Stage de pré-rentrée

Université Toulouse Le Mirail

L1 MIA-SHS

Compléments en mathématiques

Claudie Hassenforder

0 609 704 551

RAPPELS SUR LES FONCTIONS

RAPPELS SUR LES FONCTIONS

1. Méthode pour l'étude de fonctions

L'étude complète d'une fonction f, définie sur une partie de $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, est un travail ordonné et méthodique qui se fait en suivant toujours le même plan dont on va d'abord rappeler les étapes.

Étape 0 : **rentrer la fonction dans la calculatrice afin de tracer sa courbe.**

Cette étape est certes facultative mais révèle à l'avance (tant pis pour le suspens...) l'allure de la fonction à étudier (une grosse étourderie sera peut-être ainsi évitée). Pour cela, utiliser les touches "graph" ou "y=" de la calculatrice. Puis utiliser la fonction trace.

Étape 1 : **voir si f est paire, impaire et/ou périodique.**

L'existence de parités ou de périodicité simplifient beaucoup l'étude de la fonction, notamment lors de son tracé car on peut restreindre l'intervalle d'étude et compléter le graphe à l'aide de symétries (pour la parité) ou de translations (pour la périodicité).

Attention : Impaire n'est pas le contraire de paire ! Une fonction qui n'est pas paire n'a aucune raison d'être impaire ; elle peut n'être ni l'un ni l'autre...

Étape 2 : **déterminer l'ensemble de définition D_f.**

L'ensemble de définition D_f est l'ensemble des $x \in \mathbb{R}$ pour lesquels l'image $f(x)$ de x par f a un sens. Deux cas fréquents se présentent :

• les fonctions rationnelles : partant du principe que $\dfrac{1}{0}$ n'existe pas, on sait qu'il peut exister pour ce genre de fonctions des valeurs interdites que l'on peut éliminer en étudiant les valeurs pour lesquelles le dénominateur s'annule.

• les fonctions comportant des racines carrées : partant du principe que $\sqrt{a}$ n'existe pas pour $a < 0$, il peut exister pour ce genre de fonction des valeurs interdites (et même des intervalles de valeurs interdites). En étudiant le signe de ce qui est sous la racine, on peut éliminer les valeurs interdites.

$\boxed{\textbf{Étape 3}}$: **étudier les limites aux bords de D_f.**

L'étude des limites peut avoir un aspect calculatoire et technique qui sera développé dans une section ultérieure mais elle a aussi un aspect graphique tout à fait rassurant, qui permet de mieux comprendre les fonctions, l'allure de leur courbe, vers quoi elles semblent se diriger, tendre... Souvent, l'intuition peut aider pour déterminer les limites et ici aussi, la calculatrice peut s'avérer d'une aide précieuse.

$\boxed{\textbf{Étape 4}}$: **étudier l'ensemble I de dérivation de f et calculer f' sur I.**

La dérivation est un outil très puissant et performant qu'il faut absolument maîtriser. C'est pourquoi, une section entière lui sera consacrée.

$\boxed{\textbf{Étape 5}}$: **étudier le signe de f' et faire le tableau des variations.**

Celui-ci résume toute l'étude précédente et permet de vérifier la cohérence des résultats trouvés. Ne pas oublier de compléter le tableau avec les limites de l'étape 3.

$\boxed{\textbf{Étape 6}}$: **recherche éventuelle d'une asymptote oblique.**

S'il y a des asymptotes, étudier la position de la courbe par rapport à celles-ci.

$\boxed{\textbf{Étape 7}}$: **tracé de la courbe C_f.**

On commence par tracer les asymptotes puis on trace la courbe. On peut éventuellement utiliser la touche “table” de la calculatrice (table comme tableau de valeurs) en l'initialisant avec tblset.

2. Limites

On s'intéresse ici à la notion de limite. Intuitivement, on cherche à savoir, lorsque x se "rapproche" d'un point, ou de l'infini, de quoi se rapproche son image. Déterminer la limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$ permet de préciser son comportement pour les "grandes valeurs" de la variable. Déterminer la limite d'une fonction en un réel donné permet de préciser son comportement au voisinage d'une valeur où elle n'est pas définie.

2.1 Limites en l'infini

Définition : Soit ℓ un nombre réel. On dit que f admet pour *limite* ℓ en $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ si, pout tout intervalle ouvert contenant ℓ, on a $f(x) \in I$ pour x suffisamment grand.

Définition : On dit que f admet $+\infty$ pour *limite en* $+\infty$ et on écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ si, pout tout réel A, on a $f(x) \in [A; +\infty[$ si x est suffisamment grand.

On définit de même les limites des fonctions en $-\infty$.

Remarque : L'écriture $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell^+$ signifiera que la limite ℓ est approchée par valeurs supérieures. De même, ℓ^- signale une limite approchée par valeurs inférieures.

2.2 Limites en un réel donné

Définition : Soit ℓ et a deux réels. On dit que f admet ℓ pour *limite en* a et on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$ si pour tout intervalle I contenant ℓ, $f(x) \in I$ si x est suffisamment proche de a.

De même,

Définition : On dit que f admet $+\infty$ pour *limite en* a et on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ si, pout tout réel A, on a $f(x) \in [A; +\infty[$ si x est suffisamment proche de a.

Propriété : Si la fonction f admet une limite ℓ en a, alors cette limite est unique.

2.3 Opérations sur les limites

Dans les résultats suivants, a désigne, soit un réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$.

2.3.1 Somme et produit de deux fonctions f et g

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f\times g)(x)$
ℓ	ℓ'	$\ell+\ell'$	$\ell\times\ell'$
$+\infty$	ℓ'	$+\infty$	$\begin{cases} +\infty & \text{si } \ell'>0 \\ -\infty & \text{si } \ell'<0 \\ \text{indéterminé} & \text{si } \ell'=0 \end{cases}$
$-\infty$	ℓ'	$-\infty$	$\begin{cases} -\infty & \text{si } \ell'>0 \\ +\infty & \text{si } \ell'<0 \\ \text{indéterminé} & \text{si } \ell'=0 \end{cases}$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$	indéterminé	$-\infty$

2.3.2 Inverse d'une fonction

- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\ell$, $\ell\in\mathbb{R}^*$, alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{\ell}$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0^+$, alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0^-$, alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$.
- Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, alors $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

2.3.3 Quotient de deux fonctions f et g

En écrivant, pour $g\neq 0$, $\dfrac{f}{g}=f\times\dfrac{1}{g}$, on applique les résultats sur l'inverse d'une fonction et sur le produit de deux fonctions. Dans la pratique, on cherche la limite du numérateur, puis celle du dénominateur, puis on fait le quotient (lorsque cela est possible).

2.3.4 Formes indéterminées

Elles sont au nombre de 4 :

$$\boxed{\text{somme "}+\infty+(-\infty)\text{" ; produit "}0\times(\pm\infty)\text{" ; quotients "}\frac{\pm\infty}{\pm\infty}\text{" et "}\frac{0}{0}\text{".}}$$

Dans ces quatre cas, on ne peut pas conclure directement. On modifie alors l'écriture de $f(x)$ de façon à "lever l'indétermination".

Pour lever une forme indéterminée, il existe plusieurs techniques :

• Lorsqu'on est en présence de "$+\infty-\infty$" : on met en facteur le terme "dominant". Pour les polynômes, il s'agit du terme de plus haut degré.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ où $f(x)=-2x^3+4x-1$.

On écrit $f(x)=-2x^3\left(1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{2x^3}\right)$.

On a alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(-2x^3)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{2x^3}\right)=1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

• Lorsqu'on est en présence de "$\dfrac{\infty}{\infty}$" : on met en facteur les termes "dominants" du numérateur et du dénominateur. Pour les fonctions rationnelles, il s'agit des termes de plus haut degré.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ où $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-3}$.

On écrit $f(x)=\dfrac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{3}{x}\right)}=x\times\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}$. On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{3}{x}}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

• Lorsqu'on est en présence de "$\infty\times 0$": on transforme $f(x)$ afin de se ramener à un autre cas connu.

Exemple : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ où $f(x)=x^2\left(\dfrac{1}{2x-3}\right)$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x-3}=0$ mais si on écrit $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-3}$, on se ramène au cas précédent.

• Lorsqu'on est en présence de "$\dfrac{0}{0}$", cela peut signifier que le dénominateur et le numérateur s'annulent en même temps pour $x=\alpha$. Pour les fonctions rationnelles, on met alors en facteur $x - \alpha$ au numérateur et au dénominateur, on simplifie et on regarde si on peut trouver alors la limite. Si on est encore en présence de $\frac{0}{0}$, alors on peut recommencer.

Exemple : $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$.

