrt{x} + \sqrt{x - \sqrt{1 - x}} = 1$ 18°) $\sqrt{4 + \sqrt{x^4 + x^2}} = x - 2$

19°) $\sqrt{x} + \sqrt{x + 1} < \sqrt{6x + 1}$ 20°) $\sqrt{5x + 1} - \sqrt{x + 1} < 2$

21°) $\sqrt{2x^2+3} + \sqrt{5-8x^2} > \sqrt{4x^2+7}$ 22°) $\dfrac{x+2}{\sqrt{x-1}} - \sqrt{x} = 4$.

23°) $2x^2 - 3x - 2\sqrt{2x^2-3x-2} - 1 = 0$ • 24°) $\sqrt{1-\sqrt{x^4-x^2}} = x - 1$

EXERCICE 53

Etudier suivant les valeurs de x le signe de :

a) $f(x) = 1 - \dfrac{3x}{\sqrt{12-3x^2}}$ b) $g(x) = \dfrac{(2x^2-6x)(3-2x)}{x^2-9+2(x-3)}$ c) $h(x) = \dfrac{x^4-17x^2+60}{x(x^4-8x^2+15)}$

EXERCICE 54

Soit $A(x) = \dfrac{|x|-1}{x^2-1} - \dfrac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$

1°) Définir A (x) puis simplifier A (x) .

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $|A(x)| < \dfrac{1}{2}$.

• EXERCICE 55

Résoudre et discuter :

1°) $\sqrt{x^2+3x+m} = x - 2$ (m *paramètre*) 2°) $\sqrt{1-x^2} - mx = 1 - 2m$ (m *paramètre*)

3°) $\sqrt{h(x-1)(x-2)} = x - m$ (h, m *paramètres*) 4°) $\sqrt{7+x} + \sqrt{3-x} = m$

5°) $\sqrt{x-2} - \sqrt{2x-2} = m$ 6°) $x + \sqrt{a^2-x^2} = b$ (a et b *paramètres positifs*)

7°) $\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}} = m$. (m *paramètre*) 8°) $\sqrt{m(1-x^2)-x} = m(x-1)$.

9°) $\sqrt{1-x^2} = mx + 1 - 2m$.

EXERCICE 56

Résoudre : $x + \sqrt{x^2-10x+9} = \sqrt{x+2+2\sqrt{x^2-10x+9}}$

(*On étudiera soigneusement le domaine de définition*) .

• EXERCICE 57

Résoudre l'équation : $\sqrt{m(x-1)(x-2)} = x - \dfrac{3}{2}$ et discuter suivant les valeurs de m (on sera amené à étudier la place du nombre $\dfrac{3}{2}$ par rapport aux racines d'une équation du second degré) .

EXERCICE 58

Résoudre : 1°) $3\sqrt{x^2+x-6} \geq 2(2x-3)$ 2°) $\sqrt{x^2-3x+2} = |x-1|$

• EXERCICE 59

Résoudre et discuter les inéquations suivantes :

1°) $\sqrt{x+2} > mx + 1$ 2°) $\dfrac{m^2x^2-7mx+6}{m^2x^2-6mx-5} \leq 0$.

EXERCICE 60

Résoudre les systèmes suivants :

1°) $\begin{cases} 2x-5y=-1 \\ (x+y)^2=9 \end{cases}$ 2°) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x+y-xy=-1 \end{cases}$ 3°) $\begin{cases} x-y=7 \\ x^2+y^2=37 \end{cases}$ 4°) $\begin{cases} xy^2+x^2y=-30 \\ xy+x+y=-13 \end{cases}$

6°) $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ z^2 + xy + 5 = 0 \\ xy - 2(x + y) = -8 \end{cases}$ 7°) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 10y = -21 \\ 2x^2 - x - y = -3 \end{cases}$ 8°) $\begin{cases} 2xy - 3x = 3 \\ yz - 6y = -22 \\ zx - 5z = 10 \end{cases}$

9°) $\begin{cases} y^2 = xz \\ 2(y + 24) = x + z \\ (y + 24)^2 = x(z + 432) \end{cases}$ 10°) $\begin{cases} 2x + y + t = 1 \\ x + 2y + z = 1 \\ y + 2z + t = 1 \\ x + z + 2t = 1 \end{cases}$ (*on introduira l'inconnue auxiliaire* $s = x + y + z + t$)

• EXERCICE 61

Etudier, suivant les valeurs de x qui la définissent, le signe de l'expression :

$$\varphi(x) = \frac{-2x + \sqrt{x^2 + 3x - 2}}{|x| - |2 - x - x^2| + x}$$

EXERCICE 62

Une somme de 400 000F doit être partagée également entre un certain nombre de personnes. Quel est le nombre de personnes sachant que s'il y avait 4 personnes de moins les parts seraient augmentées de 50 000F ?

• EXERCICE 63

Soient a, b et c trois réels définis par : $a = x^2 + x + 1$ $b = 2x + 1$ $c = x^2 - 1$.

1°) Pour quelles valeurs de x ces trois nombres sont-ils strictement positifs ?

2°) Montrer que dans ce cas, $a \geq b$ et $a \geq c$, et que a, b et c peuvent être considérés comme les mesures des côtés d'un triangle ABC.

Ce triangle peut-il être isocèle ? équilatéral ?rectangle ?

EXERCICE 64

Une personne a placé 350 000F à un taux x % à intérêts simples. Au bout de 4 ans elle retire le capital et les intérêts et replace le tout à (x + 1) % . Le nouveau revenu annuel est 16 800F. Calculer x.

EXERCICE 65

Pour déterminer la profondeur d'un puits, on laisse tomber une pierre, on entend la pierre toucher l'eau six secondes après. Quelle est la profondeur du puits ?

(On prendra 340 $m.s^{-1}$ pour la vitesse du son et 9,8 $m.s^{-2}$ pour l' accélération de la pesanteur) .

EXERCICE 66

Un récipient contient 250 l d'eau. Du récipient, on prélève x litres que l'on remplace par x litres d'alcool. Du mélange obtenu, on prélève x litres que l'on remplace par x litres d'alcool. Le mélange obtenu contient de l'eau et de l'alcool dans la proportion de 16 / 9.

On cherche x et la quantité d'eau prélevée la deuxièmes fois.

1°) Compléter le tableau suivant en fonction de x :

2e étape	**Quantité d'eau**	**Quantité d'alcool**	**Quantité totale**
3e étape	(en L)	(en L)	
1ère étape	250	0	250

2°) En déduire que x est solution de l'équation : $x^2 - 500x + 22500 = 0$
3°) Conclure.

• EXERCICE 67

On donne un demi-cercle de diamètre AB = 2R Un point M de ce demi-cercle est projeté orthogonalement en H sur [AB]. On pose AM = x .
1°) Déterminer les points M tels que AM + HB = *l* (*l* longueur donnée) . Discuter .
2°) Déterminer les points M tels que AH + AM = *a* (*a* longueur donnée) . Discuter .
3°) Déterminer les points M tels que AH = HM = *l* (*l* longueur donnée) . Discuter.
Pour 3° , chercher une solution géométrique .
4°) Déterminer les points M tels que :

a) $2AM - 3AH = \frac{4R}{5}$ b) $AH^2 + 2HM^2 = 2R^2$ c) $AM + HB = \frac{19R}{8}$

• EXERCICE 68

Soient [Ox) et [Oy) demi-droites orthogonales, et A un point fixe de leur bissectrice . Une droite variable, passant par A, coupe [Ox) en M et [Oy) en N.
On pose : OA = a, OM = x, ON = y .
1°) Calculer $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.
2°) Déterminer x et y tels que x + y = *l*, longueur fixée . Discuter .
3°) Reprendre les questions précédentes lorsque $\widehat{xOy} = 120°$.

• EXERCICE 69 *Problème de Pappus* (mathématicien d'Alexandrie, au 4^e^ siècle) .
Soient [Ox) et [Oy) demi-droites orthogonales, et A un point fixe de leur bissectrice, tel que $OA = a\sqrt{2}$, avec a > 0 . Une droite variable, passant par A, coupe [Ox) en M et [Oy) en N.
Déterminer cette droite de façon que le segment [MN] ait une longueur *l*, fixée .

GENERALITES SUR LES FONCTIONS

Note Pédagogique

Le concept de fonction est rarement étudié en profondeur en classe de Seconde. Nous avons donc repris toutes les notions de base : après la détermination des ensembles de définition, nous présentons des situations sur les applications, les bijections, les injections, les surjections, la notion de courbe d'une fonction (lectures graphiques), les opérations sur les fonctions, les notions de restriction et prolongement, les propriétés liées à l'ordre (majoration, minoration) , les propriéts classiques de parité et de périodicité et enfin la notion très importante de sens de variation. Les exercices relatifs à la fonction partie entière sont plus spécialement destinés aux élèves de la série S1.Les notions d'axe (ou de centre) de symétrie ainsi que celles de fonctions associées seront illustrées dans le chapitre « Etude de fonctions » (cf. tome 2). Il nous paraît en effet peu pertinent de traiter ces thèmes alors que les élèves ne savent pas encore tracer des courbes.

Ce chapitre mérite qu'on s y attarde. Il constitue le socle où on définit les notions de base de l'Analyse qui vont accompagner l'élève jusqu'en Terminale.

Une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B est une loi qui permet d'associer à tout élément de A au plus un (c'est-à-dire 0 ou 1) élément de B .

Si l'élément x de A a été associé à l'élément y de B, on dit que y est l'image de x ou que x est l'antécédent de y et on note y = f (x) .

L'ensemble des éléments de A qui ont une image par f est appelé ensemble ou domaine de définition de la fonction f et noté D_f . On a toujours $D_f \subset A$. Si $D_f = A$, on dit que la fonction f est une application.

Si f est une application et si, en plus :

— tout élément y de B a *au plus un antécédent* x dans A (autrement dit si l'équation f (x) = y a toujours au plus une solution), on dit que l'application f est injective, ou que c'est une injection.

— tout élément y de B a *au moins un antécédent* x dans A (autrement dit si l'équation f (x) = y a toujours au moins une solution), on dit que l'application f est surjective, ou que c'est une surjection.

— tout élément y de B a *un antécédent et un seul* x dans A (autrement dit si l'équation f (x) = y a toujours exactement une solution), on dit que l'application f est bijective, ou que c'est une bijection.

Une application f est bijective si et seulement si ele est à la fois injective et surjective.

Pour la suite de ce rappel, les fonctions considérées sont des fonctions numériques d'une variable réelle (c'est-à-dire que leurs ensembles de départ et d'arrivée sont des parties de l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels).

Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative d'une fonction f est l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées sont de la forme (x, f (x)) .

Opérations sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions dont les ensembles de définition sont désignés par D_f et D_g et λ un réel. On définit les fonctions :

— f + g (somme de f et g) par : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ pour $x \in D_f \cap D_g$.

— λ f (produit du réel λ par la fonction f) par : $(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$ pour $x \in D_f$.

— fg (produit de f et g) par : $(fg)(x) = f(x) \times g(x)$ pour $x \in D_f \cap D_g$.

— $\frac{f}{g}$ **(quotient de f et g) par :** $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ **pour** $x \in D_f$ **pour** $x \in D_f \cap D_g \cap A$ **,**

où $A = \{x \in D_g \,/\, g(x) \neq 0\}$

— f o g par $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ **pour** $x \in B$ **, où** $B = \{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_f\}$

Remarque : en général, $f \circ g \neq g \circ f$ **.**

Une fonction f est dite <u>majorée</u> (resp. <u>minorée</u>) sur un ensemble $A \subset D_f$ **s'il existe un réel M (resp. m) tel que, pour tout** $x \in D_f$ **,** $f(x) \leq M$ **(resp.** $f(x) \geq m$ **) .**

Tout réel réel M (resp. m) vérifiant la propriété ci-dessus est appelé <u>majorant</u> (resp. <u>minorant</u>) de f sur A.

Une fonction <u>bornée</u> sur A est une fonction à la fois majorée et minorée sur A .

On dit que f atteint un <u>maximum</u> (resp. un <u>minimum</u>) en un point $x_o \in D_f$ **s'il existe un intervalle ouvert de centre** x_o **, c'est-à-dire un ensemble de la forme** $I =]x_o - \varepsilon \,;\, x_o + \varepsilon[$ **avec** $\varepsilon > 0$ **, tel que pour tout** $x \in I$**,** $f(x) \leq f(x_o)$ **(resp.** $f(x) \geq f(x_o)$**) . Le réel** $f(x_o)$ **est alors un maximum (resp. un minimum) de la fonction f. Un maximum (ou un minimum) est appelé <u>extremum</u> de la fonction f .**

Deux fonctions f et g sont dites <u>égales</u> si :

$$D_f = D_g \text{ et si } f(x) = g(x) \text{ pour tout } x \text{ de } D_f \text{ (ou } D_g\text{) .}$$

Soit f une fonction. On appelle <u>restriction</u> de f à un ensemble $A \subset D_f$ **la fonction** f_1 **définie sur A par :** $\forall\, x \in A$ **,** $f_1(x) = f(x)$ **. On dit alors que f est un <u>prolongement</u> de** f_1 **.**

Une fonction f est dite <u>paire</u> (resp. <u>impaire</u>) si :

— pour tout $x \in D_f$ **,** $-x \in D_f$

— pour tout $x \in D_f$ **,** $f(-x) = f(x)$ **(resp.** $f(-x) = -f(x)$ **).**

Une fonction f est dite <u>périodique</u> s'il existe un réel T tel que :

— pour tout $x \in D_f$ **,** $x + T \in D_f$ **et** $x - T \in D_f$ **.**

— pour tout $x \in D_f$ **,** $f(x + T) = f(x) = f(x - T)$ **.**

Le plus petit réel strictement positif T qui vérifie cette propriété, s'il existe, est appelé la <u>période</u> de f .

<u>Sens de variation d'une fonction</u>

f est <u>croissante</u> (resp. strictement croissante) sur l'intevalle I si :

pour tous x_1 **,** x_2 **éléments de I, si** $x_1 < x_2$ **, alors** $f(x_1) \leq f(x_2)$ **(resp.** $f(x_1) < f(x_2)$ **) .**

f est <u>décroissante</u> (resp. strictement décroissante) sur l'intevalle I si :

pour tous x_1 **,** x_2 **éléments de I, si** $x_1 < x_2$ **, alors** $f(x_1) \geq f(x_2)$ **(resp.** $f(x_1) > f(x_2)$ **) .**

f est <u>monotone</u> sur I si f est soit croissante sur I, soit décroissante sur I.

f est <u>strictement monotone</u> sur I si f est soit strictement croissante sur I, soit strictement décroissante sur I.

<u>EXERCICE 70</u>

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .

1°) $f(x) = \sqrt{-x}$ 2°) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ 3°) $f(x) = \sqrt{1-x}$ 4°) $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x+7}}$

5°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x-5}}{x-3}$ 6°) $f(x) = \sqrt{|-x|}$ 7°) $f(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{-x}}$

8°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{2x+1}$ 9°) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{-x}}{1+\sqrt{-x}}$ 10°) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{-x}}{1-\sqrt{-x}}$

11°) $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{|-x|}}{1-\sqrt{|-x|}}$ 12°) $f(x) = \dfrac{2x-3}{6x^2-13x-5}$ 13°) $f(x) = \dfrac{2x-3}{6x^2-|13x-5|}$

14°) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{6x^2-13x-5}}$ 16°) $\dfrac{3x-6}{|x+1|-|x-5|}$ 17°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{2x-3}$

18°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{\sqrt{2x-3}}$ 19°) $f(x) = \sqrt{\dfrac{-6x^2+13x+5}{2x-3}}$

20°) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ 21°) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{3x^2-14x-5} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-2x^2+11x-15}} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

22°) $f(x) = \dfrac{(x-1)\sqrt{(1+x)(2-x)}}{x(2x-1)}$ 23°) $f(x) = \dfrac{1+\dfrac{1-x}{1+x}}{1-\dfrac{1+x}{1-\dfrac{1}{x+1}}}$

EXERCICE 71

Pour chacune des fonctions numériques définies ci-dessous, préciser l'ensemble de définition suivant les valeurs du paramètre réel m .

1°) $f(x) = \dfrac{3}{|x|+m}$ 2°) $\sqrt{x^2+m}$ 3°) $f(x) = \dfrac{x^2-16}{x^2-mx+1}$ 4°) $f(x) = \sqrt{x^2-mx+1}$

EXERCICE 72

Parmi les fonctions suivantes, préciser celles qui sont des **applications** :

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to |x|$ $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to x - \sqrt{x}$ $h : [2 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \to \sqrt{x-2}$ $i : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \to \dfrac{1}{x-1}$

$j : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \to \dfrac{x+1}{x^2+2x-3}$ $k : [0 ; +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \to \left|\dfrac{x}{x-1}\right|$ $m : [0 ; 2] \to \mathbb{R}$, $x \to \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

$n :]-\infty ; 0[\to \mathbb{R}$ $x \to \dfrac{x-1}{x-3}$

EXERCICE 73

Parmi les fonctions suivantes, préciser celles qui définissent une **bijection** .Dans ce cas, déterminer la **bijection réciproque** .

$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 1 - x$ $\quad$ $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to 1 + x^2$ $\quad$ $f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $f_4 : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_+$, $x \to \sqrt{-x}$

$f_5 : [0 ; 1] \to [0 ; 1]$, $x \to 1 - x$ $\quad$ $f_6 : [4 ; +\infty[\to \mathbb{R}_-$, $x \to -\sqrt{x-4}$ $\quad$ $f_7 : \mathbb{R}_- \to]-\infty ; 5]$, $x \to -x^2 + 5$

$f_8 : [2 ; +\infty[\to [3 ; +\infty[$, $x \to 3 + \sqrt{x-2}$ $\quad$ $f_9 : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $x \to \dfrac{x+1}{x-1}$

EXERCICE 74

Dans chacun des cas suivants, étudier si l'application f de E vers F est injective, surjective ou bijective .

1°) $E = F = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$ $\quad$ 2°) $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $F = \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$

3°) $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $F = \mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ $\quad$ 4°) $E = \mathbb{R}_+$, $F = \mathbb{R}$ $\quad$ $f(x) = 3x^2 - 4$

5°) $E = \mathbb{R}$, $F = [-3 ; +\infty[$, $f(x) = 2x^2 - 3$

6°) $E = F = \mathbb{Z}$, si x est pair : $f(x) = x - 1$, si x est impair : $f(x) = x + 1$

7°) $E = F = \mathbb{Z}$, si x est pair : $f(x) = \dfrac{x}{2}$, si x est impair : $f(x) = \dfrac{x-1}{2}$

8°) $E = F = \mathbb{Z}$, si x est pair : $f(x) = 2x$, si x est impair : $f(x) = 2x + 1$

EXERCICE 75

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{x^2 - 1}}{1 - \sqrt{x^2 - 1}}$

1°) Déterminer son ensemble de définition D .

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = y$, où y est un paramètre réel .

L'application $f : D \to \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ?

3°) Déterminer deux parties E et F de $\mathbb{R}$, les plus grandes possibles , pour que l'application $g : E \to F$, $x \to f(x)$ soit bijective . Définir alors g^{-1} .

EXERCICE 76

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad x \to 2x + 3$

1°) Calculer $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$.

2°) Démontrer que f est bijective et déterminer l'application réciproque .

3°) La restriction de f à $\mathbb{Z}$ est-elle une bijection de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$?

4°) Soit g : $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ $\quad x \to g(x) = \dfrac{x}{2} + 4$ $\quad$ si x est pair

$x \to g(x) = \dfrac{x^2 - x}{2}$ $\quad$ si x est impair

Déterminer l'image par g de chacun des entiers (— 2), (— 1) , 1 , 2 , 3 .
L'application g est-elle injective ? surjective ?

EXERCICE 77

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère cartésien .
1°) Soit f l'application de $\mathcal{P}$ vers $\mathcal{P}$ associant au point M (x, y) le point M ' (x ', y '), tel que :
$x' = 3x + 2y$, $y' = 2x + 3y$.
L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
2°) Mêmes questions pour l'application g, telle que :
$x' = 2x - y$, $y' = 6x - 3y$.
Déterminer g ($\mathcal{P}$) .

EXERCICE 78

Le plan est rapporté au repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .
Soit le point A(— 1 ; 0) et le point B(1 ; 0) et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [AB] .
Le demi-cercle fermé inclus dans $\mathcal{C}$ et formé des points de $\mathcal{C}$ d'ordonnées positives est appelé $\mathcal{C}_1$. Le demi-cercle fermé inclus dans $\mathcal{C}$ et formé des points de $\mathcal{C}$ d'ordonnées négatives est appelé $\mathcal{C}_2$. La droite $\mathcal{D}$ (O, $\vec{i}$) est appelée x ' x (axe des abscisses) .
Etant donné un point M du cercle $\mathcal{C}$, on peut effectuer la construction suivante : par M , on trace la perpendiculaire à x ' x qui coupe x ' x en un point H unique .
1°) L'application $f_1 : \mathcal{C}_1 \to x'x$ est-elle injective, surjective, bijective ?

$M \mapsto H$

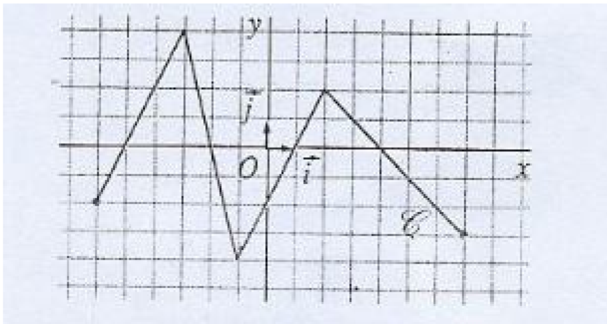
2°) Même question pour les applications suivantes :

$f_2 : \mathcal{C}_2 \to [AB]$ $\qquad$ $f_2 : \mathcal{C} \to [Ax)$ $\qquad$ $f_4 : \mathcal{C} \to [AB]$

$M \mapsto H$ $\qquad$ $M \mapsto H$ $\qquad$ $M \mapsto H$

EXERCICE 79

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique d' une fonction f définie sur l'intervalle [— 6 ; 7] .

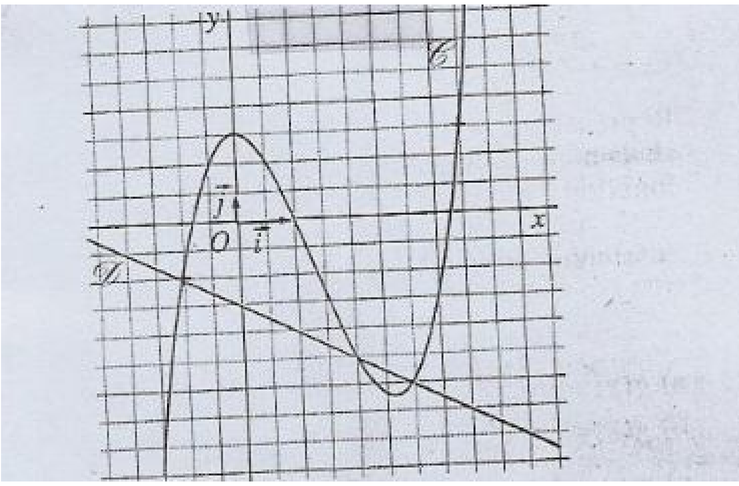


1°) Quelles sont les images des réels 3, — 2, — 6 et 0 par f ?
2°) Quels sont les antécédents de 2 ?
3°) Résoudre graphiquement l'équation f (x) = 0 .
4°) Quel est en fonction de *m* le nombre de solutions de l'équation f (x) = *m* ?
5°) Résoudre graphiquement l'inéquation f (x) > 0 .
6°) Résoudre graphiquement l'inéquation f (x) < 2 .

EXERCICE 80

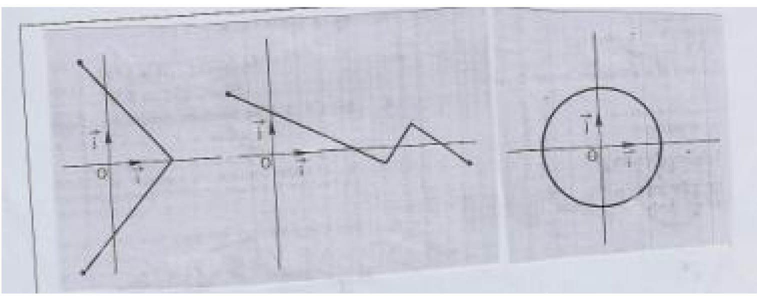
Soit la courbe *C* ci-dessous, représentative de la fonction f : $x \rightarrow x^3 - 4x^2 + 3$, et la droite *D* d'équation $y = -x - 3$.

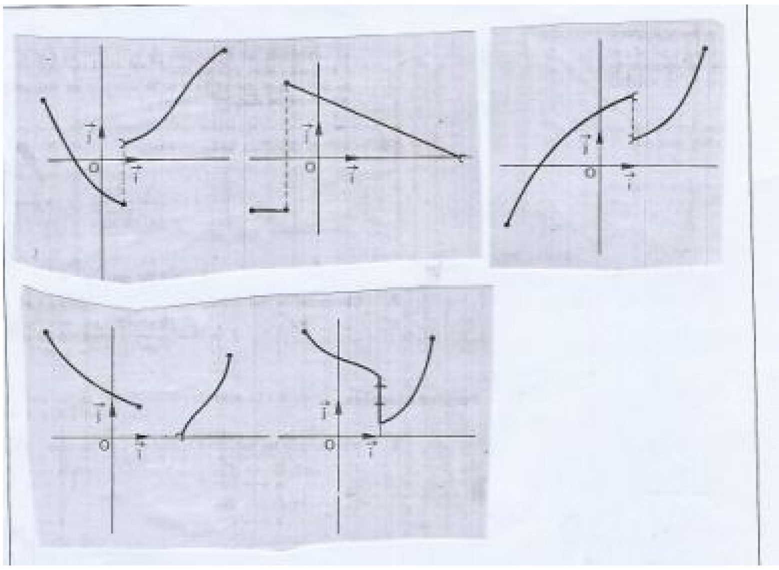
1°) Résoudre graphiquement l'équation f (x) = 3, puis l'inéquation f (x) < 3 .
2°) Résoudre graphiquement l'équation f (x) = 0, puis l'inéquation f (x) ≥ 0 .
On donnera un encadrement d'amplitude 5×10^{-1} des solutions non entières .
3°) Résoudre graphiquement l'équation f (x) = — x — 3 , puis l'inéquation f (x) ≤ — x — 3.
4°) Retrouver algébriquement les résultats des questions 1°, 2° et 3° .



EXERCICE 81

Les courbes suivantes sont-elles représentatives de fonctions ?





EXERCICE 82

Soit f : **R** → **R** avec $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 2}$ si $x \neq -2$ et $f(-2) = 1$, et g : **R** → **R** $x \to 2x + 3$

1°) Déterminer les fonctions $f + g$, fg, $\dfrac{f}{g}$, $3f - 2g$.

2°) Déterminer et comparer les fonctions $(g \circ f)$ et $(f \circ g)$.

EXERCICE 83

Déterminer les ensembles de définition des fonctions $(f \circ g)$ et $(g \circ f)$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = \sqrt{x - 1}$ et $g(x) = x^2 - x + 2$ b) $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$ et $g(x) = x^2 + x$

EXERCICE 84

Quel est l'ensemble de définition de $(f \circ f)$ dans les cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$ b) $f(x) = \sqrt{1 - x}$ c) $f(x) = 1 - \sqrt{x}$ d) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{2 - x}$

EXERCICE 85

Ecrire f sous la forme d'une composée de deux (ou plusieurs) fonctions usuelles :

a) $f(x) = (5x + 1)^2 + 2$ b) $f(x) = 2 + \dfrac{1}{2 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}}$ c) $f(x) = \left(1 - \dfrac{3}{x + 1}\right)^2$.

d) $f(x) = 1 - \dfrac{1}{\left(1 + \sqrt{x - 3}\right)^2}$

EXERCICE 86

Soit les fonctions $f_1 : x \to x^2 - 1$, $f_2 : x \to \dfrac{1}{x}$, $f_3 : x \to \sqrt{x}$, $f_4 : x \to 3x - 2$, $f_5 : x \to x^3$.

Décomposer les fonctions suivantes à l'aide de ces fonctions :

a) $f : x \to 3\sqrt{x} - 2$ **b)** $g : x \to \sqrt{x^2 - 1}$ **c)** $h : x \to \dfrac{1}{3x - 2}$ **d)** $j : x \to (3x - 2)^3$

e) $k : x \to \dfrac{1}{x^2 - 1}$ **f)** $l : x \to \sqrt{3x - 2}$

EXERCICE 87

Soient $f_{a,b}$, g, h les trois fonctions numériques suivantes :

$f_{a,b} : x \to ax + b$ $\quad$ $g : x \to \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $h : x \to x^2$.

Montrer que les fonctions φ suivantes peuvent s'écrire comme composées de $f_{a,b}$, g, h en choisissant convenablement a et b .

1°) $\varphi : x \to \dfrac{2}{x - 1} + 3$ $\quad$ 2°) $\varphi : x \to \dfrac{3}{(3x - 2)^2}$ $\quad$ 3°) $\varphi : x \to (2x - 1)^2 + 2$

4°) $\varphi : x \to \dfrac{x + 1}{x}$ $\quad$ 5°) $\varphi : x \to x^4 - 4$ $\quad$ 6°) $\varphi : x \to x^2 + 2x - 3$

EXERCICE 88

Soient f et g deux fonctions affines telles que : f (x) = ax + b ; g (x) = cx + d .

1°) Trouver une relation entre a, b, c, et d caractérisant la propriété : $f \circ g = g \circ f$.

2°) Soient D et D' les droites d'équations y = ax + b et y = cx + d .

On désigne par Δ la droite d'équation y = x . Montrer que $f \circ g = g \circ f$ équivaut à :

(1) D et D' est égale à Δ , soit **(2)** D et D' sont strictement parallèles à Δ ,
soit **(3)** D , D' et Δ sont concourantes .

EXERCICE 89

Dans chacun des cas suivants, déterminer les fonctions (f + g), (fg), $(g \circ f)$ et $(f \circ g)$.
Préciser d'abord l'ensemble de définition de chacun d'eux .

1°) $f(x) = x^2$ et $g(x) = x - x^2$ $\quad$ 2°) $f(x) = \dfrac{1}{x - 1}$ et $g(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

3°) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{x}$ $\quad$ 4°) $f(x) = |x|$ et $g(x) = \sqrt{x}$

5°) $f(x) = x^2$ et $g(x) = \sqrt{2x + 3}$ $\quad$ 6°) $f(x) = x - 3$ et $g(x) = (2x + 1)(2x + 5)$

EXERCICE 90

On considère les applications f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, de $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ vers lui-même définies par : $f_1(x) = x$; $\quad$ $f_2(x) = 1 - x$; $\quad$ $f_3(x) = \dfrac{1}{x}$; $\quad$ $f_4(x) = \dfrac{x}{x - 1}$;

$f_5(x) = \dfrac{x - 1}{x}$; $\quad$ $f_6(x) = \dfrac{1}{1 - x}$.

Compléter le tableau suivant :

o	f_1	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
f_1						
f_2						
f_3						
f_4						
f_5						
f_6						

EXERCICE 91

1°) Soient f, g et h les fonctions définies par : $f\ (x) = x^2$; $g\ (x) = \dfrac{1}{1 + x}$; $h\ (x) = x - 1$.

a) Déterminer les fonctions $(g \circ f)$ et $(h \circ g)$.

b) Montrer que les fonctions $[(h \circ g) \circ f]$ et $[h \circ (g \circ f)]$ ont même ensemble de définition D puis que pour tout x de D, on a : $[(h \circ g) \circ f]\ (x) = [h \circ (g \circ f)]\ (x)$.

N.B. On peut donc écrire sans ambiguïté : $(h \circ g \circ f)\ (x)$.

2°) Soient f, g et h les fonctions définies par : $f\ (x) = 3x$; $g\ (x) = 1 + x^2$; $h\ (x) = \sqrt{x}$.
Déterminer et comparer les fonctions $(f \circ g \circ h)$ et $(h \circ g \circ f)$.

EXERCICE 92

Les fonctions $f : x \rightarrow \dfrac{x^2 + 4}{(x^2 - 1)(x^4 - 16)}$ et $g : x \rightarrow \dfrac{x^2 + 1}{(x^4 - 1)(x^2 - 4)}$ sont-elles égales ?

EXERCICE 93

Soit F, G, H, I les fonctions numériques suivantes :

$F : x \rightarrow |x|$ $G : x \rightarrow (\sqrt{x})^2$ $H : x \rightarrow \sqrt{x^2}$ $I : x \rightarrow x$

1°) Dire celles qui sont égales .

2°) La fonction G est-elle une restriction de I ? de F ?
La fonction F est-elle un prolongement de I ?

EXERCICE 94

On donne les fonctions f, g, h de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ telles que :

$f\ (x) = \dfrac{x^3}{|x|} + 1$; $g\ (x) = \dfrac{x - 1}{|x| - 1}$; $h\ (x) = |2x + 1| - |x - 3| + 4$.

Déterminer les restrictions :

1°) de f à $\mathbf{R}^{*+}$, à $\mathbf{R}^{*-}$, à $[-1\ ;\ 1] \setminus \{0\}$.

2°) de g à $\mathbf{R}^{+} \setminus \{1\}$, à $\mathbf{R}^{-} \setminus \{1\}$.

3°) de h à $]-\infty\ ; -\dfrac{1}{2}]$ à $[-\dfrac{1}{2}\ ; 3]$ et à $[3\ ; +\infty[$.

EXERCICE 95

Dans chacun des cas suivants, trouver les plus grands intervalles sur lesquels $f \leq g$ ou $f \geq g$
Interpréter graphiquement les résultats .

1°) $f\ (x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$ et $g\ (x) = x^3 + x^2 + x + 1$

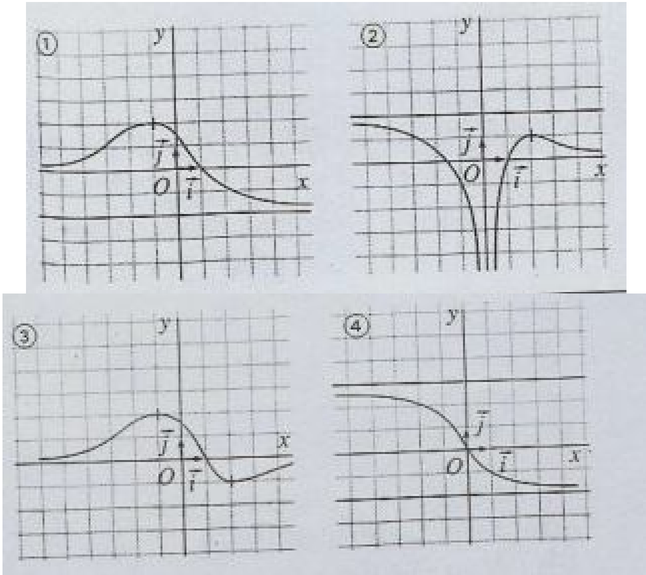
2°) $f\ (x) = 2x^3 - 3x^2 + 10x$ et $g\ (x) = x^3 + 4x^2 - 6x$

3°) $f\ (x) = 3x^4 - x^2 + 2$ et $g\ (x) = -x^4 + 4x^2 + 1$

4°) $f\ (x) = -x^2 - x + 3$ et $g\ (x) = \dfrac{2x + 3}{x + 1}$

EXERCICE 96

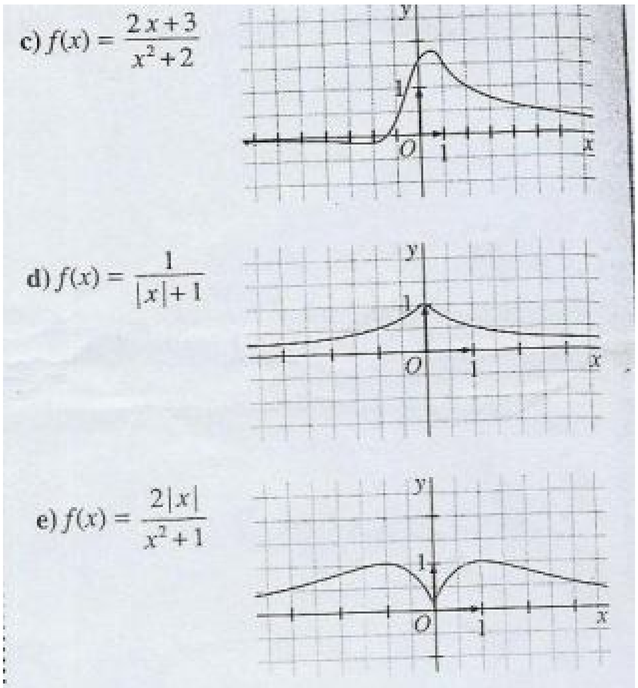
Les courbes suivantes sont représentatives de fonctions :

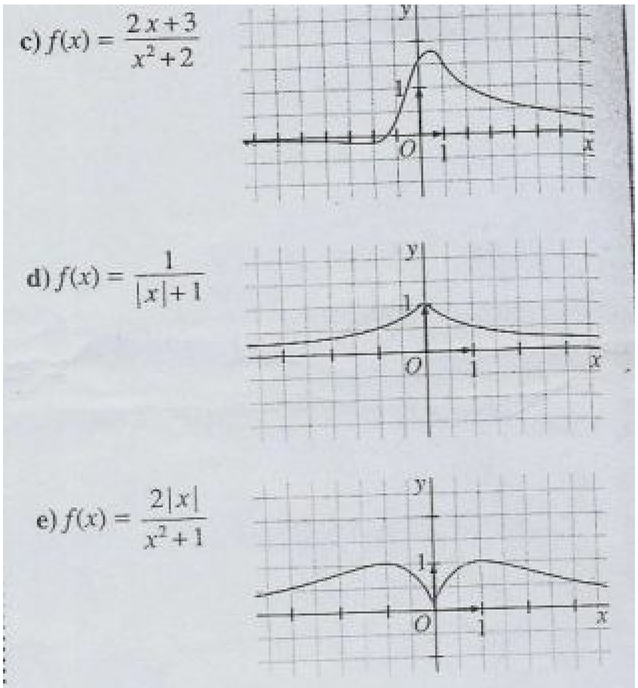


Dans chacun des cas, dire si la fonction admet : un maximum, un minimum, un majorant et /ou un minorant .
Préciser leurs valeurs s'ils existent.

EXERCICE 97

Dans chacun des cas suivants, f est une fonction définie sur **R** et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative .
A l'aide de la courbe, conjecturer l'existence d'un majorant et d'un minorant (entiers) pour f, puis démontrer cette conjecture algébriquement .





EXERCICE 98

On considère les fonctions $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$

$$x \to 3x - 5 \qquad\qquad x \to \frac{2x^2+1}{x^2+1}$$

1°) Démontrer que $\forall\ x \in \mathbf{R}$, $1 \leq g(x) < 2$.

2°) La fonction f est-elle bornée sur $\mathbf{R}$?

3°) Démontrer que la fonction $(g \circ f)$ est bornée sur $\mathbf{R}$.

4°) Démontrer que la fonction $(f \circ g)$ est bornée sur $\mathbf{R}$ et que :

$$\forall\ x \in \mathbf{R},\ -2 \leq (f \circ g)(x) < 1$$

EXERCICE 99

Après avoir précisé leur ensemble de définition, étudier la parité des fonctions suivantes :

(1) $x \to x^3 - x + 1$ **(2)** $x \to x^2 - 3x + 1$ **(3)** $x \to x^2 - 1$ **(4)** $x \to x^3 - 7x$

(5) $x \to 2x^4 + x^2 - 1$ **(6)** $x \to \sqrt{x^2 - 1}$ **(7)** $x \to x^2 - 3|x| + 1$ **(8)** $x \to \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$

(9) $x \to \dfrac{3x}{|x^4 - x^2 + 1|}$ **(10)** $x \to \dfrac{x^5 - x^3 + 2x}{\sqrt{x^3 - x}}$ **(11)** $x \to \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{1 - x^2}}$

(12) $x \to \dfrac{|1 + x| - |1 - x|}{|1 + x| + |1 - x|}$ **(13)** $x \to \sqrt{|x - 1| + |x + 1|}$ **(14)** $x \to \dfrac{\sqrt{1 - x^2} - 1}{x}$

(15) $x \to \dfrac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{4 - x^2}}$ **(16)** $x \to \sqrt{\dfrac{x^2 - 16}{4 - x^2}}$ **(17)** $x \to \dfrac{5x^3 + 3x|x| - 2x}{x^3 - 9x}$

(18) $x \to \dfrac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}}$ **(19)** $x \to \begin{cases} f(x) = -\dfrac{3}{x} & \text{si } -6 \leq x \leq -1 \\ f(x) = \dfrac{-3x^2 + 9}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{3}{x} & \text{si } 1 \leq x \leq 6 \end{cases}$

EXERCICE 100
Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[-a ; +a]$ avec $a > 0$.
Soient g et h les fonctions telles que :
$g(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]$; $h(x) = \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$.
1°) Démontrer que g est une fonction paire et que h est une fonction impaire .
2°) Vérifier que $f = g + h$.
3°) Déterminer g et h lorsque $f(x) = x^2 + x + 1$; lorsque $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$;
lorsque $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x^2 + x + 1}$.

EXERCICE 101
Dans chacun des cas suivants, on demande de tracer la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f relativement à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$
1°) On sait que : a) f est impaire b) si $x \in [0 ; 4]$, alors $f(x) = x$.
si $x \in]4 ; +\infty[$, alors $f(x) = 4$.
2°) On sait que : a) f est paire b) si $x \in [0 ; 3[$, alors $f(x) = 2$.
si $x \in [3 ; +\infty[$, alors $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$.

3°) On sait que : a) f est périodique, de période 2 b) si $x \in [0 ; 2[$, alors $f(x) = -x + 1$.
• Tracer $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-4 ; 8[$.
4°) On sait que : a) f est impaire b) f est périodique, de période 2
b) si $x \in [0 ; 1[$, alors $f(x) = x$.
• Tracer $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $]-1 ; 1[$ puis sur l'intervalle $]-3 ; 5[$.
Connaît-on la valeur de $f(-1)$? de $f(3)$?
5°) On sait que : a) f est paire b) f est périodique, de période 2
c) si $x \in [0 ; 1]$, alors $f(x) = x$.
• Tracer $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-5 ; 5]$

EXERCICE 102
Soit f telle que $f(x) = |x + 2| + |x - 2| + 2x$.
1°) Exprimer $f(x) =$ sans valeur absolue suivant les valeurs de x .
2°) Tracer $\mathcal{C}$ courbe représentative de la fonction f .
3°) Résoudre graphiquement les équations $f(x) = 2$ et $f(x) = x$.

EXERCICE 103 Partie entière et partie décimale
Pour tout réel x, on admet qu'il existe un unique entier relatif n tel que $n \leq x < n + 1$. Cet entier est appelé «partie entière de x » et est noté E(x) . Par exemple $2 \leq 2,8 < 3$ donc $E(2,8) = 2$. Ainsi $E(x) = n$ signifie que $x \in [n ; n + 1[$ ou encore que $n \leq x < n + 1$.
A . Etude de la fonction E
1°) Placer sur un axe les nombres suivants et en déduire leur partie entière : 1,75 ; $-3,4$; $\frac{3}{2}$;

$\frac{17}{4}$; $\sqrt{2}$; 5 ; — 3 ; $\sqrt{2}$ — 2 ; 1 — 2$\sqrt{3}$; 0,245 ; π ; — $\frac{\pi}{2}$.

2°) Quels sont les nombres x tels que : a) E(x) = 3 ? b) E(x) = — 2 c) E(x) = 0 ?

3°) Etudier la fonction E et tracer la courbe représentative de E restreinte à l'intervalle [— 5 ; 4] .

4°) Quels sont les nombres x tels que : a) E(2x) = 3 ? b) E($\frac{1}{5}$x) = — 1 ? c) E(3x — 2) = 4 ?

d) E($\frac{1}{x}$) = 1 ($x \neq 0$) ? e) E(x^2) = 3 ?

5°) x est un réel tel que E(x) = 4 . Montrer qu'alors E(x + 3) = 7 .

Montrer que, plus généralement, si x est un réel quelconque et p un entier relatif quelconque, alors E(x + p) = E(x) + p .

B . Avec la partie entière

h est la fonction définie sur] 0 ; + ∞ [par h(x) = $\frac{1}{x}$ .f désigne la fonction E o h .

1°) Quel est l'ensemble de définition de f ?

2°) Calculer f(1), f(3,2) , puis f(x) lorsque x > 1 .

3°) Calculer f($\frac{1}{2}$), f(0,75) , puis f(x) lorsque x ∈] $\frac{1}{2}$; 1 [.

4°) p est un entier naturel non nul . Calculer f(x) pour x ∈] $\frac{1}{p+1}$; $\frac{1}{p}$] .

5°) Tracer la représentation graphique de la restriction de f à [$\frac{1}{4}$; + ∞ [.

6°) Peut-on tracer la courbe représentative de f sue] 0 ; + ∞ [?

C . La partie décimale

d est la fonction définie sur **R** par *d*(x) = x — E(x) .

1°) Calculer les images par *d* des réels : 5,2 ; $\frac{3}{2}$; 8 ; — 5 ; — 6,3 .

2°) Donner au moins cinq réels différents, et pas tous de même signe, qui vérifient : *d*(x) = 0,3 .

3°) Montrer que pour tout réel x, $0 \leq d(x) < 1$.

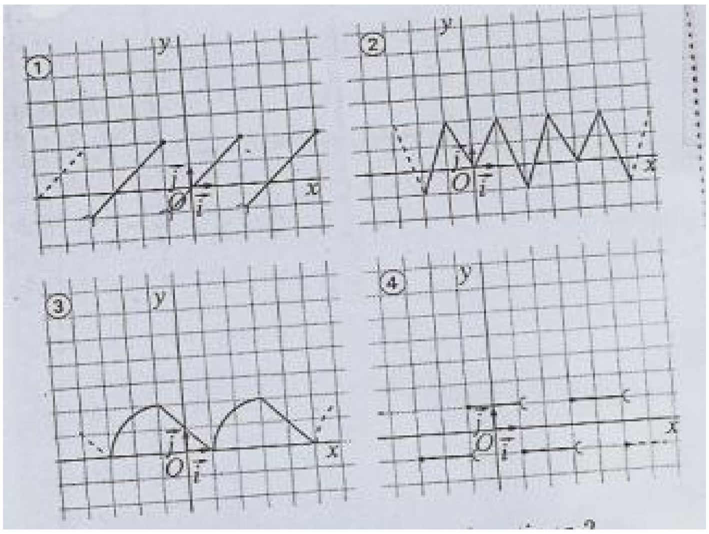
4°) Montrer que *d* est périodique .

5°) Tracer la représentation graphique de la restriction de *d* à [0 ; 1 [et en déduire alors la courbe représentative de *d* .

6°) On considère la fonction g définie sur] 0 ; + ∞ [par g(x) = $\frac{d(x)}{\sqrt{x}}$.

a) Calculer g(x) pour x ∈] 0; 1 [.En déduire une majoration de g(x) sur] 0; 1 [.
b) Montrer alors que g est bornée sur] 0 ; + ∞ [.

<u>EXERCICE 104</u> Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques de fonctions périodiques.



Quelles sont les périodes de ces fonctions ?

EXERCICE 105

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $x \rightarrow f(x) = E(x) - 2\,E\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

1°) Donner, sans employer le symbole E, les expressions de f (x) sur le segment [0 ; 2] .
2°) Montrer que f (x) est périodique et construire sa représentation graphique dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 106
n étant un entier donné supérieur ou égal à 1, on considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - n\,E\left(\dfrac{x}{n}\right)$.
Démontrer que cette fonction est périodique .
En déduire que, quel que soit $x \geq 0$, on a $0 \leq f(x) < n$.

EXERCICE 107
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, telle que, pour tout réel x, $f(x + 1) = \dfrac{1 + f(x)}{1 - f(x)}$.

1°) Calculer f(x + 2), f(x + 3) et f(x + 4) .
2°) Que peut-on en déduire pour la fonction f ?

EXERCICE 108

Soit k un réel strictement positif et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(x + k) = - f(x - k)$. Montrer que la fonction f est périodique de période 4k .

EXERCICE 109
Pour tout réel x, on définit E(x) (partie entière de x) comme étant le plus grand entier inférieur ou égal à x , c'est-à-dire l'unique entier n tel que : $n \leq x < n + 1$ (cf. Exercice 76) .

Soit les fonctions $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow [0 ; 1]$, $x \rightarrow x - E(x)$ et $h : [0 ; 1] \rightarrow [0 ; 1]$, $u \rightarrow |2u - 1|$

1°) Soit $f = h \circ \varphi$. Montrer que f est une fonction paire, périodique de période 1 .

2°) Soit F la restriction de f à $[\,0\,;\frac{1}{2}\,]$ .Démontrer que F admet une fonction réciproque F^{-1} , dont on précisera l'ensemble de définition et l'ensemble image .

3°) Soit $g = F^{-1} \circ f$ .Démontrer que g est une fonction paire, définie sur $\mathbb{R}$, périodique de période 1 . Soit $k \in \mathbb{Z}$. Dans les deux cas suivants, exprimer g(x) en fonction de x et k :

a) $x \in [k\,;k + \frac{1}{2}\,[$. b) $x \in [\,k - \frac{1}{2}\,;k\,[$.

EXERCICE 110

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et λ un réel non nul .

1°) On suppose f croissante sur I . Etudier le sens de variation de la fonction λ f sur I suivant le signe de λ .

2°) Reprendre la question pour une fonction f décroissante sur I .

EXERCICE 111

Soit f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I.

1°) On suppose les deux fonctions f et g croissantes sur I . Etudier le sens de variation de la somme f + g sur I .

2°) Reprendre la question pour deux fonctions f et g décroissantes sur I .

EXERCICE 112

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J contenant l'image par f de l'intervalle I .

1°) On suppose les deux fonctions f et g croissantes sur leur intervalle de définition . Etudier le sens de variation de la composée $f \circ g$ sur I .

2°) On suppose les deux fonctions f et g décroissantes sur leur intervalle de définition . Etudier le sens de variation de la composée $f \circ g$ sur I .

3°) On suppose f croissante sur I et g décroissantes sur J. Etudier le sens de variation de la composée $f \circ g$ sur I .

EXERCICE 113

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes :

$f : x \to x$ $g : x \to \sqrt{x}$ $h : x \to \frac{1}{x}$ $k : x \to x^2$ $m : x \to ax + b$ $n : x \to a\,x^2 + bx + c$

$p : x \to \frac{ax + b}{cx + d}$ (*Pour n et p , mettre les fonctions sous forme canonique, puis utiliser les résultats des exercices 84, 85 et 86*) .

EXERCICE 114

Dans chacun des cas suivants, décomposer la fonction f à l'aide de fonctions usuelles et en déduire le sens de variation de f sur chacun des intervalles donnés .

1°) $f(x) = x^2 + 4$; $I_1 = \mathbb{R}_+$; $I_2 = \mathbb{R}_-$; 2°) $f(x) = 2 - x^2$; $I_1 = \mathbb{R}_+$; $I_2 = \mathbb{R}_-$;

3°) $f(x) = (x - 2)^2 + 1$; $I_1 = [2\,;+\infty[$; $I_2 =]-\infty\,;2]$;

4°) $f(x) = x^2 - 4x$; $I_1 = [2\,;+\infty[$; $I_2 =]-\infty\,;2]$;

5°) $f(x) = (x - 1)^3$; $I_1 = [1\,;+\infty[$; $I_2 =]-\infty\,;1]$; $I_3 = \mathbb{R}$

6°) $f(x) = \frac{1}{x - 1}$; $I_1 = [1\,;+\infty[$; $I_2 =]-\infty\,;1]$;

7°) $f(x) = \sqrt{5 - x}$; $I = D_f$; 8°) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$; $I_1 = [0 ; +\infty[$; $I_2 =]-\infty ; 0]$;

8°) $f(x) = \dfrac{-1}{x^2}$; $I_1 =]0 ; +\infty[$; $I_2 =]-\infty ; 0[$;

EXERCICE 115

1°) a) f et g sont deux fonctions positives croissantes sur un intervalle I .
Montrer que la fonction p = fg est croissante sur I .
b) f et g sont deux fonctions positives décroissantes sur un intervalle I .
Montrer que la fonction p = fg est décroissante sur I .

2°) f est une fonction définie sur un intervalle I et garde un signe constant sur I ($f > 0$ sur I ou bien $f < 0$ sur I) . On suppose f monotone sur I .

En examinant tous les as possibles, trouver le sens de variation de la fonction $\dfrac{1}{f}$ sur I .

Applications :

Trouver le sens de variation de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné .

a) $x \to x\sqrt{x + 3}$ $I = [1 ; +\infty[$; b) $x \to \dfrac{1}{x^2 + 1}$ $I = [0 ; +\infty[$; c) $x \to \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $I =]0 ; +\infty[$;

d) $x \to |x|(x^2 + 1)$ $I =]-\infty ; 0]$ puis $I = [0 ; +\infty[$

EXERCICE 116

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle $[-a ; a]$ avec $a > 0$.

1°) Si f est paire et strictement croissante sur $[0 ; a]$, déterminer le sens de variation de f sur $[-a ; 0]$.

2°) Si f est impaire et strictement croissante sur $[0 ; a]$, déterminer le sens de variation de f sur $[-a ; 0]$.

EXERCICE 117

Etudier et représenter graphiquement la restriction à $[-1 ; 5]$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{E(3 - x)}{E(x)}$$

EXERCICE 118

Etudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{E(x + E(-x))}$$

FONCTIONS POLYNOMES

<u>Note pédagogique</u> : *Les expressions polynomiales interviennent très souvent que ce soit dans les problèmes relatifs aux fonctions ou au niveau de la résolution d'équations. Le résultat fondamental est le théorème de factorisation. Les méthodes de division, notamment la méthode de Hörner, doivent impérativement être maitrisées.*
Le résultat liant le nombre de racines d'un polynôme à son degré, quoique non primordial, fait l'objet de plusieurs exercices (145 à 148) . A la fin de cette section, nous présentons des problèmes généraux sur les polynômes pouvant intéresser les élèves de la série S1.

Une fonction polnôme est une fonction f dont le domaine de définition D_f est $\mathbb{R}$, et telle qu'il existe un entier n et des constantes a_1, a_2, …..a_n pour lesquels :
$\forall\ x \in D_f$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0$.
Une fonction f telle que $f(x) = a_p x^p$ pour un certain entier est appelée fonction monôme. p est l'exposant du monôme.
Une fonction polynôme est donc une somme de fonctions monômes.

***<u>Théorème 1</u>* : Une fonction polnôme f est la fonction nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, autrement dit :**

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0 \Leftrightarrow a_n = a_{n-1} = \ldots = a_1 = a_0 = 0$.
***<u>Corollaire 1</u>* : Une fonction polynôme s'écrit d'une manière unique sous la forme :**

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots\ldots + a_1 x + a_0 .$$

***<u>Définition</u>* : Le degré d'un polynôme f, noté deg (f) est le plus grand exposant des monômes qui figurent dans l'écriture de f .**
Le polynôme nul n'a pas de degré.
***<u>Corollaire 2</u>* : Deux polynômes sont égaux si et seulement si ils ont mêmes coefficients et même degré.**
La somme, la différence et le produit de polynômes sont des polynômes et on a :
$\deg(P + Q) \leq \sup(\deg P, \deg Q)$; $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

***<u>Théorème 2</u>* : Quels que soient les polynômes A et B, il existe des polynômes Q et R, uniques, tels que $A(x) = B(x) \times Q(x) + R(x)$, avec $\deg(R) < \deg(B)$.**

On dit qu'un polynôme P est divisible ou factorisable par le polynôme Q s'il existe un polynôme R tel que :

$\forall\ x \in \mathbb{R}$, $P(x) = Q(x) \times R(x)$.

On dit que le réel α est racine ou zéro du polynôme P si $P(\alpha) = 0$.
***<u>Théorème 3</u>* :**
1° Le réel α est racine du polynôme P si et seulement si P est factorisable par $(x - \alpha)$.
2° Un polynôme de degré n admet au plus n racines.
3° Si un polynôme de degré n admet plus de (n + 1) racines, alors ce polynôme est le polynôme nul.

<u>EXERCICE 119 Degré d'un polynôme</u>

1°) On considère le polynôme $P(x) = (m^2 - m)x^3 + mx^2 - (m - 1)x - 3m - 2$.
Déterminer m tel que : a) deg P = 3 a) deg P = 2 a) deg P = 1
2°) Reprendre les questions a) , b) et c) ci-dessus avec le polynôme Q(x) suivant :

$$Q(x) = (m^3 - m^2 - 6m)x^3 - (m^2 + m - 2)x^2 + (m - 1)x + 2m - 1 .$$

EXERCICE 120 Degré d'un polynôme

Déterminer, suivant les valeurs de m, le degré du polynôme f (x) dans chacun des cas ci-après : a) $f(x) = 2x^5 - 3(m + 2)x^3 + 7$ b) $f(x) = (m^2 + 1)x^2 + mx + m$
c) $f(x) = (m - 1)x^3 + (m + 1)x^2 - 5x$ d) $f(x) = (1 - m^2)x^3 + 2(m + 1)x^2 + 3x - m$

EXERCICE 121 Théorème d'égalité de deux polynômes

Dans chacun des cas suivants, trouver a, b et c ou a, b, c et d pour que les deux polynômes f (x) et g (x) soient égaux :
1°) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - x^2 - 4x + 3$ et $g(x) = ax^4 + (a + b)x^3 + (a + b + c)x^2 + (b + c)x + c$
2°) $f(x) = 4x^4 - 4x^3 + 13x^2 - 7x + 13$ et $g(x) = (ax^2 + bx + c)^2 + dx + 4$
3°) $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 11x + 3$ et $g(x) = a(x + 2)^3 + b(x + 2)^2 + c(x + 2) + d$

EXERCICE 122

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f puis trouver a, b et c ou a, b, c et d tels que f (x) = g (x) $\forall x \in D_f$.

1°) $f(x) = \dfrac{12x^2 - 37x + 13}{(5x - 2)(2x - 1)^2}$ et $g(x) = \dfrac{a}{5x - 2} + \dfrac{b}{(2x - 1)^2}$

2°) $f(x) = \dfrac{9x^2 - 16x + 4}{x^3 - 3x^2 + 2x}$ et $g(x) = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x - 1} + \dfrac{c}{x - 2}$

3°) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x^3 - 3x + 2}$ et $g(x) = \dfrac{a}{x - 1} + \dfrac{b}{(x - 1)^2} + \dfrac{c}{x + 2}$

EXERCICE 123 Calcul de 1 + 2 + 3 + …. + n

1°) Déterminer les polynômes f (x) de degré 2 vérifiant la relation

$$P(x) - P(x - 1) = x , \quad \text{quel que soit } x \in \mathbb{R} .$$

2°) En donnant successivement à x les valeurs 1, 2, 3,…., n dans la relation ci-dessus et en faisant la somme membre à membre des n relations obtenues, exprimer la somme $1 + 2 + 3 + \dots + n$ (somme des n premiers entiers naturels non nuls) en fonction de n .

EXERCICE 124 Calcul de $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

1°) Démontrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 3 qui s'annule en 0 et qui vérifie l'égalité suivante : $P(x) - P(x - 1) = x^2$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

2°) En donnant successivement à x les valeurs 1, 2, 3,…., n dans la relation ci-dessus et en faisant la somme membre à membre des n relations obtenues, exprimer la somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ en fonction de n .

EXERCICE 125 Calcul de $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

1°) Démontrer qu'il existe un unique polynôme P de degré 4 qui s'annule en 0 et qui vérifie l'égalité suivante : $P(x) - P(x - 1) = x^3$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.(N.B. Factoriser f (x))

2°) a) En donnant successivement à x les valeurs 1, 2, 3,…., n dans la relation ci-dessus et en faisant la somme membre à membre des n relations obtenues, exprimer la somme $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$ en fonction de n .

b) En utilisant la relation $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (établie à l'exercice 97) montrer que : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \ldots + n)^2$

EXERCICE 126 Calcul de $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + n(n+1)$

1°) Déterminer les polynômes f (x) de degré 2 vérifiant la relation :

$P(x) - P(x - 1) = x^2 + x$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

2°) En déduire l'expression en fonction de n de la somme $1\times 2 + 2\times 3 + 3\times 4 + \ldots + n(n+1)$.

EXERCICE 127

Dans chacun des cas suivants, déterminer m pour que f (x) soit factorisable par g (x) .

1°) $f(x) = x^4 + 5x^2 + 4x - m$ et $g(x) = 2x + 1$

2°) $f(x) = 2x^4 + 4ax^3 - 5a^2x^2 - 3a^3x + m a^4$ et $g(x) = x - a$

3°) $f(x) = x^4 + ma^2x^2 - 5a^3x + a^4$ et $g(x) = x - a$

EXERCICE 128

Dans chacun des cas suivants, montrer que x_0 est une racine de P(x) puis factoriser P(x) (en polynômes du premier degré si possible) .

1°) $P(x) = x^3 - 21x + 36$ et $x_0 = 3$. 2°) $P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$ et $x_0 = -1$.

3°) $P(x) = x^3 - 8x^2 + 23x - 24$ et $x_0 = 3$. 4°) $P(x) = 2x^3 - 7x^2 - 5x + 4$ et $x_0 = -1$.

5°) $f(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$ et $x_0 = -1$. 6°) $P(x) = -3x^3 + 2x^2 + 9x - 6$ et $x_0 = \sqrt{3}$

7°) $f(x) = 2x^4 + x^3 - 6x^2 + x + 2$ et $x_0 = -2$. 8°) $P(x) = x^4 - 4x^2 - x + 2$ et $x_0 = 2$.

EXERCICE 129

Déterminer le quotient et le reste de chacune des divisions suivantes :

1°) $2x^2 - 5x + 4$ par $(x - 2)$ 2°) $5x^3 - 7x^2 + 4x - 2$ par $(x - 1)$

3°) $3x^3 + 5x^2 - x + 2$ par $(x + 2)$ 4°) $x^4 - 5x^2 + x$ par $(x - 3)$

5°) $x^5 + x^4 - 3x^3 - x^2 - 5$ par $(x + 3)$ 6°) $x^4 - 3$ par $(x - 2)$

7°) $-x^5 + 7x^4 - 5x^2 - 1$ par $(1 - x)$ 8°) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ par $(x + 1)$

8°) $x^{15} - 1$ par $x^5 - 1$ 9°) $x^3 - 3abx + a^3 + b^3$ par $x + a + b$.

EXERCICE 130

Déterminer a, b, c réels pour que P(x) soit factorisable par Q(x), puis factoriser Q(x) .

1°) $P(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 4$ et $Q(x) = x - 2$

2°) $P(x) = x^3 + ax^2 - 8x + b$ et $Q(x) = (x + 1)(x - 3)$

3°) $P(x) = 2x^4 + ax^3 + x^2 + 4x + b$ et $Q(x) = x^2 + x$

4°) $P(x) = 2x^4 + ax^3 + bx^2 - 7x + c$ et $Q(x) = (x^2 - 1)(x + 3)$

5°) $P(x) = 6x^5 - 13x^4 - 13x^3 + ax^2 + x + b$ et $Q(x) = 3x^2 - 5x$

6°) $P(x) = x^4 + 1$ et $Q(x) = x^2 + ax + b$ 7°) $P(x) = x^4 + x^2 + 1$ et $Q(x) = x^2 + ax + b$.

EXERCICE 131

Déterminer un polynôme du second degré divisible par $(x - 2)$ et par $(x + 1)$, et dont le reste de la division par $(x - 1)$ soit 5 .

EXERCICE 132

Déterminer un polynôme du troisième degré divisible par $(x - 1)$ et par $(x + 2)$, dont les restes respectifs des divisions par $(x + 1)$ et $(x - 3)$ soient 10 et 30 .

EXERCICE 133

Déterminer P(x) , polynôme de degré 6, divisible par $(x - 1)^3$, et tel que $1 + P(x)$ soit divisible par x^4 .

EXERCICE 134

Déterminer les polynômes du troisième degré dont les divisions par $(x - 1)$, par $(x - 2)$,par $(x - 3)$,ont le même reste 36 .Déterminer celui d'entre eux qui est divisible par $(x - 4)$.

EXERCICE 135

Déterminer a et b réels pour que le polynôme $ax^7 + bx^6 + 1$ soit divisible par $(x - 1)^2$, puis factoriser ce polynôme .

EXERCICE 136

Démontrer que le polynôme P(x) est divisible par $(x - 1)^3$ si, et seulement si, $P(x + 1)$ est divisible par x^3 .

EXERCICE 137

Soient A(x) et B(x) polynômes fixés . Déterminer les polynômes Q(x) et R(x) tels que :
$A(x) = B(x)\,Q(x) + R(x)$ avec $\deg R(x) < \deg B(x)$ ou $R(x) = 0$.(*Autrement dit, effectuer la division euclidienne de A(x) par B(x)*).
1°) $A(x) = 2x^3 - 5x^2 - 6x + 1$ et $B(x) = x^2 - 3x + 1$
2°) $A(x) = x^5 - 3x^4 + 5x^3 - x + 9$ et $B(x) = x^3 - x + 2$.
3°) $A(x) = 2x^4 + x^3 - 10x^2 + 6x - 5$ et $B(x) = x^2 + x - 5$.

EXERCICE 138

Démontrer que $(x - 2)^{2n} + (x - 1)^n - 1$ est divisible par $(x - 1)(x - 2)$. Déterminer le quotient pour $n \in \{1, 2, 3\}$.

EXERCICE 139

Démontrer que $(x + 1)^{2n} - x^{2n} - 2x - 1$ est divisible par $x(x + 1)(2x + 1)$. Déterminer le quotient pour $n \in \{2, 3\}$.

EXERCICE 140

Les restes respectifs des divisions d'un polynôme P(x) par $(x - 1)$ par $(x - 1)$, par $(x + 5)$, par $(x - 2)$, sont 9, -39, 3 . Déterminer R(x) , polynôme du second degré,tel que :
$P(x) = (x - 1)(x + 5)(x - 2)\,Q(x) + R(x)$, où Q(x) est un polynôme qu'on ne demande pas de déterminer .

EXERCICE 141

Soit $P(x) = 2x^4 - x^3 - 10x^2 + 3$
1°) Déterminer un polynôme Q(x) , et un polynôme R(x) du premier degré, tels que :
$P(x) = (x^2 - 2x - 1)\,Q(x) + R(x)$.
2°) En déduire le quotient et le reste de la division de P(x) par $(x - 1 - \sqrt{2})$.
3°) Déterminer $P(1 - \sqrt{2})$.

EXERCICE 142

1°)Démontrer que les expressions suivantes sont divisibles par $(b - c)(c - a)(a - b)$ et les factoriser .
$A = (b - c)^3 + (c - a)^3 + (a - b)^3$. $B = a^3(b^2 - c^2) + b^3(c^2 - a^2) + c^3(a^2 - b^2)$.
$C = bc(b - c) + ca(c - a) + ab(a - b)$. $D = bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) + ab(a^2 - b^2)$.
2°) Simplifier les quotients suivants :

$$E = \frac{a^3 (b^2 - c^2) + b^3 (c^2 - a^2) + c^3 (a^2 - b^2)}{a(b^2 - c^2) + b (c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)} \qquad F = \frac{a^2 (b^2 - c^2) + b^2 (c^2 - a^2) + c^2 (a^2 - b^2)}{a (b^3 - c^3) + b (c^3 - a^3) + c (a^3 - b^3)}$$

EXERCICE 143

Soit $P(x) = (x - a)^2 (b - c) + (x - b)^2 (c - a) +(x - c)^2 (a - b) + (b - c)(c - a)(a - b)$.
Calculer P(a), P(b), P(c) . Conclusion ?

EXERCICE 144

Soit $P(x) = \frac{(x - b)(x - c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{(x - c)(x - a)}{(b - c)(b - a)} + \frac{(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)}$.
Calculer P(a), P(b), P(c) . Conclusion ?

EXERCICE 145

Soit $P(x) = \frac{a^2(x - b)(x - c)}{(a - b)(a - c)} + \frac{b^2(x - c)(x - a)}{(b - c)(b - a)} + \frac{c^2(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)}$.
Calculer P(a), P(b), P(c) . En déduire que $P(x) = x^2$.

EXERCICE 146

Soit $P(x) = \frac{x(x - b)(x - c)}{a(a - b)(a - c)} + \frac{x(x - c)(x - a)}{b(b - c)(b - a)} + \frac{x(x - a)(x - b)}{c(c - a)(c - b)}$.
Calculer P(a), P(b), P(c) . Simplifier P(x) .

EXERCICE 147

Simplifier les quotients suivants :

$A(x) = \frac{x^3 - 10x + 3}{x^2 - 5x + 6}$ $\qquad$ $B(x) = \frac{x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 7x - 10}{x^2 + 3x - 10}$

$C(x) = \frac{2x^3 + 17x^2 + 20x - 75}{x^3 + 9x^2 + 15x - 25}$ $\qquad$ $D(x) = \frac{x^4 + x^3 - x - 1}{x^4 - 3x^3 + 4x^2 + 3x - 5}$.

• EXERCICE 148

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 1 , $a_1, a_2, \ldots, a_n$ n nombres réels, $b_1, b_2, \ldots b_n$ n autres nombres réels . On se propose de démontrer le résultat suivant :
« *Il existe un unique polynôme P vérifiant les conditions suivantes :*
a) deg (P) ≤ n — 1 ; *b) $P(a_1) = b_1, P(a_2) = b_2, \ldots P(a_n) = b_n$.*»
Ce résultat s'appelle théorème de Lagrange(*) .
1°) On suppose qu'il existe deux polynômes P et Q vérifiant les conditions a) et b) .En raisonnant sur le degré et les racines du polynôme (P — Q) , démontrer que : P — Q = 0 . En conclure que, s'il existe un polynôme qui satisfait les conditions a) et b) , ce polynôme est unique .
2°) Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on pose :

$$P_i (x) = \frac{(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_{i-1})(x - a_{i+1}) \ldots (x - a_n)}{(a_i - a_1)(a_i - a_2) \ldots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \ldots (a_i - a_n)} .$$

a) Vérifier que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n - 1$, P_i est un polynôme de degré n — 1 .Les polynômes P_i sont appelés polynômes d'interpolation de Lagrange .
b) Vérifier que pour tout i tel que $1 \leq i \leq n - 1$, on a :
$P_i (a_1) = P_i (a_2) = \ldots P_i (a_{i-1}) = P_i (a_{i+1}) = \ldots P_i (a_n) = 0$ et $P_i (a_i) = 1$.
c) Démontrer que $P= b_1P_1 + b_2P_2 + \ldots + b_nP_n$ est un polynôme qui vérifie les conditions a) et b) du théorème de Lagrange .
3°) Enoncer une conclusion .

(*) Joseph-Louis Lagrange, mathématicien français(1736-1813) un des plus grands mathématiciens du XVIIIe siècle . Travaux sur les équations différentielles, la mécanique et la théorie des nombres .

• EXERCICE 149 Résolution d'une équation du troisième degré

Le but du problème est la résolution de l'équation : $x^3 + 3x^2 + 15x — 99 = 0$ (E) .

1°) On se ramène à la résolution d'une équation de la forme : $X^3 + pX + q = 0$.

a) Trouver trois réels a, p, q, tels que pour tout x,

$$x^3 + 3x^2 + 15x — 99 = (x + a)^3 + p(x + a) + q .$$

b) En posant x + a = X, vérifier que $X^3 + 12X — 112 = 0$.

2°) On résout l'équation $X^3 + 12X — 112 = 0$ (E_1) . Pour cela, on pose X= u + v .

a) Vérifier que $(u + v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u + v)$. En déduire que :

- Lorsque X = u + v, alors : $X^3 + 12X — 112 = u^3 + v^3 + (3uv + 12)(u + v) — 112$;
- X = u + v est une solution de l'équation (E_1) lorsque : $u^3 + v^3 = 112$ et $u^3v^3 = — 64$.

b) Trouver deux nombres u et v tels que : $u^3 + v^3 = 112$ et $u^3v^3 = — 64$.

Indication : Poser $u^3 = U$ et $v^3 = V$.

c) Résoudre l'équation (E_1) .

Indication : Vérifier que $(2 + 2\sqrt{2})^3 = 56 + 40\sqrt{2}$.

d) Résoudre l'équation (E) .

Note culturelle : Réduire l'équation générale $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ à la forme $X^3 + pX + q = 0$ était une méthode connue par CARDAN(1501-1576), VIETE(1540-1603) et DESCARTES(1596-1650) . Les mathématiciens italiens de la Renaissance, en particulier TARTAGLIA(~ 1500- 1557) savaient résoudre $X^3 + pX + q = 0$, mais par une autre méthode que celle exposée à la question 2° .

EXERCICE 150

« *Quel que soit l'entier $n \geq 5$, $n^4 — 20n^2 + 4$ n'est jamais un nombre premier* » .

Pour établir ce résultat, on propose la méthode suivante :

1°) Soit $P(x) = x^4 — 20x^2 + 4$.

Vérifier que $P(x) = (x^2 — 2)^2 — 16x^2$ et en déduire une factorisation de P sous la forme A (x) B (x) où A et B sont des polynômes de degré 2 .

2°) Montrer que les équations A (x) = 1 et B (x) = 1 n'ont pas de solution dans $\mathbb{Z}$.

3°) Conclure .

• EXERCICE 151

Ce problème propose des calculs classiques sur les « différences finies » de polynômes .

Pour toute fonction polynôme P, on pose, pour tout réel x,

$\Delta P(x) = P(x + 1) — P(x)$.

1°) Calculer $\Delta P(x)$ dans les cas suivants :

a) $P(x) = x^3$; b) $P(x) = x^2 — 4x + 6$; c) $P(x) = 2x + 1$.

2°)a) Vérifier que si P est un polynôme quelconque et λ un réel quelconque,

$$\Delta(\lambda P(x)) = \lambda \Delta P(x) .$$

3°) a) Dans cette question, P est le polynôme de degré n, $n \geq 1$, défini par $P(x) = x^n$.

Montrer que ΔP est un polynôme de degré n — 1, et que le terme de plus haut degré de ΔP est nx^{n-1} .

b) Déduire des questions 2° et 3°.a) que si P est un polynôme quelconque de degré n, alors ΔP est un polynôme de degré n — 1 .

4°) On note P_0 et P_1 les polynômes respectivement définis par : $P_0(x) = 1$ et $P_1(x) = x — 1$.

a) Vérifier que $\Delta P_1 = P_0$.
b) On se propose alors de trouver un polynôme P_2 tel que : $P_2(1) = 0$ et $\Delta P_2 = P_1$.

- En supposant qu'il existe une telle fonction polynôme, prouver alors que nécessairement P_2 est de degré 2 .

- Calculer $\Delta P_2(1)$. Montrer alors que $P_2(2) = 0$, puis que pour tout réel x, $P_2(x) = a(x - 1)(x - 2)$, avec a réel .

- Montrer que s'il existe un polynôme P_2 répondant à la question, alors $P_2(x) = \frac{1}{2}(x - 1)(x - 2)$.

- Réciproquement, pour le polynôme P_2 trouvé, calculer ΔP_2 , puis conclure .

5°) On veut trouver un polynôme P_3 de degré 3, tel que $P_3(1) = 0$ et $\Delta P_3 = P_2$.
En vous inspirant de la démarche suivie à la question 4, montrer qu'il existe un polynôme et un seul qui répond à la question, le polynôme $P_3(x) = \frac{1}{6}(x - 1)(x - 2)(x - 6)$.
Note : Les polynômes P_0 , P_1 , P_2 , P_3 ,....... sont- appelés polynômes de NEWTON .
6°) On pose $\Delta^2 P(x) = \Delta(\Delta P)(x)$.
a) Calculer $\Delta^2 P(x)$, lorsque $P(x) = x^2$.
b) P est le polynôme du second degré défini par :$P(x) = ax^2 + bx + c$.

- Calculer $P(1)$, $\Delta P(1)$, $\Delta^2 P(1)$.

- Montrer alors que pour tout réel x, $P(x) = P(1) + \Delta P(1)(x - 1) + \frac{\Delta^2 P(1)}{2}(x - 1)(x - 2)$

c) Utiliser ce qui précède pour trouver un polynôme P de degré 2 tel que :
$P(1) = -1$, $P(2) = 9$, $P(3) = 21$.

CALCUL VECTORIEL ET BARYCENTRE

<u>Note pédagogique</u> : *Les élèves sont censés être familiariasés avec le calcul vectoriel puisqu'ils l'ont étudié en classes de Seconde et Première. Cependant, l'expérience montre que la plupart d'entre eux ont encore des difficultés avec certains concepts. C'est pourquoi nous avons repris toutes les notions à la base.*

Ce chapitre peut donc être considéré comme un chapitre de révision, mais il est important pour celui qui veut avoir une bonne base en géométrie, en particulier pour les élèves de la série S1.

<u>1. MESURE ALGEBRIQUE ET VECTEURS</u>

A tout couple de points (A, B) (encore appelé bipoint) du plan, on associe un réel positif ou nul appelé <u>distance</u> de A à B et noté d(A, B) vérifiant :

— d(A, B) = 0 si et seulement si A = B ;

— d(A, B) = d(B, A) d'où la notation simplifiée d(A, B) = AB.

— d(A, B) ≤ d(A, M) + d(M, B) pour tout point M du plan (*inégalité triangulaire*).

Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont dites avoir même <u>direction</u> si elles sont parallèles.

Sur une droite (AB), on admet par convention qu'il n y a que deux sens de parcours possibles : de A vers B ou de B vers A.

Sur une demi-droite [AB), on admet par convention qu'il n y a qu'un seul sens de parcours possibles : de A vers B .

Un axe est une droite Δ sur laquelle on a choisi *une fois pour toutes* un bipoint (O, I), appelé repère de l'axe Δ .

Le sens de parcours sur Δ est alors celui de O vers I.

Soit maintenant (M, N) un bipoint quelconque de l'axe Δ. On appelle mesure algébrique du bipoint (M, N) le réel, noté $\overline{MN}$, égal à :

- **$+\dfrac{MN}{OI}$ si le sens de parcours sur l'axe est le même que celui de M vers N.**
- **$-\dfrac{MN}{OI}$ si le sens de parcours sur l'axe est le contraire de celui de M vers N.**

Si P est un point quelconque de l'axe Δ, l'abscisse de P dans le repère (O, I) est le réel

$$x_P = \frac{\overline{OP}}{\overline{OI}} .$$

Si A, B et C sont trois points quelconques de l'axe Δ , on a $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$: c'est la *relation de Chasles*.

Soit (A , B) un bipoint donné du plan. L'ensemble de tous les bipoints (M , N) tels que les segments [AN] et [BM] aient même milieu (autrement dit tels que ABNM soit un parallélogramme éventuellement aplati) est un être mathémétique appelé vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{— les droites (AB) et (MN) ont même direction ;} \\ \text{— les demi-droites [AB) et [MN) ont même sens ;} \\ \text{— les distances AB et MN sont égales.} \end{cases}$$

La distance AB est appelée norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.

Axiome d'Euclide

Etant donnés un point O et un vecteur $\vec{u}$, il existe un point M unique tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u}$$

Somme de deux vecteurs

Etant donnés deux vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, le vecteur $\overrightarrow{AC}$, qui ne dépend pas du choix du point A, est la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Ainsi, on a toujours $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (*Relation de Chasles*).

***Propriétés* : Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a :**

1° $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ (Commutativité).

2° $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ (Associativité)

3° Le vecteur associé aux bipoints de la forme (A, A) est le vecteur nul : $\vec{0}$ (Elément neutre)

4° Quel que soit le vecteur $\vec{u}$, il existe un vecteur noté (— $\vec{u}$) tel que :

$\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$. (Opposé du vecteur $\vec{u}$) .

Produit d'un vecteur par un réel

Le produit t. $\vec{u}$ du réel t par le vecteur $\vec{u}$ est le vecteur tel que :

— Si t = 0 ou $\vec{u} = \vec{0}$, alors t. $\vec{u} = \vec{0}$.

— Si $t \neq 0$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors t. $\vec{u}$ est le vecteur :

- **qui a la même direction que $\vec{u}$.**
- **qui a le sens de $\vec{u}$ si t > 0, le sens contraire de $\vec{u}$ si t < 0 .**
- **qui a la même norme que $\vec{u}$.**

***Propriétés* : Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, quels que soient les réels t et t ' on a :**

1° $(t + t')\,\vec{u} = t\,\vec{u} + t'\,\vec{u}$ 2° $t(\vec{u} + \vec{v}) = t\,\vec{u} + t\,\vec{v}$

3° $t(t'\,\vec{u}) = tt'\,\vec{u}$ 4° $1.\,\vec{u} = \vec{u}$

Vecteurs colinéaires

Deux vecteurs sont dits colinéaires si on est dans l'un des cas suivants :
— soit l'un d'eux est nul ;
— soit l'un est égal au produit de l'autre par un réel non nul.

Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

Théorème de Thales

Enoncé **: Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ ' deux droites. Soit p la projection de $\mathcal{D}$ sur $\mathcal{D}$ ' parallèlement à une direction δ (distincte de celles de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ ') . Soit A, B et C trois points situés sur $\mathcal{D}$**
Si p(A) = A ', p(B) = B ', p(C) = C ' , alors on a :

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$$

Réciproque **: Soit $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}$ ' deux droites. Soit A, B et C trois points situés sur $\mathcal{D}$. Soit A' , B ' et C ' trois points situés sur $\mathcal{D}$ '. On suppose que (AA') / / (BB') .**

Si $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \dfrac{\overline{A'B'}}{\overline{A'C'}}$, alors (CC') / / (AA') / / (BB') .

II. BARYCENTRE DE PLUSIEURS POINTS

Définition **:Soit α, β, γ, δ des réels dont la somme n'est pas nulle. Alors il existe un unique point G du plan tel que $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} + \gamma \overrightarrow{GC} + \delta \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{0}$.**
G est le barycentre du système {(A , α) (B , β) (C , γ) (D, δ)}
Propriétés **:**
1° Le barycentre d'un système de points ne change pas si on multiplie tous les coefficients par un même réel non nul (Homogénéité).
2° Dans la recherche du barycentre de plusieurs points, on peut remplacer certains d'entre eux par leur barycentre partiel affecté de la somme de leurs coefficients (pourvu que celle-ci ne soit pas nulle) (Associativité) .
3°) Si G est le barycentre du système {(A , α) (B , β) (C , γ) (D, δ)} , alors pour tout point M du plan, on a : $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} + \delta \overrightarrow{MD} = (\alpha + \beta + \gamma + \delta) \overrightarrow{MG}$.
N.B : Si la somme α + β + γ + δ est non nulle, alors le vecteur
$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} + \delta \overrightarrow{MD}$ est indépendant de M.

Centre d'inertie d'une plaque homogène
Une plaque homogène est un solide dont la masse de toute portion est proportionnelle à l'aire de celle-ci. Pour en déterminer le centre d'inertie, on utilise les principes suivants :
— *Principe du triangle* : Le centre d'inertie d'une plaque triangulaire est confondu avec le centre de gravité du triangle.
— *Principe de juxtaposition* : Si la plaque $\mathcal{P}$ est constituée de la juxtaposition de deux plaques $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ de centres d'inertie respectifs G_1 et G_2, d'aires respectives $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ alors le centre d'inertie de $\mathcal{P}$ est G = bar {(G_1 , $\mathcal{A}_1$) (G_2 , $\mathcal{A}_2$) } .
— *Principe de symétrie* :
- **Si la plaque a un centre de symétrie O, alors O est son centre d'inertie.**
- **Si la plaque a un axe de symétrie Δ , alors son centre d'inertie est situé sur Δ .**

III. GEOMETRIE ANALYTIQUE

Une base du plan est un couple ($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$) de vecteurs *non colinéaires*.

Le triplet (O, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$) où O est un point du plan et ($\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$) une base est un repère cartésien du plan .

Soit ($\vec{i}$, $\vec{j}$) une base du plan. Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque. Il existe un couple unique (x, y) de réels tels que : $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. Ces réels x et y sont appelés <u>coordonnées</u> de $\vec{u}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) .
Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan. Soit M un point quelconque. Il existe un couple unique (x, y) de réels tels que : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$. Ces réels x et y sont appelés <u>coordonnées</u> de M dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

***<u>Condition de colinéarité</u>* : Soit $\vec{u}$ (x , y) et $\vec{v}$ (x ' , y ') dansune base ($\vec{i}$, $\vec{j}$).**
Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si xy ' — yx ' = 0 (⇔ dét($\vec{u}$, $\vec{v}$) = 0).
Soit dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) les points A (x_A , y_A) et B (x_B , y_B) .

Alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\overrightarrow{AB}$ (x_B — x_A , y_B — y_A) et le mileu I du segment [AB] a pour coordonnées I $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)$.

<u>Représentations anlytique d'une droite</u>
Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère du plan.
Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par A (x_o ; y_0) et de vecteur directeur $\vec{u}$ (α , β). Un point M (x , y) appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires , c'est-à-dire s'il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB}$, ce qui se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$$

appelé *système d'équations paramétriques* de la droite $\mathcal{D}$.

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par deux points A et B. Un point M (x , y) appartient à $\mathcal{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, ce qui équivaut à dét($\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$) = 0 et se traduit par une relation de la forme : ax + by + c = 0 appelé *équation cartésienne* de la droite $\mathcal{D}$. Si b ≠ 0, cette équation peut se mettre sous la forme y = mx + p et s'appelle alors équation réduite de la droite $\mathcal{D}$: m s'appelle le *coefficient directeur* de $\mathcal{D}$ (si le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) est orthogonal, m est aussi appelé *pente* de la droite $\mathcal{D}$). p est *l'ordonnée à l'origine*.

***<u>Coordonnées d'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$</u>* :**

- **équation cartésienne ax + by + c = 0 : $\vec{u}$ (— b ; a) .**
- **système d'équations paramétriques $\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$ $\vec{u}$ (α , β)**

• **équation réduite y = mx + p : $\overrightarrow{u}$ (1 , m) .**

<u>Conditions de parallélisme</u>

$$\left.\begin{array}{r} D: ax+by+c=0 \\ D': a'x+b'y+c'=0 \end{array}\right\} D \parallel D' \Leftrightarrow ab'-ba'=0 \qquad \left.\begin{array}{r} D: y=mx+p \\ D': y=m'x+p' \end{array}\right\} D \parallel D' \Leftrightarrow m=m'$$

<u>• EXERCICE 152 Autour de l'inégalité triangulaire</u>

Tout au long de cet exercice, on admettra la propriété suivante (*inégalité triangulaire*) :
« <u>Quels que soient les points A, B et M on a AB ≤ AM + MB , l'égalité ayant lieu si et seulement si M appartient au segment [AB]</u> » .

1°) Soient A et B deux points distincts du plan. Montrer que, pour tout point M du plan,

$$| MA - MB | \leq AB \leq MA + MB$$

Préciser la position du point M quand AB = | MA — MB |

2°) Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon r, et $\mathcal{C}'$ le cercle de centre O ' et de rayon r '.
Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants en deux points distincts si et seulement si :

$$| r' - r | < OO' < r + r' .$$

3°) <u>Application</u> : Soient A et B deux points tels que :AB = 5 et x un réel positif. On cherche les points M et N tels que : $\| \overrightarrow{AM} \| = 2$; $\| \overrightarrow{BM} \| = x$ et $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}$.
Discuter le nombre de solutions suivant les valeurs de x .

4°) Soit ABC un triangle . On désigne par A ' , B ' et C ' les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB] et par *p* le périmètre de ce triangle .
Pour tout point M intérieur au triangle ABC, démontrer que :

a) MB +MC < AB + AC (utiliser le point d'intersection de (BM) et (AC)) .

b) MA + MB + MC < *p* **c)** $MA + MB + MC > \frac{1}{2}\, p$

d) $AA' + BB' + CC' > \frac{3}{4}\, p$ **e)** AA' + BB' + CC ' < *p* .

<u>EXERCICE 153</u>

Δ est un axe muni d'un repère (O, I) . Soient A et B deux points de Δ d'abscisses respectives 6 et — 2 .

1°) Calculer l'abscisse du point M de Δ tel que $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \dfrac{5}{3}$. Calculer $\overline{MA}$ et $\overline{MB}$.

2°) Calculer l'abscisse du point N de Δ tel que $\dfrac{\overline{NA}}{\overline{NB}} = -\dfrac{5}{3}$. Calculer $\overline{NA}$ et $\overline{NB}$.

3°) Calculer l'abscisse de I milieu de [MN] . Calculer $\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IB}}$.

<u>EXERCICE 154</u>

Soient A, B, C et M 4 points d' une même droite (D) munie d'un repère (O , I) . En observant que l'on a : $\overline{MA} = \overline{MC} + \overline{CA}$ et $\overline{MB} = \overline{MC} + \overline{CB}$, 1°) Former l'expression $\overline{MA} \cdot \overline{BC} + \overline{MB} \cdot \overline{CA}$ et en déduire la relation d'*Euler* :

$\overline{MA} \cdot \overline{BC} + \overline{MB} \cdot \overline{CA} + \overline{MC} \cdot \overline{AB} = 0$

2°) Former l'expression $MA^2 . \overline{BC} + MB^2 . \overline{CA}$ et en déduire la relation de *Stewart* :

$MA^2 . \overline{BC} + MB^2 . \overline{CA} + MC^2 . \overline{AB} + \overline{BC} . \overline{CA} . \overline{AB} = 0$.

• EXERCICE 155

Soient A, B , C D 4 points d'un axe Δ de repère (O , I) . On désigne par a, b c et d leurs abscisses respectives (c'est-à-dire que : $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$, $\overline{OC} = c$, $\overline{OD} = d$) .

On appelle birapport des 4 points A, B, C et D dans cet ordre et on note (ABCD) l'expression : $(ABCD) = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}} : \dfrac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$.

1°) Exprimer le birapport (ABCD) en fonction de a, b, c et d .

2°) Montrer que le birapport (ABCD) reste invariant si on inverse simultanément chacun des couples (AB) et (CD) ou lorsqu'on échange ces deux couples.

3°) L'ensemble ordonné des 4 points A, B C et D est dit constituer une division harmonique lorsque le birapport (ABCD) est égal à — 1 .On dit alors que les points C et D sont conjugués harmoniques par rapport à A et B.

a) Utiliser 2° pour montrer qu'alors les points A et B sont aussi conjugués harmoniques par rapport à C et D .

b) Etablir la relation 2 (ab + cd) = (a + b) (c + d) .

c) En prenant l'origine O en A, démontrer la relation suivante, dite de NEWTON :

$$\frac{2}{\overline{AB}} = \frac{1}{\overline{AC}} + \frac{1}{\overline{AD}} .$$

d) En prenant l'origine O en I milieu de [AB] , démontrer la relation suivante, dite de DESCARTES : $\overline{IC} . \overline{ID} = IA^2$.

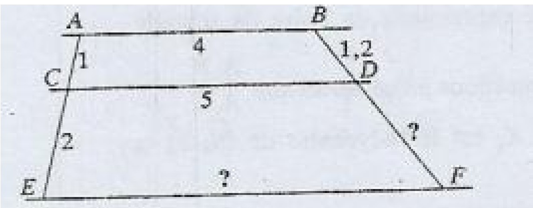
ENONCES DE THALES

EXERCICE 156

Les droites (AB), (CD) et (EF) sont parallèles.

AC = 1 , CE = 2 , AB = 4 , BD = 1,2 et CD = 5 .

Préciser les longueurs DF et EF .

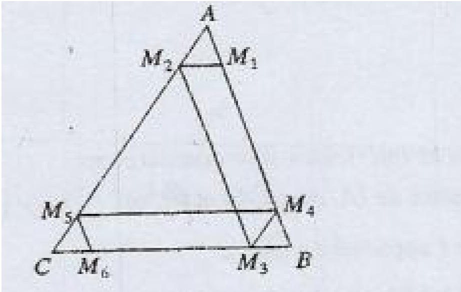


EXERCICE 157

Dans un triangle ABC, M_1 est un point du segment [AB] distinct des sommets A et B.