Pour $x \neq 1$ et $x \neq 2$, $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{x+1}{x-2}$ donc $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -2$.

Remarque : Une fonction peut très bien ne pas avoir de limite, comme par exemple la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto \sin x$, qui n'a aucune limite en $+\infty$. En effet, si l'on considère les suites :

$$u_n = n\pi \text{ et } v_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \text{ pour tout } n \geq 0,$$

on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = 0$, alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(v_n) = 1$.

2.4 Théorèmes de composition et de comparaison

Dans une recherche de limites, les théorèmes sur les opérations ne permettent pas toujours de conclure, soit en raison d'une forme indéterminée, soit à cause de la présence d'un terme n'ayant pas de limite. Cette section présente d'autres outils, qui peuvent être adaptés à cette situation.

Une lettre grecque minuscule désignera, soit un réel, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Théorème de composition : Pour deux fonctions f et g ;

$$\lim_{t \to \alpha} g(t) = \beta \text{ et } \lim_{x \to \beta} f(x) = \gamma \text{ entraînent } \lim_{t \to \alpha} (f \circ g)(t) = \gamma.$$

Propriété : (compatibilité de l'ordre et de la limite)

Soit f et g deux fonctions, et ℓ et ℓ' deux réels, a désignant un réel, ou $+\infty$ ou $-\infty$, si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell'$ et si f et g sont dans un certain ordre, alors ℓ et ℓ' sont dans le même ordre.

Théorème de limite par comparaison :

Soit f et g deux fonctions. Si, pour x assez grand, $f(x) \geq g(x)$, alors :

• Si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

• Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$.

Théorème des gendarmes ou des limites par encadrement :

Soit f, g et h trois fonctions et ℓ un réel.

• Si, pour x assez grand, $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} h(x) = \ell$, alors

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell.$$

• Si, pour x assez grand, $|f(x) - \ell| \leq g(x)$ et si $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Ce théorème s'étend aux limites en $-\infty$ ou en un réel a.

2.5 Asymptotes

Définition : Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0 (fini ou infini) et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Si x_0 est fini et si $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$ (ou $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$), on appelle *asymptote verticale* de la courbe $\mathcal{C}_f$ la droite d'équation $x = x_0$.
- Si $x_0 = +\infty$ (ou $x_0 = -\infty$) et si $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ (ou $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$) où ℓ est fini, on appelle *asymptote horizontale* de la courbe $\mathcal{C}_f$ la droite d'équation $y = x_0$.
- Si $x_0 = +\infty$ (ou $x_0 = -\infty$) et si $\lim_{x \to x_0} (f(x) - (ax + b)) = 0$, avec a et b deux réels, on appelle *asymptote oblique* de la courbe $\mathcal{C}_f$ la droite d'équation $y = ax + b$.

Remarque : Afin d'améliorer la qualité de représentation du graphe d'une fonction, il est souvent conseillé de regarder les positions de la courbe de la fonction par rapport à ses asymptotes horizontales et obliques.

La méthode pour trouver une éventuelle asymptote oblique d'une fonction f est la suivante :

→ on cherche, tout d'abord la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ en $+\infty$;

→ si la limite précédente est finie (égale à a), alors on recherche la limite de $f(x) - ax$:

dans le cas d'une limite finie, le nombre obtenu est égal à b.

Exemple : Trouver les éventuelles asymptotes à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^3+x^2+5x+2}{x^2+2}$.

PREUVE. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ car le dénominateur ne s'annule pas ($x^2+2>0$).

$\to$ $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{2x^3+x^2+5x+2}{x^3+2x} = \dfrac{x^3\left(2+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)}{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 2$ (en simplifiant par x^3) ;

$\to$ On fait alors $f(x)-2x = \dfrac{2x^3+x^2+5x+2}{x^2+2} - 2x = \dfrac{2x^3+x^2+5x+2-2x(x^2+2)}{x^2+2} = \dfrac{-x^2+x+2}{x^2+2} = \dfrac{x^2\left(-1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}$ donc, en simplifiant par x^2, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-2x) = -1$, soit $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(2x-1)) = 0$. La coube représentative de f admet l'asymptote $y=2x-1$ en $-\infty$ et en $+\infty$. □

2.6 Quelques limites à connaître...

1. Fonctions trigonométriques

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

2. Fonctions logarithme et exponentielle

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha \ln x = 0$.

3. Continuité

3.1 Continuité en un point

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et $a \in I$. On dit que f est *continue en a* si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.
On dit que f est *continue sur I* si f est continue en tout point de I.

Remarque : Si f est définie en a, elle peut avoir une limite à droite (resp. à gauche), $\ell \in \mathbb{R}$, telle que $\ell \neq f(a)$. Dans le cas où $\ell = f(a)$, on précise que f est continue à droite (resp. à gauche) en a.

De manière intuitive, une fonction est continue lorsque l'on peut tracer sa représentation graphique "sans lever le crayon" (*i.e.* : sans saut).

3.2 Fonctions continues de référence

Propriété : Les fonctions polynômes, les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$. Les fonctions rationnelles, la fonction tangente sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition. La fonction racine carrée est continue sur $[0, \infty[$.

3.3 Opérations sur les fonctions continues

Propriété (opérations classiques) : Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, alors

1. les fonctions $f+g$, $f \times g$, λf (où λ désigne un réel quelconque), et f^n (où n désigne un entier naturel non nul), sont aussi continues sur l'intervalle I.

2. La fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en tout point de I où g ne s'annule pas.

Propriété (composition) : Si la fonction f est continue sur l'intervalle I et la fonction g est continue sur $f(I)$, alors la fonction $g \circ f$ est continue sur I.

Remarque : Si I est un intervalle, $f(I)$ est aussi un intervalle, d'après ce qu'on va voir dans la prochaine section.

3.4 Théorème des valeurs intermédiaires ; continuité et bijection

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux réels de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Ce théorème appartient à la catégorie des théorèmes d'existence. Il assure, sous certaines hypothèses, l'existence d'au moins un antécédent. Néanmoins, il n'assure pas l'unicité de l'antécédent considéré et ne permet pas de le calculer.

Corollaire : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a et b deux réels appartenant à I et vérifiant $a < b$. Si f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique sur l'intervalle $[a, b]$.

Remarque : Dans un tableau des variations, on fait la convention qu'une flèche oblique signifie à la fois continuité et monotonie stricte sur l'intervalle concerné. Ainsi, un seul coup d'oeil sur le tableau des variations permet de justifier l'utilisation de ce corollaire, parfois appelé théorème de la bijection.

Généralisation du corollaire : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a, b[$. Alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $\lim\limits_{x \to b} f(x)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique c dans l'intervalle $[a; b[$. De même pour $]a; b]$ ou $]a; b[$.

Remarque : Ce corollaire généralisé est souvent appelé "théorème de la bijection" et formulé comme on va le voir ci-dessous.

Définition : Une fonction f définie sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J de $\mathbb{R}$ est dite

- *surjective* si, pour tout $y \in J$, il existe $x \in I$ tel que $f(x) = y$;
- *injective* si, pour tous $x, y \in I$ distincts, $f(x) \neq f(y)$;
- *bijective* si elle est injective et surjective *i.e.* si pour tout $y \in J$, il existe un unique $x \in I$ tel que $f(x) = y$.

Théorème de bijection : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$ (qui est un intervalle de $\mathbb{R}$).

4. Dérivabilité

L'étude des variations d'une fonction simple fait intervenir le signe de sa fonction dérivée. Encore faut-il être capable de déterminer f' puis de localiser ses zéros. Les théorèmes de cette section s'appliquent dans tout intervalle contenu dans l'ensemble d'étude de f.

4.1 Dérivabilité en un point

Définition : Soit une fonction f définie sur un intervalle I et a est un élément de I. On dit que f est *dérivable en a* si la fonction

$$h \mapsto \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

admet une limite réelle finie ℓ en zéro.
On dit alors que ℓ est le *nombre dérivé en a* et on le note $f'(a)$.
On dit que f est *dérivable sur I* si f est dérivable en tout réel a de I. La fonction $f' : x \mapsto f'(x)$ est alors appelée *fonction dérivée* de f.

Définitions équivalentes :

- En posant $x = a + h$, $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.
- Il existe une fonction ε, telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et $f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varepsilon(h)$.

Au premier ordre, la fonction f admet donc l'approximation affine :

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a)$$

Définition : La droite passant par $A(a; f(a))$ ayant comme coefficient directeur $f'(a)$ est appelée *tangente* à la courbe représentative de f au point A. Son équation est

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

4.2 Dérivabilité et continuité

Théorème : Si la fonction f est définie et dérivable en $a \in \mathbb{R}$, alors f est continue en a.