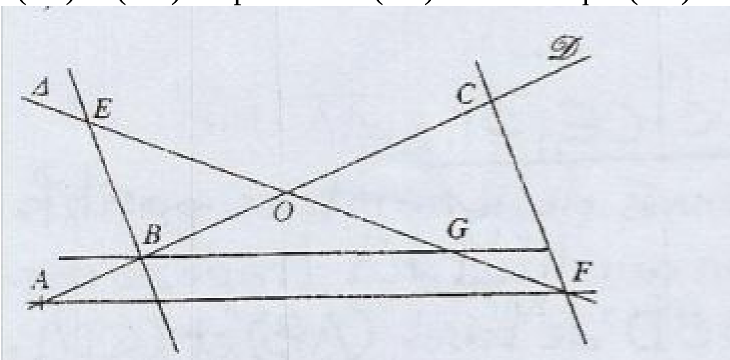
On construit les points M_2, M_3, M_4, M_5 et M_6 tels que les droites (M_1M_2), (M_2M_3), (M_3M_4), (M_4M_5) et (M_5M_6) soient respectivement parallèles aux droites (BC), (AB), (AC), (BC) et (AB).

Démontrer que la droite (M_1M_6) est parallèle à (AC).



<u>EXERCICE 158</u> **<u>Théorème de Pappus</u>**

(EB) est parallèle à (CF) et (BG) est parallèle à (AF) . Montrer que (AE) est parallèle à (CG) .



<u>EXERCICE 159</u>

Etant donnés deux nombres positifs a et b, on construit un trapèze convexe ABCD de bases (AB) et (CD) et J le projeté de I sur [BC] dans la direction des droites (AB) et (CD) .

Montrer que : $\frac{1}{IJ} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$.

<u>• EXERCICE 160</u>

ABC est un triangle et G son centre de gravité. Une droite D , ne contenant pas G, coupe respectivement les droites (GA), (GB) et (GC) en M, N, P .

Démontrer que : $\frac{\overline{GA}}{\overline{GM}} + \frac{\overline{GB}}{\overline{GN}} + \frac{\overline{GC}}{\overline{GP}} = 0$.

On pourra utiliser la projection sur (GA) parallèlement à D .

<u>• EXERCICE 161</u>

Soient D et D ' deux droites sécantes en O. Soit Δ une droite ne passant pas par O et qui coupe D en A et D ' en B. Un point M de Δ se projette en E sur D parallèlement à D ' et en en F sur D ' parallèlement à D .

1°) Démontrer que : $\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{OF}}{\overline{OB}} = 1$.

2°) Soient E et F deux points respectivement de D et D ' et vérifiant la relation :

$\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{OF}}{\overline{OB}} = 1$. Soit M le point tel que OEFM sot un parallélogramme .

Démontrer que M est sur la droite Δ .

• TRAVAUX DIRIGES 2 : Théorèmes de MENELAÜS ET DE CEVA

1°) Théorème de Ménélaüs

a) Soit ABC un triangle. Une droite (D) coupe respectivement (BC), (CA) et (AB) en A ' , B ' et C '. Soit C1 le projeté de C sur (AB) parallèlement à (D).Comparer les rapports $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}$ et $\dfrac{\overline{C'B}}{\overline{C'C_1}}$ puis $\dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}$ et $\dfrac{\overline{C'C_1}}{\overline{C'A}}$.

En déduire que : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$.

b) Réciproquement, soient A ' , B ', C ' trois points situés respectivement sur les côtés (BC) , (CA) et (AB) du triangle ABC. On désigne par C '' le point d'intersection de (A'B') avec (AB). En utilisant a) , comparer $\dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}$ et $\dfrac{\overline{C''A}}{\overline{C''B}}$.

En déduire que C ' = C '', puis que A ' , B ' et C ' sont alignés .

c) <u>**Conclusion**</u> **:** ***Pour trois points A ' , B ' et C ' respectivement situés sur les côtés (BC) , (CA) et (AB) d'un triangle ABC, on a :***

$$\textbf{\textit{A ' , B ', C ' alignés}} \Leftrightarrow \dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1 .$$

2°) Théorème de Ceva

Soit ABC un triangle, A ' , B ', C ' trois points situés respectivement sur les côtés (BC) , (CA) et (AB) du triangle.

a) On suppose que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles.
En utilisant le théorème de THALES, montrer que :

$$\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 .$$

b) On suppose que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes en un point Q. Appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle ACA' coupé par (BQB') puis au triangle ABA' coupé par (CQC'). En déduire que :

$$\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 .$$

c) On suppose que les droites (AA') et (BB') sont parallèles et que : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$. Soit C '' le point d'intersection de (AB) avec la parallèle menée par C à (AA'). En utilisant a) , conclure que C '' = C ' .

d) On suppose que les droites (AA') et (BB') se coupent en Q et que : $\dfrac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \dfrac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \dfrac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$. La droite (QC) coupe (AB) en C ''.En utilisant b), conclure que C ' = C ''.

e) <u>**Conclusion**</u> **:** ***Pour trois points A ' , B ' et C ' respectivement situés sur les côtés (BC) , (CA) et (AB) d'un triangle ABC, on a :***

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1 \Leftrightarrow$$ ***((AA') , (BB') et (CC') sont concourantes ou parallèles) .***

3°) APPLICATION : <u>La droite de Newton</u>

Les notations sont les mêmes qu'au 2°.

Soient (Δ) une droite qui coupe les côtés (BC), (CA) et (AB) en A ' , B ' et C ' respectivement, et A_1, B_1, C_1 les milieux respectifs de [AA'] , [BB'] et [CC'].
Soient I_1, I_2 et I_3 les milieux respectifs de [B'C'] , [C'A] et [AB'].

a) Montrer que $\overrightarrow{A_1I_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{A_1I_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$.

En déduire que les points A_1, I_2 et I_3 sont alignés.

b) Montrer, de façon analogue, que B_1, I_3, I_1 , d'une part, et C_1, I_1, I_2 sont alignés.

c) Appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle AB'C' coupé par la droite portant les points A ' , B et C et établir la relation :

$$\frac{\overline{A_1I_3}}{\overline{A_1I_2}} \times \frac{\overline{C_1I_2}}{\overline{C_1I_1}} \times \frac{\overline{B_1I_1}}{\overline{B_1I_3}} = 1$$

d) Conclure que les trois points A_1, B_1 et C_1 sont alignés.

La droite qui porte ces trois points est appelée <u>droite de Newton du quadrilatère complet formé par le triangle ABC et la droite AB'C'.</u>

N.B On appelle quadrilatère complet la figure formée par quatre droites deux à deux concourantes. (AA') , (BB') et (CC') sont les diagonales du quadrilatère complet. Le résultat que l'on vient de démontrer s'énonce aussi en disant que *les milieux des diagonales d'un quadrilatère complet sont alignés.*

<u>EXERCICE 162</u>

1°) Démontrer que le point I est milieu du segment [AB] si et seulement si : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.

2°) Avec les mêmes notations qu'au 1° , démontrer que :

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad \text{et que} \quad \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI} .$$

3°) Soit ABC un triangle , E le milieu de [AB], F le milieu de [AC] .Démontrer que :
$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. En déduire que : a) (EF) // (BC) b) $EF = \frac{1}{2}BC$ (*Théorème de la droite des milieux*)

4°) Soient A, B, C et D 4 points, I le milieu de [AC], J le milieu de [BD] .

Démontrer que $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

Comment choisir le quadrilatère ABCD pour que I et J soient confondus ?

5°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

a) $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$ **b)** $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\| = 2\,MC$

c) $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}$ a même direction que $\overrightarrow{BC}$.

<u>EXERCICE 163</u>

Soient ABCD et AECF des parallélogrammes . Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{FD}$?

EXERCICE 164

Soient A, B, C et D des points du plan et I et J les milieux respectifs de [AC] et [BD] .

Démontrer que : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} = 2\ \overrightarrow{IJ}$.

EXERCICE 165

Soient ABC un triangle dont O est le centre de gravité . Si $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$, que peut-on dire du triangle ABC ?

EXERCICE 166

Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ 3 vecteurs tels que :

$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ $\qquad \| \overrightarrow{v} \| = \lambda \| \overrightarrow{u} \|$ $\qquad \| \overrightarrow{w} \| = (\lambda + 1) \| \overrightarrow{u} \|$.

Démontrer que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires . Exprimer $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ en fonction de $\overrightarrow{u}$.

EXERCICE 167

On donne un triangle ABC et les milieux respectifs A ' , B ' et C ' de [BC], [CA] et [AB] . Un point M quelconque étant donné, on considère les points N et P tels que :

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CC'}$ $\qquad$ et $\qquad$ $\overrightarrow{MP} = - \overrightarrow{BB'}$.

1°) Démontrer que les droites (NP) et (AA') sont parallèles .

2°) Soit I le milieu de [NP] . Comparer les vecteurs $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{BC}$.
En déduire que les droites (MI) et (BC) sont parallèles .

EXERCICE 168

On considère deux triangles ABC et A'B 'C' et leurs centres de gravité respectifs G et G ' .

1°) Démontrer que : $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = 3\ \overrightarrow{GG'}$.
2°) En déduire une condition nécessaire te suffisante pour que les triangles aient même centre de gravité.
3°) Comparer G et G ' dans les cas suivants :
a) A ' , B ' et C ' sont les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB] .
b) A ' , B ' et C ' sont respectivement les points définis par :

$\overrightarrow{BA'} = t\,\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CB'} = t\,\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AC'} = t\,\overrightarrow{AB}$, où t est un réel non nul .

(Faire une figure avec $t = \frac{3}{2}$) .

EXERCICE 169

Soient A, B, C et D 4 points du plan. A tout réel t, on associe les points M et N tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\,\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DN} = t\,\overrightarrow{DC}$$

1°) Démontrer que $\overrightarrow{MN} = t\,\overrightarrow{BC} + (1 - t)\,\overrightarrow{AD}$

2°) On suppose désormais que : $\overrightarrow{BC} = 3\,\overrightarrow{AD}$ et on note $AD = \| \overrightarrow{AD} \| = a$.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{MN}$ en fonction de t et $\overrightarrow{AD}$ puis la distance MN en fonction de t et a .

3°) Pour quelles valeurs de t a-t-on : **a)** M = N ? **b)** MN = $\frac{7}{2}$ a ?

<u>EXERCICE 170</u>
ABCD est un quadrilatère.

1°) I et J sont les milieux de [AB] et [CD]. Démontrer que : $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$.

2°) P et U sont tels que : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{UP} = \overrightarrow{UD}$, R et V sont tels que : $\overrightarrow{BR} = \overrightarrow{RV} = \overrightarrow{VC}$,

S et K sont tels que : $\overrightarrow{IS} = \overrightarrow{SK} = \overrightarrow{KJ}$.
Démontrer que S est le milieu de [PR] et K celui de [UV].

<u>EXERCICE 171</u> : **<u>Droite et cercle d'Euler d'un triangle</u>**
Soit ABC u triangle, A ' , B ' et C ' les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB] , O le centre du cercle circonscrit et G le centre de gravité.

1°) Montrer qu'il existe un point H unique tel que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (1) .

2°) Montrer que $\overrightarrow{AH} = 2\,\overrightarrow{OA'}$; $\overrightarrow{BH} = 2\,\overrightarrow{OB'}$; $\overrightarrow{CH} = 2\,\overrightarrow{OC'}$.
3°) Démontrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

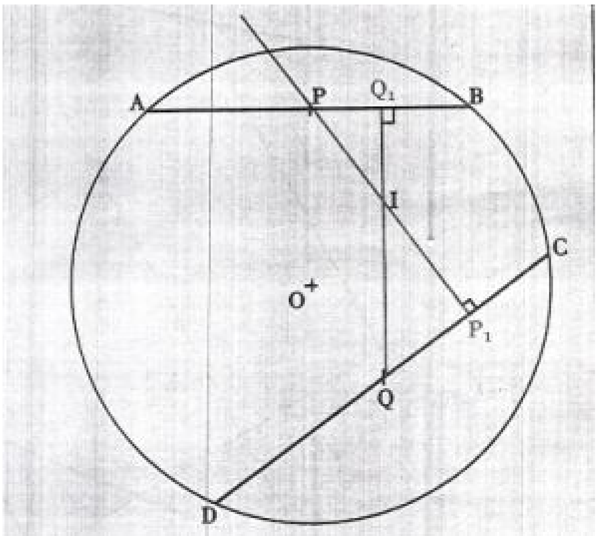
4°) En utilisant la relation $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, démontrer que $\overrightarrow{OH} = 3\,\overrightarrow{OG}$.
En déduire que les trois points O, G et H sont alignés.
(*La droite portant ces trois points est appelée <u>droite d'Euler</u> du triangle*) .
5°) Soit A_1 le symétrique de A par rapport à O et I le milieu de [HA_1] .

Démontrer que $2\,\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{AH}$, puis que I = A ' . En conclure que A_1 est aussi le symétrique de H par rapport à A ' .
6°) Déduire de la question précédente le théorème suivant : « <u>Les symétriques de l'orthocentre par rapport aux milieux des côtés du triangle appartiennent au cercle circonscrit</u> » .
7°) Soit ω l'isobarycentre de A, B, C et H et U le milieu de [HA], V le milieu de [HB], W le milieu de [HC] (*U, V et W sont les <u>points d'Euler</u>*)
  a) Montrer en utilisant la relation (1) que ω est le milieu de [OH] .
  b) Etablir les égalités :

$$\overrightarrow{\omega U} = -\,\overrightarrow{\omega A'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OA} \; ; \quad \overrightarrow{\omega V} = -\,\overrightarrow{\omega B'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OB} \; ; \quad \overrightarrow{\omega W} = -\,\overrightarrow{\omega C'} = \frac{1}{2}\,\overrightarrow{OC} \; .$$

En déduire que les milieux A ' , B ' et C ' et les points d'Euler U, V et W appartiennent au cercle de centre ω admettant pour rayon la moitié du rayon du cercle circonscrit au triangle .
8°) Montrer que ce cercle passe par les points α , β et γ , intersections respectives des hauteurs (AH) , (BH) et (CH) avec les côtés [BC] , [CA] et [AB] (*<u>cercle des neuf points</u>*) .

<u>• EXERCICE 172 Droites concourantes</u>
$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et A, B, C et D sont quatre points de ce cercle, tels que ABCD ne soit pas un trapèze.



1°) P et Q sont les milieux respectifs de [AB] et [CD] . La perpendiculaire à (CD) passant par P coupe (CD) en P_1 , la perpendiculaire à (AB) passant par Q coupe (AB) en Q_1 . Les droites (PP_1) et (QQ_1) se coupent en I.

a) Démontrer que OPIQ est un parallélogramme et que $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

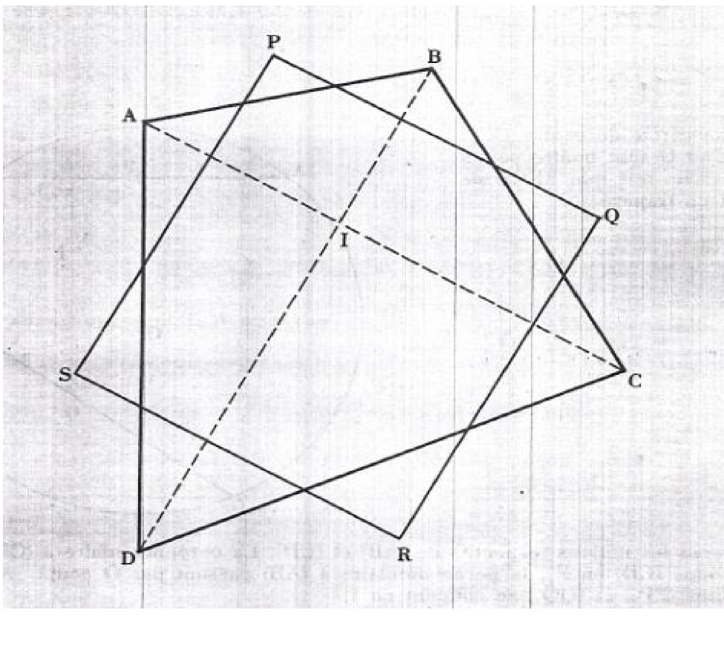
b) En déduire que : $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

2°) R et S sont les milieux respectifs de [BC] et [AD] . La perpendiculaire à (BC) passant par S coupe (BC) en S_1 , la perpendiculaire à (AD) passant par R coupe (AD) en R_1 . Les droites (RR_1) et (SS_1) se coupent en J.

Démontrer que les points I et J sont confondus.

• EXERCICE 173 Le parallélogramme de Wittenbauer

ABCD est un quadrilatère convexe ; on partage chacun des côtés [AB], [BC] , [CD] et [DA] en trois segments de même longueur et on joint deux à deux les points obtenus, comme indiqué sur la figure. On obtient un quadrilatère PQRS.



1°) Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

2°) I est le point d'intersection des diagonales (AC) et (BD) du quadrilatère ABCD.

Démontrer que : $\frac{2}{3}\ \overrightarrow{IA} + \frac{2}{3}\ \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IP}$. **(1)**

3°) O est le centre du parallélogramme PQRS et G est l'isobarycentre du quadrilatère ABCD.

Démontrer que : $\overrightarrow{IO} = \frac{4}{3}\ \overrightarrow{IG}$.

Indication : on peut donner des relations comparables à la relation **(1)** pour les vecteurs $\overrightarrow{IQ}$, $\overrightarrow{IR}$, $\overrightarrow{IS}$ et utiliser ensuite la définition de l'isobarycentre.

4°) A quelle condition le centre O du parallélogramme PQRS est-il confondu avec l'isobarycentre G du quadrilatère ABCD ?

REPERES DU PLAN. EQUATIONS DE DROITES

EXERCICE 174

Etant donné un triangle ABC, soient les points M et N définis par :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC}$.

1°) Montrer que (MN) est parallèle à (BC) .

2°) Donner les coordonnées de M et N dans les repères $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ puis $(B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

3°) On définit maintenant les points M et N par :

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AB} + (1 - k)\ \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = (1 - k)\ \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\ \overrightarrow{AC}$ ($k \in \mathbb{R}$) .

a) Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.

b) Déterminer k pour que BCMN soit un parallélogramme.

EXERCICE 175

Soient A, B, C non alignés. I le milieu de [BC]. Δ une droite passant par I et qui coupe (AB) en M et (AC) en N. P est le point commun à (BN) et (CM).

Déterminer l'ensemble des points P quand Δ pivote autour de I en restant sécante à (AB) et (AC). On pourra utiliser le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

EXERCICE 176

Soient un triangle OAB et deux points C et D alignés avec O. Un point M de la droite (AB) est variable. (MC) coupe (OA) en N et (MD) coupe (OB) en P.

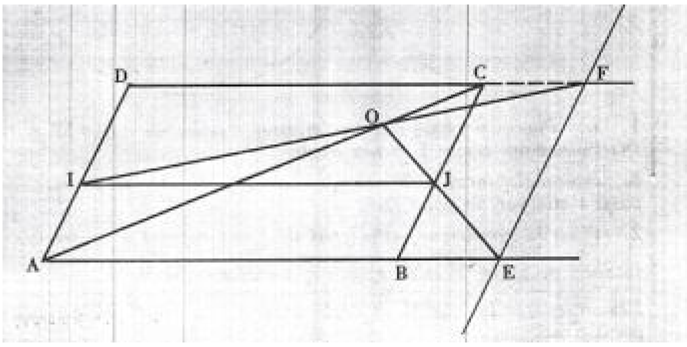
Démontrer que la droite (NP) passe par un point fixe.

N.B. On pourra rapporter le plan à un repère bien choisi.

EXERCICE 177

ABCD est un parallélogramme. Une parallèle à (AB) coupe (AD) en I et (BC) en J ; une parallèle à (AD) coupe (AB) en E et (CD) en F .

On se propose de montrer que les droites (AC), (EJ) et (IF) sont soit parallèles, soit concourantes.



1°) Faire une figure sur laquelle les droites (AC), (EJ) et (IF) sont parallèles.

2°) On choisit $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ pour repère.

a) Quelles sont les coordonnées de A, B, C, D ? Quelles sont les abscisses de I et J ? Quelles sont les ordonnées de E et F ?

b) On désigne par a l'abscisse de E et par b l'ordonnée de I.
Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AC), (IF) et (EJ) .

c) Démontrer que si les droites (AC) et (IF) sont parallèles alors les droites (AC), (IF) et (EJ) sont parallèles .

d) Démontrer que si les droites (AC) et (IF) sont sécantes en O, alors les droites (AC), (IF) et (EJ) sont concourantes en O.

e) Conclure .

EXERCICE 178

Le plan est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soient O', $\vec{i}\,'$, $\vec{j}\,'$ tels que :
$\overrightarrow{OO'} = 4\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{i}\,' = 3\vec{i} - 2\vec{j}$, $\vec{j}\,' = \vec{i} + 2\vec{j}$.

1°) Démontrer que $(O, \vec{i}\,', \vec{j}\,')$ est un repère du plan.
2°) Soit M de coordonnées (x , y) dans le premier repère, (x' , y') dans le second repère.
Calculer x' et y' en fonction de x et y .

EXERCICE 179

Soient A, B, C trois points non alignés du plan.

On considère les repères $\mathcal{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et $\mathcal{R}' = (B, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

Un point M a pour coordonnées (x , y) dans $\mathcal{R}$ et (x' , y') dans $\mathcal{R}'$.
Exprimer x et y en fonction de x' et y' .
Déterminer l'ensemble des points du plan qui ont les mêmes coordonnées dans les deux repères.

EXERCICE 180 Familles de droites

A) Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel a , le nombre de solutions de l'équation :
$(a - 2) x^2 + 2(a - 1) x + a + 4 = 0$, x étant l'inconnue réelle.

B) Le plan est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites (d_m) d'équations :
$(d_m) : (m^2 + m - 2) x - (m + 3) y - (m^2 - 5) = 0$, m étant un paramètre réel ,
et l'ensemble Δ des droites (δ_a) d'équations :
$(\delta_a) : ax + (a - 2) y - 6 (a - 1) = 0$, a étant un paramètre réel .
1°) a) Déterminer et construire les droites de $\mathcal{D}$ parallèles aux axes.

b) Démontrer que toutes les droites de $\mathcal{D}$ passent par un point fixe A que l'on déterminera.
2°) a) Déterminer et construire les droites de Δ parallèles aux axes.
b) Démontrer que toutes les droites de Δ passent par un point fixe C que l'on déterminera.
c) Discuter suivant la position d'un point M_0 (x_0 , y_0) dans le plan, le nombre de droites de Δ passant par M_0.
En déduire que l'ensemble des droites Δ est l'ensemble des droites passant par C privé d'une droite que l'on précisera.
3°) En prenant *a* pour paramètre réel et m pour inconnue, discuter suivant les valeurs de *a* l'existence de droites (d_m) parallèles à une droite (δ_a) donnée.
En déduire que l'ensemble $\mathcal{D}$ ne représente qu'une partie des droites passant par A.
4°) Pour quelles valeurs de *a* et m les droites (d_m) et (δ_a) sont-elles confondues ?
5°) Les droites (d_1) et (δ_2) se coupent en B. Les droites (δ_0) et (d_3) se coupent en D.
Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

BARYCENTRES

EXERCICE 181
Soit ABCD un parallélogramme non aplati.
1°) Déterminer b et c réels tels que D soit le barycentre de {(A , 1) (B , b) (C , c)}.
2°) Les rées b et c ayant les valeurs obtenues et H désignant le centre du parallélogramme,déterminer h, réel, pour que le barycentre de {(A , 1) (B , b) (C , c) (H , h)} soit le milieu du segment [HB] .

EXERCICE 182
Soient A, B, C points non alignés du plan, G le barycentre de {(A , 1) (B , 2) (C , — 1)}et M un point quelconque du plan. soient les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et $\vec{v} = 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

1°) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan pour lesquels $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2°) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan pour lesquels $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

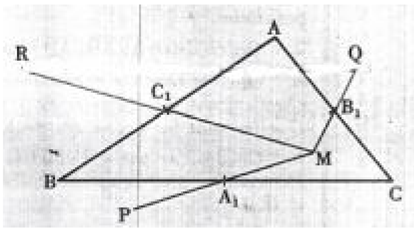
EXERCICE 183
ABC est un triangle, M est un point du plan. P, Q, R sont les symétriques de M par rapport aux milieux A1, B1, C1 des côtés [BC] , [CA] et [AB] du triangle. G et K sont les centres de gravité des triangles ABC et PQR.

1°) Démontrer que $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ .En déduire que $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MP} = 3\,\overrightarrow{MG}$.

2°) Donner en fonction de $\overrightarrow{MG}$, une expression de chacun des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MQ}$, $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MR}$, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MR}$
Démontrer que G est le milieu de [MK] .
3°) a) Démontrer que les triangles ABC et PQR ont leurs côtés parallèles deux à deux.

b) Démontrer que $\overrightarrow{PK} = \overrightarrow{GA}$.
4°) Les droites (AP) et (MG) se coupent en L.
a) Préciser la position de L sur chacune des droites (AP) et (MG).
b) En déduire que les milieux des segments [AP] , [BQ] et [CR] sont confondus.
Quelle est la position relative des points M, G, K et L sur la droite (MK) ?



EXERCICE 184

Soient A, B, C points du plan $\mathcal{P}$.

1°) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$\| 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| = \| -\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \|$.

2°) Existe-t-il un point M de $\mathcal{P}$ tel que :

$\| 3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| = \| -\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \| = \| -\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} \|$?

3°) Déterminer l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que :

$\| \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \| = \| 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \|$.

EXERCICE 185

Soient A, B, C points non alignés et α, β, γ réels vérifiant les conditions d'existence des barycentres suivants :

G barycentre de $\{(A , \alpha) (B , \beta) (C , \gamma)\}$ $\quad$ G_1 barycentre de $\{(A , -\alpha) (B , \beta) (C , \gamma)\}$

G_2 barycentre de $\{(A , \alpha) (B , -\beta) (C , \gamma)\}$ $\quad$ G_3 barycentre de $\{(A , \alpha) (B , \beta) (C , \gamma)\}$.

1°) Démontrer que les droites (AG_1) , (BG_2) , (CG_3) concourent en G.

2°) Démontrer que chacun des côtés du triangle $G_1G_2G_3$ passe par l'un des points A, B, C.

EXERCICE 186

Les points A, B, C sont fixés et non alignés.

Soit I le barycentre de $\{(A , 1) (B , -1) (C , 1)\}$ et J le barycentre de $\{(A , -1) (C , 2) \}$.

1°) Soit M le barycentre de $\{(A , \alpha) (B , \beta) (C , \gamma)\}$.

Formuler une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que I, J, M soient alignés.

2°) La droite (IJ) coupe (BC) en K et (AB) en L. Calculer $\dfrac{\overline{KB}}{\overline{KC}}$ et $\dfrac{\overline{LA}}{\overline{LB}}$.

Déterminer λ et µ pour que L soit le barycentre de $\{(I , \lambda) (J , \mu) \}$.

EXERCICE 187

Soient A, B, C trois points non alignés du plan, I le milieu de [BC] et M le barycentre du système $\{(A , \alpha) (B , \beta) (C , \gamma)\}$.

1°) Formuler une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que M vérifie successivement :

a) $\overrightarrow{AM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ $\quad$ **b)** $\overrightarrow{IM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

2°) M satisfaisant à la fois aux conditions a) et b) , la droite (BM) coupe (AC) en J et la droite (CM) coupe (AB) en K.

Calculer les rapports $\dfrac{\overline{JA}}{\overline{JC}}$ et $\dfrac{\overline{KA}}{\overline{KB}}$.

EXERCICE 188

Soit ABC un triangle et M un point strictement intérieur à ce triangle. Les droites (AM), (BM) et (CM) coupent respectivement les côtés [BC] , [CA] et [AB] du triangle en A ' , B ' et C ' .

1°) a) Démontrer que : $\dfrac{\text{aire (MAB)}}{\text{aire (MAC)}} = \dfrac{A'B}{A'C}$.

b) En déduire que A ' est le barycentre des points pondérés (B, aire (MAC)) et (C , aire(MAB)) .

2°) Soit G le barycentre des points pondérés (A, aire(MBC) (B, aire (MAC)) et (C , aire(MAB)) . Démontrer que les points G et M sont confondus.

3°) Soient ABC un triangle, α, β, γ réels strictement positifs et G le barycentre de {(A , α) (B , β) (C , γ)}. Démontrer, en utilisant les deux questions précédentes que :

$$\frac{\text{aire(GBC)}}{\alpha} = \frac{\text{aire(GCA)}}{\beta} = \frac{\text{aire(GAB)}}{\gamma} .$$

4°) Application : Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.

On pose : BC = a, CA = b et AB = c. En les résultats précédents, démontrer que I est le barycentre des points (A, a) , (B, b) et (C , c) .

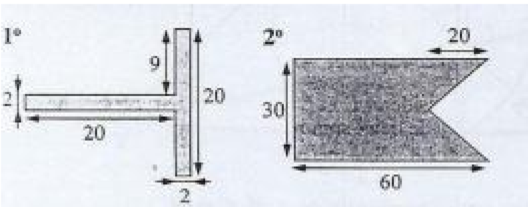
5°) On suppose désormais que les angles du triangle sont aigus. Soit H_A le pied de la hauteur issue de A (donc H_A est un point de [BC].

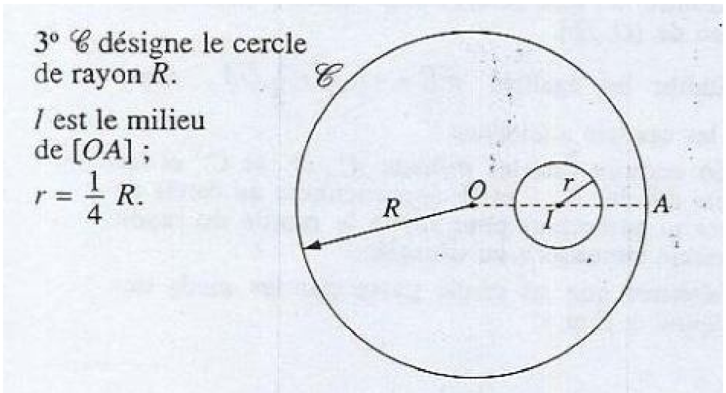
a) Prouver que : $\dfrac{\tan B}{\tan C} = \dfrac{H_AC}{H_AB}$; en déduire que H_A est le barycentre de (B, tan B) et (C, tan C)

b) Etablir que l'orthocentre H du triangle ABC est le barycentre de (A, tan A) , (B, tan B) et (C, tan C) .

EXERCICE 189

Déterminer graphiquement, ou analytiquement dans un repère convenablement choisi, le centre d'inertie de chacune des plaques homogènes, d'épaisseur constante et négligeable, suivantes :



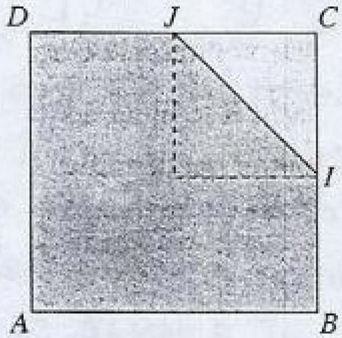


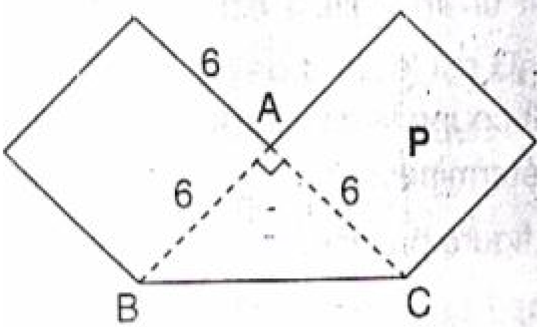
4°

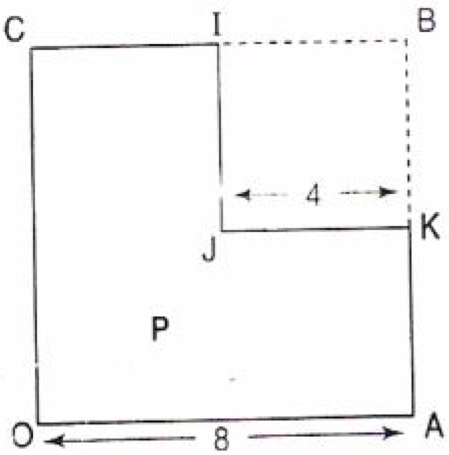
ABCD est un carré de côté *a*.
I est le milieu de [*BC*].
J est le milieu de [*CD*].

Cas 1 : On découpe le triangle *ICJ*.

Cas 2 : On replie le coin triangulaire *ICJ* sur la plaque *ABIJD*.



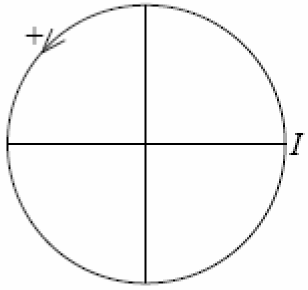




ANGLES ORIENTES

<u>Note pédagogique</u> : *Ce chapitre sert d'introduction à la trigonométrie et au produit scalaire. La notion d'angle de vecteurs n'est définie qu'après l'introduction des abscisses curvilignes sue le cercle orienté et des mesures d'arcs orientés. Cette façon de procéder a l'avantage, nous semble-t-il, de familiariser dès le début l'élève à la lecture des propriéts angulaires sur le cercle trigonométrique, aptitude dont l'importance fondamentale se révélera plus tard quand il s'agira de résoudre des inéquations trigonométriques.*
Les lignes trigonométriques (cosinus et sinus) d'un angle orienté sont tout juste introduites. Leurs propriétés ne seront abordées que dans le chapitre « Trignométrie », après l'étude du produit scalaire, afin de pouvoir justifier rigoureusement certaines formules.

<u>Orientation du plan</u>
Sur un cercle, il n y a que deux sens de parcours possibles.
Orienter le cercle, c'est choisir une fois pour toutes l'un de ces sens de parcours : le sens choisi est généralement le sens contraire des aiguilles d'une montre, sens dit direct ou trigonométrique. l'autre est dit indirect.
Orienter le plan, c'est orienter de la même façon tous les cercles du plan.
Dans le plan orienté, on appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1 sur lequel on a choisi un autre point I appelé origine des arcs.



<u>Abscisse curviligne</u>
A tout point M du cercle trigonométrique, on sait associer une famille de nombres réels appelés <u>abscisses curvilignes</u> de M (cette association peut être conçue, par exemple, en imaginant qu'on enroule sur le cercle le fil constitué par la tangente en I à $\mathcal{C}$).

Si x est l'un de ces réels, tous les autres sont de la forme $x + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) : on dit qu'ils sont congrus à x modulo 2π. Il existe une et une seule abscisse curviligne appartenant à $]-\pi\,;\pi]$.

<u>Arcs orientés</u>
Un arc orienté est un couple (M , N) de points du cercle trigonométrique . On le note $\overset{\frown}{MN}$. Soit x_M une abscisse curviligne de M et x_N une abscisse curviligne de N. On dit que $x_M - x_N$ est *une mesure en radians* de l'arc orienté $\overset{\frown}{MN}$.
Les mesures en radians d'un même arc orienté $\overset{\frown}{MN}$ diffèrent entre elles d'un multiple de 2π . Si x est l'une d'elles, on note : mes $\overset{\frown}{MN} \equiv x\ [2\pi]$.
Il existe une et une seule mesure en radians de l'arc $\overset{\frown}{MN}$ appartenant à $]-\pi\,;\pi]$: on dit que c'est la *mesure principale* de l'arc orienté.

Angle d'un couple de vecteurs

Soit d'abord ($\vec{u}$, $\vec{v}$) un couple de vecteurs unitaires (c'est-à-dire tel que $\|\vec{u}\| = 1$ et $\|\vec{v}\| = 1$. Il existe des points M et N du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, uniques, tels que :

$\overrightarrow{OM} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \vec{v}$. On appelle *mesure en radians de l'angle de vecteurs* $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ toute mesure en radians de l'arc orienté $\widehat{MN}$. On la note $\overline{(\vec{u},\vec{v})}$

Soit maintenant ($\vec{u}$, $\vec{v}$) un couple de vecteurs quelconque. Posons $\vec{u}\,' = \dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ et $\vec{v}\,' = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$. Alors $\vec{u}\,'$ et $\vec{v}\,'$ sont unitaires et par définition :

$$\overline{(\vec{u},\vec{v})} = \overline{(\vec{u}',\vec{v}')}.$$

Propriétés :

- **Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, on a la relation suivante, dite de Chasles : $\overline{(\vec{u},\vec{v})} + \overline{(\vec{v},\vec{w})} = \overline{(\vec{u},\vec{w})}$ [2π] .**

- $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})\ (2\pi)$
- $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) + \pi\ (2\pi)$
- $(k\vec{u}, k\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})\ (2\pi)$ (pour tout $k \neq 0$)

  En particulier ($k = -1$) : $(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})\ (2\pi)$

Bases et repères orthonormés (ou orthonormaux) directs et indirects

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (ou une base $(\vec{i}, \vec{j})$) est orthonormal(e) direct lorsque :

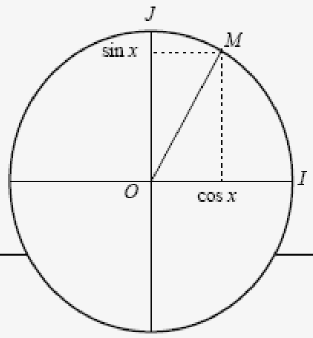
$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ et } (\vec{i}, \vec{j}) = \frac{\pi}{2}\ (2\pi)$$

Un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (ou une base $(\vec{i}, \vec{j})$) est orthonormal(e) indirect lorsque :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1 \text{ et } (\vec{i}, \vec{j}) = -\frac{\pi}{2}\ (2\pi)$$

Définition : Soit M un point du cercle trigonométrique tel que x soit une mesure en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$. Alors :

- $\cos x$ est l'abscisse de M dans le repère $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$
- $\sin x$ est l'ordonnée de M dans ce même repère.



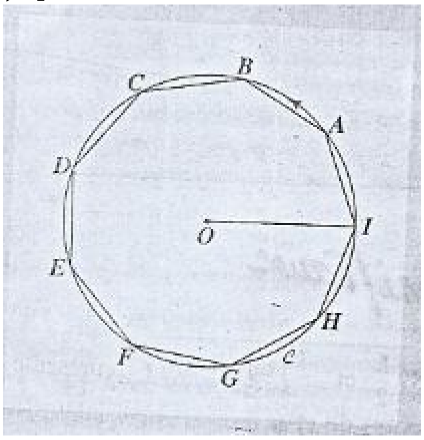
Soit $\vec{u}$ (a, b) dans la base orthonormée directe ($\vec{i}$, $\vec{j}$). Soit θ une mesure de l'angle ($\vec{i}$, $\vec{u}$). On a : a = $\|\vec{u}\|$ cos θ et b = $\|\vec{u}\|$ sin θ .

Dans cette section, sauf mention expresse du contraire, $\mathcal{C}$ désigne le cercle trigonométrique, I, J, I ' , J ' les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses curvilignes respectives 0, $\frac{\pi}{2}$, π et $\frac{3\pi}{2}$ modulo 2π .

ABSCISSES CURVILIGNES. MESURES D'UN ARC ORIENTE

EXERCICE 190

L'ennéagone régulier ABCDEFGHI est tracé sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, où I désigne le point origine de $\mathcal{C}$. Donner, pour chacun des sommets de l'ennéagone, l'abscisse curviligne appartenant à $]-\pi ; \pi]$.



EXERCICE 191

Placer sur le cercle trigonométrique les points d'abscisses curvilignes :

100π , -71π , $-\frac{37\pi}{2}$, $\frac{18\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{2\pi}{3}$,

$\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{3}$, $\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$, $(2k+1)\frac{\pi}{3}$, $\frac{6k\pi}{8}$, $\frac{\pi}{3}+\frac{2k\pi}{6}$

EXERCICE 192

Vérifier que, dans chaque cas, on a : « $x = y \quad [2\pi]$ ».

a) $x=\frac{\pi}{2}$, $y=-\frac{3\pi}{2}$ **b)** $x=\frac{2\pi}{3}$, $y=\frac{8\pi}{3}$ **c)** $x=-\frac{5\pi}{4}$, $y=\frac{3\pi}{4}$ **d)** $x=-\frac{5\pi}{12}$, $y=\frac{43\pi}{12}$

EXERCICE 193

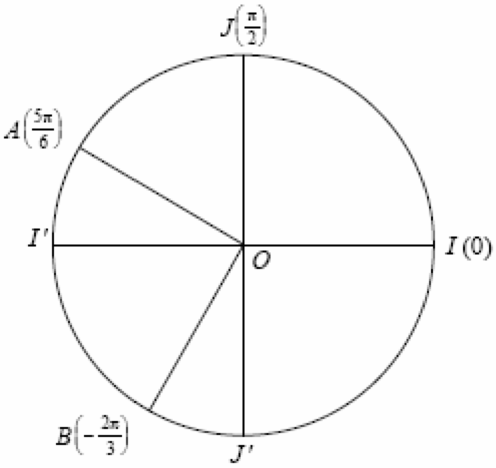
On considère trois points A, B et C de $\mathcal{C}$ tels que mes AB = $-\frac{2\pi}{5}$ et mes AC = $\frac{7\pi}{10}$.

Quelle est la mesure principale de BC ? de CB ?

EXERCICE 194

Sachant que $-\frac{4\pi}{5}$ est une mesure de l'arc orienté J ' M , donner l'abscisse curviligne de M appartenant à $]-\pi ; \pi]$.

EXERCICE 195
On considère la figure ci-après :



Citer tous les arcs orientés de la figure dont une mesure est :
a) $-\frac{\pi}{2}$ **b)** $-\frac{\pi}{3}$ **c)** $\frac{\pi}{6}$ **d)** $\frac{3\pi}{2}$.
(N.B. « arcs orientés de la figure » signifie arcs orientés dont les extrémités sont parmi les six points I, J, I ' , J ', A et B.

EXERCICE 196
On donne A ($\frac{9\pi}{4}$) et B ($-\frac{7\pi}{3}$). Quelle est la longueur du « petit » arc géométrique d'extrémités A et B ?

ANGLES ORIENTES

EXERCICE 197
Sur le cercle trigonométrique, on donne le point A ($-\frac{\pi}{4}$) .

Donner la mesure principale de ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}$) dans chacun des cas suivants :
a) $\frac{7\pi}{8}$ est une abscisse curviligne de M. **b)** L'arc JM a pour mesure $\frac{5\pi}{4}$

c) ($\overrightarrow{OI'}$, $\overrightarrow{OM}$) = ($\overrightarrow{OJ'}$,$\overrightarrow{OA}$) .

EXERCICE 198
On considère sur le cercle trigonométrique les points A ($\frac{\pi}{3}$) et B ($-\frac{\pi}{6}$) .

Deux points M et N de $\mathcal{C}$ sont tels que : ($\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}$) = ($\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{ON}$) .
Montrer que ($\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{ON}$) admet pour mesure $-\frac{\pi}{2}$.
I : *On pourra introduire les abscisses curvilignes de M et N .*

EXERCICE 199

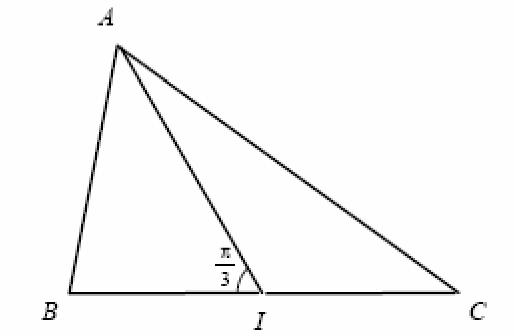
Le triangle ABC étant donné, on désigne par α une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
Exprimer en fonction de α une mesure de chacun des angles suivants :
$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$, $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$, $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA})$.

EXERCICE 200

ABC est un triangle et I est le milieu de $[BC]$. On sait que $(\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{3}$.

Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

$$(\overrightarrow{AI} ; \overrightarrow{IB}) \ ; (\overrightarrow{AI} ; \overrightarrow{IC}) \ ; \ (\overrightarrow{IA} ; \overrightarrow{CB})$$



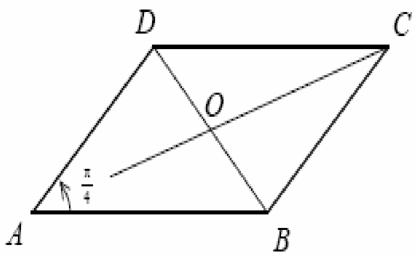
EXERCICE 201

$ABCD$ est un parallélogramme de centre O.

1. Démontrer que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.
2. Quelle propriété du parallélogramme a-t-on démontré ?
3. On suppose que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}$.

   Déterminer la mesure principale des angles orientés suivants :

   $$(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}) ; (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{DA}) ; (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}) ; (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA})$$



EXERCICE 202

Les mesures de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{k}, \overrightarrow{w})$ sont respectivement $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{4}$.

Donner une mesure de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{k})$.

EXERCICE 203

Vérifier que, dans chaque cas, on peut trouver un réel x appartenant à $[0 ; \frac{\pi}{2}]$

tel que $\alpha = x \ [2\pi]$ .Quelle interprétation géométrique en résulte-t-il pour le point M de $\mathcal{C}$ d'abscisse curviligne α ?

a) $\alpha = 49\dfrac{\pi}{4}$; **b)** $\alpha = -\dfrac{43}{12}\pi$; **c)** $\alpha = 14{,}3\,\pi$; **d)** $\alpha = -21{,}6 \times \pi$.

EXERCICE 204

Donner la mesure principale associée à chaque mesure (d'un angle ou d'un arc) exprimée en radians :

$\alpha_1 = \dfrac{202}{3}\pi$; $\alpha_2 = -\dfrac{55}{7}\pi$; $\alpha_3 = -\dfrac{551}{4}\pi$; $\alpha_4 = (1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3})\pi$; $\alpha_5 = 10$; $\alpha_6 = 2006$.

$\alpha_7 = \dfrac{7\pi}{3}$; $\alpha_8 = -\dfrac{13\pi}{2}$; $\alpha_9 = \dfrac{2007\pi}{4}$; ; $\alpha_{10} = \dfrac{29\pi}{3}$

EXERCICE 205

Soit un angle *a* dont la mesure principale est $\dfrac{2\pi}{3}$.

Trouver la mesure de *a* appartenant à l'intervalle $]-\pi + 2k\pi\,;\,\pi + 2k\pi[$ pour :

a) $k = 2$ **b)** $k = -1$ **c)** $k = 25$

EXERCICE 206

on donne les mesures α et α ' des angles *a* et *a* ' . Trouver la mesure principale de :

a , a' , $a + a'$, $a - a'$, $\dfrac{2a - 3a'}{4}$ dans les cas suivants:

a) $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$ et $\alpha' = \dfrac{3\pi}{4}$ **b)** $\alpha = -\dfrac{21\pi}{4}$ et $\alpha' = -\dfrac{3\pi}{2}$ **a)** $\alpha = -\dfrac{8\pi}{3}$ et $\alpha' = -\dfrac{11\pi}{5}$.

EXERCICE 207

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et x une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$.

Dans chacun des cas suivants, on demande :

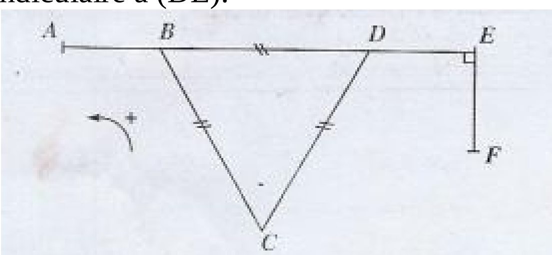
1°) de donner la mesure principale et la plus petite mesure positive de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$;

2°) de donner la mesure, en degrés, de l'angle géométrique AOB , si $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

a) $x = -\dfrac{\pi}{6}$; **b)** $x = \dfrac{27\pi}{4}$; **c)** $x = \dfrac{-43\pi}{3}$; **d)** $x = \dfrac{231\pi}{6}$; **e)** $x = -\dfrac{\pi}{4}$; **f)** $x = \dfrac{49\pi}{4}$

EXERCICE 208

Dans la figure ci-dessous, les points A, B, D et E sont alignés ; BCD est un triangle équilatéral et la droite (EF) est perpendiculaire à (DE).



Par lecture graphique, donner une mesure des angles orientés :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$, $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC})$, $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{EF})$.

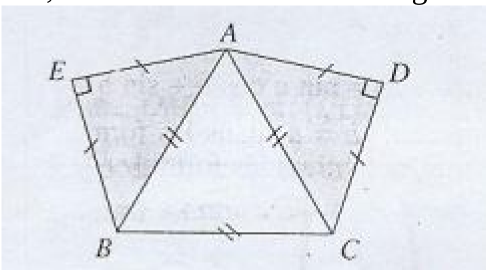
EXERCICE 209

A l'aide des données de la figure ci-après, déterminer une mesure des angles orientés suivants : $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA})$; $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$; $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DC})$ et $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{DA})$.

Terracher géométrie p. 92

EXERCICE 210

ABC est un triangle équilatéral ; ADC et AEB sont des triangle rectangles isocèles.

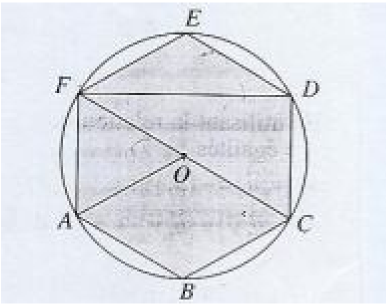


Donner la mesure principale, en radians, des angles orientés suivants :

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; **b)** $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$; **c)** $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA})$; **d)** $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$; **e)** $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$; **f)** $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$

EXERCICE 211

Reprendre l'exercice précédent avec un hexagone régulier ABCDEF inscrit dans le cercle trigonométrique.

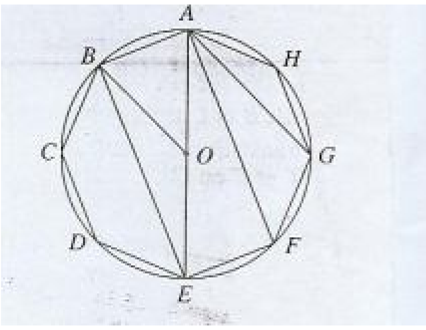


1°) a) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF})$; **b)** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{FO})$; **c)** $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$; **d)** $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CO})$;
e) $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC})$; **f)** $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF})$.

2°) a) $(\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{DE})$; **b)** $(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FE})$; **c)** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

EXERCICE 212

Reprendre l'exercice précédent avec un octogone régulier ABCDEFGH inscrit dans le cercle trigonométrique.



1°) a) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; **b)** $(\overrightarrow{OE}, \overrightarrow{OB})$; **c)** $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{FE})$; **d)** $(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{AE})$; **e)** $(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FA})$;

2°) **a)** $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AF})$; **b)** $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG})$; **c)** $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AH})$.

EXERCICE 213

Dans chacun des cas suivants, dessiner le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$, puis colorier sur ce cercle le lieu des points M tel que la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM})$ appartienne à l'intervalle donné :

1°) **a)** $]-\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{4}]$; **b)** $[0 ; \frac{3\pi}{4}[$; **c)** $]-\frac{\pi}{6} ; \frac{5\pi}{4}[$; **d)** $[-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{4}]$

2°) **a)** $[\frac{3\pi}{4} ; \frac{13\pi}{4}]$; **b)** $]-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{6}[$; **c)** $[\frac{3\pi}{2} ; 3\pi[$; **d)** $]-\frac{7\pi}{6} ; -\frac{\pi}{4}[\cup [\frac{\pi}{4} ; \frac{3\pi}{2}]$

3°) **a)** $]-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6}[$; **b)** $]-\frac{\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}[$; **c)** $[\frac{173\pi}{3} ; \frac{233\pi}{4}[$;

EXERCICE 214

Soient A et B deux points distincts de $\mathcal{P}$. Représenter l'ensembles des points M tels que :

a) $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{6} \ [2\pi]$; **b)** $-\frac{\pi}{3}$ est une mesure de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$; **c)** $(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0 \ [\pi]$

d) $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi$.

EXERCICE 215

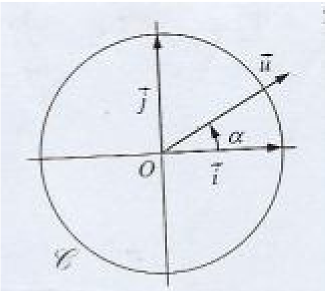
Placer les points M du cercle trigonométrique tels que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = x$, lorsque :

a) $4x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ **b)** $3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ **c)** $5x = \pi + + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

c) $4x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ **d)** $6x = \pi + + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

BASES ET REPERES ORTHONORMES DIRECTS

EXERCICE 216



Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormale directe. les bases suivantes sont-elles directes ou indirectes ?

a) $(\vec{j}, \vec{i})$? **b)** $(-\vec{i}, \vec{j})$? **c)** $(-\vec{j}, -\vec{i})$?

EXERCICE 217

Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormale directe et $\vec{u}$ le vecteur tel que : $\|\vec{u}\| = 2$ et $(\vec{i}, \vec{u}) = -\frac{\pi}{3}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 218

Soit ($\vec{i}$, $\vec{j}$) une base orthonormale directe. le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées (-1 ; $-\sqrt{3}$) . Déterminer la mesure principale des angles ($\vec{i}$, $\vec{u}$) et ($\vec{j}$, $\vec{u}$) .

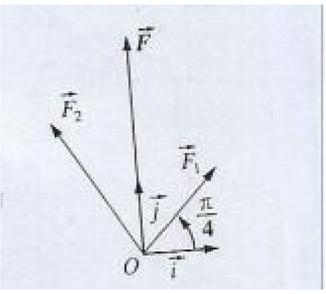
EXERCICE 219

Dans une base orthonormale directe ($\vec{i}$, $\vec{j}$) , on considère le vecteur $\vec{u}$.
Déterminer une valeur approchée, en radians, à 10^{-3} près par défaut, de la mesure principale de l'angle ($\vec{i}$, $\vec{u}$) dans chacun des cas suivants :

a) $\vec{u}$ (3 ; $-$ 5) **b)** $\vec{u}$ ($-$ 2 ; $-$ 7) .

EXERCICE 220

Le point O est soumis à la force $\vec{F_1}$ d'intensité 3 N telle que ($\vec{i}$, $\vec{F_1}$) $= \frac{\pi}{4}$, et à la force $\vec{F_2}$ d'intensité 4 N telle que ($\vec{i}$, $\vec{F_2}$) $= \frac{2\pi}{3}$. (N = newton) .



La force résultante est $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$.

1°) Déterminer les coordonnées de $\vec{F}$ dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$) .
2°) En déduire l'intensité de $\vec{F}$ et la valeur approchée, à 10^{-3} près, de la mesure principale de l'angle ($\vec{i}$, $\vec{F}$) .

EXERCICE 221

Soit $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées (3 ; 5) et $\vec{v}$ le vecteur de coordonnées (1 ; $-$1) .

1°) Calculer cos ($\vec{u}$, $\vec{v}$) .

2°) Soit $\vec{u}\,'$ le vecteur directement orthogonal à $\vec{u}$ et de même norme.

a) Déterminer les coordonnées de $\vec{u}\,'$.

b) Calculer cos ($\vec{u}\,'$, $\vec{v}$) et en déduire sin ($\vec{u}$, $\vec{v}$) .

3°) Donner la valeur arrondie, en radians, à 10^{-2} près, de la mesure principale de ($\vec{u}$, $\vec{v}$) .

PRODUIT SCALAIRE

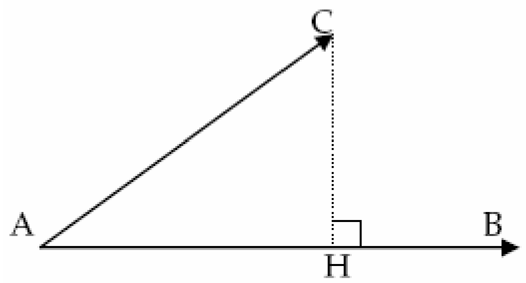
<u>Note pédagogique</u> : *Après des exercices de mise en œuvre destinés à maitriser la définition et les propriétés opératoires du produit scalaire, nous proposons de nombreuses situations où le produit scalaire est utilisé pour résoudre des problèmes de géométrie (exercices 231 à 244). Les lignes de niveau sont illustrées en détail : les exercices 246 et 247 constituent des résumés des principaux cas que les élèves peuvent rencontrer. Les équations de cercles font l'objet de deux exercices. Enfin, nous présentons deux thèmes classiques : les relations métriques dans un triangle rectangle et la puissance d'un point par rapport à un cercle.*

<u>Définition</u> : Etant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on appelle produit scalaire de ces deux vecteurs le réel noté $\vec{u} \bullet \vec{v}$ et défini de l'une des manières équivalentes suivantes :

a) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right]$

b) Si A, B, C sont trois points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, alors :

$\vec{u} \bullet \vec{v} = \overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = \overline{AB} \cdot \overline{AH}$ **, où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) .**



<u>Propriétés</u> : Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et tout réel α, on a :

1°) $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$ **(Symétrie)**

2°) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet \vec{w} = \vec{u} \bullet \vec{w} + \vec{v} \bullet \vec{w}$ **(Linéarité par rapport à la première variable)**

3°) $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$ **(Linéarité par rapport à la seconde variable)**

4°) $(\alpha \vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (\alpha \vec{v}) = \alpha (\vec{u} \bullet \vec{v})$

5°) $\vec{u} \bullet \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$; $\vec{u} \bullet \vec{u}$ **est noté** $\vec{u}^{\,2}$ **et appelé carré scalaire du vecteur** $\vec{u}$ **.**

<u>Propriétés du carré scalaire</u> : Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

1°) $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} + 2\,\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

2°) $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^{\,2} - 2\,\vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{v}^{\,2}$

3°) $(\vec{u} + \vec{v}) \bullet (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^{\,2} - \vec{v}^{\,2}$

4°) $(\vec{u} + \vec{v})^2 + (\vec{u} - \vec{v})^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2)$ **(Identité du parallélogramme)**

5°) $|\vec{u} \bullet \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ **(Inégalité de Cauchy-Schwarz)**

6°) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ **(Inégalité de Minkowsky)**

Expression du produit scalaire dans une base orthonormée directe

Dans le plan orienté muni d'une base orthonormée directe ($\vec{i}$, $\vec{j}$), soit $\vec{u}$ (x , y) et $\vec{v}$ (x' , y') . A1ors : $\vec{u} \bullet \vec{v} = xx' + yy'$.

On a aussi : $\vec{u} \bullet \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.

Orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$.

$$\left.\begin{array}{r} D: ax+by+c=0 \\ D': a'x+b'y+c'=0 \end{array}\right\} D \perp D' \Leftrightarrow aa'+bb'=0 \qquad \left.\begin{array}{r} D: y=mx+p \\ D': y=m'x+p' \end{array}\right\} D \perp D' \Leftrightarrow mm'=-1$$

Un vecteur normal à une droite $\mathcal{D}$ est un vecteur orthogonal à un vecteur directeur de $\mathcal{D}$. En repère orthonormé :

$\vec{u}$ (a , b) est un vecteur normal à $\mathcal{D}$: ax + by + c = 0 .

La distance d'un point A (x_o , y_o) à une droite $\mathcal{D}$, d'équation : ax + by + c = 0, qui est la distance AH, où H est le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{D}$, est donnée par :

$$d(M_0, H) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Lignes de niveau

On appelle fonction scalaire du plan $\mathcal{P}$ toute fonction f : $\mathcal{P} \to \mathbb{R}$.

On appelle ligne de niveau k (k $\in \mathbb{R}$) de la fonction scalaire f l'ensemble des points M du plan tels que : f (M) = k .

— Lignes de niveau de $M \mapsto \vec{u} \bullet \overrightarrow{OM}$:

Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par O et de vecteur directeur $\vec{u}$.

{M $\in \mathcal{P}$ / $\vec{u} \bullet \overrightarrow{OM} = k$} est une droite Δ perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en H tel que :

$$\overline{OH} = \frac{k}{\overline{OA}}$$

— Lignes de niveau de $M \mapsto MA^2 - MB^2$

Soit I le milieu de [AB] .

{M $\in \mathcal{P}$ / $MA^2 - MB^2 = k$ } est la droite perpendiculaire à (AB) en H tel que :

$$\overline{IH} = \frac{k}{2\,\overline{AB}}$$

— Lignes de niveau de $M \mapsto MA^2 + MB^2$

Soit I le milieu de [AB] .

$\{M \in \mathcal{P}$ / $MA^2 + MB^2 = k\}$ est $\varnothing$ si $k < \frac{AB^2}{2}$, réduit à {I} si $k = \frac{AB^2}{2}$,

le cercle $\mathcal{C}$ $(I, \frac{\sqrt{2k - AB^2}}{2})$ si $k > \frac{AB^2}{2}$.

— Lignes de niveau de $M \mapsto \alpha MA^2 + \beta MB^2$ $(\alpha + \beta) \neq 0$

Soit G le barycentre de {(A , α) (B , β) } . Posons $\lambda = \frac{k - \alpha GA^2 + \beta GB^2}{\alpha + \beta}$

$\{M \in \mathcal{P}$ / $\alpha MA^2 + \beta MB^2 = k\}$ est $\varnothing$ si $\lambda < 0$, réduit à {G} si $\lambda = 0$, le cercle $\mathcal{C}$ $(G, \sqrt{\lambda})$ si $\lambda > 0$.

— Lignes de niveau de $M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

***Soit I le mileu de [AB].* Posons $\lambda = k + \frac{AB^2}{4}$**

$\{M \in \mathcal{P}$ / $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k\}$ est $\varnothing$ si $\lambda < 0$, réduit à {I} si $\lambda = 0$, le cercle $\mathcal{C}$ $(G, \sqrt{\lambda})$ si $\lambda > 0$. Si $k = 0$, cet ensemble n'est autre que le cercle de diamètre [AB] .
N.B. *Les formules de cette section ne doivent pas être retenues par cœur. On doit savoir les retrouver en développant des carrés scalaires et en utilisant les propriétés du milieu ou du barycentre.*

<u>Formules de la médiane</u>
Soit MAB un triangle et I le mileu de [AB]. On a alors les relations suivantes :

1° $MA^2 + MB^2 = 2\,MI^2 + \frac{AB^2}{2}$

2° $MA^2 - MB^2 = 2\,\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{BA}$

3° $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$

<u>Etude analytique du cercle</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1° Une équation du cercle de centre Ω (a , b) et de rayon R est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2.$$

2° Une équation du cercle de diamètre [AB] , avec $A(x_A , y_A)$ est :

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0 .$$

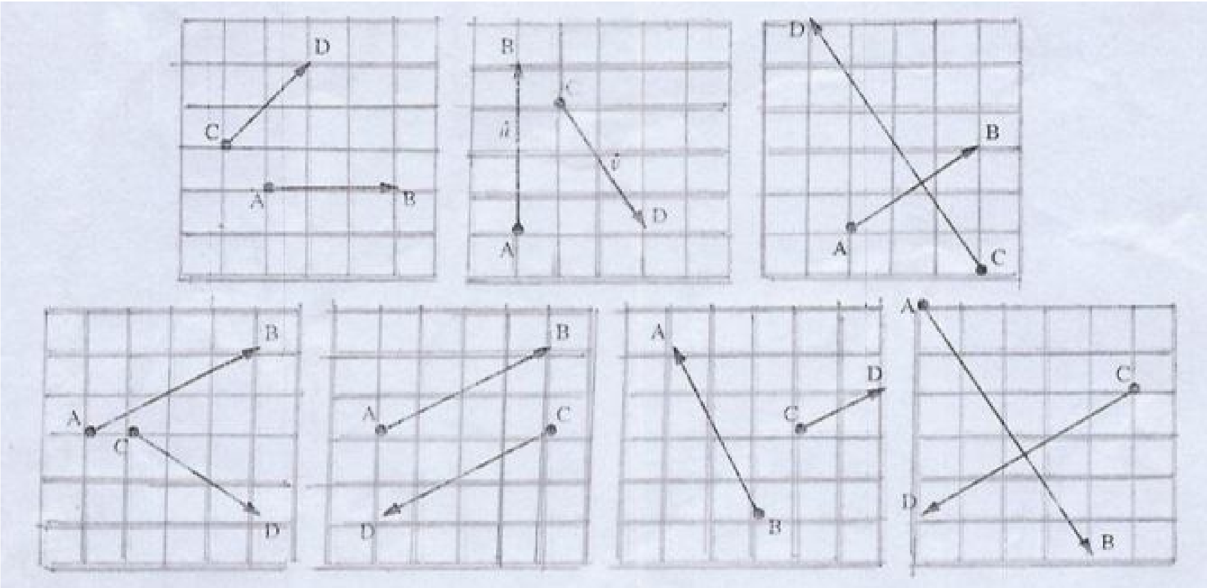
3° $\{M (x, y) / x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0\}$ est, en posant $\lambda = \frac{\alpha^2}{4} - \frac{\beta^2}{4} - \gamma$, $\varnothing$ si $\lambda < 0$,

réduit à $\{\Omega(-\frac{\alpha}{2} ; -\frac{\beta}{2})\}$ si $\lambda = 0$, le cercle $\mathcal{C}$ $(\Omega , \sqrt{\lambda})$ si $\lambda > 0$.

N.B. *On retrouve ces résultats en écrivant $OM^2 = R^2$ (pour 1°) , $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ (pour 2°) et en utilisant la forme canonique :* $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = (x + \frac{\alpha}{2})^2 - \frac{\alpha^2}{4} + (y + \frac{\beta}{2})^2 - \frac{\beta^2}{4} + \gamma$.

EXERCICE 222

Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} . \overrightarrow{CD}$ dans les figures ci-dessous :



EXERCICE 223

Soit ABCD un carré de centre O tel que AB = 4. Calculer les produits scalaires :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DO}$.

EXERCICE 224

ABC est un triangle isocèle de sommet A, BC = 4. Le point I est le milieu de [BC] . Calculer :

$\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC}$, $\overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CI}$.

EXERCICE 225

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 6, O le centre de son cercle circonscrit, A' , B' , C' les milieux respectifs de [BC], [CA], [AB] .

Calculer les produits scalaires :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{BC'} \cdot \overrightarrow{CB'}$

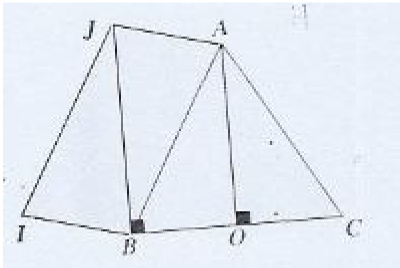
EXERCICE 226

Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle isocèle de sommet A et ABIJ est un parallélogramme. On pose BC = *a* .

Exprimer le produit scalaire $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{v}$ en fonction de *a* dans chacun des cas suivants :

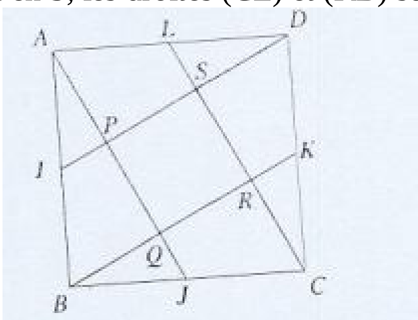
1°) $\vec{v} = \overrightarrow{BA}$ **2°)** $\vec{v} = \overrightarrow{JC}$ **3°)** $\vec{v} = \overrightarrow{AI}$ **4°)** $\vec{v} = \overrightarrow{CI}$

5°) $\vec{v} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{OJ}$ **6°)** $\vec{v} = 2\,\overrightarrow{OI}$ **7°)** $\vec{v} = \overrightarrow{IA} - \overrightarrow{AJ}$ **7°)** $\vec{v} = \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{OJ}$.



EXERCICE 227

ABCD est un carré. I, J, K, L sont les milieux respectifs des côtés [AB], [BC], [CD] et [DA] du carré. Les droites (AJ) et (DI) se coupent en P, les droites (AJ) et (KB) se coupent en Q, les droites (CL) et (DI) se coupent en S, les droites (CL) et (KB) se coupent en R .



1°) a) Exprimer $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, puis $\overrightarrow{DI}$ en fonction de $\overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{DB}$.

b) En déduire que : $\overrightarrow{AJ} \cdot \overrightarrow{DI} = 0$.

2°) a) Etablir que $\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b) En déduire l'expression de PS en fonction du côté *a* du carré ABCD.

c) Montrer que le quadrilatère PQRS est un carré et exprimer son aire en fonction de celle du carré ABCD.

EXERCICE 228

Démontrer que quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$:

$$\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \|\vec{w}\|^2 = \frac{1}{4}\left(\|\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|\vec{u} + \vec{v} - \vec{w}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}\|^2 + \|-\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}\|^2\right)$$

EXERCICE 229

Démontrer que quels que soient les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: les vecteurs $\vec{u} + \vec{v}$ et $\vec{u} - \vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même norme.

Application : Soit un parallélogramme ABCD. Démontrer que les diagonales [AC] et [BD] sont orthogonales si et seulement si AC = BD.

(*Indication* : On pourra poser $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$).

EXERCICE 230

Soit ABCD un quadrilatère. Démontrer que l'on a :

$$AB^2 + CD^2 - BC^2 - AD^2 + 2\,\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 .$$

En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que les diagonales (AC) et (BD) soient perpendiculaires.

EXERCICE 231

Démontrer que quels que soient les points A, B, C, D :

$$\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AB} = 0 .$$

Déduire de cette relation que les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes.

EXERCICE 232

1°) Montrer que dans un triangle ABC d'orthocentre H, on a :

$$\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HC}\cdot\overrightarrow{HA}$$

2°) Réciproquement, soit M un point tel que :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA}$$

Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}$. En déduire que M = H .

EXERCICE 233

Soit ABC un triangle, H l'orthocentre, A', B', C' les projetés northogonaux respectifs de A, B, C sur le coté opposé.

1°) Utiliser $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$ pour démontrer que : $\overline{A'A}\ .\ \overline{A'H} = -\ \overline{A'B}\ .\ \overline{A'C}$.

2°) Comparer les produits scalaires $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}$.

Démontrer que $\overline{AH}\cdot\overline{AA'} = \overline{AB}\cdot\overline{AC'} = \overline{AC}\cdot\overline{AB'}$.

3°) Démontrer de même que : $\overline{HA}\cdot\overline{HA'} = \overline{HB}\cdot\overline{HB'} = \overline{HC}\cdot\overline{HC'}$.

• EXERCICE 234

Démontrer que si ABC et A'B'C' sont deux triangles tels que :
la droite d_1 contenant A et orthogonale à (B'C')
la droite d_2 contenant B et orthogonale à (C'A')
la droite d_3 contenant C et orthogonale à (A'B') sont concourantes, alors
la droite d_1' contenant A' et orthogonale à (BC)
la droite d_2' contenant B' et orthogonale à (CA)
la droite d_3' contenant C' et orthogonale à (AB) sont concourantes .

Indications :

1° Etablir d'abord que $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{A'C'}$ en utilisant le point de concours de d_1, d_2, d_3.

2° Justifier l'existence d'un point Ω' tel que : $\overrightarrow{\Omega'A}\cdot\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{\Omega'B}\cdot\overrightarrow{C'A'} = 0$

3° Démontrer alors que $\overrightarrow{\Omega'C}\cdot\overrightarrow{A'B'} = 0$ et conclure.

EXERCICE 235

Le triangle OAB est rectangle en O. Une droite Δ passant par A coupe la hauteur (OH) en M et le cercle de diamètre [AB] en N. Montrer que $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN} = AO^2$.

EXERCICE 236

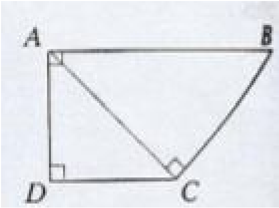
Soit Γ le cercle de centre O circonscrit à un triangle ABC.
La hauteur issue de A coupe (BC) en A ' et Γ en D.
Soit E le point diamétralement opposé à A sur Γ. Montrer que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AA'} .$$

EXERCICE 237

Dans le trapèze rectangle ABCD, la diagonale [AC] est orthogonale au côté [BC].

En calculant de deux façons le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, montrer que $AC^2 = AB \times CD$.



EXERCICE 238

Soit ABC un triangle équilatéral de côté m .

1°) I est le barycentre de (B , 4) et (A , 1) et J le barycentre de (C , 2) et (A , 3) .

a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$ en fonction de m .

b) Prouver que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (AC) .

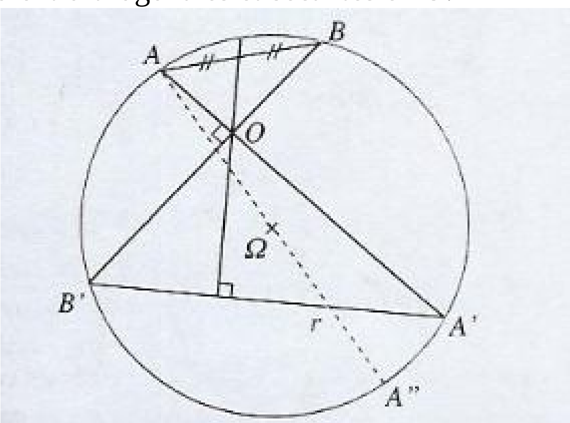
2°) Soit a, b, c trois réels. On désigne par K le barycentre de (A, a) et (B , b) et par L celui de (A , $a + b - c$) et (C , c) .
Montrer que les droites (KL) et (AC) sont orthogonales si et seulement si $b = 2c$.

EXERCICE 239

Soit ABCD un carré, I et J les milieux de [AB] et [AD] .
Montrer que la médiane issue de A du triangle AID est une hauteur de triangle ABJ.

EXERCICE 240

Sur un cercle de centre Ω et de rayon r, on place quatre points A, B, A ' et B ' tels que les droites (BB ') et (AA ') soient orthogonales et sécantes en O.



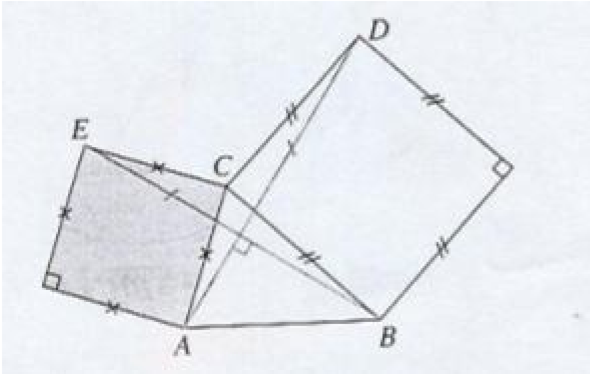
1°) En utilisant le diamètre [AA"] , montrer que : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA'} = O\Omega^2 - A\Omega^2$.

2°) Montrer que la médiane issue de O du triangle OAB est une hauteur de triangle OA ' B '.

(On pourra prouver que $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{A'B'} = 0$.)

EXERCICE 241

A l'extérieur d'un triangle ABC, on construit deux carrés.

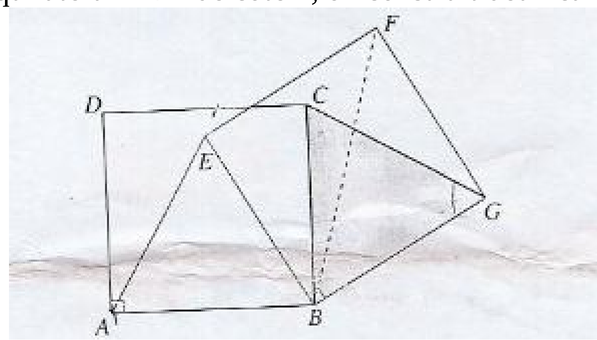


1°) Montrer que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CE}$.

2°) Montrer que les droites (AD) et (EB) sont orthogonales et que AD = EB.

EXERCICE 242

A partir d'un triangle équilatéral ABE de côté 2, on construit deux carrés.



1°) a) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB}$.

b) Montrer que le triangle BCG est équilatéral. En déduire $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BG}$ puis $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{EF}$.

c) Calculer $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{EF}$.

d) Calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF}$.

En déduire que les points D, E, G sont alignés.

2°) En utilisant le repère (A, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$), calculer $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{BF}$. Conclure.

EXERCICE 243

Soit ABCD un carré de côté 6. I le barycentre de (A , 2) et (B , 1) , J celui de (A , 1) et (D , 2), et K le point d'intersection des droites (ID) et (JC).

1°) Faire une figure.

Montrer que les droites (ID) et (JC) sont perpendiculaires.

2°) En utilisant un produit scalaire, montrer que : $DK \times DI = \frac{1}{2} DA^2$.

3°) Calculer les distances KD et KI.
4°) a) Soit L le projeté orthogonal de A sur la droite (DI).
A l'aide d'un produit scalaire, calculer IL, puis LK

b) En déduire la construction d'un carré de côté $\frac{6}{5}\sqrt{10}$.

EXERCICE 244

Soit un triangle ABC rectangle en A tel que AC = 2 AB . on désigne par A' le milieu de [BC] et par H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC). Le point H se projette orthogonalement en I sur (AB) et en J sur (AC).
Le but de l'exercice est de montrer que les droites (AA') et (IJ) sont orthogonales.

1°) Calcul vectoriel

Etablir que $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ} = 0$. Conclure.

2°) Calcul analytique

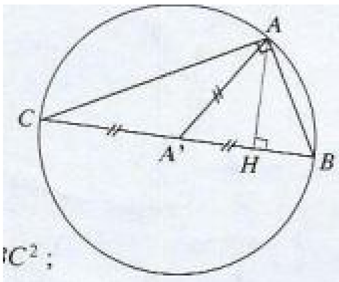
a) On pose $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Justifier que (A, $\vec{i}$, $\vec{j}$) est un repère orthonormal du plan.

b) Déterminer les coordonnées des points A, B, C et D dans ce repère.

c) Déterminer une équation de la hauteur issue de A à l'aide d'un vecteur normal.
Déterminer les coordonnées du point H , puis les coordonnées des points I et J .

d) Calculer $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{IJ}$. Conclure.

TRAVAUX DIRIGES 3 : RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE RECTANGLE



On se propose de démontrer que les six phrases suivantes sont équivalentes :

(1) ABC est rectangle en A. **(2)** $AB^2 + AC^2 = BC^2$

(3) $AA' = \frac{1}{2} BC$ **(4)** $AB^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$

(5) $AH^2 = - \overline{HB} \times \overline{HC}$ **(6)** $AB \times AC = AH \times BC$.

A) 1°) En utilisant deux écritures de $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, justifier que les propriétés « $AB^2 = \overline{BH} \times \overline{BC}$ » et «ABC est rectangle en A » sont équivalentes.

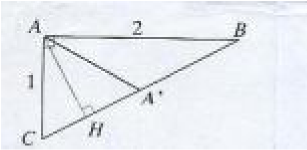
2°) Démontrer qu'il est équivalent d'écrire :

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ et $AH^2 = -\overline{HB} \times \overline{HC}$.

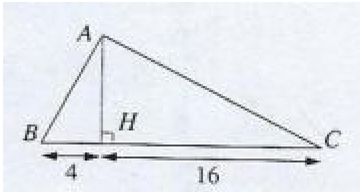
3°) En donnant deux écritures de l'aire d'un triangle ABC, montrer que **(6)** et **(1)** sont équivalentes.

4°) Déduire des égalités **(2)** et **(6)** que, si ABC est un triangle rectangle en A de hauteur [AH], alors on a l'égalité : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$

B) ABC est un triangle rectangle en A. Calculer BH, AH et AA' .



C) L'aire du triangle ABC étant égale à 80 unités d'aires, ce triangle est – il rectangle ?



D) On donne deux segments de longueurs *a* et *b* .Construire à la règle et au compas un segment de longueur $\sqrt{ab}$. (Penser à utiliser une des relations métriques dans un triangle rectangle) .

LIGNES DE NIVEAU

<u>EXERCICE 245</u>

Soient A, B deux points distincts tels que AB = 2*a*.
Déterminer l'ensemble des points M vérifiant :

1°) $MA^2 - MB^2 = a^2$. **2°)** $MA^2 + MB^2 = 3a^2$. **3°)** MA = 3 MB **4°)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -2a^2$

5°) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = -\frac{3a^2}{4}$ **6°)** $MA^2 + 3MB^2 = 4a^2$. **7°)** $MA^2 - 4MB^2 = 4a^2$.

<u>EXERCICE 246</u>

Soient les points A, B, C et α, β, γ des réels dont la somme n'est pas nulle. Soit G le barycentre du système {(A , α) (B , β) (C , γ)}.

1°) Démontrer que, pour tout point M du plan :

$$\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma) MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2 .$$

2°) Les points A, B, C et les réels α, β, γ étant fixés, déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$, *k* réel fixé.

3°) ***<u>Application</u>*** : Soit ABC un triangle rectangle en A tel que BC = 2*a* et I le milieu de [BC].

a) Démontrer que G, défini par $4\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$ est le symétrique de I par rapport à A.

b) Déterminer $\mathcal{E}$, ensemble des points M du plan tels que :

$$4MA^2 - MB^2 - MC^2 = -4a^2 \text{ (on notera que } A \in \mathcal{E}\text{) .}$$

4°) ***Application*** : Soit a réel positif fixé et A, B, C points du plan tels que BC = $2a$, CA = $3a$, AB = $3a$.

a) Déterminer G barycentre de {(A , — 2) (B , 3) (C , 3)}.

b) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$-2MA^2 + 3MB^2 + 3MC^2 = 54a^2$$

EXERCICE 247

Soient les points A, B, C et α, β, γ des réels dont la somme est nulle.

1°) Démontrer que, pour tout point M du plan :

a) $\alpha \overrightarrow{MA} + \beta \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC}$ est un vecteur fixe $\overrightarrow{V}$.

b) $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = 2 \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{V} + \beta AB^2 + \gamma AC^2$

2°) Les points A, B, C et les réels α, β, γ étant fixés ($\alpha + \beta + \gamma = 0$) , déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = k$, k réel fixé.

3°) ***Application*** : Soit A, B, C points du plan tels que BC = $5a$, CA = $3a$, AB = $4a$. (a réel positif fixé) . Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 + 2MB^2 + MC^2 = 5a^2$$

Construire cet ensemble.

4°) ***Application*** : Soit ABC un triangle équilatéral. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $-2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 0$.

EXERCICE 248

Soit ABC un triangle de centre de gravité G.

1°) Etablir que : $GA^2 + GC^2 = \frac{1}{2} GA^2 + \frac{BC^2}{2}$ (*on pourra utiliser le théorème de la médiane*).

2°) En déduire que : $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$

3°) Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = BC^2 + CA^2 + AB^2 \text{ ?}$$

EXERCICE 249

On donne un triangle ABC. Déterminer l'ensemble des points M , tels que :

1°) $(2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

2°) $(3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AM} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot \overrightarrow{AB}$

3°) $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0.$

4°) $(2\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}) \cdot (\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0.$

EXERCICE 250

On donne un rectangle ABCD tel que AB = a et AD = b et l'on considère l'application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $f : M \mapsto MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$.

1°) Pour tout point M, démontrer que : $f(M) = 4\,OM^2 + h$, où O est le centre du rectangle et h un réel que l'on exprimera en fonction de a et b.

2°) En déduire les lignes de niveau de l'application f .

Comment choisir le réel k pour que la ligne de niveau k soit le cercle circonscrit au triangle ?

EXERCICE 251

Soit ABC un triangle rectangle en A, de centre de gravité G, et A' le milieu du segment [BC]. On pose BC = a.

1°) Exprimer $4\,\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{AA'}$ en fonction de a.

2°) Exprimer $GB^2 + GC^2$ en fonction de a.

En déduire que $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{2}{3}a^2$.

3°) Prouver que, pour tout point M du plan, on a :

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3\,MG^2$.

4°) Déterminer et représenter l'ensemble des points M du plan tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{3}{4}a^2 .$$

EXERCICE 252

Soit ABC un triangle isocèle tel que: AB =AC = 5 et BC = 6 .

1°) Montrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 7$.

2°) Soit G le barycentre de { (A , 2) (B , 3) (C , 3) } . Construire G et montrer que AG = 3 .

3°) Soit f l'application qui, à tout point M du plan, associe :

$$f(M) = 2\,\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} .$$

Montrer que $f(M) = f(G) + 4\,MG^2$.

4°) Calculer f (A) et f (G) .

5°) Déterminer l'ensemble des points M tels que f (M) = f (A) et représenter cet ensemble .

EXERCICE 253

Construire un triangle ABC tel que : AB = 8, AC = 5 et BC = 6. I est le milieu de [AB].

1°) Construire l'ensemble E des points M tels que : $MA^2 + MB^2 = 82$.

2°) Choisir k pour que la ligne de niveau L_k de la fonction $f : M \mapsto MA^2 + MB^2$ passe par C.

3°) Construire l'ensemble F des points M tels que : $61 \leq MA^2 + MB^2 \leq 82$.

4°) On note G_k l'ensemble des points M tels que : $MA^2 + MB^2 - 2MC^2 = k$, où k est un réel donné.

a) Quelle est la nature de G_k ?

b) Choisir k pour que G_k passe par B , et construire G_k dans ce cas particulier.

EQUATIONS DE CERCLES

EXERCICE 254

Le plan est rapporté à un repère orthonormal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

Soit E l'ensemble des points M (x ; y) du plan défini par :

$x^2 + y^2 - 2\,mx - 4\,my + 6\,m^2 - 4 = 0$, avec $m \in \mathbb{R}$..

1°) Quelle est la nature de l'ensemble E dans chacun des cas suivants :

a) $m = 0$? **b)** $m = 2$? **c)** $m = 3$?

2°) Peut-on déterminer le réel m pour que l'origine O du repère appartienne à l'ensemble $\mathcal{E}$?

3°) Existe-t-il un ensemble $\mathcal{E}$ contenant le point H (4 ; — 2) ?

4°) pour quelles valeurs de m l'ensemble $\mathcal{E}$ est-t-il un cercle ? Préciser alors son centre Ω et son rayon r en fonction de m .

5°) Montrer que, lorsque m varie, l'ensemble des centres Ω de ces cercles est un segment de droite.

EXERCICE 255

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation du ou des cercles déterminés par les conditions :

1°) $\mathcal{C}$ a pour centre A(1 , 1) et passe par B (2 , 3) .

2°) $\mathcal{C}$ a pour centre Ω (2 , 0) et est tangent à la droite d'équation x + y + 1 = 0 .

3°) $\mathcal{C}$ passe par A (1 , 0) ; B (0 , 2) ; C (1 , 2) .

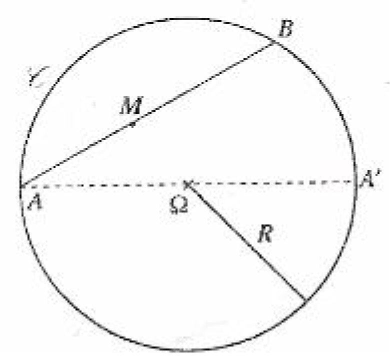
4°) $\mathcal{C}$ a pour diamètre [AB] avec A (3 , 2) et B (— 1 , 5) .

5°) $\mathcal{C}$ est circonscrit au triangle ABC avec A (2 , 3) ; B (— 2 , — 1) ; C (1 , — 1) .

TRAVAUX DIRIGES 4 : PUISSANCE D'UN POINT PAR RAPPORT A UN CERCLE.

A) Puissance d'un point par rapport à un cercle et lignes de niveau

Dans un plan $\mathcal{P}$, soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon R et M un point quelconque. On mène par M une sécante au cercle $\mathcal{C}$ qui le coupe en deux points A et B. A' est le point du cercle $\mathcal{C}$ diamétralement opposé à A.



1°) a) Etablir que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'}$.

b) Montrer alors que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \Omega M^2 - R^2$.

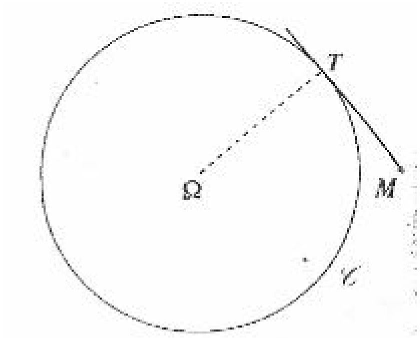
c) En déduire que ce produit scalaire est indépendant de la sécante issue de M.

2°) On pose $\Phi(M) = \Omega M^2 - R^2$.

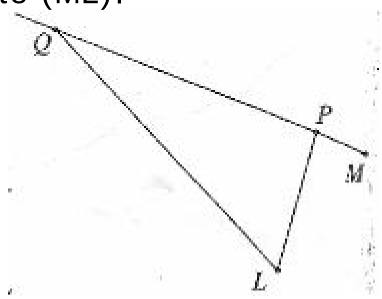
Le réel $\Phi(M)$ est appelé la puissance du point M par rapport au cercle $\mathcal{C}$.

a) Lorsque M est un point extérieur au cercle $\mathcal{C}$, on considère la tangente (MT) au cercle $\mathcal{C}$ en T.

Montrer que $\Phi(M) = MT^2$.



b) Soit un triangle MQL et M un point de la droite (PQ) tel que l'on ait : $\overline{MP} \times \overline{MQ} = ML^2$. Montrer que le cercle circonscrit au triangle PQL est tangent en L à la droite (ML).



3°) Etudier le signe de $\Phi(M)$ suivant la position de M dans le plan $\mathcal{P}$.

4°) Soit $\mathcal{L}_k$ la ligne de niveau k de l'application $\Phi : M \mapsto \Phi(M) = \Omega M^2 - R^2$

$\mathcal{L}_k$ est donc l'ensemble des points M tels que $\Phi(M) = k$.

a) Discuter suivant les valeurs de k la nature de la ligne $\mathcal{L}_k$.

b) Déterminer et, lorsqu'elle existe, représenter $\mathcal{L}_k$ pour les valeurs suivantes de k : $k = -2R^2$, $k = -\frac{3}{4}R^2$ et $k = 0$.

c) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$R^2 \leq \Phi(M) \leq 3R^2 .$$

On retiendra de cette étude les résultats suivants :

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon R, et M un point du plan. La puissance de M par rapport au cercle $\mathcal{C}$ est : $\Phi(M) = OM^2 - R^2$. • Pour toute sécante passant par M et coupant le cercle en A et B, $\Phi(M) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ • SM est extérieur au cercle et (MT) est tangente en T au cercle $\mathcal{C}$, alors : $\Phi(M) = MT^2$.

B) Axe radical de deux cercles

On considère deux cercles de centres distincts : $\mathcal{C}_1$ de centre Ω_1 et de rayon R_1, et $\mathcal{C}_2$ de centre Ω_2 et de rayon R_2.

On note Φ_1 (M), respectivement Φ_2 (M), les puissances de M par rapport aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

1°) a) Montrer que l'ensemble Δ des points M du plan tels que $\Phi_1 (M) = \Phi_2 (M)$, est une droite perpendiculaire à la droite ($\Omega_1 \Omega_2$).

b) Cette droite est appelée **axe radical** des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
Quel est l'axe radical de deux cercles sécants en A et B ?

2°) Construire Δ dans les *cas suivants (on suppose que l'unité choisie est le centimètre) :*

a) $R_1 = 2$, $R_2 = 5$ et $\Omega_1\Omega_2 = 7$; **b)** $R_1 = 3$, $R_2 = 4$ et $\Omega_1\Omega_2 = 7$.

3°) On considère maintenant trois cercles dont les centres sont distincts et non alignés :

$\mathcal{C}_1$ de centre Ω_1 et de rayon R_1,
$\mathcal{C}_2$ de centre Ω_2 et de rayon R_2,
$\mathcal{C}_3$ de centre Ω_3 et de rayon R_3.

Soit Δ_1 l'axe radical des cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$,
Δ_2 l'axe radical des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_3$,
Δ_3 l'axe radical des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

a) Montrer que les droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont concourantes en un point O.
Ce point est appelé **centre radical** des trois cercles $\mathcal{C}_1$,$\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$.

b) *Application* : construction de l'axe radical de deux cercles n'ayant aucun point commun.
Soit $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de centres Ω_1 et Ω_2 et de rayons R_1 et R_2 avec : $R_1 = 3$, $R_2 = 2$ et $\Omega_1\Omega_2 = 7$.
En utilisant un cercle $\mathcal{C}_3$ convenablement choisi, déterminer un point de l'axe radical de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
Construire alors cet axe.

c) Démontrer que le centre radical de trois cercles est soit intérieur aux trois cercles, soit extérieur aux trois cercles, soit sur les trois cercles.