Remarque : La réciproque est fausse. Par exemple, la fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas dérivable en 0 ; en effet,

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{-x}{x} = -1$$

et

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

4.3 Règles de dérivation

Opérations sur les dérivées :

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I et λ un réel, alors

le fonction ... est dérivable	sa dérivée est égale à ...
λf	$\lambda f'$
$f + g$	$f' + g'$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
$\frac{f}{g}$ si $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$	$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$

Dans le tableau suivant, on trouvera les ensembles de dérivation des fonctions usuelles ainsi que leur fonction dérivée :

$f(x)$	Intervalle de dérivation	$f'(x)$
α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	0
x^n $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$\begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } n \geq 1 \\ \mathbb{R}^* & \text{si } n \leq -1 \end{cases}$	nx^{n-1}
$\sqrt{x}$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$\cos x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$-\sin x$
$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right\}$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\ln x$	$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$
e^x	$\mathbb{R}$	e^x

Théorème de dérivation des fonctions composées :
Soit f une fonction dérivable sur I et u une fonction dérivable sur $J = f(I)$; alors la fonction composée $f \circ u : x \mapsto f(u(x))$ est dérivable sur I et

$$(f \circ u)' = (f' \circ u) \times u'.$$

En prenant pour f diverses fonctions usuelles, on obtient :

- $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ (sur tout intervalle où u ne s'annule pas)
- $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ (sur tout intervalle où u est strictement positive)
- $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ (sur tout intervalle où u est strictement positive)
- $(\exp u)' = u' \exp u$.

4.4 Dérivées successives

Soit f une fonction dérivable sur I

- Si f' est dérivable sur I, on note f'' sa fonction dérivée
- Si f'' est dérivable sur I, on note f''' ou $f^{(3)}$ sa fonction dérivée...
- Plus généralement, si la dérivée n-ième $f^{(n)}$ est dérivable sur I, on pose $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$.

On retiendra $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\,\dfrac{\pi}{2}\right)$ et $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

4.5 Dérivée et sens de variation

Théorème : Soit I un intervalle et f une fonction définie et dérivable sur I

- Si $f' \geq 0$ sur I, alors f est croissante sur I
- Si $f' \leq 0$ sur I, alors f est décroissante sur I
- si $f' = 0$ sur I, alors f est constante sur I.

On a des résultats analogues avec des inégalités strictes, qui assurent des strictes monotonies :

- Si $f' > 0$ sur I, sauf en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est strictement croissante sur I.

• Si $f' < 0$ sur I, sauf en un nombre fini de valeurs où elle s'annule, alors f est strictement décroissante sur I.

Remarque : f admet un extrémum local si f' s'annule en changeant de signe.

5. Étude des fonctions usuelles

Dans cette section, on va rappeler les études de quelques fonctions classiques.

Remarque : On considère comme acquise l'étude de fonctions "simples" telles que : $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^3$, $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto \dfrac{1}{x}$,...

Par contre, on va reprendre les fonctions circulaires (ou trigonométriques) sinus, cosinus et tangente, ainsi que les fonctions logarithmes, exponentielles et puissances.

5.1 Fonctions circulaires

5.1.1 Paramétrage d'un cercle

Le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1. Pour tout réel x, le M de $\mathcal{C}$ tel que l'angle orienté $(\overrightarrow{e_1}; \overrightarrow{OM})$ ait pour mesure x a pour coordonnées $(\cos x; \sin x)$.

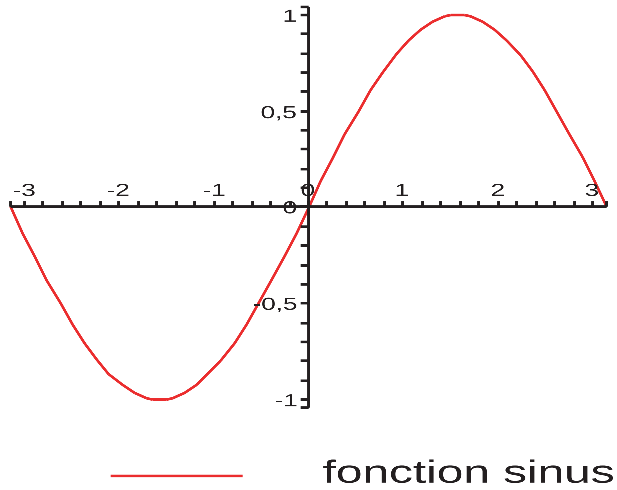
On définit ainsi deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ 2π-périodiques, sinus et cosinus. Leur quotient est la fonction tangente définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ par $\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. On va maintenant faire une étude rapide de ces fonctions.

5.1.2 La fonctions sinus $f : x \mapsto \sin x$

L'ensemble de définition de la fonction sin est $\mathbb{R}$. Cette fonction est périodique de période 2π et impaire : on va l'étudier sur un intervalle de longueur 2π, l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

$f'(x) = \cos x$.

x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

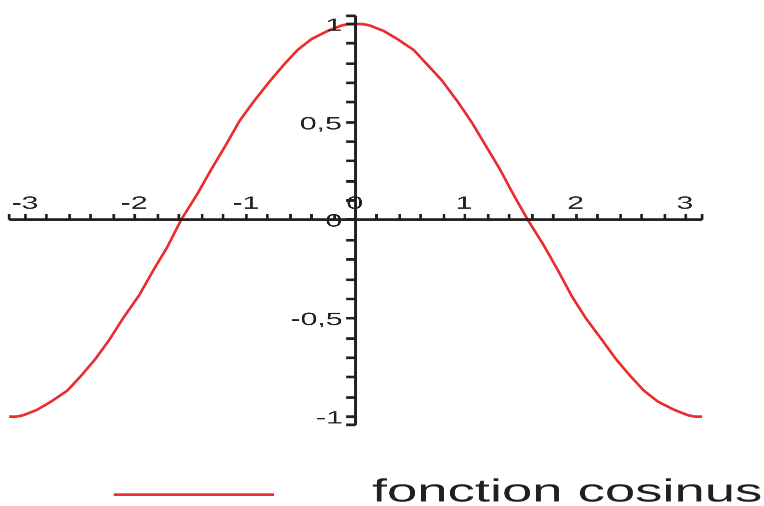


5.1.3 La fonction cosinus $f : x \mapsto \cos x$

L'ensemble de définition de la fonction cos est $\mathbb{R}$. Cette fonction est périodique de période 2π et paire : on va l'étudier sur un intervalle de longueur 2π, l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

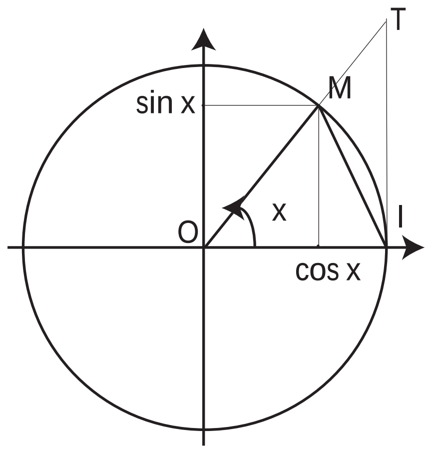
$f'(x) = -\sin x$.

x	$-\pi$		$-\pi/2$		0		$\pi/2$		π
$f'(x)$	0		$+$		0		$-$		0
$f(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1



[*À sauter en première lecture*:] On peut retrouver les propriétés (limites, dérivées) de ces fonctions classiques à partir de ce simple point de vue géométrique.

Soit $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, M le point de coordonnées $(\cos x; \sin x)$, I le point de coordonnées $(1; 0)$.



Continuité :

Comparons les aires du triangle OIM : $\dfrac{1}{2}\sin x$, et du secteur angulaire OIM : $\pi \times \dfrac{x}{2\pi} = \dfrac{x}{2}$

$$\text{pour tout } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{1}{2}\sin x \leq \frac{1}{2}x \quad \text{soit } \sin x \leq x.$$

Cette inégalité est encore vraie pour $x = 0$ et comme la fonction sinus est impaire, on peut écrire

$$\text{pour tout } x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[, \quad |\sin x| \leq |x|$$

On en déduit $\lim\limits_{x \to 0} \sin x = 0 = \sin 0$, donc la fonction sinus est continue en 0.

On sait que, pour tout $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$, donc $\lim\limits_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos 0$; la fonction cosinus est continue en 0.

En tout point x_0, on a :

$$\text{pour tout } h \in \mathbb{R}, \quad \sin(x_0 + h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h, \quad \text{donc } \lim_{h \to 0} \sin(x_0 + h) = \sin x_0$$

$$\text{pour tout } h \in \mathbb{R}, \quad \cos(x_0 + h) = \cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h, \quad \text{donc } \lim_{h \to 0} \cos(x_0 + h) = \cos x_0$$

En définitive, les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Dérivabilité

Soit T le point d'intersection de la droite (OM) et de la tangente en I à $\mathcal{C}$.