C) Cercles orthogonaux

> On dit que deux cercles sont **orthogonaux** si, et seulement si, ils sont sécants et si leurs tangentes respectives en chaque point d'intersection sont orthogonales.

1°) Soit $\mathcal{C}_1$ un cercle de centre Ω_1 et de rayon R_1.
Soit $\mathcal{C}_2$ un cercle de centre Ω_2 et de rayon R_2.
Donner un encadrement de la distance $\Omega_1\Omega_2$ de façon à ce que les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ soient sécants.

2°) Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On définit les cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ par les équations cartésiennes suivantes :
$\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 + 4x - y - 2 = 0$ et $\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 6x - 6y - 7 = 0$.

a) Déterminer les coordonnées des points Ω_1 et Ω_2 et calculer R_1, puis R_2.

b) En utilisant la question **1° ,** montrer que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont sécants.

c) Soit I et J les points d'intersection des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, I désignant le point d'intersection d'abscisse nulle.
Déterminer les coordonnées de I et J.
d) Déterminer une équation de la tangente au cercle $\mathcal{C}_1$ en I , ainsi qu'une équation de la tangente au cercle $\mathcal{C}_2$ en I.
Montrer alors que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont orthogonaux.
e) Calculer la puissance du point Ω_1 par rapport au cercle $\mathcal{C}_2$, et la puissance du point Ω_2 par rapport au cercle $\mathcal{C}_1$.
Comparer les nombres obtenus.

f) Soit $\mathcal{D}$ la droite passant par Ω_1 et parallèle à l'axe (O, $\vec{i}$) .
Donner les coordonnées des points d'intersection P_1 et Q_1 de $\mathcal{D}$ avec le cercle $\mathcal{C}_1$, puis les coordonnées des points d'intersection P_2 et Q_2 de $\mathcal{D}$ avec le cercle $\mathcal{C}_2$.

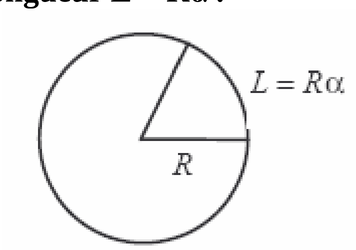
Montrer alors que : $\Omega_1P_1^2 = \Omega_1Q_1^2 = \overrightarrow{\Omega_1P_2} \cdot \overrightarrow{\Omega_1Q_2}$.

TRIGONOMETRIE

Note pédagogique : *L'importance fondamentale de la trigonométrie n'est plus à démontrer. Sa maitrise fait partie des compétences requises pour pouvoir suivre convenablement les cours en Terminale S. Les exercices 256 à 262 sont consacrées aux lignes trigonométriques et à leurs propriétés, les exercices 263 à 270 aux équations et inéquations trigonométriques, les exercices 271 à 284 aux formules d'addition, enfin les exercices 285 à 293 à l'utilisation de la trigonométrie pour la résolution de problèmes de géométrie.*
Le thème classique « Relations métriques dans un triangle quelconque » est présenté dans les Travaux dirigés suivi d'exercices d'application.

Définition du radian

Le radian est une unité de mesure d'angles choisie de façon que l'angle plat (180°) mesure π radians. On admet que la longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre qui l'intercepte. Ainsi, un arc de cercle de rayon R et d'angle α (en radians) a pour longueur $L = R\alpha$.



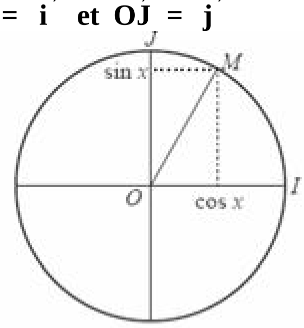
Le tableau de proportionnalité ci-dessous permet de convertir un angle de x degrés en un angle de x radians et inversement.

degrés	180	x
radians	π	α

Définition du cosinus et du sinus

Le plan orienté est muni du repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) .

Soit M un point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ tel qu'une mesure de l'angle ($\overrightarrow{OI}$, $\overrightarrow{OM}$) soit le réel x.
Par définition, on appelle cosinus et sinus de x les coordonnées de M dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) ou (O, I, J) avec $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$



<u>Propriétés élémentaires du cosinus et du sinus</u>

Pour tout réel x, on a :

1°) $-1 \leq \cos x \leq 1$ **et** $-1 \leq \sin x \leq 1$

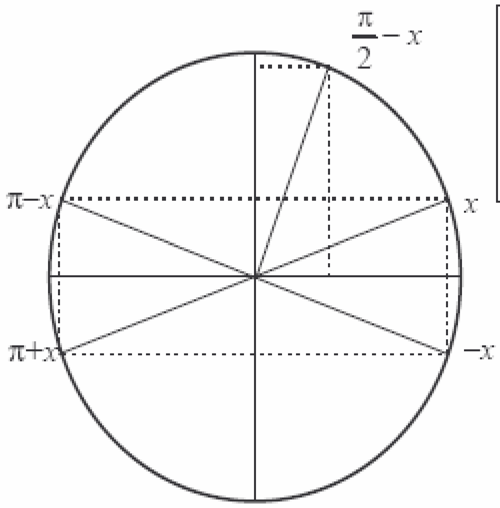
2°) $\cos (x + 2k\pi) = \cos x$ **et** $\text{sinx} (x + 2k\pi) = \sin x \quad (k \in \mathbb{Z})$

3°) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

<u>Formules des angles associés</u>

$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$



$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$
$$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$

<u>Définition de la tangente et de la cotangente</u>

On pose : $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ **pour** $x \neq (2k + 1)\dfrac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$ **et**

$\text{cotan}\ x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ **pour** $x \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

<u>Valeurs particulières du cosinus, du sinus et de la tangente</u>

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	NON DÉFINIE !

<u>Formules d'addition</u>

$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin (a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$

$\sin (a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$$\tan (a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\tan (a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Formules de l'angle double et de l'angle moitié

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ $\qquad$ $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \iff \cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$ **et** $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$

$\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

N.B. On est parfois amené à écrire ces formules en remplaçant *a* par $\dfrac{a}{2}$ **.**

Formules de factorisation

$\cos p + \cos q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ $\qquad$ $\cos p - \cos q = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

$\sin p + \sin q = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$ $\qquad$ $\sin p - \sin q = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$

Formules de linéarisation

$\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$ $\qquad$ $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

Equations cos x = *a* et sin x = *a*

Si a n'appartient pas à [— 1 ; 1] , alors ces équations n'ont pas de solutions .

Si a ∈ [— 1 ; 1] , elles en ont une infinité :

$$\boxed{\cos x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\sin x = a \iff x = \alpha + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}}$$

$$\boxed{\tan x = \tan\alpha \iff x = \alpha + k\pi}$$

Les inéquations trigonométriques de la forme cos ≥ *a* , sin x ≥ *a* ou tan x ≥ *a* se résolvent par lecture graphique sur un cercle trigonométrique.

EXERCICE 256

Vérifier les identités suivantes :

1°) $(1 + \sin x + \cos x)^2 = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x)$. **2°)** $\cot^2 x - \cos^2 x = \cot^2 x \cos^2 x$.

3°) $\dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \dfrac{\cos x}{1+\sin x}$ **4°)** $\tan^2 x + \cot^2 x = \dfrac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - 2$.

5°) $2(\sin^6 x + \cos^6 x) - 3(\sin^4 x + \cos^4 x) + 1 = 0$

6°) $\sin^2 x - \sin^2 y = \dfrac{1}{1+\tan^2 y} - \dfrac{1}{1+\tan^2 x}$.

EXERCICE 257

Exprimer en fonction des lignes trigonométriques de l'angle α les lignes trigonométriques des angles suivants:

a) $\alpha - 5\pi$ **b)** $-\alpha - \pi$ **c)** $-\alpha - 2\pi$ **d)** $-\alpha - \dfrac{\pi}{2}$ **e)** $\alpha - \dfrac{9\pi}{2}$ **f)** $-\alpha + \dfrac{5\pi}{2}$

EXERCICE 258

Calculer les lignes trigonométriques des angles suivants:

a) 3π ; -5π ; $\frac{3\pi}{2}$ **b)** $\frac{3\pi}{4}$; $-\frac{7\pi}{4}$; $\frac{15\pi}{4}$ **c)** $-\frac{2\pi}{3}$; $\frac{5\pi}{3}$; $\frac{8\pi}{3}$; **d)** $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{13\pi}{6}$; $\frac{31\pi}{6}$.

EXERCICE 259

Simplifier les expressions suivantes:

$$A = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \cos(-\alpha + 2k\pi) + \cos(3\pi + \alpha) + \sin\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$$

$$B = 2\tan\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) + \tan\left(\alpha - \frac{5\pi}{2}\right) + 3\,\mathrm{cotan}(\alpha + k\pi) - \mathrm{cotan}\,[(2h+1)\pi - \alpha]$$

$$C = \frac{\cos\left(3\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{2} - 3\alpha\right) + \sin(3\alpha + k\pi)}{\cos(3\alpha - \pi) + \cos(k\pi + 3\alpha) + 3\sin\left(\frac{3\pi}{2} - 3\alpha\right)}$$

EXERCICE 260

Dans chacun des cas suivants, on donne la valeur de $\sin\alpha$ et l'intervalle où varie α. On demande $\cos\alpha$ et $\tan\alpha$.

1°) $\alpha \in [-\frac{\pi}{2} ; 0]$ et $\sin\alpha = -0{,}6$ **2°)** $\alpha \in [0 ; \pi]$ et $\sin\alpha = \frac{15}{17}$

3°) $\alpha \in [\frac{\pi}{2} ; \pi]$ et $\sin\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$

EXERCICE 261

Dans chacun des cas suivants, on donne la valeur de $\cos\alpha$ et l'intervalle où varie α. On demande $\sin\alpha$ et $\tan\alpha$.

1°) $\alpha \in [-\frac{\pi}{2} ; 0]$ et $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$ **2°)** $\alpha \in [\pi ; \frac{3\pi}{2}]$ et $\cos\alpha = -0{,}8$

3°) $\alpha \in [\frac{\pi}{2} ; \pi]$ et $\cos\alpha = 1 - \sqrt{2}$

EXERCICE 262

Dans chacun des cas suivants, on donne la valeur de $\tan\alpha$ et l'intervalle où varie α. On demande $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.

1°) $\alpha \in [0 ; \pi]$ et $\tan\alpha = -2$ **2°)** $\alpha \in [\frac{3\pi}{2} ; 2\pi]$ et $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$

3°) $\alpha \in [\pi ; \frac{3\pi}{2}]$ et $\tan\alpha = \frac{8}{15}$ **4°)** $\alpha \in [0 ; \frac{\pi}{2}]$ et $\tan\alpha = 2 - \sqrt{3}$

EXERCICE 263

Résoudre les équations suivantes:

1°) $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 3x$ **2°)** $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ **3°)** $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 3x$

4°) $\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ **5°)** $\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{3}$ **6°)** $4\cos^2 x - 3 = 0$

7°) $2\,\mathrm{cotan}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$ **8°)** $\sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right)$ **9°)** $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} - x\right)$

10°) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **11°)** $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{1}{2}$ **12°)** $4\sin^2 x - 1 = 0$

13°) $\tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ **14°)** $\tan\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ **15°)** $\tan\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$

16°) $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ **17°)** $\sqrt{3}\tan x = 3$ **18°)** $\tan^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 3$

N.B. *Les équations de n° pair sont à résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ et celles de n° impair dans $]-\pi ; \pi]$*

EXERCICE 264

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1°) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ **2°)** $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

3°) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right)$ **4°)** $\tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \text{cotan}\, 2x$

5°) $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 3\,\text{cotan}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ **6°)** $\tan^2 4x \tan^2 x = 1$.

EXERCICE 265

Résoudre dans $[0 ; 2\pi[$ les équations suivantes :

1°) $\sin 2x + \cos 3x = 0$ **2°)** $\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0$

3°) $\sin^2\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin^2 x = 0$ **4°)** $\cos^2 4x - \sin^2 3x = 0$

5°) $\tan 2x\, \text{cotan}\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$ **6°)** $4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - 1 = 0$

EXERCICE 266

Résoudre dans $]-\pi ; \pi]$ les équations suivantes :

1°) $\sqrt{2}\cos^2 x - \cos x - \sqrt{2} = 0$ **2°)** $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 = 0$

3°) $\tan^2 x + (\sqrt{3} - 1)\tan x - \sqrt{3} = 0$ **4°)** $\text{cotan}^2 x + (1 - \sqrt{3})\,\text{cotan}\, x - \sqrt{3} = 0$

• EXERCICE 267

Soit l'équation : $\cos^2 x + 3\cos x + m = 0$.

1°) Discuter suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de l'équation qui appartiennent à l'intervalle $[0 ; 2\pi[$.

2°) Résoudre l'équation pour $m = -\frac{7}{4}$.

• EXERCICE 268

1°) Pour quelles valeurs de m, paramètre, l'équation $\tan x + \text{cotan}\, x + m = 0$ a-t-elle des solutions ?

2°) Montrer que , lorsque l'équation admet des solutions, une de ces solutions et une seule appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}]$.

3°) Résoudre l'équation pour $m = -\frac{4}{\sqrt{3}}$

EXERCICE 269

Résoudre les inéquations suivantes :

1°) $\sqrt{2}\ \cos x - 1 < 0$ **2°)** $2 \sin x - \sqrt{3} > 0$ **3°)** $4 \sin^2 x - 2(1 + \sqrt{3}) \sin x + \sqrt{3} < 0$

4°) $4 \sin^2 x - 2(1 - \sqrt{3}) \sin x - 4 + \sqrt{3} > 0$ **5°)** $\sqrt{3}\ \tan^2 x - (1 + \sqrt{3}) \tan x + 1 > 0$

6°) $\tan^2 x - 3 \leq 0$ **7°)** $3 \tan^4 x - 4 \tan^2 x + 1 < 0$ **8°)** $\dfrac{\tan^2 x - 2}{\tan^2 x - 1} < \dfrac{1}{2}$

9°) $-4 \cos^2 x - 2(\sqrt{2} + 1) \cos x + 4 + \sqrt{2} \leq 0$ **10°)** $\tan x - \sqrt{3}\ \text{cotan}\ x + 1 - \sqrt{3} > 0$

11°) $4 \sin^2 x - 2(1 - \sqrt{3}) \cos x - 4 + \sqrt{3} > 0$ **12°)** $\dfrac{2}{4 \cos^2 x - 1} < 1$

13°) $\sqrt{.1 - 4 \sin^2 x} < 2 \cos x - 1$ **14°)** $\dfrac{2 \cos 2x - 1}{1 + 2 \cos 2x} < 0$

EXERCICE 270

1°) Former l'équation du second degré dont les racines sont les réels sin x et sin y tels que :

$$\begin{cases} \sin x + \sin y = 1 \\ \sin x \ \sin y = k \end{cases}$$

Discuter suivant les valeurs de k .

2°) Déterminer x et y sachant qu'ils appartiennent à $[0 ; 2\pi[$ et que $k = 0{,}24$.

FORMULES D'ADDITION

EXERCICE 271

Factoriser les expressions suivantes :

$A(x) = 1 + \cos x + \cos \dfrac{x}{2}$ $B(x) = 1 - \cos x + \sin \dfrac{x}{2}$

EXERCICE 272

Exprimer $A(x) = \cos^2 2x - \cos^2 x$ en fonction de sin x .

EXERCICE 273

Exprimer les expressions suivantes en fonction de cos 2x :

a) $2 \cos^2 x + 4 \sin^2 x$; **b)** $\cos^4 x - 2 \sin^2 x \cos^2 x + \sin^4 x$ **c)** $\cos^4 x - \sin^4 x$

EXERCICE 274

1°) Soit le réel x tel que : $\cos x = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Calculer cos 2x et en déduire x .

2°) Soit le réel x tel que : six $x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$ et $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. Calculer sin 2x et cos 2x .
En déduire x .

EXERCICE 275

Calculer $\cos \dfrac{\pi}{8}$ et $\sin \dfrac{\pi}{8}$. En déduire $\cos \dfrac{3\pi}{8}$ et $\sin \dfrac{3\pi}{8}$.(On pourra utiliser $\cos \dfrac{\pi}{4}$ et $\sin \dfrac{\pi}{4}$) .

EXERCICE 276

Montrer que, pour tout réel x :

a) $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\ \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ **b)** $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\ \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

<u>EXERCICE 277</u>

Démontrer que $\dfrac{\cos\frac{\pi}{8} + \sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8} - \sin\frac{\pi}{8}} = 1 + \sqrt{2}$.

<u>EXERCICE 278</u>

1°) En utilisant la relation : $2\cos^2 x = 1 + \cos 2x$, démontrer que , pour tout x réel :

a) $\cos^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x + 4\cos 2x + 3)$ **b)** $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos 4x - 4\cos 2x + 3)$

2°) Calculer : $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$.

<u>EXERCICE 279</u>

En remarquant que $2 \times \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$, calculer $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

<u>EXERCICE 280</u>

Calculer les sinus, cosinus et tangentes des réels suivants :

a) $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$

c) $-\frac{7\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{23\pi}{6}$, $\frac{\pi}{8}$.

<u>EXERCICE 281</u>

Démontrer les identités suivantes:

1°) $\cos a \sin(b - c) + \cos b \sin(c - a) + \cos c \sin(a - b) = 0$

2°) $\sin a \sin(b - c) + \sin b \sin(c - a) + \sin c \sin(a - b) = 0$

3°) $\cos(a + b)\cos(a - b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$

<u>EXERCICE 282</u>

1°) Calculer cos (a + b + c). En déduire cos 3a en fonction de cos a.

2°) Calculer sin (a + b + c). En déduire sin 3a en fonction de sin a.

3°) Calculer tan (a + b + c). En déduire tan 3a en fonction de tan a.

<u>EXERCICE 283</u>

Démontrer les identités suivantes :

1°) $2\cos(a + b)\sin(a - b) = \sin 2a - \sin 2b$

2°) $2\sin(a + b)\sin(a - b) = \cos 2b - \cos 2a$

3°) $\tan 2a - \tan a = \dfrac{\tan a}{\cos 2a}$ **4°)** $\cos^2 2a - \sin^2 a = \cos a \cos 3a$.

<u>• EXERCICE 284</u>

Soit α, β, γ, trois réels tels que $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Par exemple, α, β, γ peuvent être les mesures en radians des angles non orientés d'un triangle ABC. Démontrer les relations suivantes :

1°) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

2°) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

3°) $\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$.

4°) $\sin\alpha - \sin\beta + \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

5°) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$

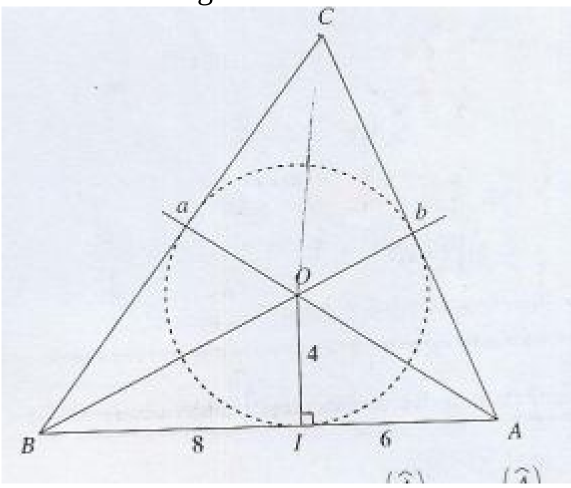
6°) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 1$.

7°) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = 2$.

8°) $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} = \frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\gamma}$ **9°)** $\sin\gamma = \frac{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$

• <u>EXERCICE 285</u>

Dans la figure ci-dessous, on a AI = 6, BI = 8, et OI = 4 .
Le point O, intersection des bissectrices, est le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.
OI est donc un rayon de ce cercle et l'angle OIB est droit.



1°) Calculer OA et OB, puis $\sin\left(\frac{A}{2}\right)$, $\cos\left(\frac{A}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{B}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{B}{2}\right)$.

2°) Calculer sin A, cos A, sin B et cos B.

3°) Montrer que sin C = sin (A + B) . Calculer sin C .

4°) Calculer les distances BC et AC.

<u>EXERCICE 286</u>

On considère l'équation : $\sin 3x = -\sin 2x$ **(1)** .

1°) Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$, puis dans l'intervalle $]-\pi ; \pi[$.

Représenter les solutions sur le cercle trigonométrique.

2°) a) Démontrer que $\sin 3x = \sin x\,(4\cos^2 x - 1)$.

b) En déduire que l'équation **(1)** est équivalente à : $\sin x\,(4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0$.

c) Parmi les solutions trouvées pour **(1)** , lesquelles sont aussi solutions de l'équation :

$$4\cos^2 x + 2\cos x - 1) = 0 ?$$

3°) On pose X = cos x. Résoudre $4X^2 + 2X - 1 = 0$.

en déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{2\pi}{5}$ et $\cos\frac{4\pi}{5}$.

• <u>EXERCICE 287</u>

Sur le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ muni d'un repère orthonormal direct et tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, on considère les points B, C et D tels que :

$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = x$, avec $x \in \mathbb{R}$, $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) = \frac{2\pi}{3}$ et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) = \frac{2\pi}{3}$.

1°) a) Faire une figure. Donner une mesure de $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OB})$.

b) Démontrer que le triangle BCD est équilatéral quelle que soit la position du point B.

c) Montrer que $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$.

d) Préciser une mesure de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ et de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD})$ en fonction de x.

2°) Déduire des questions précédentes que, pour tout réel x,

$\cos x + \cos\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$ et $\sin x + \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{4\pi}{3}\right) = 0$.

3°) Vérifier les deux égalités précédentes en utilisant les formules d'addition.

EXERCICE 288

1°) En regroupant judicieusement les termes et en utilisant les angles associés, montrer que :

$S_1 = \sin\frac{\pi}{8} + \sin\frac{3\pi}{8} + \sin\frac{5\pi}{8} + \sin\frac{7\pi}{8} = 0$;

$S_2 = \sin^2\frac{\pi}{8} + \sin^2\frac{3\pi}{8} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \sin^2\frac{7\pi}{8} = 2$;

$S_3 = \sin^4\frac{\pi}{8} + \sin^4\frac{3\pi}{8} + \sin^4\frac{5\pi}{8} + \sin^4\frac{7\pi}{8} = \frac{3}{2}$.

2°) a) Vérifier que, tout réel x, $4\sin^3 x = 3\sin x - \sin 3x$.

b) En déduire la valeur exacte de : $S_3 = \sin^3\frac{\pi}{8} + \sin^3\frac{3\pi}{8} + \sin^3\frac{5\pi}{8} - \sin^3\frac{7\pi}{8}$.

EXERCICE 289 Calcul de $\cos\frac{\pi}{5}$ et $\cos\frac{2\pi}{5}$:

On considère un triangle ABC, isocèle en A, tel que BC = *a* et B mesure $\frac{2\pi}{5}$ rad.

La bissectrice de l'angle B coupe [AC] en D.

1°) Démontrer que les triangles ABD et BCD sont isocèles. En déduire que : DA = DB = *a*.

2°) Démontrer que $AB = 2a\cos\frac{\pi}{5}$ et $CD = 2a\cos\frac{2\pi}{5}$.

En déduire que $\cos\frac{\pi}{5} - \cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2}$.

3°) Démontrer que $BC = BD\cos\frac{\pi}{5} + CD\cos\frac{2\pi}{5}$. En déduire que $\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1}{4}$.

4°) On pose $x = \cos\frac{\pi}{5}$ et $y = \cos\frac{2\pi}{5}$. On sait que $x - y = \frac{1}{2}$ et que $xy = \frac{1}{4}$.

En utilisant $(x + y)^2 = (x - y)^2 + 4xy$, calculer x + y et en déduire x et y.

5°) *Application* : Calculer les longueurs des côtés du pentagone régulier convexe et du décagone régulier convexe inscrits dans un cercle de rayon R.(On exprimera ces longueurs en fonction de R) .

EXERCICE 290

On considère un demi-cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] de centre O et de rayon R. La droite passant par O et orthogonale à (AB) coupe $\mathcal{C}$ en O. Soit M un point de l'arc BC distinct de B et C. On note x la mesure en radians de l'angle MAB.

1°) Démontrer que MOB = 2x.

2°) La tangente en M à $\mathcal{C}$ coupe le droite (AB) en D.

a) Exprimer MA et MD en fonction de R et x.

b) Déterminer x de manière que MA = MD.

c) Déterminer x de manière que MA = 2 MD.

EXERCICE 291

1°) Construire un triangle ABC tel que $A - C = \frac{\pi}{2}$.

Exprimer C en fonction de B et démontrer que : $0 < C < \frac{\pi}{4}$.

2°) Calculer en fonction de C et de la longueur a = BC :

a) le rayon R du cercle circonscrit au triangle ABC.

b) les longueurs b = AC et c = AB.

c) l'aire du triangle ABC.

EXERCICE 292

Etablir que dans un triangle ABC avec AB = c, AC = b et BC = a, on a les formules suivantes :

$a = b \cos C + c \cos B \qquad b = c \cos A + a \cos C \qquad c = a \cos B + b \cos A.$

EXERCICE 293

Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus.

Soient O le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre.

1°) Démontrer que : AH = 2R cos A et que l'angle OAH est égal à $|B - C|$.

2°) Calculer OH^2 en fonction de R, A et (B — C) .

3°) En déduire que : $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

TRAVAUX DIRIGES 5 : RELATIONS METRIQUES DANS UN TRIANGLE

Dans tout ce paragraphe, on considère un triangle ABC. S désigne son aire, a, b et c désignent le côtés opposés à A, B et C respectivement. On notera (par abus) $\cos A$ au lieu de $\cos \hat{A}$ etc ...

On a alors les trois relations fondamentales suivantes :

Formule d'Al-Kashi : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A$

Formule de l'aire du triangle : $S = \dfrac{1}{2}\,bc \sin A$

Formule des sinus : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

p désigne le demi périmètre du triangle ABC ($p = \dfrac{1}{2}(a + b + c)$) .

On note R le rayon du cercle circonscrit à ABC, r le rayon du cercle inscrit.
On note enfin h_A, h_B et h_C les longueurs des hauteurs [AA'], [BB'] et [CC '].

Fractale Géométrie p. 115

1°) Montrer l'égalité : $\sin A = \dfrac{2}{bc}\sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ (on pourra utiliser l'expression de cos A tirée de la formule d'Al-Kashi et la relation : $\cos^2 A + \sin^2 A = 1$).
2°) Montrer l'égalité : $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$ (on pourra utiliser la formule de l'aire d'un triangle).
3°) Donner une expression de h_A à l'aide des nombres réels a, b et c uniquement (utiliser **2°**) .
4°) On introduit le point B_1 diamétralement opposé à B sur le cercle circonscrit. Utiliser une relation entre les angles BAC et B_1BC pour en déduire l'égalité : S = 2R sin A .
Etablir les égalités : $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$.
5°) Montrer l'égalité : $h_A = \dfrac{2S}{a}$.
6°) Montrer l'égalité : S = pr.
On pourra diviser le triangle ABC en six triangles à l'aide du point ω, centre du cercle inscrit.
Les résultats précédents permettent de calculer S, h_A, r et R à l'aide de a, b et c uniquement. On pourra les utiliser dans les exercices qui suivent.

EXERCICE 294
Un triangle ABC a des côtés de longueurs 5, 6 et 7. Calculer son aire, les longueurs de ses hauteurs, le rayon des cercles inscrit et circonscrit à ce triangle, les hauteurs de ses médianes.

EXERCICE 295
Dans chacun des cas suivants, on demande de calculer les angles et les côtés du triangle ABN sachant que certains éléments sont donnés :
1°) On donne : a + b = 480 ; A = 70° , B = 50° .
2°) On donne : S = 25 ; ab = 78 ; B + C = 70° .

3°) On donne : $h_A = 8$; $h_B = 12$; $h_C = 18$.

• EXERCICE 296

Soit ABC un triangle. montrer les relations :

1°) $\dfrac{1}{h_A} + \dfrac{1}{h_B} + \dfrac{1}{h_C} = \dfrac{1}{r}$. **2°)** $\dfrac{abc}{a + b + c} = 2\,rR$. **3°)** $a^2 + b^2 > \dfrac{c^2}{2}$ **4°)** $bc = 2Rh_A$.

• EXERCICE 297

Deux cercles de centres O et O ' , de rayons respectifs R et R ' sont tangents extérieurement en A, et tangents en B et C à la droite (BC). Démontrer que le cercle de diamètre [BC] est tangent en A à (OO '). Calculer BC en fonction de R et R '.

• EXERCICE 298

Soit a un réel strictement positif. Soit α un réel fixé.

Soit AOB un triangle rectangle en O, tel que OA= $3a$ et OB = $4a$.

1°) a) Déterminer Γ_α , ensemble des points M du plan tels que : $\alpha MO^2 + MA^2 + MB^2 = 25a^2$.

b) Lorsque Γ_α est un cercle de centre Ω_α ,déterminer l'ensemble des points Ω_α quand α décrit $\mathbb{R}$.

c) Le point O est sur Γ_α . Démontrer que Δ, tangente en O à Γ_α est une droite indépendante de α. Caractériser Δ.

d) Soit N un point quelconque de Δ. Démontrer que N a même puissance pour tous les cercles Γ_α .

e) Soit E un point fixé de Δ. On mène par E deux tangentes à un cercle Γ_α . L'une d'elles est (EO) ;l'autre est tangente à Γ_α en T_α .Déterminer l'ensemble des points Ω_α quand α décrit $\mathbb{R}$.

2°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : 4MA = 3MB.

Déterminer les points M du plan vérifiant à la fois :

$MO^2 + MA^2 + MB^2 = 25a^2$ et $4MA = 3MB$.

LIMITES ET CONTINUITE

Note pédagogique : *Les programmes actuels préconisent de ne plus donner la « vraie » définition de la limite d'une fonction avec les* ε *et les* δ *, si familière aux étudiants de première année, mais plutôt de faire « sentir » la notion de limite sur des tableaux de valeurs.*
L'essentiel est que les élèves soient rodés au maniement opératoire du calcul des limites.
Nous présentons pour cela de très nombreux exemples, les cas les plus complexes (limites de fonctions dépendant d'un paramètre, continuité de fonctions utilisant la partie entière, etc..) pouvant être réservés aux élèves de la série S1.
L'étude des asymptotes à une courbe est repoussée au chapitre « Etude de fonctions »(cf. tome 2) où elle nous parait plus à sa place.

I . DEFINITIONS

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ contenant x_0 ou telle que x_0 soit une borne de D.
Lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de x_0, si les nombres f (x) correspondants deviennent de plus en plus :
— proches d'un réel ℓ, on dit que f a pour limite ℓ quand x tend vers x_0 et on note :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

— grands, on dit que f a pour limite + ∞ quand x tend vers + ∞ et on note :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

— grands en valeur absolue mais négatifs, on dit que f a pour limite — ∞ quand x tend vers x_0 et on note :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

On définit de manière analogue la notion de limite d'une fonction quand x tend vers + ∞ (dans ce cas, on suppose que les valeurs de x deviennent de plus en plus grandes) ou quand x tend vers — ∞ (les valeurs de x deviennent de plus en plus grandes en valeur absolue mais sont négatifs) .
On peut également étudier le comportement des nombres f (x) lorsque x prend uniquement des valeurs supérieures à x_0 (resp. inférieures à x_0), ce qui donne la notion de limite à droite en x_0 (resp. limite à gauche en x_0) .

On dit que f est continue en $x_0 \in D$ si et seulement si : $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

On dit que f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point $x_0 \in I$.

II. LIMITES DE REFERENCE

1° Les fonctions f suivantes tendent vers 0 lorsque x tend vers 0 :
$f(x) = x$ $\quad$ $f(x) = x^2$ $\quad$ $f(x) = x^3$ $\quad$ $f(x) = x^n$ $(n \geq 1)$ $\quad$ $f(x) = \sqrt{x}$

2° Les fonctions f suivantes tendent vers 0 lorsque x tend vers + ∞ :

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^3}$ $\quad f(x) = \frac{1}{x^n}$ $(n \geq 1)$ $\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

3° Les fonctions f suivantes tendent vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$:

$f(x) = x$ $\quad f(x) = x^2$ $\quad f(x) = x^3$ $\quad f(x) = x^n$ $(n \geq 1)$ $\quad f(x) = \sqrt{x}$

III. OPERATIONS SUR LES LIMITES

Les résultats sont résumés dans les tableaux ci-dessous. Les ? correspondent à des formes indéterminées (cas où on ne peut pas conclure directement ; il faut alors transformer l'écriture de la fonction pour se ramener aux autres cas) . Les limites des fonctions f et g sont considérées en un même endroit (en un réel ou à l'infini) .

1° Limite d'une somme

lim f	a	a	a	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
lim g	b	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
lim (f + g)	a + b	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

2° Limite d'un produit

lim f	a	$a > 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a < 0$	$-\infty$	$-\infty$	0
lim g	b	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
lim fg	ab	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	?

3° Limite d'un quotient

lim f	a	$a \geq 0$	$a \geq 0$	$a \leq 0$	$a \leq 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
lim g	$b \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$b \geq 0$	$b \leq 0$	$b \geq 0$	$b \leq 0$	$\pm\infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{a}{b}$	0^+	0^-	0^-	0^+	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

lim f	$a > 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0
lim g	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$
$\lim \frac{f}{g}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	?

4° Théorèmes

La limite en $\pm\infty$ d'une fonction polynôme est la limite en $\pm\infty$ de son monôme de plus haut degré.
La limite en $\pm\infty$ d'une fonction rationnelle est le quotient des limites des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

III. EXTENSION DE LA NOTION DE CONTINUITE

On dit que f est continue à droite (resp. à gauche) en x_o si $\lim\limits_{x \to x_o^+} f(x) = f(x_o)$

(resp. $\lim\limits_{x \to x_o^-} f(x) = f(x_o)$)

On dit que f est continue sur l'intervalle I si f est continue en tout point $x_o \in I$.

<u>Prolongement par continuité</u>

Soit I un intervalle et *a* $\in$ I. Soit f une fonction définie sur I sauf en *a* et admettant une limite finie ℓ en *a* .

La fonction $\overline{f}$ définie par : $\begin{cases} \overline{f}(x) = f(x) \text{ si } x \neq a \\ \overline{f}(a) = \ell \end{cases}$

est appelée prolongement par continuité de f en *a* .

<u>Théorèmes</u>

1° Si f et g sont deux fonctions continues sur un même intervalle I et k un réel, alors les fonctions (f + g) , (kf) et (fg) sont également continues sur I . Il en est de même de $\frac{f}{g}$ si la fonction g ne s'annule pas sur I.

2° Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

3° Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

4° Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ sont continues respectivement sur [0 ; + ∞ [et sur $\mathbb{R}$

5° Si f est continue en x_o et g continue en f (x_o) , alors f o g est continue en x_o .

<u>IV. THEOREMES DE COMPARAISON</u>

A titre indicatif, nous donnons seulement ces théorèmes pour x tendant vers + ∞, mais ils seraient également valables pour x tendant vers — ∞ ou x tendant vers un réel a.

1° Si pour tout x $\in$ [a ; + ∞ [, on a : $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$, ALORS on peut conclure que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

2° Si pour tout x $\in$ [a ; + ∞ [, on a : $f(x) \geq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, ALORS on peut conclure que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3° Si pour tout x $\in$ [a ; + ∞ [, on a : $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$, ALORS on peut conclure que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

4° Si pour tout $x \in [a ; +\infty[$, on a : $h(x) \le f(x) \le g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, ALORS on peut conclure que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$: ce théorème est souvent appelé ***théorème des gendarmes*** **ou** ***théorème du sandwich.***

V. ASYMPTOTES

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Si :

- **$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$), alors la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote (horizontale si le repère est orthogonal) à C_f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$)**
- **$\lim\limits_{x \to a^*} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^*} f(x) = -\infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote (verticale si le repère est orthogonal) à C_f .**
($x \to a^*$ signifie que $x \to a^+$ ou $x \to a^-$)
- **$\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$), alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote « oblique » à C_f en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) .**

EXERCICE 299

Dans chacun des cas suivants, on demande d'étudier la limite en x_o de la fonction f .

a) $f(x) = x^2 + x + 1 \qquad x_o = 2$

b) $f(x) = -x^2 - x + 2 \qquad x_o = 1$

c) $f(x) = \dfrac{x+1}{x} \qquad x_o = -2$

d) $f(x) = \dfrac{3x-1}{7x-4} \qquad x_o = 1$

e) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1} \qquad x_o = -1$

f) $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x-2} \qquad x_o = 2$

g) $f(x) = \dfrac{x^5+1}{x^3+1} \qquad x_o = -1$

h) $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{3x^2-2x-1} \qquad x_o = 1$

suivantes :

i) $f(x) = \dfrac{x-9}{\sqrt{x}-3} \qquad xo=9$

q) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1} - 1}$

r) $f(x) = \dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1} \qquad x_o = 1$

s) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-1} - \sqrt{3}}{x^2-16} \qquad x_o = 4$

t) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x \sin x} \qquad x_o = 0$

u) $f(x) = \dfrac{\tan 2x}{\sin 3x} \qquad x_o = 0$

v) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin 3x} \qquad x_o = 0$

w) $f(x) = \dfrac{\tan 6x}{1 - 2\sin x} \qquad x_o = \dfrac{\pi}{6}$

<u>EXERCICE 300</u> Calculer :

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-5x+6}$$

$$\lim_{x \to -2} \frac{x^3+x^2-8x-12}{x^2-4x-12}$$

$$\lim_{x \to 0,5} \frac{6x^3+5x^2-x-1}{2x^2-9x+4}$$

<u>EXERCICE 301</u> : Trouver les limites

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+3x-1}{x^2-2} ;$$

j) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$ $x_o = 3$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x+3}{x^2 - 4x + 1}$

k) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+6} - 3}$ $x_o = 3$

l) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2} - 1}$ $x_o = 0$

m) $f(x) = \dfrac{x^2 (x - 3)}{x - \sqrt{x+6}}$ $x_o = 3$

par :

n) $f(x) = \dfrac{2x - \sqrt{x+1} - 4}{(x+1)(x-3)}$ $x_o = 3$

o) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$ $x_o = 2$

p) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + 2}}$ $x_o = 0$

EXERCICE 303 : La fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{(x+3)(x-2)}{|x-2|}$ a-t-elle une limite pour

x arbitrairement voisin de + 2 ?

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

EXERCICE 304 : La fonction f définie par

$f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ a-t-elle une limite pour

x arbitrairement voisin de 0 ?

EXERCICE 305 : La fonction f définie par

$f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}$ pour $x \neq o$ et $f(0) = 1$

a-t-elle une limite pour x arbitrairement voisin de 0 ?
a-t-elle une limite à droite de 0 ? à gauche de 0 ?

EXERCICE 306 : Trouver les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{2x^2 - x - 1}$; $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{4x+3}}{\sqrt{x+4} - \sqrt{2x+4}}$

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}}{x^2 - 6x + 5}$

EXERCICE 307 : Trouver les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^4 + 3x^2 - 1}{2x^4 + x - 2}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x+3}{x^2 - 4x + 1}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^2 + 4x - 1}{x + 2}$;

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{4x^2 - x + 3}{2x - 1}$;

EXERCICE 302 : Soit f la fonction

définie par :

$f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x - 2}{(x-2)(x-3)}$.

Cette fonction a-t-elle une limite pour

x arbitrairement voisin de -3 ? pour x

arbitrairement voisin de + 2 ?

EXERCICE 310

Soit f l'application de **R** vers **R** telle

que $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + 2x^3 + x^2}}{(x+1)(x^2 - x + 1)}$

si $x \neq -1$ et $f(-1) = \dfrac{1}{3}$.

Cette fonction est-elle continue pour $x = -1$? pour $x = 0$?

EXERCICE 311 :

Trouver les limites suivantes :

. $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$ $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\tan 2x}{\tan 5x}$

$\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\sin 2x}{3x}$ $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\sin 3x}{\tan x}$

EXERCICE 312

Trouver les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to o} \dfrac{1 - \cos x}{3 \sin^2 x}$; $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\sin 2x}{\sin^2 x}$

$\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\tan^2 2x}{\sin^2 x}$; $\lim\limits_{x \to o} \dfrac{\sqrt{1 - \cos x}}{\tan 2x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2 + x + 1} - (x + 1)]$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{x^2 - x - 1} - (x - 1)]$

$\lim\limits_{x \to +\infty} [\sqrt{x^4 + x^2 + 2} - (x^2 + x + 1)]$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [\sqrt{x^4 + x^2 + 2} - (x^2 + x + 1)]$

$\lim\limits_{x \to -\infty} [\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 - 1}]$

EXERCICE 308: Trouver les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - \sqrt{x^2 + x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + x}}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 3}}{\sqrt{x^2 + x - 3}}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x - \sqrt{x^2 + 3}}{x - \sqrt{x^2 + x - 3}}$

EXERCICE 309 : Soit la fonction f définie par :

$f(x) = \dfrac{2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 2x - 5}}{x - 3 + \sqrt{3x^2 - x + 2}}$

Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

EXERCICE 303

Soit la fonction f définie sur **R** par :

$$\begin{cases} f(x) = -1 - x & \text{si } x \in]-\infty ; -1] \\ f(x) = \sqrt{1 - x^2} & \text{si } x \in]-1 ; 1[\\ f(x) = x - 1 & \text{si } x \in]1 ; +\infty[\end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur **R** .

EXERCICE 304

Soit la fonction f définie sur **R** par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

Etudier la continuité de f sur **R** .

EXERCICE 305

Soit la fonction f définie sur **R** par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}}{x} - \dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = a \end{cases}$$

a) Quel est le domaine de définition de f ?

b) Déterminer a pour que f soit continue sur

EXERCICE 313 :

Trouver les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin^2 x - 2(1 - \cos x)}{5x^2}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sqrt{1 - \cos 3x}}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{2\sin x + 3\tan x}{\sqrt{8x^3 - 2x^2}}$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sqrt{1 - \cos 2x}}$

2°) Etudier la limite de f en 1 et en 5

3°) Peut-on trouver un prolongement par continuité de f en 1? en 5?

- **EXERCICE 314**

Soit la fonction f définie sur **R** par :

$f(x) = x\left[\dfrac{1}{x} - E\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$

1°) Montrer que pour tout x élément de $]-1 ; 1[$, $|f(x)| < |x|$

2°) En déduire $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et un prolongement par continuité de f en zéro .

3°) Donner l'expression de f pour $x \in \left]\dfrac{1}{n+1} ; \dfrac{1}{n}\right[$, $n \geq 1$. Calculer $f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ .En déduire la continuité de f sur $]0 ; 1[$.

- **EXERCICE 315**

Soit la fonction f définie sur **R** par :

$f(x) = E(x) + (x - E(x))^2$

1°) Soit $n \in \mathbb{Z}$. Donner l'expression de f (x) = pour $x \in [n - 1 ; n[$ et pour $x \in [n ; n + 1[$.

2°) Montrer que f est continue en n .

3°) Etudier la continuité de f sur **R** .

son domaine de définition .

EXERCICE 306

Calculer $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ et trouver un prolongement par continuité de f dans les cas suivants :

1°) $f(x) = \dfrac{x^2 - a^2}{x - a}$; $x_0 = a$

2°) $f(x) = \dfrac{6x^2 + 5x - 4}{2x - 1}$; $x_0 = \dfrac{1}{2}$

EXERCICE 306

Soit f la fonction $x \mapsto \dfrac{x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 6x + 5}$

1°) Etudier la limite de f quand $|x| \to +\infty$.

EXERCICE 316

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

- pour tout entier relatif p, on a :
  $f(2p) = 0$ et $f(2p + 1) = 1$.
- pour tout entier relatif k, la restriction de f à $[k ; k+1]$ est une fonction affine .

a) Tracer la représentation graphique de f .

b) Donner les expressions de f (x) pour $x \in]2p ; 2p + 1]$ et pour $x \in]2p - 1 ; 2p[$ en fonction de x et p .

c) Montrer que f est continue en 2p et en 2p + 1 pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

d) En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 317

Déterminer les limites des fonctions suivantes aux points x_o indiqués ou en $+\infty$ ou $-\infty$:

1°) $x \mapsto 3$ ($x_o = 10$)

2°) $x \mapsto 2x^3 + 5x^2 - x + 1$ ($x_o = 3$; $x_o = -5$)

3°) $x \mapsto x + \sqrt{|x|}$ ($x_o = 0$; $x_o = 1$)

4°) $x \mapsto \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 5}$ ($x_o = 0$; $x_o = -1$)

5°) $x \mapsto \sqrt{x^2 - 5}$ ($x_o = \sqrt{5}$)

6°) $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ ($x_o = 0$)

7°) $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ ($x_o = 0$)

8°) $x \mapsto -\dfrac{2}{x^2}$ ($x_o = 0$)

9°) $x \mapsto \dfrac{2x + 1}{5x + 3}$ ($x_o = -\dfrac{3}{5}$)

10°) $x \mapsto \dfrac{x}{x^2 - 1}$ ($x_o = 1$; $x_o = -1$)

11°) $x \mapsto \dfrac{x}{x^3 + 1}$ ($x_o = -1$)

12°) $x \mapsto -5x3 + 2x^2 - 7x + 71$ ($+\infty$; $-\infty$)

13°) $x \mapsto -3x^2 + 2x$ ($+\infty$; $-\infty$)

14°) $x \mapsto \sqrt{-x + 6}$ ($+\infty$; $-\infty$)

15°) $x \mapsto \dfrac{5x - 7}{-3x^2 + 5x + 2}$ ($+\infty$; $-\infty$)

16°) $x \mapsto -\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{4 - 2x}{x - 3}\right)$ ($+\infty$; $-\infty$)

17°) $x \mapsto \dfrac{2x - 5}{-3(x^2 - 5x + 6)}$ ($x_o = 2$; $x_o = 3$)

18°) $x \mapsto \dfrac{x\sqrt{x} - 8}{4 - x}$ ($x_o = 4$)

19°) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$ ($x_o = 9$; $+\infty$)

20°) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{3x + 4}}{\sqrt{x + 1} - 1}$ ($x_o = 0$; $+\infty$)

21°) $x \mapsto x^2 + x + 1$ ($-\infty$; $x_o = 1$; $+\infty$)

22°) $x \mapsto -x^5 - x + 2$ ($-\infty$; -3 ; $+\infty$)

23°) $x \mapsto \dfrac{x + 1}{x}$ ($-\infty$; 0 ; $+\infty$)

24°) $x \mapsto \dfrac{1 - x^2}{x+1}$ $(-\infty\ ;\ x_o = -1\ ;\ +\infty)$

25°) $x \mapsto \dfrac{x^3 - 8}{x - 2}$ $(-\infty\ ;\ 2\ ;\ +\infty)$

26°) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{x - 3}$ $(x_o = 3\ ;\ +\infty)$

27°) $x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{x+6} - 3}$ $(x_o = 3\ ;\ +\infty)$

28°) $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2} - 1}$ $(x_o = 0\ ;\ +\infty\ ;\ -\infty)$

29°) $x \mapsto \dfrac{x^2(x-3)}{x - \sqrt{x+6}}$ $(x_o = 3\ ;\ +\infty)$

30°) $x \mapsto \dfrac{2x - \sqrt{x+1} - 4}{(x+1)(x-3)}$ $(x_o = -1\ ;\ x_o = 3\ ;\ +\infty)$

31°) $x \mapsto \dfrac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1} - 3}$ $(x_o = 2\ ;\ +\infty)$

32°) $x \mapsto \dfrac{x - \sqrt{x^2 - x + 1}}{2x - \sqrt{4x^2 + 2}}$ $(x_o = 0\ ;\ +\infty)$

33°) $x \mapsto \dfrac{1}{3(x^2 - 1)} - \dfrac{1}{2(x^3 - 1)}$ $(x_o = -1)$

34°) $x \mapsto \dfrac{x^2 + x - 6}{2x^2 - 14x + 20}$ $(x_o = 2;\ x_o = 5\ ;+\infty\ ;-\infty)$

35°) $x \mapsto \sqrt{x^2 + 3x + 2} - 3x$ $(+\infty;-\infty)$

36°) $x \mapsto x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} + ax$ $(+\infty;\ -\infty)$

On discutera suivant les valeurs de a.

37°) $x \mapsto \dfrac{(x-a)(x-b)}{x(x-1)}$ $(x_o = 0\ ;\ x_o = 1\ ;\ +\infty\ ;\ -\infty)$

On discutera suivant les valeurs de a et b.

EXERCICE 318

Déterminer les limites des fonctions suivantes aux points x_o indiqués ou en $+\infty$.

1°) $f : x \mapsto \dfrac{x}{\sin x}$ $(x_o = 0)$ et $g : x \mapsto \dfrac{\tan x}{x}$ $(x_o = 0)$

2°) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x}{x} + \tan x$ $(x_o = 0)$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{2x}$ $(x_o = 0)$

3°) $f : x \mapsto \dfrac{\tan 2x}{5x}$ $(x_o = 0)$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$ $(x_o = 0)$

4°) $f : x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{\tan 2x}$ $(x_o = 0)$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$ $(x_o = 0)$

5°) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x - \tan x}{x^3}$ $(x_o = 0)$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin 2x - \sin x}{\sin 2x + \sin x}$ $(x_o = 0)$

6°) $f : x \mapsto \dfrac{\tan 6x - \tan x}{1 - 2\sin x}$ $(x_o = \dfrac{\pi}{6})$ et $g : x \mapsto \dfrac{\sin 3x}{1 - 2\cos x}$ $(x_o = \dfrac{\pi}{3})$

7°) $f : x \mapsto \dfrac{2\cos 2x - 1}{\cos 3x}$ $(x_o = \dfrac{\pi}{6})$ et $g : x \mapsto \dfrac{\tan x}{\sin 2x - 1}$ $(x_o = \dfrac{\pi}{4})$

8°) $f : x \mapsto \dfrac{\sin x - \cos x}{x - \dfrac{\pi}{4}}$ $(x_o = \dfrac{\pi}{4})$ et $g : x \mapsto \dfrac{\cos x - \sqrt{3}\ \sin x}{x - \dfrac{\pi}{6}}$ $(x_o = \dfrac{\pi}{6})$

9°) $f : x \mapsto \dfrac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$ $(x_o = 0)$ et $g : x \mapsto \dfrac{1 - \sin x + \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$ $(x_o = \dfrac{\pi}{2})$

10°) $f : x \mapsto \dfrac{1 + \cos x}{\sqrt{x}}$ $(+\infty)$ $g : x \mapsto \dfrac{x \sin x}{x^2 + 1}$ $(+\infty)$ et $h : x \mapsto -x^3 + 3\sin x$ $(+\infty)$

11°) $f : x \mapsto 3 - x\sin\dfrac{1}{x}$ $(x_o = 0)$ $g : x \mapsto \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ $(x_o = 0)$ et $h : x \mapsto \dfrac{1 - \cos x}{x}$ $(x_o = 0)$

EXERCICE 319

Calculer les limites suivantes :

1°) $f(x) = \dfrac{3x - |x-4|}{x+4}$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f$? ; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f$?

2°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 3x + 1}}{x}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f$? ; $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f$?

3°) $f(x) = x - 3 + \sqrt{x^2 - x + 1}$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f$? ; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f$?

4°) $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} - \sqrt{x^2 + 5x}$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f$? ; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f$?

5°) $f(x) = \dfrac{x^2 - mx}{x^2 - m^2}$ $\quad \lim\limits_{x \to m} f$? ; $\quad \lim\limits_{x \to -m} f$?

6°) $f(x) = \dfrac{x - m}{mx - 4}$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f$? ; $\quad \lim\limits_{x \to m} f$?

7°) $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + m^2} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = \dfrac{1 - m}{x + 2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ $\quad \lim\limits_{x \to -\infty} f$? ; $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} f$? *Continuité de f en 0 ?*

Pour 5°, 6°, 7°, on discutera suivant les valeurs de *m* .

<u>EXERCICE 320</u>

Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1°) $f : x \mapsto x^2 - 7x + \sqrt{2}$ $\qquad$ **2°)** $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 7x - 8}$

3°) $f : \begin{cases} x \mapsto \dfrac{x+1}{x+2} & \text{si } x \in [-1 ; 1] \\ x \mapsto \dfrac{3x+3}{x+4} & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-1 ; 1] \end{cases}$ $\qquad$ **4°)** $f : \begin{cases} x \mapsto \dfrac{x}{x+1} & \text{si } x \in \mathbb{R}^- \\ x \mapsto \dfrac{x^2 - x}{x+3} & \text{si } x \in \mathbb{R}^{+*} \end{cases}$

<u>EXERCICE 321</u>

Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition, en discutant éventuellement suivant les valeurs de *a* et *b* :

1°) $\begin{cases} f(x) = x + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = 3 - ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $\qquad$ **2°)** $\begin{cases} f(x) = 0 \text{ pour } x < 0 \\ f(x) = x \text{ pour } 0 \leq x < 1 \\ f(x) = -x^2 + 4x - 2 \text{ pour } 1 \leq x \leq 3 \\ f(x) = 4 - x \text{ pour } x \geq 3 \end{cases}$

3°) $\begin{cases} f(x) = x^2 - \sqrt{x} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = 3x + a & \text{si } x > 1 \\ f(1) = b \end{cases}$ $\qquad$ **4°)** $\begin{cases} f(x) = x^2 - ab & \text{si } x < -2 \\ f(x) = \dfrac{x^2 - a}{x - b} & \text{si } -2 \leq x < 1 \\ f(x) = x - a & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

<u>EXERCICE 322</u>

1°) Déterminer *a* et *b* réels pour que la fonction g définie par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{x^2}{x - a} & \text{si } x < 0 \\ g(x) = x - b & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

soit continue sur son domaine de définition.

2°) Soit f_a la fonction définie par : $\quad f_a(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 3x} - \sqrt{x^2 + ax + a}}{x - 2}$ si $x \neq 2$

$f_a(2) = k$

Quelles valeurs faut-il donner à a et k pour que f soit continue au point $x_o = 2$?

EXERCICE 323

Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de la fonction f dans les cas suivants :

1°) $f(x) = \dfrac{1 + x}{x^2 - 1}$ **2°)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2}$ **3°)** $f(x) = \left|\dfrac{1 - x}{x^2 + 1}\right|$ **4°)** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$

5°) $f(x) = x\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$ **6°)** $f(x) = \sqrt{(x + 2)^2} - \dfrac{3}{x - 1}$ **7°)** $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + 1}{x(x - 1)^2}$

8°) $f(x) = a(2 - a)x^3 + ax^2 + (2 - a)x + 1$ (discuter suivant les valeurs de a)

9°) $f(x) = \dfrac{(a^2 - 1)x^2 + (a + 1)x + 2}{-x^2 + 2x - 1}$ (discuter suivant les valeurs de a) .

EXERCICE 324

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x + 1} - \sqrt{x}$.

1°) Montrer que sur $[0 ; +\infty[$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1} + \sqrt{x}}$.

2°) En déduire que : $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f$.

EXERCICE 325

Soit la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

1°) Justifier que, pour tout réel x strictement positif, on a:

a) $x^2 \leq x^2 + x + 1 \leq (x + 1)^2$.

b) $x \leq \sqrt{x^2 + x + 1} \leq x + 1$

3°) En déduire que, pour tout réel x strictement positif : $1 - \dfrac{1}{x + 1} \leq f(x) \leq 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

4°) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x + 1}\right)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

DERIVEES ET APPLICATIONS

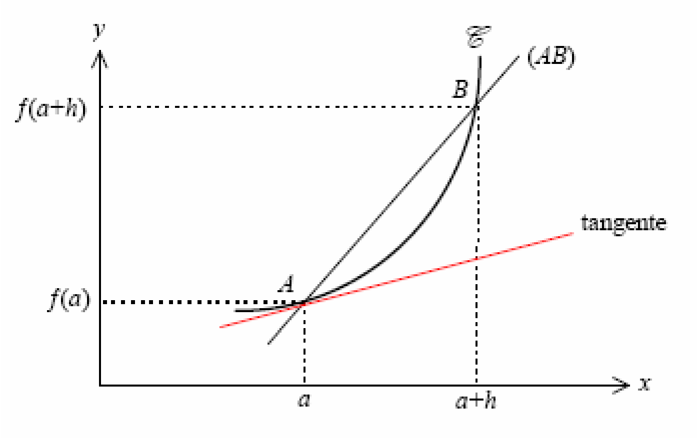
I. NOMBRE DERIVE

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et x_0 un élément de I . On dit que f est dérivable en x_0 si et seulement si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe et est un réel. Ce réel est alors noté $f'(x_0)$ et appelé nombre dérivé de f en x_0 .

Définition équivalente : f est dérivable en x_0 $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ existe et est un réel, également noté $f'(x_0)$.

II. TANGENTE

Soit f une fonction dérivable en *a* , de courbe représentative C_f dans un repère $\mathcal{R}$.
Les sécantes (AB) (où A est le point d'abscisse *a* de C_f et B un point de C_f « voisin » de A, tendent à se rapprocher de la droite fixe passant par A (*a* , f (*a*)) et de coefficient directeur f ' (*a*) . Cette droite est la *tangente* à la courbe C_f au point d'abscisse *a* .
Elle a pour équation : $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.



III. FONCTION DERIVEE

Si f est dérivable en tout point $x_0 \in$ I, on dit que f est dérivable sur l'intervalle I. on peut alors définir l'application $f : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ appelée fonction dérivée de la fonction f .

<u>Tableau des dérivées des fonctions usuelles</u>

Fonction f	Fonction dérivée f '	définie sur
$f : x \mapsto k$ (constante)	$f' : x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto ax + b$	$f' : x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto x^n$	$f' : x \mapsto n\,x^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f : x \mapsto \dfrac{1}{x^n}$	$f' : x \mapsto \dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f : x \mapsto \sqrt{x}$	$f' : x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0 ; +\infty[$

IV. OPERATIONS SUR LES FONCTIONS DERIVABLES

Fonction	Dérivée	Ensemble de validité
$u + v$	$u' + v'$	intervalles où u et v sont dérivables
$u \times v$	$u'v + uv'$	intervalles où u et v sont dérivables
$k\,u$ ($k \in \mathbb{R}$)	$k\,u'$	intervalles où u est dérivable
$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	intervalles où u et v sont dérivables et où v ne s'annule pas
$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{-u'}{u^2}$	intervalles où u est dérivable et ne s'annule pas
$u \circ v$	$(u' \circ v) \times v'$	intervalles I tels que v soit dérivable sur I et u dérivable sur v (I)
u^n ($n \in \mathbb{Z}$)	$n\,u^{n-1}\,u'$	intervalles où u est dérivable (si $n \geq 0$) et ne s'annule pas (si $n < 0$)
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$	intervalles où u est dérivable et ne prend que des valeurs strictement positives

IV. APPLICATIONS DES DERIVEES

1° *Dérivées et sens de variation*

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

a) f est constante sur I si et seulement si $f' = 0$ sur I .

b) f est croissante (resp. décroissante sur I) si et seulement si $f' \geq 0$ (resp. ≤ 0) sur I.

c) f est strictement croissante (resp. strictement décroissante sur I) si et seulement si

$$\begin{cases} f' \geq 0 \text{ (resp. } f' \leq 0\text{) sur I ET} \\ f' \text{ ne s'annule qu'en un nombre fini de points de I ou un nombre infini de points isolés de I .} \end{cases}$$

2° *Dérivées et extremums*

La notion d'extremum a déjà été définie au chapitre « Généralités sur les fonctions » (voir page 24) . On a les résultats suivants :

a) Si f est dérivable sur I et a un extremum (maimu ou minimum) en $x_o \in$ I, alors nécessairement : $f'(x_o) = 0$.

b) Si f est dérivable sur I et si f ' s'annule en changeant de signe en $x_o \in$ I , alors f a un extremum en x_o.

EXERCICE 328

Dans chacun des cas suivants,

— en utilisant la définition de la dérivée, étudier la dérivabilité de la fonction f au point x_o.

— dans les cas où f est dérivable en x_o, écrire l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point M_0 d'abscisse x_o.

— dans les cas où f n'est pas dérivable, interpréter géométriquement les résultats.

— Construire les tangentes et demi-tangentes correspondantes.

1°) $f(x) = x^3 + 3x^2$ $(x_o = -1)$ **2°)** $f(x) = \dfrac{1}{2x^2}$ $(x_o = 3)$ **3°)** $f(x) = \sqrt{x+5}$ $(x_o = 4)$

4°) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$ $(x_o = -2)$ **5°)** $f(x) = \dfrac{x+3}{x}$ $(x_o = -2)$

6°) $f(x) = |x(x-1)|$ $(x_o = 0 ; x_o' = 1)$ **7°)** $f(x) = x|x-3|$ $(x_o = 3 ; x_o = 0))$

7°) : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{x-1}{x+1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ $(x_o = 1)$

8°) $f(x) = \sqrt{|x^2 - x|}$ $(x_o = 0 ; x_o' = 1)$

9°) $f(x) = x^2 - |x|$ $(x_o = 0)$

EXERCICE 329

Soient a et b deux réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$.

Déterminer a et b pour que $\mathcal{C}_f$ passe par A (0 ;1) et admette en A une tangente d'équation $y = 4x + 3$.

EXERCICE 330

Soit a un réel. On considère la fonction f définie par : $f(x) = 2x^3 + ax^2 + 3$.

Déterminer a pour que $\mathcal{C}_f$ admette au point d'abscisse $x_o = 1$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

EXERCICE 331

Soit a, b et c trois nombres réels. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x - 2}$.

Déterminer a, b, c pour que $\mathcal{C}_f$:

— admette au point d'abscisse 0 une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

— coupe la courbe Γ de la fonction g définie par : $g(x) = -2x^2 + x + 5$ au point d'abscisse $x_o = 1$ et admette en ce point la même tangente que Γ.

EXERCICE 332

Soit a et b deux paramètres réels.On définit la fonction f de la façon suivante :

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x \leq 3 \\ \dfrac{\sqrt{2x+3} - 3}{x - 3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Déterminer a et b pour que f soit continue et dérivable en $x_o = 3$.

EXERCICE 333

Déterminer m pour que la fonction f soit dérivable sur $\mathbb{R}$ dans las cas suivants :

a) $\begin{cases} \text{si } x \leq 2,\ f(x) = \dfrac{x - 2}{x - 1} \\ \text{si } x > 2,\ f(x) = m(x - 4) \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} \text{si } x \leq 0,\ f(x) = x^3 + x^2 + (m^2 - 2)x + 2 \\ \text{si } x > 0,\ f(x) = \dfrac{x + 2m}{x + 1} \end{cases}$

EXERCICE 334

EXERCICE 335

Soit $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$. Déterminer les nombres réels a, b, c, d pour que $\mathcal{C}_f$ admette pour asymptotes les droites d'équations respectives $y = 3$ et $x = -2$ et admette au point d'abscisse $x_o = 1$ une tangente de coefficient directeur $\dfrac{8}{9}$.

EXERCICE 336

Dans chacun des cas suivants, calculer la dérivée de la fonction f.

1°) $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 2)$ **2°)** $f(x) = (x + 1)^6 (x - 1)^5$ **3°)** $f(x) = \dfrac{2x + 4}{x^2 - 1}$

4°) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1}$ **5°)** $f(x) = \dfrac{3}{4x^2 + 2}$ **6°)** $f(x) = \dfrac{-1}{(2x + 1)^2(x + 2)}$

7°) $f(x) = \dfrac{1}{2x + 1} - \dfrac{3}{x - 1} + \dfrac{2}{x}$ **8°)** $f(x) = \left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)^3$ **9°)** $f(x) = \sqrt{-3x + 2}$

10°) $f(x) = (1 - x)\sqrt{2 - 3x}$ **11°)** $f(x) = 3 \sin x - 5 \cos x$ **12°)** $f(x) = \tan x + x$

13°) $f(x) = \dfrac{2 \sin x - 1}{3 \cos x + 1}$ **14°)** $f(x) = \dfrac{\cos 2x + \sin 3x}{\tan 6x}$ **15°)** $f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$

16°) $f(x) = \dfrac{\cos x + x \sin x}{\sin x - x \cos x}$ **17°)** $f(x) = \dfrac{1 - \tan^2 x}{1 + \tan^2 x}$ **18°)** $f(x) = \dfrac{1}{\sin 2x}$

19°) $f(x) = x^2 - 2x + \sqrt{3x - 2}$ **20°)** $f(x) = \dfrac{4x^2 - 1}{\sqrt{2x - 1}}$ **21°)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

EXERCICE 337

Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes:

1°) $f(x) = E(x) \sin^2 \pi x$ (où E(x) désigne la partie entière de x) .

2°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 + x} - 1}{\sqrt{x}}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. **3°)** $f(x) = x^2 + |x - 1|$

4°) $f(x) = \sqrt{|x|}$ **5°)** $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ et $f(0) = 0$ **6°)** $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x}$ et $f(0) = 0$

EXERCICE 338

En utilisant la définition de la dérivabilité, calculer les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{x+1} - 1}$ $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{\sqrt{2x+3} - 2}{2x^2 + 7x - 4}$ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+2x}}{x}$

EXERCICE 339

Dresser le tableau de variation des fonctions f suivantes :

1°) $f(x) = x^2 + 4x - 1$ **2°)** $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ **3°)** $f(x) = \dfrac{2x - 5}{x + 1}$

4°) $f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ **5°)** $f(x) = x^3 - 4x + 5$ **6°)** $f(x) = -4x^3 + 3x$

7°) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 10$ **8°)** $f(x) = -x^4 + 8x^2 - 5$ **9°)** $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}$

10°) $f(x) = \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 4}$ **11°)** $f(x) = \dfrac{5x^2 + 2x - 11}{x^2 - x - 2}$ **12°)** $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2}$

13°) $f(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{3}{2} + \dfrac{2}{x^2}$ **14°)** $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}$ **15°)** $f(x) = \sqrt{-x + 3}$

16°) $f(x) = \dfrac{2x^2 + |x - 3|}{x^2 - |x - 1|}$ **17°)** $f(x) = \sin\left(3x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

18°) $f(x) = \dfrac{\cos 2x + 1}{2\cos x - 1}$ (sur($[0; \pi]$) **19°)** $f(x) = 2\sin x + x$ (sur $[0 ; \pi[$)

20°) $f(x) = 4\cos 2x - \cos 3x$ **21°)** $f(x) = 4\sin x + \dfrac{1}{\sin x - 1}$ (sur $[0 ; 2\pi[$)

22°) $f(x) = \tan^2 x - 2\tan x$ (sur $[0 ; \pi[$) **23°)** $f(x) = \sqrt{1 - \sin x}$ (sur $[0 ; 2\pi[$)

24°) $f(x) = \dfrac{1 + \sin x}{1 - \cos x}$ **25°)** $f(x) = \cos x + x \sin x$

• EXERCICE 341

On considère la fonction $f_m : x \mapsto mx^2 - (2m + 1)x + m + 1$où m est un paramètre réel.
Soit $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1°) Etudier suivant les valeurs de m le sens de variation de f_m.

2°) Montrer que quel que soit m, $\mathcal{C}_m$ passe par un point fixe A (dont les coordonnées sont indépendantes de m) . Montrer que les courbes $\mathcal{C}_m$ admettent la même tangente en A.

3°) Construire dans le même repère les courbes $\mathcal{C}_m$ pour $m \in \{-1, 0, 1\}$.

• EXERCICE 341

Déterminer suivant les valeurs de m le sens de variation de la fonction fm dans les cas suivants :

a) $f_m : x \mapsto \dfrac{(5m + 1)x + m + 2}{2mx + 1}$ **b)** $f_m : x \mapsto \dfrac{mx + m + 4}{x + m + 1}$

c) $f_m : x \mapsto \dfrac{mx - 5}{x^2 + 1}$ **d)** $f_m : x \mapsto (m + 1)x^3 + (2m - 1)x + 2$

EXERCICE 342 Problèmes d'extremum

Les différentes questions sont totalement indépendantes.

1°) Le triangle IJK est équilatéral de côté a. on construit un rectangle ABCD en choisissant :

• A sur [JK] de sorte que : JA = x $(0 < x < \frac{a}{2})$

• $D \in [IJ]$, $C \in [IK]$, $B \in [JK]$.
Comment faut-il choisir x pour que l'aire du rectangle ABCD soit maximum ?

2°) On veut enclore le long d'une rivière, avec 1000 m de clôture, un champ rectangulaire d'aire maximale (aucune clôture n'est nécessaire le long de la rivière et cette rivière est rectiligne).
Quelles sont les dimensions du champ obtenu et quelle est son aire ?

3°) On veut réaliser une boite de conserve cylindrique avec un minimum de métal, le volume de la boite étant 1 dm^3. On note h la hauteur de la boite et r son rayon exprimé en dm.

a) Exprimer le volume V de laboite en fonction de r et h, puis en faisant V = 1, exprimer h en fonction de r .

b) Déterminer en fonction de h et r la surface S de métal nécessaire à la réalisation de la boite. Exprimer S uniquement en fonction de r .

c) Pour quelle valeur de r la surface S est-elle minimale ?
Quelle est la valeur de h correspondante ?

4°) On dispose d'une feuillede carton carrée de côté 10 cm. Aux quatre coins de cette feuille, on découpe un carré de côté x cm, puis on plie le morceau restant pour obtenir une boîte en forme de parallélépipède rectangle sans couvercle. On désigne par V (x) le volume de cette boite exprimé en cm^3.

1°) a) Préciser l'ensemble des valeurs possibles de x.

b) Démontrer que : $V(x) = x\,(100 - 2x)^2$.

2°) Etudier le sens de variation de la fonction V aini obtenue et dresser son tableau variation.

3°) En déduire la valeur de x pour laquelle le volume de la boite est maximum.
Calculer ce volume maximum.

<u>EXERCICE 343</u>

A quelle condition la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{x - a} - \frac{1}{x - b}$ (où a et b sont des réels distincts) admet-elle un maximum? un minimum ?

<u>EXERCICE 344</u>

Déterminer b et c pour que $f : x \mapsto x^3 + bx^2 + cx + 2$ admette en $x_o = 1$ un extremum égal à 2.
Etudier alors le sens de variation de f.

<u>EXERCICE 345</u>

Déterminer b et c pour que $f : x \mapsto \frac{x^2 + bx + c}{x - 2}$ admette en $x_o = -1$ un maximum égal à -3.
Etudier alors le sens de variation de f.

<u>EXERCICE 346</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \frac{-x^2 + bx + 3}{x - 1}$ (où b est un paramètre réel).

1°) Comment faut-il choisir b pour que f n'admette pas d'extremum ?

2°) Déterminer alors b pour que la courbne représentative de f admette au point d'abscisse 2 une tangente parallèle à la droite d'équation $2x + 2y - 3 = 0$.

EXERCICE 347

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{ax^2 + bx + 1}{x^2 + bx + a}$

Déterminer suivant les valeurs de a et b le nombre d'extremums de f.

EXERCICE 348

Soit f_1 la fonction définie par $f_1(x) = x - \sin x$.

1°) a) Etudier le sens de variation de f_1 sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $f_1(0)$; en déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $\sin x \leq x$.

2°) Soit f_2 la fonction définie par $f_2(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} - \cos x$.

a) Déduire de la question précédente le sens devariation de f_2 sur $\mathbb{R}^+$.

b) Calculer $f_2(0)$; en déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \cos x$.

3°) Soit f_3 la fonction définie par $f_3(x) = x - \dfrac{x^3}{6} - \sin x$.

a) Déduire de la question précédente le sens devariation de f_3 sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $f_3(0)$; en déduire que $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $x - \dfrac{x^3}{6} \leq \sin x$.

4°) Déduire des questions précédentes un encadrement de sin 0,7 .

EXERCICE 349

Soit $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2$. on suppose que $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé.

On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe de f et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = -1$ .Soit $x_o \in \mathbb{R}$ et M_0 le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x_o .

1°) Déterminer en fonction de x_o une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}$ en M_0.

2°) Soit H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur $\mathcal{D}$.

a) Démontrer que $M_0J = M_0H_0$, puis que (T_0) est la médiatrice de $[JH_0]$.

b) En déduire une construction géométrique simple de M_0 et de (T_0) connaissant H_0.

3°) ***Application*** : Construire géométriquement les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives -2 et 3 puis les tangentes à $\mathcal{C}$ en ces points.

EXERCICE 350

1°) Démontrer que si f est une fonction dérivable en x_o , alors :

$$\lim_{x \to x_o} \frac{x\,f(x_o) - x_o\,f(x)}{x - x_o} = f(x_o) - x_o\,f'(x_o) .$$

2°) Prouver que si f et g sont deux fonctions dérivables en 0, telles que :

$$f(0) = g(0) \text{ et } g'(0) \neq 0$$

alors $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(0)}{g'(0)}$

EXERCICE 351 Inégalité d'HUYGHENS

On se propose d'établir que, pour $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$, $2 \sin x + \tan x \geq 3x$.

1°) Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2 \sin x + \tan x - 3x$.

Montrer que f est dérivable sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$ et calculer $f'(x)$.

2°) Etudier le signe de f' sur $[0 ; \frac{\pi}{2}[$ (On pourra poser $X = \cos x$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $P(X)$ $(0 < X \leq 1)$, où P est un polynôme de degré 3 .

3°) Conclure.

EXERCICE 352

1°) Soit f une fonction dérivable sur un ensemble D de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0 (c'est-à-dire que tel que , pour tout x de D, $-x \in D$) .

Montrer que que si f est paire (respectivement impaire), alors f' est impaire (respectivement paire) .

2°) Montrer que si une fonction définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période T, dérivable sur $\mathbb{R}$ alors sa fonction dérivée est également périodique, de période T.

EXERCICE 353

Soit a un nombre réel. On dit qu'un polynôme P est factorisable par $(x - a)^2$ lorsqu'il existe un polynôme Q tel que : $P(x) = (x - a)^2 Q(x)$.

1°) Montrer que si P est factorisable par $(x - a)^2$, alors $P(a) = P'(a) = 0$.

2°) On suppose que $P(a) = 0$ et on désigne par f le polynôme tel que $P(x) = (x - a) f(x)$.

Montrer que si $P'(a) = 0$, alors f est factorisable par $x - a$.

3°) En déduire que les propriétés sont équivalentes :

(1) Le polynôme P est factorisable par $(x - a)^2$.

(2) On a $P(a) = P'(a) = 0$.

Applications

A$_1$: Montrer que $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x \;\; 12$ est factorisable par $(x - 2)^2$.

Résoudre ensuite l'équation $P(x) = 0$.

A$_2$: Soit n un entier naturel non nul . A l'aide des questions précédentes, montrer que le polynôme $P(x) = nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ est factorisable par $(x - 1)^2$.

A$_2$: Soit P un polynôme de degré 3 admettant trois racines distinctes x_1, x_2 et x_3.

Montrer que P' ne s'annule ni en x_1, ni en x_2, ni en x_3 , puis que :

$$\frac{x_1}{P'(x_1)} + \frac{x_2}{P'(x_2)} + \frac{x_3}{P'(x_3)} = 0 .$$

DEVOIRS

<u>THEMES DES DEVOIRS</u>

Devoir N°	Thèmes	Série
1	**Systèmes. Equations irrationnelles.**	**S2**
2	**Produit scalaire. Trigonométrie. Polynômes**	**S1**
3	**Equations et inéquations irrationnelles. Systèmes d'inéquations. Problèmes du second degré. Paraboles. Calcul vectoriel et barycentre**	**S1**
4	**Polynômes**	**S2**
5	**Polynômes. Equations et inéquations irrationnelles. Angles orientés**	**S2**
6	**Polynômes. Second degré.**	**S2**
7	**Systèmes. Equations et inéquations irrationnelles. Equations et inéquations paramétriques**	**S2**
8	**Polynômes. Limites. dérivées**	**S2**
9	**Polynômes. Produit calaire. Lignes de niveau. Trigonométrie.**	**S1**
10	**Limites et continuité. Dérivation.**	**S1**
11	**Systèmes. Problèmes du second degré. Inéquations irrationnelles**	**S1**
12	**Bijections. Composée d'applications. Fonctions bornée. Centre d'inertie de plaques. Calcul barycentrique.**	**S1**
13	**Angles orientés. Repérage. Applications injectives, surjectives. Mesure algébrique**	**S1**
14	**Lignes de niveau. Barycentres. Intersection d'une droite et d'un cercle.**	**S1**
15	**Systèmes. Généralités sur les fonctions. Problèmes du second degré**	**S2**
16	**Produit scalaire. Lignes de niveau. Relations métriques.**	**S1**
17	**Enoncé de Thalès. Barycentre. Composée de fonctions. Applications injectives, surjectives, bijectives.**	**S1**
18	**Polynômes. Fonctions périodiques. Bijection et bijection réciproque.**	**S2**
19	**Généralités sur les fonctions. Systèmes. Programmation liéaire.**	**S2**
20	**Polynômes.Equations et inéquations irrationnelles. Equations et inéquations paramétriques du second degré**	**S2**
21	**Ensembles de définition. Fonction paire, impaire, périodique. Composée de fonctions. Equations et inéquations irrationnelles. Restriction. Sens de variation.**	**S2**
22	**Barycentre. Produit scalaire.**	**S1**
23	**Limites et continuité.**	**S1** **S2**
24	**Trigonométrie. Equations de cercles. Produit scalaire.**	**S1**
25	**Polynômes. Généralités sur les fonctions. Barycentre. Relations métriques**	**S1**
26	**Barycentre. Relations métriques. Limites. Polynômes. Trigonométrie**	**S1**
27	**Limite et continuité**	**S1** **S2**
28	**Généralités sur les fonctions. Polynômes.**	**S2**
29	**Angles orientés. Trigonométrie. Second degré. Polynômes**	
30	**Systèmes. Equations et inéquations irrationnelles. Second degré**	

Lycée Cheikh Oumar Foutiyou Tall
2005~2006
Saint-Louis **Classe : $1S_2$**

Devoir Surveillé n°1 (Premier Semestre)
4h

EXERCICE 1

1°) Résoudre par la méthode du pivot de GAUSS le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 7 \\ 5x + 2y - 3z = 20 \\ 7x - y + z = 33 \end{cases}$$

2°) Résoudre en discutant suivant les valeurs du paramètre m le système :

$$\begin{cases} (m+1)\,x + y + z = m + 1 \\ x + (m+1)\,y + z = m + 3 \\ x + y + (m+1)\,z = -2m - 4 \end{cases}$$

3°) a) Résoudre le système d'inconnues x et y :

$$\begin{cases} x + y = -z \\ 2x - y = 1 - z \end{cases}$$ (où z est un paramètre réel) .

b) En déduire la résolution du système d'inconnues x, y et z :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 16 \end{cases}$$

EXERCICE 2

1°) Discuter et résoudre l'équation d'inconnue x suivante :

$$\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = m$$ (où m est un paramètre réel) .

2°) a) Discuter suivant les valeurs du paramètre réel m , l'existence et le signe des racines de l'équation : $x^2 - mx + 3m - 5 = 0$.

b) Discuter et résoudre l'équation : $\sqrt{x^2 + 3m - 5} = \sqrt{mx}$

c) Résoudre l'inéquation : $\sqrt{x^2 + x + 1} < 2x - 3$.

EXERCICE 3

Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} xy^2 + x^2y = -30 \\ xy + x + y = -13 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x + y - xy = -1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} a + b - ab = \dfrac{2m-1}{m^2-1} \\ (a+1)(b+1) = \dfrac{m(m+2)}{m^2-1} \end{cases}$

DEVOIR N° 2.

EXERCICE 1

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre [AB] . C est un point de $\mathcal{C}$ autre que A et B , H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB) . Une droite ($\mathcal{D}$) passant par A coupe la droite (CH) en M et recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en N .

1°) Faire une figure soignée.

2°) Comparer les produits scalaires $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$.

3°) Démontrer que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = AC^2$.

EXERCICE 2

Le plan est rapporté au repère orhonormé direct (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) . Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O et A_0 , A_1 , A_2 , A_3 , A_4 les points de $\mathcal{C}$ tels que les angles ($\vec{i}$, $\overrightarrow{OA_k}$) , $0 \leq k \leq 4$ aient pour mesures respectives $\dfrac{2k\pi}{5}$.

1°) Faire une figure. On constatera que les points A_0 , A_1 , A_2 , A_3 , A_4 sont les sommets consécutifs d'un polygone régulier convexe.

2°) Soit $\vec{S}$ le vecteur : $\vec{S} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}$.

a) Démontrer que $\vec{S}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA_0}$.

b) Démontrer que $\vec{S}$ est aussi colinéaire à $\overrightarrow{OA_1}$.

(Indication : Utiliser les coordonnées des points A_0 , A_1 , A_2 , A_3 , A_4 dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)) .

c) En déduire que $\vec{S}$ est le vecteur nul , puis les égalités :

(1) $\sin\dfrac{2\pi}{5} + \sin\dfrac{4\pi}{5} + \sin\dfrac{6\pi}{5} + \sin\dfrac{8\pi}{5} = 0$.

(2) $1 + \cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5} + \cos\dfrac{6\pi}{5} + \cos\dfrac{8\pi}{5} = 0$.

3°) a) En utilisant l'égalité (2) précédente, démontrer que $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est une solution de l'équation :

$$4X^2 + 2X - 1 = 0$$

b) Calculer $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $\cos\dfrac{4\pi}{5}$, $\sin\dfrac{2\pi}{5}$, $\tan\dfrac{2\pi}{5}$.

4°) Soit Ω le point de coordonnées ($-\dfrac{1}{2}$; 0) et J le point de coordonnées (0, 1) .

a) Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω et de rayon ΩJ .

b) Le point d'intersection du cercle $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses dont l'abscisse est positive est noté K. Vérifier que l'abscisse du point K est $2\cos\frac{2\pi}{5}$.

c) Que représente la droite (EB) pour le segment [OK] ?

EXERCICE 3

1°) On pose : $A = \cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{2\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \ldots\ldots + \cos^2\frac{7\pi}{8}$.

a) Comparer $\cos\frac{7\pi}{8}$ et $\cos\frac{\pi}{8}$, puis $\cos\frac{6\pi}{8}$ et $\cos\frac{2\pi}{8}$, enfin $\cos\frac{5\pi}{8}$ et $\cos\frac{3\pi}{8}$. En déduire une écriture simplifiée de A .

b) Comparer $\cos\frac{3\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$.

c) Montrer alors que A = 3 .

2°) S'inspirer de la méthode suivie dans la question 1° pour calculer :

$B = \sin^2\frac{\pi}{12} + \sin^2\frac{2\pi}{12} + \sin^2\frac{3\pi}{12} + \ldots\ldots + \sin^2\frac{11\pi}{12}$,

puis $C = \cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$.

EXERCICE 4

1°) a) Résoudre l'équation $\cos 3x = \frac{1}{2}$.

b) Exprimer cos 3x en fonction de cos x .

2°) a) Montrer que les réels $m = \cos\frac{\pi}{9}$; $n = \cos\frac{7\pi}{9}$; $p = \cos\frac{13\pi}{9}$ sont des solutions de l'équation :

$$8X^3 - 6X - 1 = 0 \ (E) .$$

b) Combien de solutions l'équation (E) peut-elle avoir au maximum ?

c) Déduire de a) et b) que : $8X^3 - 6X - 1 = 8(X - m)(X - n)(X - p)$ **(1)**

d) Quelles sont toutes solutions de l'équation (E) ?

3°) Développer le second membre de l'égalité **1)** ; en déduire les valeurs des nombres suivants :

$A = \cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{7\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9}$; $B = \cos\frac{\pi}{9} \cdot \cos\frac{7\pi}{9} - \cos\frac{7\pi}{9} \cdot \cos\frac{13\pi}{9} + \cos\frac{13\pi}{9} \cdot \cos\frac{\pi}{9}$.

$C = = \cos\frac{\pi}{9} \cdot \cos\frac{7\pi}{9} \cdot \cos\frac{13\pi}{9}$

DUREE : 4h

Lycée Cheikh Oumar Foutiyou Tall
2005~2006
Saint-Louis **Classe : $1S_1$**

Composition (Premier Semestre) 4h

I . ALGEBRE ET TRIGONOMETRIE

EXERCICE 1

1°) Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a) $x + 1 > \sqrt{x (x - 1)}$ b) $\sqrt{x^2 + 3x - 4} > x - 2$ c) $\sqrt{x^2 - mx + 1} = x + 3m$

N.B. *Pour c), on discutera suivant les valeurs de m .*

2°) Résoudre et discuter le système d'inéquations

$$(\mathrm{I})\ \begin{cases} m\,x - 1 > 0 \\ (3\,m - 2)\,x - m > 0 \end{cases},$$

dans lequel m désigne un paramètre .

EXERCICE 2

Soit [Ox) et [Ox ') deux demi-droites telles que l'angle x 'Ox ait pour mesure 60° . A est un point de la demi-droite [Ox) tel que OA = 8 a , B est le projeté orthogonal de A sur [Ox ') et C le milieu du segment [OB] .

Un point M du segment [OA] est défini par la distance : OM = 2 x .

1°) Calculer, en fonction de a et de x, les expressions de : MB^2 , MC^2 et $s = MB^2 + MC^2$.

2°) Résoudre et discuter suivant les valeurs du paramètre *b*, <u>réel positif</u>, le système :

$$\begin{cases} 8x^2 - 12\,ax + 20\,a^2 - b = 0 \quad (1) \\ 0 \le x \le 4\,a \quad (2) \end{cases}$$

dans lequel a est un réel fixé .

(*on sera amené à classer 0 et 4a par rapport aux racines de (1)*) .

3°) Déterminer le point M pour que s ait une valeur donnée b . Discuter le nombre de solutions suivant les valeurs de b . On pourra utiliser les résultats du 2° .

EXERCICE 3

Soit la fonction trinôme $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Déterminer les coefficients a, b, c pour que f admette au point x = 2 un minimum égal à -9 et que la courbe $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe [Oy) au point d'ordonnée -5 .

Tracer alors la courbe $\mathcal{C}_f$.

2°) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y = kx - 9$, où k est un entier relatif .

Déterminer suivant les valeurs de k le nombre de points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$.

3°) On désigne par K l'ensemble des valeurs des valeurs de k pour lesquelles l'ensemble

$E = \mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ n'est pas vide . Soient $k \in K$, et M_1 et M_2 les points distincts ou confondus de E .

Calculer, en fonction de k, les coordonnées du milieu I de $[M_1M_2]$.

4°) On considère la fonction trinôme $g : x \mapsto 2x^2 - 4x - 9$ et sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$.

Montrer qu'à tout nombre $k \in K$, on peut associer un point $I \in \mathcal{C}_g$.

L'application de K vers $\mathcal{C}_g$ ainsi définie est-elle injective ? surjective ?

EXERCICE 4

Soit l'équation (E) : $2\sin^2 x - 2\sin x - m = 0$.

1°) Discuter, suivant les valeurs du paramètre m le nombre de solutions de (E) qui appartiennent à l'intervalle $[-\frac{\pi}{6} ; \frac{\pi}{3}]$.

2°) Résoudre l'équation (E) pour $m = 1 - \sqrt{2}$.

II . GEOMETRIE

EXERCICE 5

Dans tout le problème, ABCD est un rectangle de centre O, et p et q deux réels à l'intervalle]0 ; 1[.

On note I et J les points tels que $\overrightarrow{AI} = p\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DJ} = q\,\overrightarrow{DI}$.

Le but du problème est de trouver à quelle condition portant sur p et q , les points A, J, C, sont alignés . On propose diverses méthodes .

A . Dans cette partie, $p = \frac{1}{2}$ et $q = \frac{2}{3}$.

1 . Solution géométrique

a) Placer I et J et montrer que J est le centre de gravité du triangle ADB .

b) En déduire l'alignement des points A, J, C .

2 . Solution vectorielle

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}$.

b) En déduire l'alignement des points A, J, C .

B . On revient au cas général, p et q sont deux réels de l'intervalle]0 ; 1[.

1 . Solution barycentrique

a) Montrer que I est barycentre de { (A , 1 — p) (B , p) } .

b) De la même manière, montrer que J peut être considéré comme le barycentre de { (D , α) (I , β) } , où α et β seront exprimés en fonction de q .

c) En déduire que « A, J, O, donc A, J, C, sont alignés » équivaut à :$pq = 1 - q$.

2 . Solution vectorielle

a) Démontrer que $\overrightarrow{AJ} = (1 - q)\,(\overrightarrow{AD} + \frac{pq}{1-q}\,\overrightarrow{AB})$.

b) En déduire que « Les points A, J, C, sont alignés » équivaut à : $q(1 + p) = 1$.

2 . Solution analytique

Le plan muni d'un repère orthonormal $(A, \vec{i}, \vec{j})$ dans lequel B et D ont respectivement pour coordonnées (b ; 0) et (0 ; d) .

a) Calculer les coordonnées de I, puis celles de J .

b) En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur p et q, pour que les points A, J, C soient alignés .

EXERCICE 6

Soient D et D ' deux droites sécantes en O .Soit Δ une droite ne passant pas par O et qui coupe D en A et D ' en B . Un point M de Δ se projette en E sur D parallèlement à D ' et en F sur D ' parallèlement à D .

1°) Démontrer que $\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{OF}}{\overline{OB}} = 1$.

2°) Soient E et F deux points respectivement de D et D ' et vérifiant la relation :

$\frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} + \frac{\overline{OF}}{\overline{OB}} = 1$. Soit M le point tel OEMF soit un parallélogramme .

Démontrer que M est sur la droite Δ .

Lycée Cheikh Oumar Foutiyou Tall
2004~2005
Saint-Louis **Classe : $1S_2$**

[redacted]

<u>EXERCICE 1 : VRAI/FAUX</u>

Parmi les 5 affirmations suivantes, dire celles qui sont vraies et celles qui sont fausses. Si elles sont vraies, les démontrer, si elles sont fausses, donner un contre-exemple.

1°) Si une fonction polynôme est de degré 3, alors son carré est de degré 9.

2°) Une fonction polynôme admet toujours une racine réelle.

3°) La fonction polynôme P définie par : $P(x) = x^5 + x^4 + 7x + 1$ n'a pas de racines positives.

4°) Deux fonctions polynômes qui ont les mêmes racines sont égales.

5°) Si α est une racine de deux fonctions polynômes R te S , alors $R(x) — S(x)$ est factorisable par $(x — \alpha)$.

<u>EXERCICE 2</u>

On considère la fonction polynôme P définie par : $P(x) = x3 — 5x^2 + 3x + 1$.

On note α, β, γ ses racines (si elles existent !)

1°) Ecrire en fonction de α, β et γ la forme totalement factorisée de P (x) .

2°) Déterminer la valeur des expressions suivantes :

$\alpha + \beta + \gamma$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha$, $\alpha\beta\gamma$, $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$, et $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$.

3°) Sachant que $\alpha = 2 — \sqrt{5}$ et $\beta = 1$, calculer γ .

<u>EXERCICE 3</u>

Soit le polynôme P défini par : $P(x) = 6x^3 + 25x^2 + 3x — 4$.

1°) Montrer que $(— 4)$ est racine de P puis factoriser P (x) en polynômes du premier degré.

2°) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

En déduire les solutions de l'équation : $6(x^2 — 20)^3 + 25(x^2 — 20)^2 + 3(x^2 — 20) — 4$.

3°) Donner le domaine de définition de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{P(x)}$.

<u>EXERCICE 4</u>

Soit le polynôme P défini par : $P(x) = 3x^3 + ax^2 + bx — 1$.

1°) Déterminer les réels a et b pour que P (x) soit divisible par $(x + 1)^2$ puis factoriser P (x) .

2°) On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{P(x)}{|x^3 + 1| — |P(x)|}$

a) Déterminer l'ensemble de définition de f .

b) Simplifier f (x) sur cet ensemble de définition .