Comparons les aires du triangle OIM, du secteur angulaire OIM, et du triangle OIT :

$$\text{pour tout } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad \frac{1}{2}\sin x \leq \frac{x}{2} \leq \frac{1}{2}\tan x$$

D'où l'on déduit, en divisant les 3 membres par $\frac{1}{2}\sin x$, (qui est strictement positif) :
$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}$ et, en passant aux inverses :

$$\text{pour tout } x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[, \quad \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

On en déduit que $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$. Comme cette fonction est paire, il en est de même de la limite à gauche. D'où

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Cette limite exprime la dérivabilité de la fonction sinus en 0 car $\sin 0 = 0$ et

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = 1,$$

on en déduit que la dérivée de la fonction sin en 0 vaut 1 : $\sin' 0 = 1$.

Comme $1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$ et que $\frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}$, on en déduit :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

En un point x_0 quelconque :

$$\sin(x_0 + h) = \sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h$$

d'où : $\frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h}$ et par conséquent :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \cos x_0$$

car $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h \times \frac{\cos h - 1}{h^2} = 0 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 0$. De même,

$$\cos(x_0 + h) = \cos x_0 \cos h - \sin x_0 \sin h,$$

d'où : $\frac{\cos(x_0+h) - \cos x_0}{h} = \cos x_0 \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x_0 \frac{\sin h}{h}$ et par conséquent :

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x_0+h) - \cos x_0}{h} = -\sin x_0.$$

Les fonctions sinus et cosinus sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R},\ \sin'(x) = \cos x \text{ et } \cos'(x) = -\sin x.}$$

Or $\sin'(x) = \sin\left(x_0 + \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $\cos'(x) = \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

On en déduit facilement par récurrence que les fonctions sinus et cosinus sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \sin^{(n)}(x) = \sin\left(x_0 + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ et } \cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).}$$

5.1.4 La fonction tangente $f : x \mapsto \tan x$

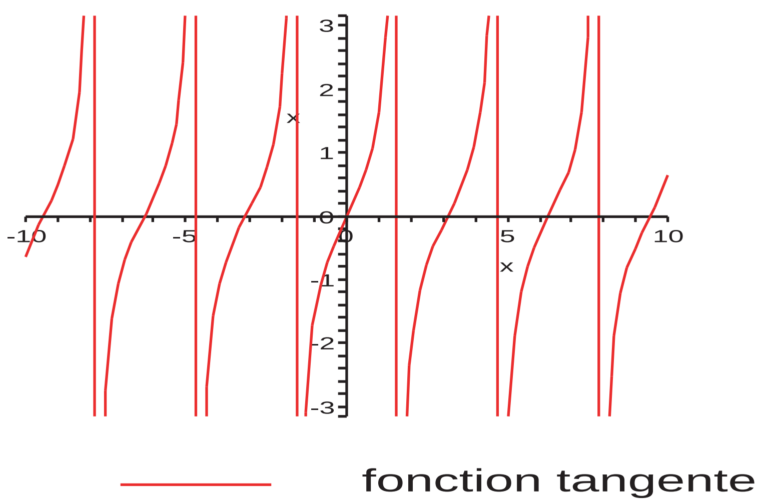
La fonction tangente, notée tan, est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ;\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

Elle est impaire et π-périodique. Elle est dérivable sur son ensemble de définition et :

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

x	$-\pi/2$		0		$\pi/2$
$f'(x)$	$\Vert$		$+$		$\Vert$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



5.2 Fonctions logarithmes, exponentielles et puissances

5.2.1 La fonction logarithme népérien $f : x \mapsto \ln x$

Définition : On appelle *logarithme népérien*, la primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ qui s'annule en 1. Cette fonction est notée $x \mapsto \ln x$.

Par définition, la fonction $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$: ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque : cette fonction est définie comme étant la primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en $x = 1$. On a donc $\ln 1 = 0$.

L'ensemble de définition de la fonction f est : $]0, +\infty[$ et, par définition, $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Propriété : Pour tout x et tout y, réels strictement positifs, on a

$$\boxed{\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)}.$$

Preuve. Pour tout réel y, la fonction $x \mapsto \ln(xy)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (dérivée $x \mapsto \dfrac{1}{xy} \times y = \dfrac{1}{x}$) donc $\ln(xy) = \ln x + C$. Pour $x = 1$, on obtient $\ln y = C$. □

On en déduit :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$;
- Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\ln \dfrac{x}{y} = \ln x - \ln y$;
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x^n = n \ln x$.

Propriété : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$.

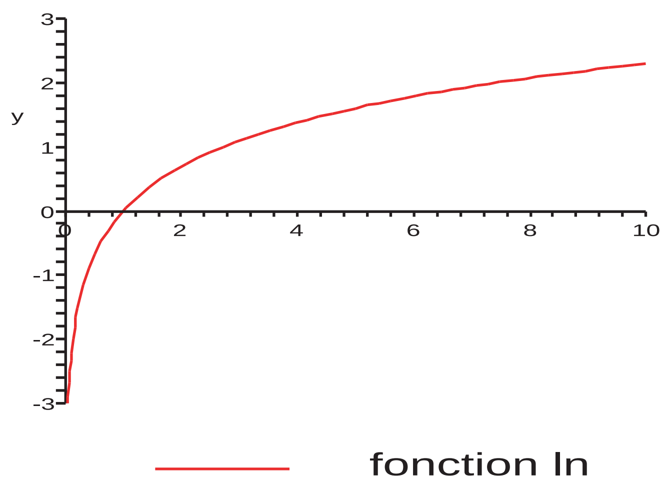
Preuve. ln étant strictement croissante, elle admet une limite, finie ou infinie, en $+\infty$.

Comme $\ln 2^n = n \ln 2$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln 2^n = +\infty$. La limite de ln en $+\infty$ ne peut donc être que $+\infty$.

En posant $X = \dfrac{1}{x}$, on a $\lim\limits_{X \to +\infty} x = 0$ et $\ln X = -\ln x$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$. □

On est donc maintenant en mesure de faire le tableau des variations et de représenter la courbe.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|$		$+$		
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$



Remarque : La fonction ln ayant une dérivée décroissante (on dit qu'elle est concave), sa courbe représentative est en dessous de sa tangente en tout point (en particulier au point 1) et donc, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln x \leq x - 1}$.

5.2.2 La fonction exponentielle de base e $f : x \mapsto e^x$

On a vu dans la section 3.4 que toute fonction f strictement monotone et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ réalise une bijection de I sur un intervalle $J = f(I)$; la bijection réciproque f^{-1} est alors strictement monotone et continue de J sur I.

La fonction logarithme népérien est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0, +\infty[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$. Elle est donc bijective de $]0, +\infty[$ sur $\ln(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $]0, +\infty[$.

Définition : On note e l'unique réel vérifiant $\ln(e) = 1$. La bijetion réciproque de ln est appelée *exponentielle de base e* ; elle est notée exp.

Propriété : Pour tous réels x et y, on a $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)}$.

Preuve. $\ln(\exp(x)\exp(y)) = \ln(\exp(x)) + \ln(\exp(y)) = x + y = \ln(\exp(x+y))$.

D'où, puisque la fonction logarithme népérien est bijective,

$$\text{pour tout } (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \exp(x)\exp(y) = \exp(x+y).$$

□

On en déduit :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ (car $\exp(0) = 1$) ;
- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$;
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.

On remarque que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{Z}, \quad \exp(n) = \exp(n1) = (\exp(1))^n.$$

Sachant que $e = \exp(1)$, on a donc, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(n) = e^n$.

Notation : On convient d'écrire, $\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x}$ (pour $x \in \mathbb{Z}$, c'est une propriété ; pour $x \notin \mathbb{Z}$, c'est une définition).

Avec cette nouvelle notation, on a :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$;
- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$;
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{nx} = (e^x)^n$.

On démontrera ultérieurement que, si f est une bijection dérivable et si sa dérivée ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$, de dérivée :

$$\boxed{(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.}$$

La dérivée du logarithme népérien ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (\exp)'(x) = \frac{1}{1/e^x} = e^x.$$

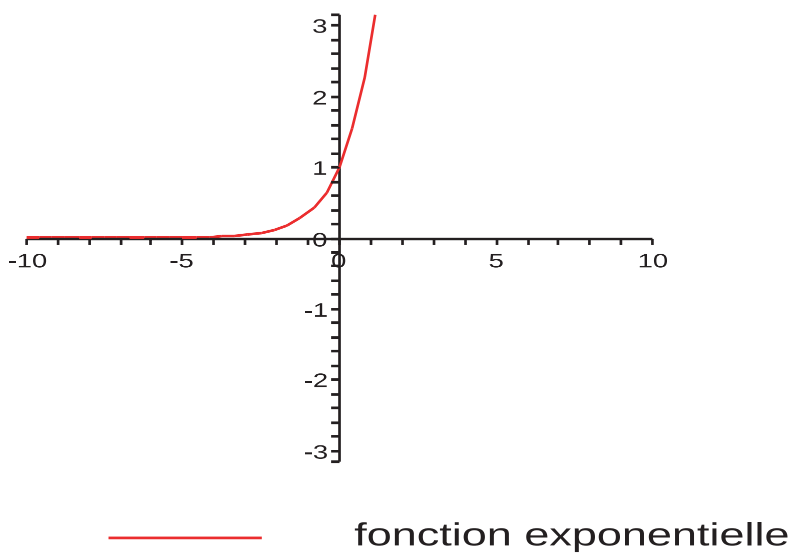
$$\boxed{\text{La fonction exponentielle de base } e \text{ est égale à sa dérivée.}}$$

Les limites de l'exponentielle se déduisent de celles du logarithme népérien :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0.$$

On peut maintenant faire le tableau des variations et tracer la fonction exponentielle.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			$+$		
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



[*La suite peut être sautée en première lecture*]

5.2.3 Fonction exponentielles quelconques

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle <u>*exponentielle de base a*</u>, la fonction notée $\exp_a$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \exp_a(x) = e^{x \ln a}$.

On vérifie que $\boxed{\text{pour tout } (x,y)\in \mathbb{R}^2,\ \exp_a(x+y)=\exp_a(x)\exp_a(y).}$

En effet, $\exp_a(x+y)=e^{(x+y)\ln a}=e^{x\ln a}e^{y\ln a}=\exp_a(x)\exp_a(y)$.

En particulier, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $\exp_a(n)=(\exp_a(1))^n=a^n$.

Notation : On convient d'écrire, $\boxed{\text{pour tout } x\in\mathbb{R},\ \exp_a(x)=a^x}$.

On a donc, avec cette nouvelle notation :

- Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $a^x=e^{x\ln a}$; $\ln(a^x)=x\ln a$; $a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}$;
- Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $a^{x+y}=a^x\,a^y$; $a^{x-y}=\dfrac{a^x}{a^y}$.

De plus, pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $(a^x)^y=e^{y\ln(a^x)}=e^{xy\ln a}=a^{xy}$, soit

$$\boxed{\text{pour tout } (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ (a^x)^y=a^{xy}.}$$

On a aussi, pour tout $(a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $(ab)^x=e^{x\ln(ab)}=e^{x(\ln a+\ln b)}=e^{x\ln a}e^{x\ln b}=a^xb^x$, soit

$$\boxed{\text{pour tout } (a,b)\in(\mathbb{R}_+^*)^2,\ (ab)^x=a^x\,b^x.}$$

Ces relations généralisent pour les exposants réels, les propriétés connues pour les seuls exposants entiers.

Dérivée : Pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction $\exp_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\boxed{(\exp_a)'(x)=a^x\ \ln a.}$$

- Si $a=1$, la fonction $\exp_1$ est constante : pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1^x=1$.
- Si $a>1$, la fonction $\exp_a$ est strictement croissante.
- Si $a<1$, la fonction $\exp_a$ est strictement décroissante.

Remarque : Pour dériver $x\mapsto u(x)^{v(x)}$, il faut revenir à la définition : $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln(u(x))}$. Par exemple, $x\mapsto x^x=e^{x\ln x}$ a pour dérivée $x\mapsto(\ln x+1)\,x^x$.

5.2.4 Fonctions logarithmes de base quelconque

Si $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$, la fonction $\exp_a$ est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$: c'est donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. La bijection réciproque est appelée <u>*logarithme de base a*</u> et notée $\log_a$. On a donc, pour tout $a\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}$,

$$\left\{\begin{array}{l} y=\log_a x\\ x\in\mathbb{R}_+^*\end{array}\right. \quad \text{si et seulement si} \quad \left\{\begin{array}{l} x=\exp_a y\\ y\in\mathbb{R}\end{array}\right.$$

Comme cette égalité équivaut encore à $\ln x = y \ln a$, on en déduit $y = \dfrac{\ln x}{\ln a}$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.}$$

Toutes les fonctions logarithmes sont donc proportionnelles.

Dérivée : Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $\log_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ (\log_a)'(x) = \frac{1}{\ln a} \times \frac{1}{x}.}$$

5.2.4 Fonctions puissances

La définition des fonctions exponentielles permet d'élever un réel strictement positif à la puissance d'un exposant réel quelconque. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on peut donc définir la fonction $f_\alpha : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^\alpha$ par :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ x^\alpha = e^{\alpha \ln x}.}$$

Cette fonction f_α est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :

$$\boxed{\text{pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*,\ (f_\alpha)'(x) = \alpha \times \frac{1}{x}\, e^{\alpha x} = \alpha x^{\alpha - 1}.}$$

Cette propriété généralise pour les exposants réels, celle qui était connue pour les seuls exposants entiers.

- Si $\alpha = 0$, la fonction f_α est constante sur $\mathbb{R}_+^*$: pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^0 = 1$;
- Si $\alpha > 0$, la fonction f_α est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$;
- Si $\alpha < 0$, la fonction f_α est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour $\alpha \neq 0$, on a les tableaux de variations suivants :

$$\alpha > 0,\ \begin{array}{c|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline f_\alpha(x) & 0 & \nearrow & +\infty \end{array} \quad ; \quad \alpha < 0,\ \begin{array}{c|ccc} x & 0 & & +\infty \\ \hline f_\alpha(x) & +\infty & \searrow & 0 \end{array}.$$

Si $\alpha \geq 0$, on peut prolonger f_α par continuité en 0 en posant $f_\alpha(0) = 0$ si $\alpha > 0$ et $f_0(0) = 1$.

- Si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{x \to 0} f'_\alpha(x) = 0$, donc f_α est dérivable en 0 et $f'_\alpha(0) = 0$.
- Si $\alpha = 1$, $f_1(x) = x$; f_1 est dérivable en 0 et $f'_\alpha(0) = 1$
- Si $\alpha < 1$, $\lim\limits_{x \to 0} f'_\alpha(x) = +\infty$ donc f_α n'est pas dérivable en 0.

5.2.5 Croissances comparées

1) On a vu que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x \leq x - 1$ *a fortiori* $\ln x < x$; on en déduit :
pour tout $\alpha > 0$, $\ln x^\alpha < x^\alpha$, d'où $\ln x < \dfrac{x^\alpha}{\alpha}$ puis,
pour tout $\beta > 0$ et $x \geq 1$, on a : $0 \leq \dfrac{\ln x}{x^\beta} \leq \dfrac{x^{\alpha-\beta}}{\alpha}$.

En choisissant $\alpha < \beta$ et en appliquant le théorème d'encadrement, on en déduit,

$$\boxed{\text{pour tout } \beta > 0,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^\beta} = 0.}$$

On dit que $\ln x$ est *négligeable* devant x^β au voisinage de $+\infty$.

Plus généralement, pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, on a $\dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = \left(\dfrac{\ln x}{x^{\frac{\beta}{\alpha}}}\right)^\alpha$, d'où :

$$\boxed{\text{pour tout } \alpha > 0, \text{ pour tout } \beta > 0,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} = 0.}$$

$(\ln x)^\alpha$ est négligeable devant x^β au voisinage de $+\infty$.

En posant $x = \dfrac{1}{X}$, avec $X \to +\infty$, on en déduit,

$$\boxed{\text{pour tout } \alpha > 0, \text{ pour tout } \beta > 0,\ \lim_{x \to 0} x^\beta\, |\ln x|^\alpha = 0.}$$

$|\ln x|^\alpha$ est négligeable devant $\dfrac{1}{x^\beta}$ au voisinage de 0.

2) Pour tout $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $\dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = e^{\alpha x - \beta \ln x} = e^{x\left(\alpha - \beta \frac{\ln x}{x}\right)}$. Comme $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$, on en déduit,

$$\boxed{\text{pour tout } \alpha > 0, \text{ pour tout } \beta > 0,\ \lim_{x \to +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty.}$$

x^β est négligeable devant $e^{\alpha x}$ au voisinage de $+\infty$.

En posant $X = -x$, on obtient de même,

$$\boxed{\text{pour tout } \alpha > 0, \text{ pour tout } \beta > 0,\ \lim_{x \to -\infty} |x|^\beta\, e^{\alpha x} = 0.}$$

$e^{\alpha x}$ est négligeable devant $\dfrac{1}{|x|^\beta}$ au voisinage de $+\infty$.