Devoir Surveillé n°1 (Premier Semestre)
3h

Exercice n°1

1) Déterminer le polynôme P (x) du 4éme degré tel que :

- Le coefficient de x^4 dans P (x) vaut 1
- P (x) est divisible par $x^2 + x + 1$
- Le reste de la division P (x) par x^2 -1 est - 3x + 9

2) Donner les racines réelles de l'équation P (x) = 0

Exercice n°2

Soit le polynôme $P(x) = x^4 - 6x^3 + \alpha x^2 + 42x + 40$

1) a) On demande de déterminer α (réel sachant que la somme des deux racines de P (x) est égale à la somme des deux autres racines).
   b) Dans toute la suite on suppose que α = -5 Factoriser alors P(x)
2) Déterminer le couple de réels (β,γ) tel que le polynôme

$Q(x) = \beta x^4 - 7x^3 - \beta x^2 + \gamma x + 6$ Soit divisible par $x^2 - 2x - 3$

3) Résoudre dans IR l'inéquation suivante $\dfrac{x^4 - 6x^3 + \alpha x^2 + 42x + 40}{\beta x^4 - 7x^3 - \beta x^2 + \gamma x + 6} \leq 0$ (Où α, β, γ sont les valeurs trouvées ci-dessus)

Exercice n°3

On appelle polynôme réciproque de degré n tout polynôme P(x) vérifiant :

$$\begin{cases} d°P = n \\ \forall x \in IR^*, \quad P\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{P(x)}{x^n} \end{cases}$$

1) a) Montrer que le polynôme si α est une racine de P(x) alors α est non nul et $\dfrac{1}{\alpha}$ est aussi une racine de P(x).

b) Montrer que tout polynôme réciproque de degré n (impair) admet -1 pour racine

2) Déterminer le polynôme réciproque de degré 5 admettant pour racines $\alpha_1 = 2$ et $\alpha_2 = 2-\sqrt{3}$ tel que $P(0) = 2$

3) On pose $\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $P(x) = x^4 - (6-\sqrt{5})x^3 + (2-6\sqrt{5})x^2 - (6-\sqrt{5})x^2 + 1$

a) Montrer que $\alpha^2 = 1+\alpha$ puis en déduire α^3, α^4 en fonction de α

b) En déduire alors que α est une racine de $P(x)$

c) En utilisant la question 1) Résoudre simplement dans IR l'équation P(x) =0

Lycée Cheikh Oumar Foutiyou Tall
2001~2002
Saint-Louis **Classe : $1S_2$**

Devoir Surveillé n°2 (Premier Semestre)
2h

EXERCICE 1 (7 points)

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $4x^3 - 3x - 1 = 0$ (E) .

2°) On considère l'équation (E ') suivante : : $4x^3 - 12x^2 + 9x - 2 = 0$ (E ') .
On pose $x = y + h$.
a) En remplaçant x par y + h dans (E ') , on obtient une nouvelle équation (E ") dans laquelle y est l'inconnue.
Quelle valeur faut-il donner à h pour que le coefficient de y^2 dans (E ") soit nul ?
b) h ayant la valeur trouvée en a) , résoudre (E ") puis (E ') .

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\dfrac{4x^3 - 3x - 1}{x + 1} \geq 0$.

EXERCICE 2 (6 points)

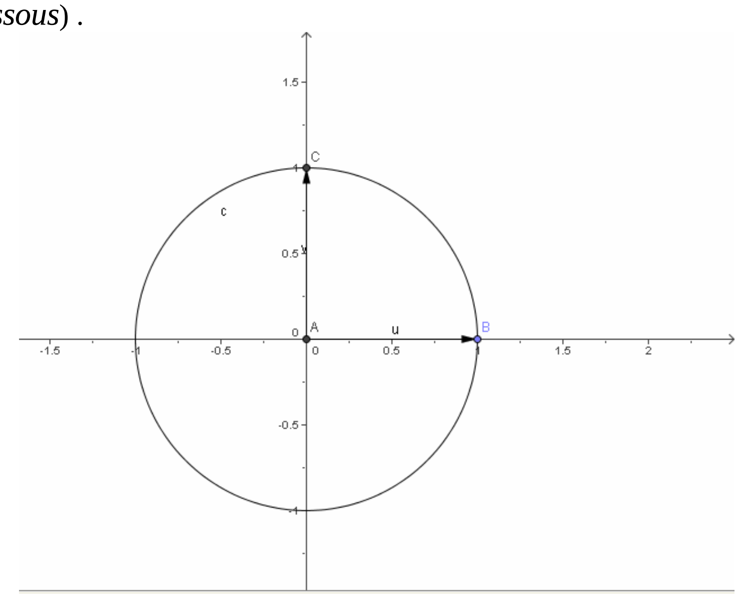
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations :

a) $\sqrt{-x^2 + x + 1} < x - 5$. **b)** $\sqrt{-4x^2 + x + 5} \leq 2x + 2$

c) $x^2 + x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - 4 = 0$ (on posera $X = x + \dfrac{1}{x}$ et on pourra calculer X^2) .

EXERCICE 3 (3 points)

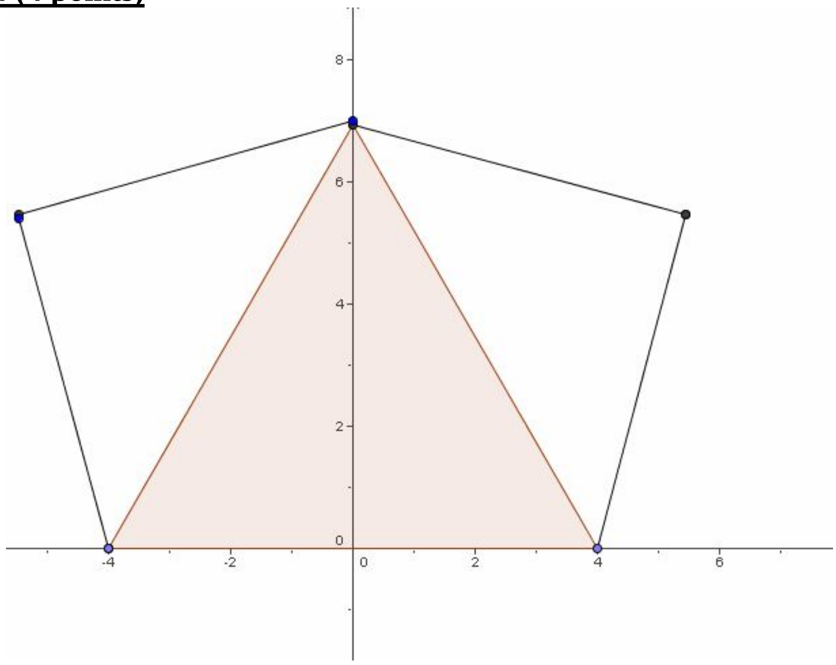
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) . Soit ($\mathcal{C}$) le cercle trigonométrique de centre O ; I et J les points de ($\mathcal{C}$) tels que : $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$
(*voir figure ci-dessous*) .



1°) Placer les points M et N , images respectives sur ($\mathcal{C}$) des réels $\frac{373\,\pi}{6}$ et $-\frac{207\,\pi}{4}$.

2°) Donner la mesure principale de chacun des angles orientés $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON})$, $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OI})$, $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OJ})$, et $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OM})$.

<u>EXERCICE 4 (4 points)</u>



Soit ABC un triangle équilatéral direct, ADC et AEB des triangles rectangles isocèles tels qu'indiqués sur la figure ci-dessus.
Donner la mesure principale en radians des angles orientés suivants :

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$; $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA})$; $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD})$; $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$; $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$; $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BD})$; et $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{BD})$.

N.B. *Les réponses devront être justifiées.*

DEVOIR N° 6

EXERCICE 1

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$; $8x^2 - 343x + 335 = 0$.

2°) Trouver deux nombres dont la différence est 9 et la différence des cubes est 999.

EXERCICE 2

Déterminer un polynôme P(x) du troisième degré, tel que, pour tout réel x, on ait :

$$P(x) - P(x-1) = x^2.$$

En déduire la somme $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$, puis pour tout entier n, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2$.

EXERCICE 3

Déterminer un polynôme du troisième degré, divisible par $x - 1$ et $x + 2$, et dont les restes respectifs des divisions par $x + 1$ et $x - 3$ soient 10 et 30.

EXERCICE 4

1°) Déterminer le réel a tel que, pour tout réel x, on ait :

$$-3 \leq \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} \leq 2$$

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x - 2 < \sqrt{2x - 3}$.

EXERCICE 5

Soit $P(x) = (m - 3)x^2 - 8x + (m + 3)$.

1°) Etudier l'existence et le signe des solutions de l'équation $P(x) = 0$.

2°) Déterminer m tel que les racines x' et et x'' de l'équation $P(x) = 0$ vérifient :

$$(2x' + 1)(2x'' + 1) = 4 .$$

3°) Déterminer l'équation du second degré dont les solutions sont : $x' - 1$ et $x'' + 1$.

DUREE : 2h

Lycée Cheikh Oumar Foutiyou Tall
2005~2006
Saint-Louis **Classe : $1S_1$**

Devoir Surveillé n°1 (Premier Semestre)
4h

EXERCICE 1 (*3 points*)

Résoudre dans **R** les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 6z = 3 \\ 2x - 9y + 12z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 5x - 2y - 10z = 0 \\ -4y + 3z = 0 \end{cases}$

EXERCICE 2 (*4 points*)

Résoudre les systèmes suivants en faisant un changement de variables adéquat :

a) $\begin{cases} 7\sqrt{1 - 3x} - 6\sqrt{5y} = 23 \\ 9\sqrt{1 - 3x} - 11\sqrt{5y} = 23 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 7xy - 5x - 5y = 15 \\ 11xy - 8x - 8y = 22 \end{cases}$

EXERCICE 3 (*7 points*)

1°) Résoudre les équations suivantes :

a) $\sqrt{2x^2 - 7x + 4} = \sqrt{-x^2 - 3x + 4}$ **b)** $1 + 2x + \sqrt{-7x + 5} = 0$

c) $4x^2 + 8x + \dfrac{8}{x} + \dfrac{4}{x^2} - 37 = 0$ (poser $X = x + \dfrac{1}{x}$) .

2°) Résoudre les inéquations suivantes :

a) $\sqrt{-x^2 + x + 1} < x - 5$ **b)** $\sqrt{-4x^2 + x + 5} \leq 2x + 2$

EXERCICE 4 (*6 points*)

Résoudre en discutant suivant les valeurs de m :

1°) $(m^2 - 4)x^2 - 2(m + 2)x + 2 = 0$ **2°)** $mx^2 - (2m + 1)x + 2 < 0$

DEVOIR N° 8

EXERCICE 1 (3 points)
Prouver que le polynôme $P(x) = x^4 + 4x^3 + 12x^2 + 16x + 16$ est le carré d'un polynôme que l'on déterminera.

EXERCICE 2 (6 points)
Dans chacun des cas suivants, on demande de rechercher la limite éventuelle :

1°) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3x^2 - 5x + 1}{x - 5}$

2°) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4 - 3x + 2}{x - 1}$

3°) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x\sqrt{x} - 8}{4 - x}$

4°) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 - x - 6}{x^2 - 4}$

5°) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{1}{x}$

6°) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{3 - |x - 1|}{|x^2 - 3x - 4|}$

EXERCICE 3 (4 points)
Déterminer le nombre dérivé de la fonction f au point x_0 dans chacun des cas suivants :

(1) $f(x) = |x^2 - 3| + 2$ $\quad x_0 = 1$ puis $x_0 = -3$

(2) $f(x) = \dfrac{-2x}{x - 1}$ $\quad x_0 = 3$

(3) $f(x) = \dfrac{3 - x}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ $\quad x_0 = 0$.

EXERCICE 4 (6 points)
Calculer la fonction dérivée de f dans chacun des cas suivants :

1°) $f(x) = (x^2 + 1)^3$ $\quad$ 2°) $f(x) = (\sqrt{x} - x)(x^2 + 1)$ $\quad$ 3°) $f(x) = \dfrac{(\sqrt{x} - x)(x^2 + 1)}{\sqrt{x} + 2x}$

4°) $f(x) = (1 - 2x)^2 \left(x^2 - \dfrac{2}{x}\right)$

Bonne présentation: + 1 point

DUREE : 3h

Lycée Cheikh Oumar Foutiyou Tall
2005~2006
Saint-Louis **Classe : $1S_1$**

Devoir Surveillé n°2 (Premier Semestre)
4h

EXERCICE 1

Soit $P(x) = \dfrac{x(x-b)(x-c)}{a(a-b)(a-c)} + \dfrac{x(x-c)(x-a)}{b(b-c)(b-a)} + \dfrac{x(x-a)(x-b)}{c(c-a)(c-b)}$.

Calculer $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$. Simplifier $P(x)$.

EXERCICE 2

Soit $P(x) = 2x^4 - x^3 - 10x^2 + 3$

1°) Déterminer un polynôme $Q(x)$, et un polynôme $R(x)$ du premier degré, tels que :
$P(x) = (x^2 - 2x - 1)\, Q(x) + R(x)$.

2°) En déduire le quotient et le reste de la division de $P(x)$ par $(x - 1 - \sqrt{2})$.

3°) Déterminer $P(1 - \sqrt{2})$.

EXERCICE 3

1°) Déterminer les polynômes $f(x)$ de degré 2 vérifiant la relation :

$$P(x) - P(x-1) = x^2 + x , \qquad \text{quel que soit } x \in \mathbb{R} .$$

2°) En déduire l'expression en fonction de n de la somme $1\times2 + 2\times3 + 3\times4 + \dots + n(n+1)$.

EXERCICE 4

Soit ABC un triangle isocèle tel que : $AB = AC = 5$ et $BC = 7$.

1°) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 7$.

2°) Soit G le barycentre de $\{ (A , 2) (B , 3) (C , 3) \}$. Construire G et montrer que $AG = 3$.

3°) Soit f l'application qui, à tout point M du plan, associe :

$$f(M) = 2\, \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} .$$

Montrer que $f(M) = f(G) + 4\, MG^2$.

4°) Calculer $f(A)$ et $f(G)$.

5°) Déterminer l'ensemble des points M tels que $f(M) = f(A)$ et représenter cet ensemble .

EXERCICE 5

On considère un triangle ABC tel que $BC = 8$, $AB = 7$ et $AC = 10$.

1°) Calculer la longueur des médianes de ce triangle .

2°) Calculer la mesure des angles de ce triangle .

3°) Calculer l'aire de ABC .

EXERCICE 6

Quels que soient a, b, c , réels dont la somme est π (par exemple a, b et peuvent être les mesures des angles géométriques d'un triangle ABC) , démontrer que, sous réserve de définition :

1°) $\tan a + \tan b + \tan c = \tan a \tan b \tan c$.

2°) $1 - \cos a + \cos b + \cos c = 4 \sin \dfrac{a}{2} \cos \dfrac{b}{2} \cos \dfrac{c}{2}$.

3°) sin 2a + sin 2b + sin 2c = 4 sin a sin b sin c .

EXERCICE 7

Résoudre dans] — π ; π] puis représenter sur le cercle trigonométrique les solutions des équations suivantes :

1°) $\left|\sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right| = 1$. **2°)** $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. **3°)** tan x cotan 2x = — 1 .

EXERCICE 8

On cherche à résoudre l'équation : $x^3 + 6x^2 + 9x + 3 = 0$ (1) .

1°) Calculer cos 3α en fonction de cos α .

2°) Poser x = y + h dans l'équation (1) . Que devient alors l'équation (1) ?

Déterminer h pour que cette nouvelle équation d'inconnue y ne contienne plus de terme en y^2

Prouver que, dans ce cas, l'équation (1) équivaut à l'équation $y^3 - 3y + 1 = 0$ (2) .

3°) Poser y = kz dans l'équation (2) . Que devient alors l'équation (2) ?

Déterminer k pour que l'équation (2) soit équivalente à l'équation : $4z^3 - 3z = -\frac{1}{2}$ (3) .

4°) Effectuer la résolution de l'équation (3) en cherchant z sous la forme z = cos α .

5°) Donner les solutions de l'équation (1) ; puis en donner des valeurs approchées à 10^{-4} près par défaut .

DEVOIR N° 10.

EXERCICE 1

A. Dans chacun des cas suivants, étudier la limite de la fonction f en 0 (E désigne la fonction partie entière) .

1°) $f(x) = x\,E\left(\frac{1}{x}\right)$ 2°) $f(x) = \frac{x\,E(x) - x}{|x|}$

B. Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{E(\sqrt{x})}{x}$, où E désigne la fonction partie entière.

1°) Démontrer que : $\forall\ x \in\ ]0\,;1[\,,\ f(x) = 0$. En déduire la limite de f en 0

2°) Démontrer que : $\forall\ x \in\ ]0\,;+\infty[\,,\ 0 \leq f(x) \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. En déduire la limite de f en $+\infty$.

EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par: $f(x) = \frac{x}{2 - \sin\left(\frac{1}{x}\right)}$.

1°) a) Démontrer que : $\forall\ x \in\ ]0\,;+\infty[\,,\ \frac{x}{3} \leq f(x) \leq x$

b) Démontrer que : $\forall\ x \in\ ]-\infty\,;0[\,,\ x \leq f(x) \leq \frac{x}{3}$

2°) En déduire les limites de f en $+\infty$, $-\infty$ et 0 .

3°) Soit $g : x \mapsto \frac{x^2 + |x|}{x^2 - |x|}$. Déterminer D_g .Peut-on prolonger g par continuité en 0 ? Si oui, définir la fonction h qui prolonge g par continuité en 0 .
(N.B. *la question 3) est indépendante des questions 1) et 2)*) .

EXERCICE 3

On considère la fonction numérique dela variable réelle définie par : $f(x) = \frac{1}{x + \sqrt{|x^2 - 2x|}}$.

1°) Déterminer le domaine de définition de f.
2°) Calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
En déduire que la courbe représentative de f dans un repère orthonormal admet des asymptotes dont on déterminera les équations.
3°) Etudier la dérivabilité de f en 2. En déduire la tangente en ce point.
4°) Calculer la dérivée de f suivant des intervalles convenablement choisis.

EXERCICE 4

On considère la fonction de $\mathbf{R}$ vers $\mathbf{R}$ définie par : $f_m(x) = \frac{2mx - 1}{mx - 1}$ ($m \in \mathbf{R}$) .

On désigne par (C_m) la courbe représentative de la fonction : f_m dans le plan muni d'un repère orthonormé.
1°) Montrer que toutes les courbes (C_m) passent par un point fixe.
2°) Discuter, suivant les valeurs de m, le sens de variation de f_m .
3°) Quelles sont les asymptotes à (C_m) ?
4°) Déterminer l'équation de la tangente à (C_m) au point d'abscisse x = 0 .
5°) Quelle relation doit lier m et m ' pour que (C_m) et $(C_{m'})$ aient des tangentes perpendiculaires au point d'abscisse 0 ?

DUREE : 4h

Lycée Cheikh Oumar Foutiyou Tall
2005~2006
Saint-Louis **Classe : 1S$_1$**

[redacted]

EXERCICE 1

1°) Discuter et résoudre le système suivant, d'inconnues x, y, z (*a*, *b*, *c* étant des paramètres réels).

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ (b + c)x + (c + a)y + (a + b)z = 0 \\ bc\,x + ca\,y + ab\,z = 1 \end{cases}$$

2°) a) Vérifier l'équivalence : $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 0 \\ A - B = 0 \end{cases}$

b) En déduire que la résolution du système : (σ) $\begin{cases} x^3 + 7x^2y - 5y = 0 \\ y^3 + 7xy^2 - 5x = 0 \end{cases}$

se ramène à la résolution de quatre systèmes d'équations à deux inconnues.

c) Résoudre le système (σ) .

EXERCICE 2

1°) Soit A, B, A', B' des nombres rationnels, B et B' étant positifs et $\sqrt{B}$ irrationnel.

Montrer que $A + \sqrt{B} = A' + \sqrt{B'}$ entraîne $A = A'$ et $B = B'$.

(**Indication** : *on pourra remarquer que* $A + \sqrt{B} = A' + \sqrt{B'} \Rightarrow A - A' + \sqrt{B} = \sqrt{B'}$ *, puis élever au carré cette dernière égalité, ensuite isoler dans un membre le terme* $\sqrt{B}$ *et enfin aboutir à une contradiction si* $A - A' \neq 0$).

2°) Soit $F(x) = ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré à coefficients rationnels $a \neq 0$, b et c.

On suppose que $\alpha + \sqrt{\beta}$ est une racine de F(x) avec α et β rationnels et $\sqrt{\beta}$ irrationnel.

Montrer en utilisant 1° que $\alpha - \sqrt{\beta}$ est alors l'autre racine de F(x).

3°) Déterminer des réels α et β tels que $\sqrt{\frac{3}{2} + \sqrt{2}} = \alpha + \beta\sqrt{2}$.

Calculer les racines du trinôme $x^2 - \sqrt{2}\,x - \sqrt{2} - 1$.

Le résultat obtenu est-il contradictoire ?

EXERCICE 3

1°) Déterminer l'ensemble des réels x tels que $a = 3$, $b = 2 - x$ et $c = \sqrt{x^2 + 8x + 7}$ soient les côtés d'un triangle propre ABC.

2°) Calculer x sachant que le périmètre du triangle ABC est égal à un réel p (positif non nul).

3°) ABC peut-il être un triangle rectangle ? un triangle isocèle ?

EXERCICE 4

Les trois questions sont totalement indépendantes.

1°) Discuter et résoudre l'équation d'inconnue x :

$$\frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} \geq m ,$$

m désignant un paramètre réel.

2°) Résoudre et discuter l'équation d'inconnue x :

$\sqrt{2x + m} - \sqrt{x} = 5$, (m est un paramètre réel) en posant $u = \sqrt{x}$.

3°) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x suivante :

$mx^2 + (1 - 5m)x - 3(1 - 2m) > 0$; on discutera suivant les valeurs du paramètre réel m .

b) Placer les réels 0 et 1 par rapport aux racines du trinôme du a) .

c) En déduire la résolution de l'inéquation :

$$\frac{m(x-5) + 1}{x - 1} \geq \frac{3(1 - 2m)}{x^2 - x} .$$

DEVOIR N° 12.

EXERCICE 1

1°) Résoudre et discuter l'équation d'inconnue x dans $\mathbb{R}$:

$$\frac{x^2 - 3}{2x^2 + 1} = y \text{ , où } y \text{ est un réel donné.}$$

2°) En déduire deux parties E et F de $\mathbb{R}$, les plus grandes possibles, pour que l'application

$$f : E \to F$$
$$x \mapsto \frac{x^2 - 3}{2x^2 + 1}$$

soit bijective. Déterminer alors l'application réciproque f^{-1} .

EXERCICE 2

On considère les fonctions numériques f, g et h définies par :

$$f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}, \quad g(x) = \frac{2x}{x + 2}, \quad h(x) = \frac{3 - x}{1 + 2x} .$$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions : $g \circ f$, $h \circ g$, $h \circ g \circ f$.

2°) Calculer $(g \circ f)(x)$, $(h \circ g)(x)$ et $(h \circ g \circ f)(x)$.

EXERCICE 3

1°) Préciser les ensembles de définition des fonctions f définies par :

a) $f(x) = \sqrt{\frac{1 - |x|}{2 - |x|}}$ **b)** $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 + |x|}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{1 - x}{x}} - \sqrt{\frac{1 + x}{2 - x}}$ **d)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{- x^2 + 6x + 9}}$

2°) Démontrer que chacune des fonctions suivantes est bornée:

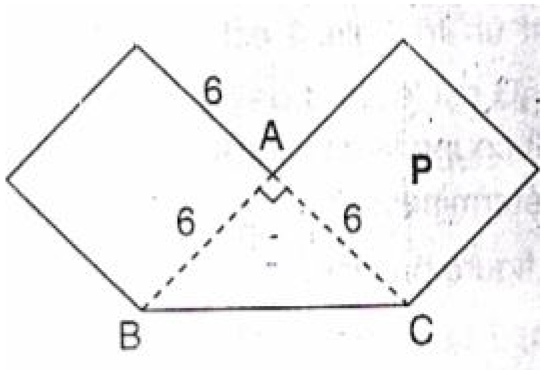
a) $f : [-3 ; 0] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{-1}{2x - 1}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{|x|}{\sqrt{x^2 + 1}}$

c) $f : [-2 ; 2] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x + 1| - |2x - 1|$

EXERCICE 1

Une plaque P est constituée par la réunion de deux carrés de côté 6 et d' un triangle rectangle isocèle ABC.



Calculer à quelle distance du milieu O de [BC] se troue le centre d'inertie G de la plaque.

EXERCICE 1

Etant donné un parallélogramme ABCD, on construit les points P, Q et R définis par :

• $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$; • $\overrightarrow{AR} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ • PARQ est un parallélogramme.

Nouveau Terracher p. 38

Il s'agit d'établir ce que suggère la figure ci-dessus, à savoir que les droites (BR), (CQ) et (DP) sont concourantes.

1°) Exprimer P comme barycentre de A et B, R comme barycentre de A et D et montrer que (BR) et (DP) sont sécantes en I barycentre de (A, 1) , (B, 2) et (D, 3) ..

Indication : *on pourra établir que I, B et R d'une part, et I , D et P d'autre part, sont alignés*.

2°) Prouver que Q est le barycentre de {(A , — 5) (B , 8) (D , 9)}.

En déduire que Q est le milieu de [IC] (d'où, par suite, l'alignement de I, C et Q) .

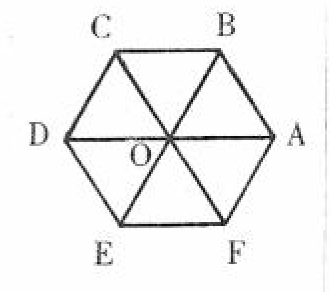
DUREE : 4h

DEVOIR N° 13

- **Durée : 3 heures**

EXERCICE 1

ABCDEF est un hexagone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique. Donner la mesure principale, en radians, et une autre mesure en radians des angles orientés suivants :



1°) a) $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OF})$; **b)** $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{FO})$; **c)** $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA})$; **d)** $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{CO})$;

e) $(\overrightarrow{DF}, \overrightarrow{DC})$; **f)** $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EF})$.

2°) a) $(\overrightarrow{FC}, \overrightarrow{DE})$; **b)** $(\overrightarrow{FD}, \overrightarrow{FE})$; **c)** $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

EXERCICE 2 Notion de polaire

ABC est un triangle et J un point du segment [BC].

Pour la suite, on utilisera le repère cartésien $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

1°) Quelles sont les coordonnées de B et C ?

2°) (Bu), (Cv), (AJ) sont des droites de coefficients respectifs a, a', α .

De plus, (Bu) coupe (AC) en P ; (Cv) coupe (AB) en Q, les droites (Bu) et (Cv) se coupent sur la droite (AJ) au point K distinct de A.

a) Déterminer les coordonnées des points P, Q et K en fonction de a et a' .

b) Montrer que $a(1 + a') = \alpha(1 + a)$.

3°) a) Déterminer les coordonnées du point d'intersection O (lorsqu'il existe) des droites (BC) et (PQ) .

b) Montrer que ces coordonnées sont indépendantes des réels a et a' .

Que peut-on en déduire ?

4°) Démontrer que $\dfrac{\overline{CO}}{\overline{CJ}} = -\dfrac{\overline{BO}}{\overline{BJ}}$.

La droite (AJ) est appelée la polaire du point O par rapport aux droites (AB) et (AC) .

5°) Δ et Δ' sont des droites sécantes en A. O est un point qui n'appartient pas à Δ et Δ' .

Construire la polaire du point O par rapport aux droites Δ et Δ' .

EXERCICE 1

On considère les applications f et g ainsi définies :

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & si \quad x \prec 0 \\ x^2 & si \quad x \geq 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

1°) Déterminer la fonction $f \circ g$.

2°) L'application f est-elle injective ? surjective ?

EXERCICE 1 Relations d'Euler et de Stewart

Soient A, B, C et M 4 points d' un axe Δ . Démontrer les égalités suivantes :

1°) $\overline{MA} \cdot \overline{BC} + \overline{MB} \cdot \overline{CA} + \overline{MC} \cdot \overline{AB} = 0$ (*Euler*) .

2°) $MA^2 \cdot \overline{BC} + MB^2 \cdot \overline{CA} + MC^2 \cdot \overline{AB} + \overline{BC} \cdot \overline{CA} \cdot \overline{AB} = 0$ (*Stewart*) .

DEVOIR N° 14.

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que CA = 6 et CB = 3.

1°) Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan vérifiant : $MA^2 - MB^2 = 60$

2°) a) Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan vérifiant : $MA^2 + 2MB^2 = 45$.

b) Justifier que la somme $MA^2 + 2MB^2$ est minimale si et seulement si M =G.
Que vaut alors cette somme ?

3°) Déterminer l'ensemble E_3 des points M du plan vérifiant : $\frac{MA}{MB} = 2$.

4°) Dessiner sur une même figure , en prenant pour unité le centimètre, les ensembles E_1, E_2 et E_3.

5°) Prouver que les ensembles E_1 et E_2 sont sans point commun.

EXERCICE 1

Soient A,B, C points non alignés du plan, G le barycentre de {(A , 1) (B , 2) (C , — 1)} et M un point quelconque du plan.

Soient les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$ et $\vec{v} = 2\,\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}$.

1°) Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan pour lesquels $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2°) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M du plan pour lesquels $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

EXERCICE 1

O, A, B sont trois points non alignés du plan. On rapporte le plan au repère (O, $\overrightarrow{OA}$,$\overrightarrow{OB}$) .
Pour tout réel m non nul, G_m désigne le barycentre des points pondérés (O, $m - 2$) , (A, 2) et (B , m).

1°) Construire G_1 et G_2.

2°) Déterminer les coordonnées de G_m

3°) a) Soit I le milieu de [OB]. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IG_m}$ et $\overrightarrow{OA}$ sont colinéaires.

b) Déterminer l'ensemble des points G_m lorsque m décrit $\mathbb{R}^*$.

EXERCICE 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) , on considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation : $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$.

1°) Déterminer son centre et son rayon.

2°) Soit $\mathcal{D}$ la droite d'équation $y - x - m = 0$.

Ecrire l'équation du second degré ayant pour racines les abscisses des points communs à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ lorsqu'ils existent.

Ecrire les équations des tangentes à $\mathcal{C}$, parallèles à la droite d'équation y = x (première bissectrice).

3°) On désigne par A et B les points communs à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ lorsqu'ils existent, et par I le milieu de [AB]. Quelles sont en fonction de m , les coordonnées de I ? Quel est l'ensemble des points I ?

. **DUREE : 2h30**

Lycée Cheikh Oumar Foutiyou Tall
2004~2005
Saint-Louis **Classe : 1S$_2$**

Devoir Surveillé n°1 (Premier Semestre)
4h

EXERCICE 1

1°) Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} 4x + 5y + 6z + 7t = 8 \\ 4x + 4y + 4z + 10t = 12 \\ 4x + 4y + z + 12t = 17 \\ 4x + 3y - z + 15t = 25 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} x + 5y - 4z + 3t = 2 \\ 2x + 11y - 7z + 7t = 7 \\ x + 7y - z + 6t = 10 \\ -2x - 9y + 11z - 3t = 3 \end{cases}$

2°) Résoudre les systèmes suivants en discutant suivant les valeurs de m :

c) $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + z = m^2 \end{cases}$ **d)** $\begin{cases} x + y + mz = 1 \\ x + my + z = m \\ x - y + z = 3 \end{cases}$

EXERCICE 2

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $\sqrt{x^2 + x - 2} > 2x$.

2°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x| - |2 - x - x^2| + x > 0$

3°) Etudier, suivant les valeurs de x , le signe de l'expression :

$$\varphi(x) = \frac{-2x + \sqrt{x^2 + x - 2}}{|x| - |2 - x - x^2| + x}$$

EXERCICE 3

Dans chacun des cas suivants, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f:

1°) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}$ **2°)** $f(x) = \sqrt{|-x|}$ **3°)** $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{-x}}{1 + \sqrt{-x}}$

4°) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-6x^2 + 13x + 5}}{\sqrt{2x - 3}}$

5°) $\begin{cases} f(x) = \quad \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{-2x^2 + 11x - 15}} \quad \text{si } x > 1 . \end{cases}$

EXERCICE 4

1°) Etudier la parité des fonctions suivantes :

$f : x \mapsto \dfrac{3x}{|x^4 - x^2 + 1|}$ $g : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{1 - x^2}}$

2°) Dans chacun des cas suivants, étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle D, en utilisant le signe du rapport $\dfrac{f(a) - f(b)}{a - b}$, où a et b sont des réels distincts de D.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 7}$; $D =]-\infty ; -2]$ **b)** $f(x) = x + \dfrac{5}{x}$; $D =]0 ; \sqrt{5}]$.

EXERCICE 5

1°) Discuter et résoudre l'équation d'inconnue x et de paramètre *m* suivante :

$$m^3 x - m^2 - 4 = 4m(x - 1) .$$

2°) Dans le cas où cette équation a une unique solution, déterminer *m* pour que celle-ci soit dans l'intervalle $[-1 ; 1]$.

EXERCICE 6

Les racines *a* et *b* d'une équation du second degré vérifient le système :

$$\begin{cases} a + b - 2ab = 0 \\ mab - (a + b) = 2m + 1 \end{cases} \quad (m \text{ est un paramètre reel}) .$$

1°) Former cette équation ; préciser le choix de *m* pour qu'elle ait des racines réelles.

2°) Préciser la valeur de *m* pour laquelle ces deux racines *a* et *b* soient positives et soient les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure $\sqrt{2}$.

N.B. *Faire au choix les exercices 1, 2, 3, 4, 5 ou 1, 3, 4, 5, 6 .*

DUREE : 3h

Lycée Cheikh Oumar Foutiyou Tall
2001~2002
Saint-Louis **Classe : 1S$_1$**

[redacted]

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle quelconque et G son centre de gravité.
On pose a = BC, b = AC et c = AB.

1°) a) Calculer en fonction de a, b, c, le produit scalaire $\overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC}$.

b) En déduire les produits scalaires $\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}$.

c) Montrer que les deux médianes issues de B et C sont perpendiculaires si, et seulement si, $b^2 + c^2 = 5a^2$.

2°) A tout point M du plan, on associe le nombre $f(M) = \overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$

a) Calculer f (M) en fonction de MG et a, b, c.

b) En déduire l'ensemble des points M tes que f (M) = 0.

EXERCICE 2

Soit ABC un triangle quelconque. On désigne par H son orthocentre, G son centre de gravité, A', B', C' les milieux respectifs des côtés [BC], [CA], [AB] , A", B", C", les milieux des segments [HA], [HB], [HC] et enfin A_1, B_1, C_1, les pieds des hauteurs issues de A , B et C.
1°) Démontrer que les segments [A' A"], [B' B"], [C' C"] sont de même longueur et concourent en un point Ω qui est le milieu de chacun d'eux.
2°) En déduire, d'une part , que les six points A', B', C', A", B", C", appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre, d'autre part, que les trois points A_1, B_1, C_1appartiennent aussi à ce même cercle.

3°) Démontrer que les trois points H, Ω et G sont alignés et que l'on a : $\overrightarrow{H\Omega} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$.

EXERCICE 3

ABC est un triangle rectangle en C. *m* est un réel différent de — 2.
On considère l'application φ définie par : $\varphi(M) = MA^2 + MB^2 + m\,MC^2$.
1°) Soit G le barycentre de {(A , 1) (B , 1) (C , *m*)}.
Montrer que , pour tout point M du plan, on a : $\varphi(M) = (2 + m)\,MG^2 + \varphi(G)$.
2°) Calculer $\varphi(A) + \varphi(B) + m\,\varphi(C)$ en fonction de φ (G) .

En déduire que : $\varphi(G) = \dfrac{(1 + m)\,AB^2}{2 + m}$.

3°) Déterminer l'ensemble (E_m) des points M tels que : $\varphi(M) = AB^2$.
4°) Montrer que le point C est élément de (E_m) pour tout réel *m* différent de — 2.
en déduire une construction de l'ensemble (E_{-3}) correspondant à *m* = — 3.

EXERCICE 4

MAB est un triangle ; R un rayon du cercle circonscrit à MAB.
1°) Montrer que si *m* = MH est la distance de M à la droite (AB) , alors 2 R *m* = AM × BM.
2°) Soit un quadrilatère ABCD inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$.
Montrer que pour tout point M de $\mathcal{C}$, si on désigne par :m_1 la distance de M à (AB), m_2 la distance de M à (BC), m_3 la distance de M à (CD), m_4 la distance de M à (DA), on a :

$$m_1\, m_3 = m_2\, m_4.$$

Lycée Cheikh Oumar Foutiyou Tall
2002~2003
Saint-Louis **Classe : $1S_1$**

Devoir Surveillé n°1 (Premier Semestre)
4h

EXERCICE 1

Soit ABCD un trapèze convexe. Les côtés non parallèles (AD) et (BC) se coupent en I et les diagonales (AC) et (BD) se coupent en J.

1°) On pose $\overrightarrow{IA} = k\,\overrightarrow{ID}$ et $\overrightarrow{JA} = k'\,\overrightarrow{JC}$.

Démontrer que : $\overrightarrow{AB} = k\,\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AB} = k'\,\overrightarrow{CD}$. Comparer k et k '.

2°) La droite (IJ) coupe (AB) en E et (DC) en F.

Démontrer que : $\dfrac{\overline{IE}}{\overline{IF}} = -\dfrac{\overline{JE}}{\overline{JF}}$.

EXERCICE 2

Etant donné un parallélogramme ABCD, on construit les points P, Q et R definis par :

$\overrightarrow{AP} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AR} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ et Q est tel que PARQ est un parallélogramme.

Le but de l'exercice est de démontrer que les droites (BR), (CQ) et (DP) sont concourantes.

1°) Faire une figure soignée.

2°) a) Trouver deux réels x_1 et x_2 tels que P soit le barycentre de $\{(A, x_1)(B, x_2)\}$.

b) Trouver deux réels y_1 et y_2 tels que R soit le barycentre de $\{(A, y_1)(B, y_2)\}$.

c) Montrer que BR) et (DP) sont sécantes en I barycentre de $\{(A, 1)(B, 2)(D, 3)\}$.

3°) a) Prouver que Q est le barycentre de $\{(A, -5)(B, 8)(D, 9)\}$.

b) En déduire que Q est le milieu de [IC] puis l'alignement de I, C, Q.

4°) Conclure en prouvant que (BR), (CQ) et (DP) sont concourantes.

EXERCICE 3

Dans chacun des cas suivants, on demande :

— de déterminer le domaine de définition de g o f .

— de calculer (g o f) (x) .

1°) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{1 - x}$

3°) $f :]-\infty ; 4] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{4 - x}$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{9 - x^2}$

2°) $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x + 3$ et $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$

EXERCICE 4

Dire si chacune des applications suivantes est injective, surjective ou bijective.

$f_1 : [0 ; 1] \to [2 ; 5]$, $x \mapsto 3x + 2$

$f_2 : [0 ; 1] \to \mathbf{R}$, $x \mapsto 3x + 2$

$f_3 : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$

$f_3 : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^2$

.

DEVOIR N° 18

EXERCICE 1

Soit $P(x) = \dfrac{a^2(x - b)(x - c)}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{b^2(x - c)(x - a)}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{c^2(x - a)(x - b)}{(c - a)(c - b)}$.

1°) Calculer $P(a)$, $P(b)$, $P(c)$.

2°) En déduire que : $\forall\ x \in \mathbb{R} :\ P(x) = x^2$.

EXERCICE 2

1°) Déterminer les polynômes f (x) de degré 2 vérifiant la relation :

$P(x) - P(x - 1) = x^2 + x$, quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

2°) En déduire la valeur de la somme $1\times2 + 2\times3 + 3\times4 + \dots + 2006 \times 2007$.

EXERCICE 3

a) Déterminer les polynômes du troisième degré dont les divisions par $(x - 1)$, par $(x - 2)$ par $(x - 3)$,ont le même reste 36 .

b) Déterminer celui d'entre eux qui est divisible par $(x - 4)$.

EXERCICE 4

Soit k un réel strictement positif et f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, $f(x - k) = - f(x + k)$. Montrer que la fonction f est périodique, et en préciser une période .

EXERCICE 5

Dans chacun des cas suivants, prouver que la courbe représentative de la fonction f admet l'élément de symétrie indiqué :

1°) $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 + 8x + 9}$ axe de symétrie : $\Delta : x = -2$.

2°) $f : x \mapsto \dfrac{(x + 1)^2}{x^2 + 1}$ centre de symétrie : $\Omega\ (0 , 2)$.

EXERCICE 6

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [1 ; 5]$ par : $f(x) = 1 - \sqrt{2x - 1}$.

1°) En écrivant f comme composée de fonctions simples, étudier les variations de f.

2°) Démontrer que f est une bijection de $[1 ; 5]$ vers $[-2 ; 0]$.

Définir la bijection réciproque f^{-1} et calculer $f^{-1}(x)$.

DUREE : 2h30

DEVOIR N° 19

EXERCICE 1

Les différentes questions sont indépendantes.

1°) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{-x}}{2x+1}$ **b)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{-6x^2+13x+5}}{2x-3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{-x}}{1+\sqrt{-x}}$

d) $f(x) = \dfrac{x-5}{2|x|-3}$

2°) Soient les fonctions f et g définies par : $f(x) = -1$ et $g(x) = \dfrac{\sqrt{x^2}}{|x|}$.

Trouver un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ tel que les restrictions de f et g à D soient égales.

3°) Dans chacun des cas suivants, préciser $g \circ f$ et $f \circ g$. On donnera l'ensemble de définition de $g \circ f$ et $f \circ g$.

a) $f(x) = |x|$ et $g(x) = \sqrt{x}$ **b)** $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

4°) Soit la fonction numérique f définie par : $f(x) = \sqrt{2x-1} + 1$.

1°) Montrer que f est une bijection de $[\frac{1}{2}\,;+\infty[$ sur $(1\,;+\infty[$.

2°) Préciser f^{-1}.

EXERCICE 2

Résoudre par la méthode du pivot les systèmes suivants :

1°) $\begin{cases} x+3y-2z=2 \\ 2x-y+5z=15 \\ -3x+2y+z=-5 \end{cases}$ **2°)** $\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 2x-y+3z-t=19 \\ x-y+z+2t=1 \\ 3x+2y-2z-3t=0 \end{cases}$

EXERCICE 1 ***Programmation linéaire***

Un artisan fabrique des sacs de toile et cuir de deux types différents A et B. La réalisation d'un sac de type A demande 0, 50 m² de toile et 0,40 m² de cuir, celle d'un sac de type B demande 0, 60 m² de toile et 0, 68 m² de cuir.

L'artisan dispose chaque semaine de 15 m² de toile et de 14 m² de cuir. Les profits rélisés sont 40F par sac A et de 60F par sac B.

1°) Choisir les deux inconnues x et y.
Traduire les contraintes de l'artisan par des inéquations à deux inconnues x et y.

2°) Traduire graphiquement les inéquations.
En déduire la zone Z des productions (x , y) possibles.

3°) a) Calculer en fonction de x et y le profit p (x , y) réalisé par semaine.
b) En traçant sur le graphique des droites de la forme p (x , y) = k, déterminer le programme de fabrication qui assure uin profit maximal et calculer ce profit.

DUREE : 3h

DEVOIR N° 20

EXERCICE 1

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 - x^2 - x - 3$.

1°) Vérifier que $\frac{3}{2}$ est une racine de P(x) .

2°) Résoudre dans **R** l'équation P(x) = 0.

3°) Résoudre dans **R** l'inéquation : $\frac{2x^3 - x^2 - x - 3}{-x^2 + 3x - 2} < 0$.

EXERCICE 1

1°) Discuter suivant les valeurs du paramètre *m* l'existence et le signe des racines des équations suivantes :

a) $(m^2 - 4)x^2 - 2(m + 2)x + 2 = 0$ **b)** $(m - 3)x^2 + (2m - 1)x + m + 1 = 0$

2°) Résoudre et discuter l'inéquation suivante:

$$m x^2 - (2m + 1)x + 2 < 0 .$$

EXERCICE 1

1°) Soit $P(x) = x^3 - 7x + 6$.

Trouver une racine évidente de P(x), puis factoriser P(x) en produit de polynômes du premier degré.

2°) On considère l'équation (E) suivante : (E) : $8x^3 + 12x^2 - 50x + 21 = 0$.

a) On pose x = y + h. en remplaçant x par y + h dans l'équation (E), on obtient une nouvelle équation (E ') d'inconnue y.
Quelle valeur faut-il donner à h dans l'équation (E ') pour que le coefficient de y^2 soit nul ?

b) h ayant la valeur trouvée en a) , résoudre alors l'équation (E ') , puis l'équation (E) .
Indication : *Utiliser la question 1°.*

EXERCICE 1

Résoudre dans **R** les équations ou inéquations suivantes :

a) $4x^2 + 8x + \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2} - 37 = 0$.

(*On pourra poser* $X = x + \frac{1}{x}$ *et exprimer* $x^2 + \frac{1}{x^2}$ *en fonction de X*)

b) $\sqrt{-x + 1} + \sqrt{x + 3} = 2$.

c) $\sqrt{-x^2 + 3x + 2} \geq x - 1$

d) $\sqrt{2x^2 + 5x - 7} < -x + 3$.

DUREE : 2H

DEVOIR N° 21

EXERCICE 1

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{-x}}{1 - \sqrt{-x}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{-6x^2 + 13x + 5}}{\sqrt{2x - 3}}$ **c)** $f(x) = \dfrac{2x - 3}{6x^2 - |13x - 5|}$

d) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{|-x|}}$.

EXERCICE 2

Dans chacun des cas suivants, on demande de représenter, dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) , la fonction considérée :

1°) On sait que : a) f est impaire b) si $x \in [0 ; 4]$, alors $f(x) = x$.
si $x \in]4 ; +\infty[$, alors $f(x) = 4$.

2°) On sait que : a) f est paire b) si $x \in [0 ; 3[$, alors $f(x) = 2$.
si $x \in [3 ; +\infty[$, alors $f(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

3°) On sait que : a) f est paire b) f est périodique, de période 2
d) si $x \in [0 ; 1]$, alors $f(x) = x$.

- Tracer $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-5 ; 5]$

EXERCICE 3

Soient f et g les fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$ et $g(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$

Déterminer $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ et $g \circ g$ (domaine de définition et expression pour chaque fonction) .

EXERCICE 4

Soit $P(x) = 6x^3 + 25x^2 + 3x - 4$.

1°) Vérifier que (-4) est une racine de P puis factoriser P(x) en polynômes du 1er degré.

2°) a) Résoudre l'équation $P(x) = 0$.

b) En déduire les solutions de l'équation : $6(x^2 - 20)^3 + 25(x^2 - 20)^2 + 3(x^2 - 20) - 4 = 0$

3°) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $P(x) > 0$.

EXERCICE 5

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

a) $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{5 - 2x} = \sqrt{4x + 7}$ **b)** $\sqrt{3x + 1} - \sqrt{x - 4} = 3$

c) $\sqrt{-5x^2 + 3x + 2} > 5x - 1$ **d)** $\sqrt{4x^2 - 1} + 4x < 0$

EXERCICE 6

Soient les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto -|x|$ $\qquad$ $x \mapsto \dfrac{-x^2}{|x|}$

1°) f et g sont-elles égales ?

2°) Déterminer la plus grande partie E de $\mathbb{R}$ sur laquelle f et g ont la même restriction.

<u>EXERCICE 7</u>

Dans chacun des cas suivants, établir que $\mathcal{C}_f$, courbe représentative de f dans un repère orthonormé du plan, admet l'élément de symétrie indiqué :

1°) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 3}{2x^2 + 8x + 9}$ axe de symétrie: $\mathcal{D} : x = -2$.

2°) $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x + 4}{x^2 + 4x + 6}$ centre de symétrie: $I(-2 ; 1)$.

<u>EXERCICE 8</u>

Soi $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan .

1°) Etudier la parité de f. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?

2°) **a)** Montrer que : $\forall x \geq 0$, $f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

b) Calculer f (1). Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?

3°) **a)** Soient x_1 et x_2 deux réels positifs et distincts (c'est-à-dire : $x_1 \geq 0$; $x_2 \geq 0$ et $x_1 \neq x_2$).
Soit $T(x_1, x_2)$ le taux devariation de f entre les réels x_1 et x_2 . Montrer que :

$$T(x_1, x_2) = \frac{1 - x_1x_2}{(1 + x_1^{\,2})(1 + x_2^2)}$$

Etudier son signe si x_1 et x_2 appartiennent à $[0 ; 1]$, puis s'ils appartiennent à $[1 ; +\infty[$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $[0 ; 1]$ et sur $[1 ; +\infty[$.

c) En utilisant la parité de f, donner sans calcul le sens de variation de f sur $]-\infty ; -1]$ et sur $[-1 ; 0]$.

d) Dresser le tableau de variation de f sur $[-2 ; 2]$.

e) Etablir sur $\mathbb{R}^*$ la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ où $\mathcal{C}_g$ est la courbe représentative de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

<u>DUREE : 4H</u>

DEVOIR N° 22.

EXERCICE 1

Soit IJK un triangle quelconque .

L le barycentre du système {(I , 1) (J , — 2) (K , — 1)} ;

M le barycentre du système {(I , — 2) (J , — 1) (K , 1)} ;

N le barycentre du système {(I , — 1) (J , 1) (K , — 2)} .

1°) Construire les points L, M et N.

2°) Soit K ' et K " les centres de gravité des triangles IJK et LMN.
Montrer que K ' et K " sont confondus.

EXERCICE 2

Dans le plan, on considère un triangle ABC rectangle en A tel que : AB = *a* et AC = 2*a*

($a \in \mathbb{R}$) . On appelle I le milieu de [AC] .

1°) Soit J le barycentre de {(A , 3) (C , — 1) } . Montrer que A est le milieu de [IJ].

2°) Déterminer le point G barycentre des points A, B et C affectés des coefficients respectifs 3, 2 et — 1.

3°) Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que : $3\ AM^2 + BM^2 - CM^2 = 6a^2$.
Indication : *On remarquera que I est un élément de cet ensemble*.

EXERCICE 3

Soit un triangle ABC rectangle en A. H est le pied de sa ahauteur issue de A. Le cercle ($\mathcal{C}$) de diamètre [AH] recoupe (AB) et (AC) respectivement en M et N.

1°) a) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que B, M, N et C soient cocycliques.

b) Montrer alors que B, M, N et cC sont sur un même cercle (Γ) .

c) Le cercle ($\mathcal{C}$ ') de centre A et de rayon AH coupe (Γ) en T et T ' .
Montrer que (AT) et (AT ') sont tangentes au cercle (Γ) .

EXERCICE 4

Soit ABB ' un triangle. on construit le carré ABCD tel que les points C et D n'appartiennent pas au demi-plan de frontière (AB) qui contient B ' ; le carré AB 'C 'D tel que C ' et D ' n'appartiennent pas au demi-plan de frontière (AB ') contenant B. on désigne par B et D les milieux des segments [BB '] et [DD '].

1°) Comparer les produits scalaires $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB'}$ et $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD'}$.

2°) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{BD'} \cdot \overrightarrow{B'D}$; que peut-on dire des droites (BD ') et (B'D) ?

3°) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{BB'}$ et $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DD'}$; en déduire que les droites (AN) et (AM) sont respectivement perpendiculaires aux droites (BB ') et (DD ').

DUREE : 2H

DEVOIR N° 23

EXERCICE 1

Après avoir déterminé leur ensemble de définition, calculer les limites aux bones de celui-ci, des fonctions suivantes définies par :

1°) $f(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 3x}$ **2°)** $g(x) = 2x + 1 - \dfrac{x}{x^2 + x - 2}$

3°) $h(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 1} - \sqrt{2x^2 - x - 1}$ **4°)** $l(x) = \dfrac{\sqrt{5x^2 + x}}{2x + 1}$

5°) $m(x) = 3x - 2 + \sqrt{|x - 2|}$

EXERCICE 2

Mêmes questions qu'à l'exercice 1 pour les fonctions f et g définies par :

$f(x) = \dfrac{x^4 - 4}{x^3 + x^2 - 2x - 2}$ $g(x) = (2x3 - 5x^2)\left(\dfrac{1}{3x} + \dfrac{7}{x^2}\right)$.

EXERCICE 3

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 - a\sqrt{-x + 2} & \text{si } x < -1 \\ \dfrac{x + 2}{x - 1} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - ab & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$.

1°) Peut-on déterminer *a* pour que f soit continue en -1 ? Si oui, préciser la valeur de *a*.
2°) Peut-on déterminer *a* et *b* pour que f soit continue en 1 ?

EXERCICE 4

Soit la fonction f définie par : $f(x) = ax + b + \sqrt{x^2 + 1}$

Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. (On discutera suivant les valeurs de *a* dans $\mathbb{R}$) .

DUREE : 2H

DEVOIR N° 24

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle quelconque et A, B, C les trois angles intérieurs de celui-ci.

Montrer qu' on a toujours : $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$

EXERCICE 2

Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère orthonormal . On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre I(4, — 1) et de rayon $\sqrt{5}$ et le point A (9 , 4).

1°) Vérifer que A est extérieur au cercle $\mathcal{C}$.

2°) Déterminer les équations des tangentes à $\mathcal{C}$ issues de A.

EXERCICE 3

Résoudre :

a) Dans $\mathbb{R}$: $\sin x + \cos x = \frac{1}{2 \sin x}$ **b)** Dans $[-\pi ; \pi]$: $\cos x + \cos 2x + \cos 3x \leq 0$.

PROBLEME

Soit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O de rayon R ; on considère un point F intérieur au cercle, et deux droites Δ et Δ' sécantes en F et orthogonales . Δ coupe $\mathcal{C}$ en A et C et Δ' coupe $\mathcal{C}$ en B et D.(Faire une figure).

On désigne par M et N les milieux respectifs de [AC] et [BD].

I / CALCUL de $AB^2 + CD^2$ et $AD^2 + CD^2$

1°) On désigne par G l'isobarycentre de A, B, C et D.

a) Montrer que G est le milieu de [MN] .

b) Démontrer que le quadrilatère OMFN est un rectangle ;
En déduire que G est le milieu de [OF]

2°) Démontrer que $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FD} \cdot \overrightarrow{FB} = OF^2 - R^2$.

On pourra faire intervenir les points A' et B' diamétralement opposés à A et B .

3°) Démontrer que : $FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2 = 4R^2$.

En déduire que $AB^2 + CD^2 = AD^2 + CB^2 = 4R^2$.

4°) On fait pivoter les droites Δ et Δ' autour de F de façon à ce qu'elles restent orthogonales. Ces droites permettent de définir les points A, B, C et D ainsi que leur isobarycentre G.

Que peut-on dire du point G, de la quantité $FA^2 + FB^2 + FC^2 + FD^2$, ainsi que de $AB^2 + CD^2$ et de $AD^2 + CB^2$?

II/ POINTS COCYCLIQUES

On désigne par I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [CD], [BC], [DA] .

On appelle P, Q, S et T les projetés orthogonaux de F sur ces coordes.

1°) Démontrer que IJKL est un rectangle de centre G . On appelle Γ son cercle circonscrit..

2°) Montrer (en utilisant I. 2°) que $\overrightarrow{FI} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$; en déduire que Q appartient à Γ.

3°) Montrer que Γ contient les points P, S et T.

4°) On veut à présent calculer le rayon r de Γ en fonction de R et de OF .

Démontrer, en utilisant la formule de la médiane, que : $r^2 = GI^2 = \frac{1}{2}[R^2 - \frac{1}{2} OF^2]$.

DUREE : 4H

DEVOIR N° 25 .

EXERCICE 1

Soient a et b deux entiers naturiels tels que $b = a + 1$.

1°) Démontrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a^2 + b^{2n} - 1$ est divisible par ab .

2°) En déduire un diviseur de $121 + 12^{2004} - 1$.

3°) Démontrer que si n est impair, $X^n + 1$ est factorisable par $X + 1$.

4°) Soit P(X) et Q(X) deux polynômes tels que : $Q(X) = P(X) + 1$.

Démontrer que $[P(X)]^{2n} + [Q(X)]^{n-1}$ est factorisable par $P(X) .Q(X)$.

EXERCICE 2

Les deux questions sont indépendantes.

1°) Soit f une fonction et k un réel strictement négatif tels que, pour tout réel x, on ait :

$$f(x - 2k) = - f(x + k)$$

Montrer que f est périodique et préciser la période.

2°) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 4}}{1 - \sqrt{x^2 - 4}}$.

a) Déterminer son ensemble de définition.

b) Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel y, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = y$, où x est l'inconnue réelle.

c) L'application $f : D \to \mathbb{R}$ est-elle injective ? surjective ?

d) Déterminer deux parties E et F de $\mathbb{R}$, les plus grandespossibles, pour l'application

$$g : E \to F$$
$$x \mapsto f(x)$$

soit bijective. Défin r alors g^{-1} .

EXERCICE 3

Soient A et B deux points d'une droite (Δ) , a et b deux nombres réels tels que : $0 < a < b$.

1°) Démontrer qu'il existe deux points C et D tels que C soit le barycentre des points (A , a) et (B , b) , et D soit le barycentre des points (A , a) et (B , — b) .

Préciser la position de ces points par rapport aux points A et B.

2°) La droite (Δ) est munie du repère (A , B).

Calculer, en fonction de a et b, les abscisses des points C et D et vérifier que :

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = -\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

3°) Démontrer que :

a) A est le barycentre des points (C , a + b) et (D , a — b) ;

b) B est le barycentre des points (C , a + b) et (D , b — a) .

EXERCICE 4

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

1°) On donne un triangle ABC et sa hauteur AH.

a) Prouver que : $\dfrac{HB}{\tan C} = \dfrac{HC}{\tan B}$

b) En déduire des nombres p, q et r tels que l'orthocentredu triangle soit le barycentre des points A, B et C affectés de ces coefficients.

c) Soit G le centre de gravité du triangle et P son orthocentre. Prouver que si les droites (GP) et (BC) sont parallèles, alors $\tan B \tan C = 3$.

d) Soit [BD] une hauteur du triangle ABC.

Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ sous la forme ag sous la forme $\alpha\,\overrightarrow{AB} + \beta\,\overrightarrow{AC}$.

2°) On donne des points A, B, C alignés sur un axe. On note respectivement a, b, c leurs abscisses. Prouver que la somme $f(M) = (c - b)\,MA^2 + (a - c)\,MB^2 + (b - a)\,MC^2$ est indépendante de M.

<u>DUREE : 4H</u>

DEVOIR N° 26 .

EXERCICE 1

Soit ABC un triangle. On pose : AB = c, BC = a et AC = b .

I. On désigne par I le point d'intersection de (BC) avec la bissectrice de l'angle Â .
La droite parallèle à (AI) passant par C coupe (AB) en D.

1°) Démontrer que ACD est isocèle et que : $\frac{IB}{IC} = \frac{c}{b}$.

2°) En déduire que les barycentres respectifs de {(B , b) (C , c) } de {(A , a) (B , b) } et de {(A , a) (C , c) } .

3°) Démontrer que le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC est le barycentre de {(A , a) (B , b) (C , c)} .

II. La bissectrice extérieure de l'angle Â coupe la droite (BC) en K. La parallèle à (AK) passant par C coupe (AB) en C ' .

1°) Démontrer que le triangle ACC ' est isocèle.

2°) Démontrer que K est le barycentre de {(B , b) (C , — c) }.

III. On suppose que le triangle ABC est non isocèle en A.
Les bissectrices des angles B et C coupent respectivement les côtés [AB] et [AC] en I ' et J.
Les droites (I 'J) et (BC) se coupent en K.

1°) Ecrire K comme barycentre des points I ' et J , puis comme barycentre des points B et C.

2°) En déduire que (AK) est la bissectrice extérieure de l'angle Â du triangle ABC.

EXERCICE 1

Etudier les limites suivantes en a :

1°) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{|x+2|}} - \frac{x}{\sqrt{|x+1|}}$ $a = -\infty$ **2°)** $f(x) = x \sin\frac{1}{x} - 2\frac{\sin x}{x}$ $a = +\infty$

3°) $f(x) = \frac{1 - \sin x - \cos x}{1 - \sin x + \cos x}$ $a = \frac{\pi}{2}$ **4°)** $f(x) = \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{\tan x}$ $a = 0$

EXERCICE 1

Soit l'équation $x^3 + 3px + q = 0$ (1) dans laquelle p et q sont des nombres réels non nuls vérifiant $4p^3 + q^2 \leq 0$.

1°) a) Soit λ un nombre réel non nul. Démontrer que les systèmes suivants sont équivalents :

$$\begin{cases} x = \lambda \cos y \\ x^3 + px + q = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = \lambda \cos y \\ \cos^3 y + 3\frac{p}{\lambda^2}\cos y + \frac{q}{\lambda^3} = 0 \end{cases}$$

b) En calculant cos(2y + y), démontrer que, pour tout nombre réel y,

$$\cos^3 y = 4\cos^3 y - 3\cos y$$

Posons $\lambda = 2\sqrt{-p}$ (on peut remarquer que $4p^3 + q^2 \leq 0$ et $p \neq 0 \Rightarrow p < 0$) .

Démontrer qu'alors $\cos^3 y + 3\frac{p}{\lambda^2}\cos y + \frac{q}{\lambda^3} = 0$ peut s'écrire : $\cos 3y = \frac{q}{2p\sqrt{-p}}$.

c) Démontrer que si $4p^3 + q^2 \leq 0$, on a : $-1 \leq \frac{q}{2p\sqrt{-p}} \leq 1$.

Soit a un nombre réel vérifiant $\cos a = \frac{q}{2p\sqrt{-p}}$.

Résoudre l'équation d'inconnue y : $\cos 3y = \cos a$ (exprimer les dolutions en fonction de a) .
En déduire trois solutions de l'équation $x^3 + 3px + q = 0$.

2°) <u>APPLICATIONS NUMERIQUES</u>

a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{\sqrt{2}}{8} = 0$.

En déduire les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

b) Nous souhaitons résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $X^3 + 3X^2 - 6X + 1 = 0$

Démontrer, en posant $X = x + c$ que cette équation peut se mettre sous la forme
$x^3 + 3px + q = 0$ (où c, p et q sont trois réels à déterminer) .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation obtenue.

En déduirebles solutions de l'équation : $X^3 + 3X^2 - 6X + 1 = 0$.

<u>DUREE : 4H</u>

DEVOIR N° 27

EXERCICE 1

Soient les fonctions f, g, h et k définies par :

$f(x) = x^2 \left(\cos\frac{1}{x} - 2\right)$; $g(x) = \dfrac{x^2 - x\sin x}{x + \sin x}$; $h(x) = \dfrac{1 - \sqrt{2}\cos x}{1 - \sqrt{2}\sin x}$

et $k(x) = \dfrac{\tan x - 1}{2\cos x - \sqrt{2}}$.

Calculer les limites :

a) de f en $+\infty$ et en 0 . **b)** de g en $+\infty$ et en 0 . **c)** de h et k en $\frac{\pi}{4}$ (on posera $x = u + \frac{\pi}{4}$) .

EXERCICE 2

1°) La fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - x} - 1}{x}$ a-t-elle un prolongement par continuité en 0? Si oui, définir celui-ci.

2°) Calculer les limites de ce prolongement par continuité aux bornes de son ensemble de définition.

EXERCICE 3

Soit les fonctions A et B définies par :

$A(x) = (x - 1)\left(1 + \dfrac{1}{x - 1} + \dfrac{1}{(x - 1)^2}\right)$ et $B(x) = \dfrac{1}{(x - 1)^2} - \dfrac{ax}{(x^2 - 1)^2}$ ($a \in \mathbb{R}$) .

1°) Calculer les limites de A (x) lorsque x tend vers 1, puis lorsque x tend vers $-\infty$.

2°) Calculer les limites de B (x) en $+\infty$ et en 1 (on distinguera les cas : $a < 4$; $a = 4$; $a > 4$) .

EXERCICE 4

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} - (x - 1)$.

1°) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2°) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x)}{x - 1}$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x - 1}$

EXERCICE 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par: $f(x) = |\,x^2 + x + 1 - |x - 1|\,|$.

1°) Montrer que $f = v \circ (h - v \circ g)$ avec $v : x \mapsto |x|$; $g : x \mapsto x - 1$; $h : x \mapsto x^2 + x + 1$

2°) En utilisant les théorèmes génértaux sur les fonctions continues, montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3°) Calculer, si elles existent , les limites suivantes :

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

DUREE : 3H

DEVOIR N° 28

EXERCICE 1

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1°) $f : x \mapsto \sqrt{x(1 - x^2)}$ **2°)** $g : x \mapsto \sqrt{\dfrac{1 - x^2}{x^2 + 2x}}$

3°) $h : x \mapsto \sqrt{1 - x} + \sqrt{\dfrac{1}{x}}$ **4°)** $h : x \mapsto \dfrac{x^2}{|2x + 1| - 2}$

EXERCICE 2

Etudier la parité de la fonction f lorsque :

a) $f(x) = x^3 + 3x - 3$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2}{5x^2 - 3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{8x^3 - 2x}{4x^5}$

d) $f(x) = \dfrac{x}{4x^2 - 3}$ **e)** $f(x) = x\sqrt{x^3 + 3x}$

EXERCICE 3

Etudier le sens de variation des fonctions suivantes :

a) $f : x \mapsto (2x + 3)^2$ **b)** $f : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ **c)** $f : x \mapsto \sqrt{x + 2}$

d) $f : x \mapsto -5x + 3$ **e)** $f : x \mapsto \dfrac{1}{(x - 1)^2}$ **f)** $f : x \mapsto |x - 1|$

EXERCICE 4

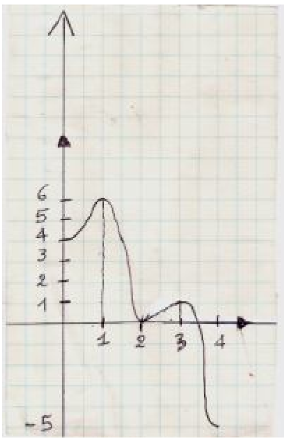
Soit f une fonction périodique, de période 1, telle que :

$$\begin{cases} \text{si } x \in [0 ; \frac{1}{2}] : f(x) = x \\ \text{si } x \in [\frac{1}{2} ; 1) : f(x) = -x + 1 \end{cases}$$

Faire la représentation graphique de f pour $x \in [-4 ; 5]$.

EXERCICE 5

Soit la fonction f représentée graphiquement ci- dessous :



1°) Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle [0 ; 4] .
2°) Déterminer les extremums relatifs de f .
3°) f est-elle monotone sour [0 ; 2] ? Justifier.
4°) Résoudre graphiquement l'équation : f (x) = 0 .
5°) Résoudre graphiquement les inéquations :

a) $f(x) \leq 4$ **b)** $f(x) \geq 0$

EXERCICE 6

Soit f et g les fonctions définies par : $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3}$ et $g(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 2}$.

1°) Préciser le domaine de définition des fonctions : $f \circ g$; $g \circ f$; $f \circ f$ et $g \circ g$.
2°) Calculer : $(f \circ g)(x)$; $(g \circ f)(x)$; $(f \circ f)(x)$; $(g \circ g)(x)$.

EXERCICE 7

On considère le polynôme Q (x) suivant :
$Q(x) = (m^3 - m^2 - 6m)x^3 - (m^2 + m - 2)x^2 + (m - 1)x + 2m - 1$.
Déterminer m pour que :
a) deg (Q) = 3 **b)** deg (Q) = 2 **c)** deg (Q) = 1 .

EXERCICE 8

1°) Déterminer un polynôme P de degré 3 vérifiant la relation : $P(x) - P(x - 1) = x^2 + x$
2°) En déduire l'expression en fonction de n de la somme :

$S = (1 \times 2) + (2 \times 3) + (3 \times 4) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots n(n + 1)$

EXERCICE 9

Soit $P(x) = x^4 + 2x^3 - 16x^2 - 2x + 15$
1°) Montrer que 1 et -1 sont racines de P (x) puis donner une factorisation de P (x) .
2°) Résoudre l'équation P (x) = 0 et l'inéquation $P(x) \leq 0$.

Conseil : *Ne pas passer plus de 20 minutes sur un seul exercice.*

DUREE : 3H

DEVOIR N° 29

EXERCICE 1

Soient un demi-cercle de centre O, de rayon R, de diamètre [AB], [OC] le rayon perpendiculaire à (AB), M un point du demi-cercle situé sur l'arc BC , D le point d'intersection de la droite (AB) et de la tangente en M au cercle.
On se propose de déterminer le point M de façon que :

$$MA = m\ MD,$$

où m est un paramètre réel strictement positif.

1°) Soit x une mesure en radians de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM})$.

Justifier que : $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}) = 2x\ [2\pi]$. Encadrer x.

2°) Exprimer les distances AM et MD en fonction de R et x.
En déduire que le point M répond à la question si et seulement si x vérifie les deux
u ' et u " conditions :

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} 2\cos x = m \tan x \\ 0 < x < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

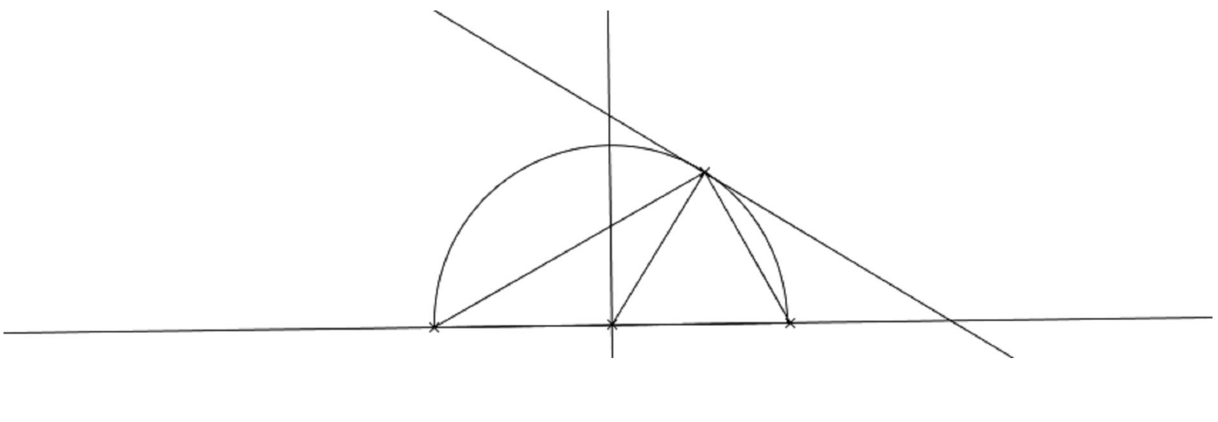
3°) Exprimer tan 2x en fonction de sin x et cos x . En posant u = sin x, démontrer que la résolution du système (I) se ramène à celle du système :

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} 2u^2 + m u - 1 = 0 \\ 0 < u < \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

4°) On considère l'équation du second degré : $2u^2 + m u - 1 = 0$
Montrer que cette équation admet deux racines u ' et u " de signes contraires, puis classer $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ par rapport à u ' et u " .

5°) Déduire de la question précédente que le système (II) admet, quel que soit $m \in \mathbb{R}^+$, une solution unique u , dont on donnera l'expression en fonction de m .

6°) Conclure quant au problème posé.



EXERCICE 2

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$

1°) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2°) Démontrer que, pour tout x élément de D_f, on a : $f(x) = \dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

3°) Démontrer que la fonction f est impaire.

4°) Etudier $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1}$. Quie peut-on en déduire?

5°) Sur quelle partie de D_f la fonction f est-elle dérivable ?
Déterminer sa fonction dérivée f '.

6°) Dresser le tableau de variation de f .

EXERCICE 3

Le plan est rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O, et A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, les points de $\mathcal{C}$ tels que les angles $(\vec{i}, \overrightarrow{OA_k})$ aient pour mesures respectives $\dfrac{2k\pi}{5}$.

1°) Faire une figure. On constatera que les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 sont les sommets consécutifs d'un pentagone régulier convexe.

2°) Soit $\vec{S}$ le vecteur : $\vec{S} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4}$.

a) Démontrer que $\vec{S}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA_0}$.

b) Démontrer que $\vec{S}$ est aussi colinéaire à $\overrightarrow{OA_1}$

(**<u>Indication</u>**: *utiliser les coordonnées de points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$*)

c) En déduire que $\vec{S}$ est le vecteur nul, puis les égalités :

(1) $\sin\dfrac{2\pi}{5} + \sin\dfrac{4\pi}{5} + \sin\dfrac{6\pi}{5} + \sin\dfrac{8\pi}{5} = 0$

(2) $1 + \cos\dfrac{2\pi}{5} + \cos\dfrac{4\pi}{5} + \cos\dfrac{6\pi}{5} + \cos\dfrac{8\pi}{5} = 0$

3°) a) En utilisant l'égalité (2) précédente, démontrer que $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ est une solution de l'équation : $4X^2 + 2X - 1 = 0$.

b) Calculer : $\cos\dfrac{2\pi}{5}$, $\cos\dfrac{4\pi}{5}$, $\sin\dfrac{2\pi}{5}$, $\tan\dfrac{2\pi}{5}$.

4°) Soit Ω le point de coordonnées $(-\dfrac{1}{2}\,; 0)$ et J le point de coordonnées (0 , 1) .

a) Déterminer une équation du cercle ($\mathcal{C}$) de centre Ω et de rayon ΩJ .

b) Le point d'intersection du cercle ($\mathcal{C}$) et de l'axe des abscisses est positive est noté K.

Vérifier que l'abscisse de K est $2\cos\dfrac{2\pi}{5}$.

c) Que représente la droite (EB) pour le segment [OK] ?

Déduire de ce qui précède une construction à la règle et au compas du pentagone régulier.

EXERCICE 4

Dans cet exercice, on admettra le résultat suivant :

« Pour tout réel a , il exixte un unique réel b tel $b^3 = a$ ».

b est appelé racine cubique de a et noté $\sqrt[3]{a}$.

On considère deux réels p et q tels que : $4p^3 + 27q^2 > 0$ et on note f le polynôme défini pour x réel par : $f(x) = x^3 + px + q$.

1°) Soit u et v deux réels solutions du système : (I) $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases}$

Montrer que $f(u + v) = 0$.

2°) a) Résoudre le système : (II) $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$

b) En déduire que le réel

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\left(\sqrt[3]{-q + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{3}}} + \sqrt[3]{-q - \frac{1}{3}\sqrt{\frac{4p^3 + 27q^2}{3}}}\right)$$

est solution de l'équation $x^3 + px + q = 0$. *On admettra que c'est la seule*.

3°) On cherche à résoudre l'équation : $y^3 + 3y^2 + (3 - \sqrt[3]{2})\,y + 3 = 0$ $(\ast)$.

a) On effectue pour cela le changement de variable $y = x + h$.

Déterminer h de façon que l'équation en x obtenue à partir de $(\ast)$ soit de la forme $x^3 + px + q = 0$.

b) Calculer p et q et déterminer le signe de $4p^3 + 27q^2$.

c) Résoudre alors l'équation $(\ast)$.

DUREE : 4H

DEVOIR N° 30

EXERCICE 1

1°) Résoudre les systèmes d'équations :

$$\begin{cases} x+z=2y \\ xy=z^2 \\ xyz=216 \end{cases}$$ (on observera que 6^3 =216)

$$(II)\begin{cases} -\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=-6 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=10 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}-\frac{1}{z}=0 \end{cases}$$

2°) Discuter, suivant les valeurs de *m* dans $\mathbb{R}$, et résoudre le système d'équations :

$$\begin{cases} mx+y+z=1 \\ x+my+z=m \\ x+y+mz=m^2 \end{cases}$$

EXERCICE 2

1°) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

a) $-1\leq\dfrac{10x^2-3x-2}{-x^2+3x-2}\leq 1$ **b)** $1+\dfrac{x}{x-m}=m$ (on discutera suivant les valeurs de *m*)

2°) Déterminer les ensembles de définition des fonctions f et g définies par :

f (x) = $\dfrac{1}{|x-1|-\sqrt{x^2-3x-2}}$ et g (x) = $\sqrt{3\sqrt{-x^2+x+6}-2(2x-3)}$

EXERCICE 1

1°) Après avoir déterminé une racine évidente, résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$x^3+2x^2-13x+10=0 .$$

2°) Les restes des divisions d'un polynôme P(x) par x — 1, par x + 5, et par x — 2 sont respectivement 9, — 3 et 5.

Déterminer le reste de la division de P(x) par (x — 1) (x + 5) (x — 2) .

Sachant que P(x) est du quatrième degré et qu'il est divisible par x^2-9, déterminer P(x) ainsi que son quotient par $x^3+2x^2-13x+10$.

EXERCICE 4

Soit l'équation (E_m) : $(m+3)x^2+2mx+m-5=0$.

1°) Discuter suivant les valeurs de *m* dans $\mathbb{R}$ l'exixtence et le signe des racines de (E_m) .

2°) Déterminer *m* pour que les racines vérifient : (2x ' — 1) (2 x " — 1) = 6 .
Calculer alors x ' et x " .

3°) Déterminer *m* pour que les racines vérifient : x ' < 2 < x " .

DUREE : 3H

DEVOIR N° 31 <u>**DUREE : 3H**</u>

<u>**EXERCICE 1**</u>

1°) Calculer les fonctions dérivées de :

$f : x \mapsto (3x + 2)^2\,(x - 4)^3$ $\qquad g : x \mapsto \dfrac{(2x + 3)^2}{x^2 - 5}$ $\qquad h : x \mapsto (4x^2 - 1)\sqrt{4x^2 - 1}$

On précisera l'ensemble de dérivabilité de chaque fonction.

2°) Soent les fonctions f, g et h définies par :

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x + 1}\ ;\ g(x) = \sqrt{x + |x|}\ ;\ h(x) = (f \circ g)(x)$$

Donner les ensembles de dérivabilité de f, g et h , puis calculer leurs fonctions dérivées.

<u>**EXERCICE 2**</u>

1°) Déterminer a et b pour que la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = ax + b & si \quad x \leq 3 \\ f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+3} - 3}{x - 3} & si \quad x \succ 3 \end{cases}$$

soit continue et dérivable en $x_o = 3$.

2°) Déterminer *m* pour que la fonction fonction g définie par :

$$\begin{cases} \text{si } x \leq 0,\ \ g(x) = x^3 + x^2 + (m^2 - 2)\,x + 2 \\ \text{si } x > 0,\ \ g(x) = \dfrac{x + 2m}{x + 1} \end{cases}$$

soit dérivable sur $\mathbb{R}$.

<u>**EXERCICE 3**</u>

1°) f et g sont des fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et on suppose que $g(x) \neq 0$, pour tout x réel. Soit h la fonction définie par : $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Montrer que si $h'(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$, alors $h(a) = \dfrac{f'(a)}{g'(a)}$.

2°) <u>*Application*</u> : On prend $h(x) = \dfrac{2x^3 - x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

a) Calculer h' (x) et vérifier que h' (x) s'annule en trois points a, b et c.

b) Utiliser les résultats précédents pour calculer le plus simplement possible h(a), h(b) et h (c).

<u>**EXERCICE 4**</u>

Soit P (x) un polynôme et a un réel.

1°) Montrer que si P (x) est divisible par $(x - a)^2$, alors P ' (x) est divisible par $(x - a)$

Ecrire P (x) sous la forme $P(x) = (x - a)^2\,Q(x)$.

2°) Montrer que si P (x) et P ' (x) sont divisibles par $(x - a)$, alors P (x) est divisible par $(x - a)^2$. En déduire l'équivalence :

P (x) est divisible par $(x - a)^2 \Leftrightarrow$ P (x) et P ' (x) sont divisibles par $(x - a)$.

3°) <u>Applications</u>

A₁ : Montrer que $P_1(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 20x\ \ 12$ est factorisable par $(x - 2)^2$.
Calculer le quotient.

A₂ : Soit n un entier naturel non nul .Montrer que le polynôme $P_2(x) = nx^{n+1} - (n + 1)x^n + 1$ est factorisable par $(x - 1)^2$. Calculer le quotient lorsque n = 4.

DEVOIR N° 32.

EXERCICE 1

m est un paramètre réel. Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1°) $5\sqrt{|x| - x} = m - 2x$. **2°)** $\dfrac{(1+x)^2}{1+x^3} + \dfrac{(1-x)^2}{1-x^3} = m$. **3°)** $\dfrac{x^2 - 6x - 7}{x^2 - 2mx + m^2} \leq \dfrac{4}{3}$.

EXERCICE 2

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x}{1 + |x|}$.

1°) a) Déterminer l'ensemble de définition D de f.

b) Discuter et résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : f (x) = y (y est un paramètre réel).

c) En déduire que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;1[$; définir sa réciproque f^{-1}.

2°) Soit g la fonction d »finie par : $g(x) = x - E\left(\dfrac{x}{n}\right)$, où n est un entier fixé, supérieur ou égal à 1.

a) Calculer g(x + n). Que peut-on en conclure ?

b) Montrer que $g(x) \in [0\,;n]$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$.

3°) Montrer que la fonction $f \circ g$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE 3

ABCD est un parallélogramme. I, J et K sont les barycentres respectifs de {(A, 1) ; (B, 3)}, {(A, 3) ; (D, 1)} et {(A, 1) ; (D, 2)}. La parallèle à (BC) passant par Icoupe (DC) en E, et la s parallèles à (AB) passant par J et K coupent respectivement (BC) en F et G.

1°) Montrer que les droites (AC), (JE) et (IF) sont parallèles.

2°) Montrer que les droites (AC), (KE) et (IG) sont concourantes.

EXERCICE 1

ABC est un triangle.

Soit I le barycentre de {(A , 1) (B , — 1) (C , 1)} et J le barycentre de {(A , — 1) (C , 2) }.

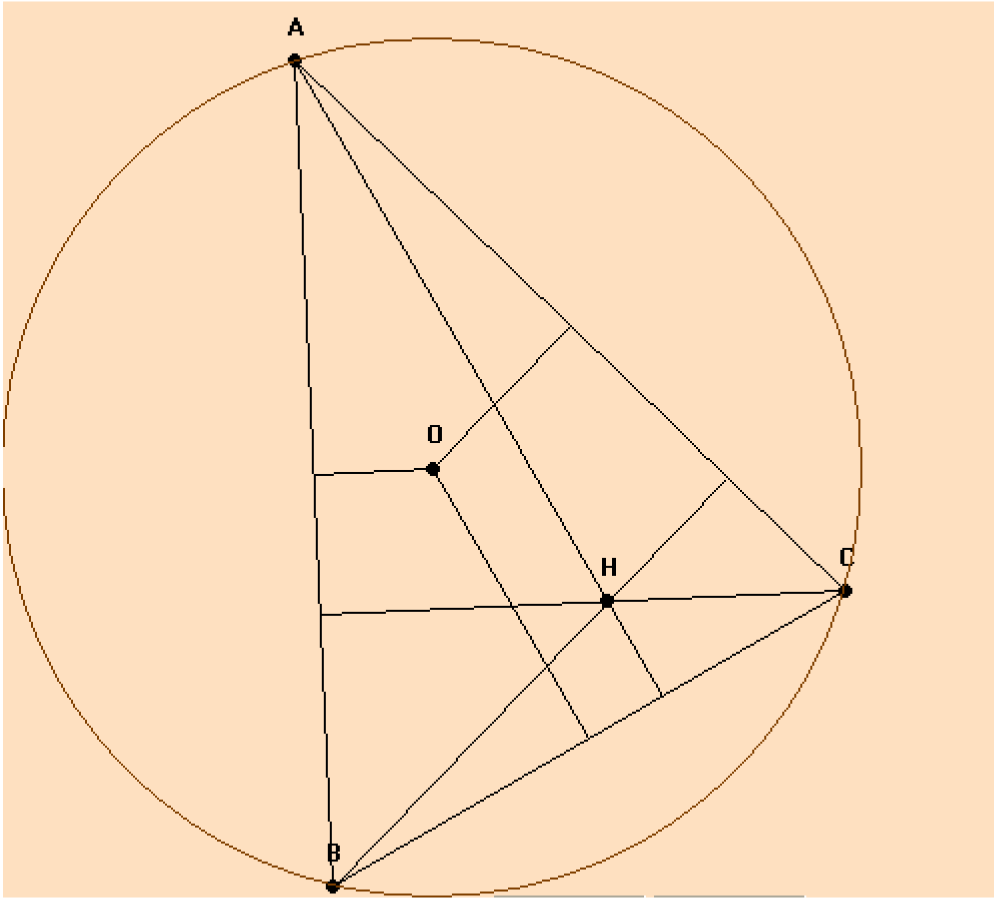
1°) Soit M le barycentre de {(A , α) (B , β) (C , γ)}.

Formuler une condition nécessaire et suffisante sur α, β, γ pour que I, J, M soient alignés.

2°) La droite (IJ) coupe (BC) en K et (AB) en L. Calculer $\dfrac{\overline{KB}}{\overline{KC}}$ et $\dfrac{\overline{LA}}{\overline{LB}}$.

3°) Déterminer λ et μ pour que L soit le barycentre de {(I , λ) (J , μ) } .

DUREE : 3H



ETUDE DE FONCTIONS

EXERCICE 1

a) Déterminer la fonction polynôme du second degré f telle que f (0) = 4 f ' (0) = 3 f (1) = 3

b) Etudier cette fonction .

EXERCICE 2

Soit la fonction : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{x-2}{x+2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1°) Démontrer que f est continue en 1 .

2°) Calculer les limites aux bornes(Faites l'étude des branches infinies) .

3°) Etudier la dérivabilité de f en 1.

4°) Déterminer une équation de la demi-tangente à gauche et une équation de la demi-tangente à droite à la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.
5°) Calculer la dérivée f ' (x) de la fonction f sur $]-\infty\,;1[$ et sur $(1\,;+\infty[$.
6°) Etudier le sens de variation de f sur $]-\infty\,;1[$ et sur $(1\,;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation.
7°) Tracer $(\mathcal{C}_f)$.

EXERCICE 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + \dfrac{2x}{x^2+1}$.

on désigne par $(\mathcal{C})$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1°) Etudier la fonction f (limites, dérivée, sens de variation et tableau) .
2°) Montrer que $(\mathcal{D}) : y = x - 1$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
3°) Montrer que I (0 ; — 1) est centre de symétrie de $(\mathcal{C})$.
4°) Déterminer l'équation de la tangente (T) à la courbe $(\mathcal{C})$ en I puis préciser la position de $(\mathcal{C})$ par rapport à (T) .
5°) Déterminer les points A et B de $(\mathcal{C})$ où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = x - 2$
6°) Montrer que pour tout réel x : $x - 2 \leq f(x) \leq x$.
7°) Tracer $(\mathcal{C})$, (T) ainsi que les droites (D) et (D ') d'équations $y = x - 2$ et $y = x$.

EXERCICE 4

1°) Montrer que $1 + x - \sqrt{x^2+1} = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2°) Soit $h : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{1 + x - \sqrt{x^2+1}}$. Préciser D_h et déterminer les limites aux bornes de D_h .
3°) Déterminer les asymptotes de $(\mathcal{C}_h)$ (On étudiera la position de $(\mathcal{C}_h)$ par rapport à l'asymptote « horizontale » et l'asymptote oblique) .
4°) Etudier les variations de h et dresser le tableau de variation de h.
5°) Construire $(\mathcal{C}_h)$ dans un repère orthonormé (unité : 1 cm) .

• EXERCICE 5

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{3}\left(x^2 + x + \dfrac{1}{x}\right)$; $x \neq 0$
1°) Calculer f ' (x) et vérifier que pour tout $x \neq 0$, f ' (x) a même signe que $2x^3 + x^2 - 1$.
Pour trouver le signe de f ' (x) , on étudie la fonction g telle que : $g(x) = 2x^3 + x^2 - 1$.
2°) **a)** Etudier les variations de g .
b) En déduire que l'équation g (x) = 0 admet une solution et une seule α telle que $0{,}5 < \alpha < 1$.
Quel est le signe de g (x) sur $]-\infty\,;\alpha]$? sur $]\alpha\,;+\infty[$?
3°) Dresser le tableau de variation de f.
4°) Notons h h la fonction définie par $h(x) = \dfrac{1}{3}(x^2 + x)$.
a) Etudier les limites de f (x) — h (x) en $+\infty$ et $-\infty$.
Qu'en déduit-on pour les courbes $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_h)$?
b) Etudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à $(\mathcal{C}_h)$.
5°) Tracer $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_h)$ dans un même repère orthonormal (unité : 3 cm) .

EXERCICE 6

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$
On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe de f et Δ la droite d'équation $y = x + 1$.
1°) Déterminer D_f , puis calculer les limites aux bornes de D_f .

2°) Etudier la dérivabilité de f en -2 puis en 0. Que peut-on en déduire pour $(\mathcal{C}_f)$?
3°) Calculer $f'(x)$ pour $x < -2$ et pour $x > 0$.
4°) Etudier le signe de $f'(x)$ pour $x < -2$ et pour $x > 0$.
5°) Dresser le tableau de variation de f.
6°) Montrer que Δ est une asymptote oblique de $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.
7°) Déterminer l'autre asymptote oblique Δ' de $(\mathcal{C}_f)$.
8°) Soit f_1 la restriction de f à $]-\infty ; -2]$ .Montrer que f_1 est bijective de $]-\infty ; -2]$ sur un intervalle J à préciser.
9°) Préciser $f_1^{-1}(x)$.
10°) Etudier la position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à Δ sur $[0 ; +\infty[$, puis celle de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à Δ' sur $]-\infty ; -2]$.
11°) Construire $(\mathcal{C}_f)$, Δ , Δ' puis $(\mathcal{C}_{f_1^{-1}})$ courbe de f_1^{-1} dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

EXERCICE 7

Dans chacun des cas suivants :
— Montrer que la droite $\mathcal{D}$ dont l'équation est donnée est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
— Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

1°) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$ $\mathcal{D}$: $y = 3$
2°) $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x-2}$ $\mathcal{D}$: $y = 2x - 1$
3°) $f(x) = \dfrac{-x^2+2}{x+1}$ $\mathcal{D}$: $-x + 1$
4°) $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$ $\mathcal{D}$: $y = x$.
5°) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4x}$ $\mathcal{D}$: $y = 0$
6°) $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$ $\mathcal{D}$: $y = x - \dfrac{1}{2}$

EXERCICE 8 Recherche d'asymptotes

Montrer que la courbe représentant le graphe de chacune des fonctions f suivantes admet une asymptote non parallèle aux axes de coordonnées .(il est recommandé d'étudier d'abord l'ensemble de définition de chaque fonction).

1°) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$
2°) $f(x) = \dfrac{x^2-3x+3}{x}$
3°) $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-5}{x+1}$
4°) $f(x) = \dfrac{6x^2+5x-6}{2x+3}$
5°) $f(x) = \dfrac{x^2+|x|+1}{|x|+2}$
6°) $f(x) = \left|\dfrac{2x^2-3x}{x-2}\right|$
7°) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$
8°) $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$
10°) $f(x) = x + \sqrt{x^2-1}$

EXERCICE 9

Dans chacun des cas suivants :

— Montrer que la droite $\mathcal{D}$ dont l'équation est donnée est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.

— Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite $\mathcal{D}$.

1°) $f(x) = \dfrac{3x + 1}{x - 1}$ $\quad \mathcal{D} : y = 3$ **2°)** $f(x) = 2x - 1 + \dfrac{1}{x - 2}$ $\quad \mathcal{D} : y = 2x - 1$

3°) $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2}{x + 1}$ $\quad \mathcal{D} : -x + 1$ **4°)** $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}$ $\quad \mathcal{D} : y = x.$

5°) $f(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 - 4x}$ $\quad \mathcal{D} : y = 0$ **6°)** $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 3}$ $\quad \mathcal{D} : y = x - \dfrac{1}{2}$

EXERCICE 327 Recherche d'asymptotes

Montrer que la courbe représentant le graphe de chacune des fonctions f suivantes admet une asymptote non parallèle aux axes de coordonnées .(il est recommandé d'étudier d'abord l'ensemble de définition de chaque fonction).

1°) $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ **2°)** $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 3}{x}$ **3°)** $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 5}{x + 1}$

4°) $f(x) = \dfrac{6x^2 + 5x - 6}{2x + 3}$ **5°)** $f(x) = \dfrac{x^2 + |x| + 1}{|x| + 2}$ **6°)** $f(x) = \left|\dfrac{2x^2 - 3x}{x - 2}\right|$

7°) $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x - 1}}$ **8°)** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$ **10°)** $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$