On peut retenir tous ces résultats grâce aux priorités suivantes :

l'exponentielle "l'emporte" sur les puissances qui "l'emportent" sur le logarithme.

Enoncés des exercices

Exercices sur les nombres complexes

1. Introduction de l'ensemble des nombres complexes

1. * Vrai ou faux ?
a) Deux complexes dont la somme et le produit sont des réels sont des réels.
b) Pour tout nombre complexe z, $|z|^2 = z^2$.
c) Pour tous nombres complexes a et b, $a + ib = 0$ équivaut à $a = b = 0$.

2. * On considère, dans $\mathbb{C}$, le nombre complexe $z = (1 + i)^2$.
Cocher la (ou les) proposition(s) exacte(s).
□ z est imaginaire pur ;
□ z est un réel strictement positif.

3. * Déterminer la forme algébrique du complexe z :

$$z = (1 + i)(1 - 2i) \qquad z = (2 - 3i)(3i) \qquad z = (2i + 1)(1 + i)^2(3i - 4)$$

$$z = (5 + 4i)(3 + 7i)(2 - 3i) \qquad z = \frac{1 - i}{2i} \qquad z = \frac{3 - 4i}{7 + 5i}$$

$$z = \frac{(3 - 2i)(5 + i)}{5 - i} \qquad z = (1 + i)(1 - i) \qquad z = \frac{1}{(2 + 3i)(1 + i)}.$$

4. * Dans un repère orthonormé du plan, placer les points d'affixe z_k, $\overline{z_k}$ et $-\overline{z_k}$ où :

$$z_1 = -1 + i \qquad z_2 = 2 + i \qquad z_3 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

5. * On donne $z = 3 + 4i$ et $z' = 2 - i$. Calculer $z + z'$, zz' et z^2.

6. * f est la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par

$$f(z) = z^3 - 2iz^2 - (1 - i)z - 2i$$

Calculer $f(i)$, $f(1 - i)$ et $f(1 + i)$.

7. ** Soit z et z' deux complexes de module 1 et a un réel.
On note $Z = z + z' + azz' + 1$ et $Z' = z + z' + zz' + a$.
1) Montrer que $Z' = zz'\overline{Z}$ et que $|Z| = |Z'|$.
2) On suppose que $1 + zz' \neq 0$. Montrer que le nombre $u = \dfrac{z + z'}{1 + zz'}$ est réel.

$\boxed{\textbf{8.}}$ ** Trouver l'ensemble des points d'affixe z vérifiant la condition suivante :

$$z^2 = \overline{z} \qquad z + \overline{z} = \sqrt{z\overline{z}} \qquad z^2 = z\overline{z}$$

$\boxed{\textbf{9.}}$ * Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $iz + \dfrac{3i-5}{2i} = -20 + 22i$.

$\boxed{\textbf{10.}}$ *** Comment choisir le nombre complexe z pour que :
a) $Z = z^2 + 3z - 3$ soit réel ;
b) $Z = (1-z)(1-iz)$ soit, soit un réel, soit un imaginaire pur ;
c) $Z = \dfrac{2z-4}{z-i}$ soit réel.

---

2. Argument et notation exponentielle

$\boxed{\textbf{11.}}$ * Écrire z sous forme exponentielle

$$z = 1 - i\sqrt{3} \qquad z = -2 \qquad z = \sqrt{3} + 3i$$
$$z = \frac{2}{2-i} \qquad z = \frac{4}{1+i\sqrt{3}} \qquad z = (-1+i)^3 e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

$\boxed{\textbf{12.}}$ * Dans un repère orthonormé du plan, placer les points d'affixes z :

$$z = e^{i\frac{\pi}{3}} \qquad z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \qquad z = \sqrt{3}e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$
$$z = \sqrt{3} + i \qquad z = -1 + i\sqrt{3} \qquad z = \sqrt{2}i\sqrt{2}$$
$$z = 1 + i \qquad z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \qquad z = \frac{2}{1-i}.$$

$\boxed{\textbf{13.}}$ * Exprimer, en fonction de $\arg(z)$: $\arg\overline{z}$; $\arg(-z)$ et $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

$\boxed{\textbf{14.}}$ * Vrai ou faux ?
a) Deux complexes ayant même module dont les arguments différent de 2π sont égaux.
b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, si $e^z = -1$, alors $z = i\pi$.
c) L'application $z \mapsto e^z$ est bijective.
d) L'ensemble des nombres complexes de module 1 est un groupe multiplicatif.

$\boxed{\textbf{15.}}$ Soit les trois nombres complexes : $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$, $z_2 = 4 + 4i$ et $z_3 = (1-i)^2$.
Cocher la (ou les) proposition(s) exacte(s).
- ☐ $z_1 z_3 = 4e^{-i\frac{\pi}{6}}$
- ☐ $\dfrac{z_2}{z_3} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
- ☐ $z_1 z_2 = 4\sqrt{2}e^{-i\frac{5\pi}{12}}$
- ☐ $\dfrac{z_3}{z_1} = e^{i\frac{\pi}{6}}$
- ☐ $z_2 z_3 = 8\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

$\boxed{\textbf{16.}}$ ** On considère les nombres complexes $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 1 - i$.
Cocher la (ou les) proposition(s) exacte(s).
☐ $\arg(a) = \dfrac{\pi}{3}$
☐ il existe au moins un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que a^n soit réel.
☐ il existe au moins un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que a^n soit imaginaire pur.
☐ il existe au moins un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $b^n = 1$.
☐ il existe au moins un entier $n \in \mathbb{N}^*$ tel que a^n et b^n soient réels.

$\boxed{\textbf{17.}}$ ** a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \text{ et } z_2 = 1 - i.$$

b) En déduire le module et un argument de $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.
c) En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

$\boxed{\textbf{18.}}$ ** Calculer le nombre complexe $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 - i}\right)^{20}$.

$\boxed{\textbf{19.}}$ ** a) Déterminer le module et un argument de $z = 1 + \cos\alpha + i\sin\alpha$ en discutant suivant la valeur du réel α.
b) Soit $z' = \dfrac{1 - i}{1 + \cos\alpha + i\sin\alpha}$ où $\alpha \in]-\pi, \pi[$. Calculer, en fonction de α, le module et un argument de z'.

$\boxed{\textbf{20.}}$ *** Déterminer la forme cartésienne de chacun des complexes :

$$u = (1 + i\sqrt{3})^5 + (1 - i\sqrt{3})^5$$

$$v = (1 + i\sqrt{3})^5 - (1 - i\sqrt{3})^5$$

et en déduire celle de $(1 + i\sqrt{3})^5$.

$\boxed{\textbf{21.}}$ ** Soit $z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}$.
a) Calculer z^2 et z^4.
b) En déduire le module et l'argument de z.
c) En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

$\boxed{\textbf{22.}}$ *** Soit $z = e^{i\theta}$ avec $-\pi < \theta < \pi$.
Déterminer $\arg(1 + z)$, $\arg(1 - z)$ et $\arg\left(\dfrac{1 - z}{1 + z}\right)$. (*Indication : Factoriser par* $e^{i\frac{\theta}{2}}$).

$\boxed{\textbf{23.}}$ *** θ et θ' sont deux réels. Montrer que $\dfrac{e^{i\theta} + e^{i\theta'}}{1 + e^{i(\theta+\theta')}}$ (*Factoriser par* $e^{i(\theta+\theta')/2}$).

---

3. Application à la trigonométrie

24. ** a) En utilisant la formule du binôme de Newton, développer $\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^2$.

b) En déduire que $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos x)$.

c) En procédant de la même manière, linéariser $\sin^5 x$ (*i.e.* exprimer $\sin^5 x$ en fonction de sin et de cos de multiples de x).

Remarque : Ces résultats sont notamment utilisés pour le calcul de primitives de puissances de sin et cos.

---

25. *** Calculer les sommes

$$S_1 = \sum_{k=0}^{n} \cos kx \quad ; \quad S_2 = \sum_{k=0}^{n} \sin kx$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n} \cos^2 kx \quad ; \quad S_4 = \sum_{k=0}^{n} \sin^2 kx$$

$$S_5 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos kx}{\cos^k x} \quad ; \quad S_6 = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin kx}{\cos^k x}$$

$$S_7 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos kx \quad ; \quad S_8 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin kx.$$

---

4. Application à la résolution d'équations

26. * Vrai ou faux ?

a) Tout nombre complexe non nul possède n racines n-ièmes distinctes.

b) Pour tout entier $n \geq 2$, la somme des racines n-ièmes d'un nombre complexe est nulle.

c) Une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ a toujours des solutions.

---

27. * Calculer les racines carrées de $5 + 12i$.

---

28. * Résoudre dans $\mathbb{C}$:

$$\text{a) } z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 = 0 \quad ; \quad \text{b) } z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0.$$

---

29. ** Résoudre l'équation $z^3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$.

---

30. ** Résoudre de deux façons, l'équation $(z+1)^5 = (z-1)^5$. Comparer les résultats.

$\boxed{\textbf{31.}}$ ** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 - z^2 - 2 = 0$. (*Poser* $Z = z^2$).

$\boxed{\textbf{32.}}$ ** a) Mettre sous forme trigonométrique $z = -16\sqrt{3} + 16i$.
b) En déduire les racines carrées de z ; les racines cinquièmes de z.
c) Quelle est la somme des racines cinquièmes de z ?

$\boxed{\textbf{33.}}$ ** Résoudre dans $\mathbb{C}$ puis placer dans un repère orthonormé les points dont les affixes sont solutions de cette équation :

$$\text{a) } z^4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \ ; \qquad \text{b) } z^6 = -8 \ ; \qquad \text{c) } z^4 = 12.$$

$\boxed{\textbf{34.}}$ * Résoudre, dans $\mathbb{C}$, les équations :

$$z^2 - 5z + 9 = 0 \qquad z^2 - 2z = 0 \qquad z^2 + 10 = 0$$
$$2z^2 - 6z + 5 = 0 \qquad z^2 + 6z + 34 = 0.$$

$\boxed{\textbf{35.}}$ ** Factoriser dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ les polynômes suivants :

$$z^3 - 1 \ ; \ z^3 + 1 \ ; \ z^4 + z^2 + 1 \ ; z^4 - z^2 + 1 \ ; \ z^6 - 1 \ ; \ z^6 + 1.$$

$\boxed{\textbf{36.}}$ ** a) Déterminer les racines cinquièmes de 1.
b) Soit $z_0 = e^{i\frac{2\pi}{5}}$; on pose $u = z_0 + z_0^4$ et $v = z_0^2 + z_0^3$.
Calculer $1 + z_0 + z_0^2 + z_0^3 + z_0^4$ puis $u + v$ et uv. En déduire une équation (E) du second degré admettant u et v pour racines.
Exprimer u en fonction de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis, en utilisant (E), en déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

---

5. Application à la géométrie plane

$\boxed{\textbf{37.}}$ * a) Expliquer pourquoi l'ensemble des complexes z tels que $|z - i| = 2$ est représenté par le cercle de centre $J(0, 1)$ et de rayon 2.

b) Sur le même principe, quel est l'ensemble des points M du plan dont les affixes vérifient $|z - 5 + 3i| = 3$?

c) Expliquer pourquoi l'ensemble des complexes z tels que $|z - 4| = |z + 2i|$ est la médiatrice du segment $[A; B]$ où A est le point du plan d'affixe 4 et B le point du plan d'affixe $-2i$.

Indication : Exprimer l'égalité $|z - 4| = |z + 2i|$ en terme de distances entre les points A, B et M où M est d'affixe z.

d) Sur le même principe, quel est l'ensemble des points M du plan dont les affixes z vérifient $|z - 5 + 3i| = |z - 4i|$?

$\boxed{\textbf{38.}}$ * Que peut-on dire de l'ensemble des points du plan d'affixe z tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ $[2\pi]$; tels que $\arg(z) = \frac{\pi}{3}$ $[\pi]$?

$\boxed{\textbf{39.}}$ * Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point d'affixe $-i$. Soit z un nombre complexe et M le point d'affixe z.

Cocher la (ou les) proposition(s) exacte(s).

□ Les points M de $\mathcal{C}$ sont ceux pour lesquels $(z-i)(z+i)=0$

□ Les points M de $\mathcal{C}$ sont ceux pour lesquels $\dfrac{z-i}{z+i}$ est imaginaire pur.

□ Les points M de $\mathcal{C}$ sont ceux pour lesquels $\dfrac{z-i}{z+i}$ est réel.

□ Les points M de $\mathcal{C}$ sont ceux pour lesquels $\Re[(z-i)(z+i)]=0$

□ Les points M de $\mathcal{C}$ sont ceux pour lesquels $\dfrac{z-i}{z+i}$ est imaginaire pur.

$\boxed{\textbf{40.}}$ * Dans le plan euclidien usuel, on donne les points A, B, C et D d'affixes respectives $-9+3i$, $17+3i$, $16+8i$ et $9-9i$.

Calculer la mesure des angles $(\overrightarrow{BD};\overrightarrow{BC})$ et $(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AC})$.

$\boxed{\textbf{41.}}$ ** Dans le plan euclidien usuel, on considère les points M d'affixe a et N d'affixe b tels que a et b soient les solutions de l'équation $z^2-2z+3=0$.

Cocher la (ou les) proposition(s) exacte(s).

□ $\overrightarrow{OM}.\overrightarrow{ON}=ab$.

□ $a+b$ est un nombre réel

□ le milieu de $[M;N]$ est sur l'axe des abscisses.

□ La droite (MN) est parallèle à l'axe des ordonnées.

$\boxed{\textbf{42.}}$ ** z_1 et z_2 sont les solutions complexes de l'équation $z^2-2z+5=0$; M_1 et M_2 sont les points du plan euclidien d'affixes respectives z_1 et z_2. O est le point d'affixe 0.

Cocher la (ou les) proposition(s) exacte(s).

□ $\Re(z_1)=\Re(z_2)$

□ L'axe réel (Oz) est la médiatrice du segment $[M_1;M_2]$.

□ Le milieu de $[M_1;M_2]$ a pour affixe $2i$.

$\boxed{\textbf{43.}}$ ** Dans le plan euclidien usuel, on désigne par A, B et M les points d'affixes respectives -1, -2 et z, où z est un nombre complexe différent de -1 et -2.

Soit $Z=\dfrac{z+2}{z+1}$. Déterminer graphiquement l'ensemble des points M du plan qui sont tels que :

a) Z est réel

b) Z est imaginaire pur ;

c) Z est un réel strictement négatif ;

d) $\arg(Z)=\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$

e) $|Z|=1$.

$\boxed{\textbf{44.}}$ *** Déterminer les nombres complexes z tels que les points d'affixes i, z et iz soient alignés.

$\boxed{\mathbf{45.}}$ *** Soit z un complexe non réel. A, B et C sont les points d'affixes z, z^2 et z^3. Trouver l'ensemble des points A tels que le triangle ABC soit rectangle en B.

Problèmes de synthèse.

Problème 1

Dans le plan euclidien usuel, on désigne par A et B les points d'affixes respectives $-i$ et $2i$. On note $\mathcal{P}^*$ l'ensemble des points du plan distincts de A. Soit alors f l'application de $\mathcal{P}^*$ dans le plan qui à tout point M d'affixe z associe le point $f(M)$ d'affixe Z telle que

$$Z = i\left(\frac{z-2i}{z+i}\right).$$

1. a) Soit M_1 le point d'affixe i et M_2 le point d'affixe $\frac{3}{2}+\frac{1}{2}i$. Déterminer $f(M_1)$ et $f(M_2)$.

b) Déterminer le point M de $\mathcal{P}^*$ tel que $f(M) = O$ où O est l'origine du repère.

Déterminer le point M de $\mathcal{P}^*$ tel que $f(M) = N$ où N est le point d'affixe $2-i$.

2. Déterminer et construire :

a) L'ensemble des points M de $\mathcal{P}^*$ dont les images $f(M)$ ont pour affixe un nombre imaginaire pur.

b) L'ensemble des points M de $\mathcal{P}^*$ dont les images $f(M)$ ont pour affixe un nombre réel.

c) L'ensemble des points M de $\mathcal{P}^*$ dont les images $f(M)$ appartiennent au cercle de centre O du plan, et de rayon 1.

Problème 2

L'unité graphique est 2cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 8 = 0$.

2. On considère dans le plan les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -1+i\sqrt{3} \qquad z_B = 2 \qquad z_C = -1-i\sqrt{3}$$

a) Écrire z_A et z_C sous la forme trigonométrique.

b) Placer les points A, B et C.

c) Déterminer la nature du triangle ABC.

3. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = e^{\frac{2i\pi}{3}}z$.

a) Caractériser géométriquement l'application f.

b) Déterminer les images des points A et C par f.

c) En déduire l'image de la droite (AC) par f.

Problème 3

Dans cet exercice, on fera une figure (unité graphique : 4cm). Dans le plan euclidien usuel, on considère les points A, B et C d'affixes respectives a, b et c telles que : $a = 1-i$, $b = 1+i$ et $c = -1+i$. On note Γ le cercle de diamètre $[A;B]$.

1. a) Placer sur une figure les points A, B et C et le cercle Γ.
b) Mettre les nombres a, b et c sous forme trigonométrique.
c) Soit r la rotation de centre O telle que $r(A) = B$. Déterminer l'angle de r et le point $r(B)$, image de B par r.
d) Déterminer l'image Γ' du cercle Γ par r ; placer Γ' sur la figure.

2. On considère un nombre $\theta \in]0, 2\pi[$ distinct de π ; on note M le point d'affixe $z = 1 + ie^{i\theta}$. On désigne par M' l'image de M par r et on appelle z' l'affixe de M'.
a) Montrer que M est un point de Γ distinct de A et de B.
b) Exprimer z' en fonction de z.
c) Établir la relation $z = u' \tan \dfrac{\theta}{2}$.
d) Prouver que les points B, M et M' sont alignés. Placer sur une figure un point M et son transformé M'.

Exercices sur les fonctions

1. Détermination de l'ensemble de définition

1. * Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes ;

$$f(x) = \frac{x - 2\sqrt{x}}{3x - 1} \qquad f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x}$$

$$f(x) = \frac{2x - \sqrt{-x}}{x - 1} \qquad f(x) = \frac{x}{\ln(1 + x^2)} \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x - 6} - \sqrt{-5x - 10}}$$

$$f(x) = \frac{\tan(3x)}{\sin(2x)} \qquad f(x) = \frac{2|x|}{1 + 3|x|} \qquad f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 3x - 3} - x}{x - 1}.$$

2. Limites

2. * Trouver la limite en $+\infty$, s'il y a lieu, de la fonction f proposée :

$$f(x) = \frac{x - 2\sqrt{x}}{3x - 1} \qquad f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x \qquad f(x) = \frac{3x - 5}{x + 1} - \frac{\sin x}{x}$$

$$f(x) = x^2 - x^3 \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} - x} \qquad f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + x}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{3x^2} \qquad f(x) = \frac{x}{\ln(1 + x^2)} \qquad f(x) = x \ln x \, e^{\sqrt{x}}$$

3. * Trouver la limite en $-\infty$, s'il y a lieu, de la fonction f proposée :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + x \qquad f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} - x \qquad f(x) = \frac{2x - \sqrt{-x}}{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x}{2x - 5} + \sin x \qquad f(x) = x \ln(-x) e^{\sqrt{-x}} \qquad f(x) = \frac{x}{\ln(1 + x^2)}$$

4. * Trouver la limite en $+\infty$ puis en $-\infty$, s'il y a lieu, de la fonction f proposée :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 4} \qquad f(x) = \frac{x}{2} - \sin x \cos x \qquad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^4}}$$

$$f(x) = x + 2\cos x \qquad f(x) = 2 - \frac{3}{x} \qquad f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$$

5. * Trouver la limite, s'il y a lieu, de la fonction f au point a :

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - x - 6}} - \dfrac{1}{\sqrt{-5x - 10}}$ en $a = -2$; b) $f(x) = \dfrac{\tan 3x}{\sin 2x}$ en $a = 0$;

c) $\dfrac{\sin 2x}{\tan 3x}$ en $a = -\pi$; d) $f(x) = \dfrac{2|x|}{1+3|x|}$ en $a = 0$;

e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ en $a = 0$;

f) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2-4} + \sqrt{x+6}\,x^2 + 4x - 12$ en $a = -6$;

g) $f(x) = \dfrac{x^2-2|x|}{x}$ en $a = 0$; h) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-7x+2}{x^2-x-2}$ en $a = 0$;

i) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+3x-3}-x}{x-1}$ en $a = 1$; j) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ en $a = 0$;

k) $f(x) = \dfrac{\tan x}{x}$ en $a = \dfrac{\pi}{4}$; l) $f(x) = \dfrac{\ln(1-2x)}{x^2-\frac{1}{4}}$ en $a = \dfrac{1}{2}^-$;

m) $f(x) = \dfrac{e^{x^2}-e^x}{x^2}$ en $a = 0$; n) $f(x) = \dfrac{x}{|\sin x|}$ en $a = 0^+$;

o) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+x-6}}$ en $a = 2^+$.

---

6. ** Cocher la (ou les) éventuelle(s) proposition(s) exacte(s).

☐ la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ est telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

☐ Il existe une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

☐ Il existe une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} xf(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$.

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3-1}{2x+7} = \dfrac{1}{2}$.

☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt{2+x^2}}{x} = 1$.

---

7. ** Cocher la (ou les) éventuelle(s) proposition(s) exacte(s).

Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 5$, on a :

☐ $\lim\limits_{x\to -2} f(-x) = 5$.

☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(2-x) = -5$.

☐ $\lim\limits_{x\to 0} f(2+x) = 5$.

☐ $\lim\limits_{x\to 2} f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{5}{2}$.

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(2+\dfrac{1}{x}\right) = 5$.

---

8. *** Cocher la (ou les) éventuelle(s) proposition(s) exacte(s).

Il existe au moins deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ telles que :

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 3$.

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ n'admet ni limite finie, ni limite infinie quand x tend vers $+\infty$.

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=+\infty$.

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ et $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ n'admet ni limite finie, ni limite infinie quand x tend vers $+\infty$.

$\boxed{\textbf{9.}}$ * Cocher la (ou les) éventuelle(s) proposition(s) exacte(s).

☐ $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|2x-2|-x}{2x-4}=\dfrac{1}{2}$.

☐ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x^2-5x}{x^2+5x}=3$.

☐ Soit l'application $g:\left\{\begin{array}{lcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & x\sqrt{|x^2-x|}\end{array}\right.$. On a $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{g(x)}{x-1}=+\infty$.

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+4x+12}-x+2=0$.

$\boxed{\textbf{10.}}$ * Cocher la (ou les) éventuelle(s) proposition(s) exacte(s).

Soit, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=(2x+1)^2$ et $g(x)=\sqrt{4x^2+1}-\sqrt{2}$.

☐ $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{2}} \dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

☐ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \dfrac{f(x)}{g(x)}=0$.

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.

☐ $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x)-g(x))=+\infty$.

☐ $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} (f(x)-g(x))=0$.

$\boxed{\textbf{11.}}$ * Cocher la (ou les) éventuelle(s) proposition(s) exacte(s).

Soit f la fonction définie par : pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$, $f(x)=\dfrac{x}{x-|x|+1}$. On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé. Alors

☐ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

☐ $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)}{x}=1$.

☐ $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{f(x)}{x}=1$.

☐ $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$ pour asymptote.

☐ $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $x=1$ pour asymptote.

$\boxed{\textbf{12.}}$ * Cocher la (ou les) éventuelle(s) proposition(s) exacte(s).

Soit a et b deux réels et $f_{a,b}$ la fonction définie par : pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-b\}$, $f_{a,b}(x)=\dfrac{ax^2-4}{x+b}$. On note $\mathcal{C}_{a,b}$ la courbe représentative de $f_{a,b}$ dans un repère orthonormé $(O,\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})$.

☐ Pour toutes valeurs de (a,b), $\mathcal{C}_{a,b}$ admet une asymptote verticale.

☐ Il existe au moins une valeur a telle que $\mathcal{C}_{a,b}$ admette une asymptote horizontale.

☐ Il existe au moins une valeur de a non nulle telle que $\mathcal{C}_{a,b}$ admette une asymptote oblique.

☐ Pour $(a,b) = (1,1)$, $\mathcal{C}_{a,b}$ est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

☐ Pour $(a,b) = (-1,1)$, $\mathcal{C}_{a,b}$ est au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

---

13. * Cocher la (ou les) éventuelle(s) proposition(s) exacte(s).

On considère les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$: $x \mapsto |x|(1-x^2)$ et $g : x \mapsto -x^2 + x$. Alors,

☐ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} |x|$.

☐ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

☐ $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 1}(x+1)$.

☐ La courbe représentative de $\dfrac{f}{g}$ admet la droite d'équation $y = -x$ comme asymptote en $-\infty$.

☐ $\lim\limits_{x\to -\infty} \left[\dfrac{f(x)}{g(x)} + x\right] = -1$.

---

14. *** Cocher la (ou les) éventuelle(s) proposition(s) exacte(s).

f est une fonction définie sur $[0;+\infty[$ vérifiant $f(0) = 0$.

☐ Si $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - x] = 0$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

☐ Si $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - x] = 0$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$.

☐ Si $\lim\limits_{x\to +\infty} [f(x) - x] = 0$, alors $f(x) = x$ pour tout $x \in [0;+\infty[$.

☐ Si $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

☐ Si $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$, alors $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) - x = 0$.

---

15. * Cocher la (ou les) éventuelle(s) proposition(s) exacte(s).

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 1} - x$

☐ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \dfrac{1}{2}$.

☐ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty$.

☐ $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -2$.

☐ La courbe représentative de f admet la droite d'équation $y = -2x$ comme asymptote.

☐ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - 1}{x} = -\dfrac{1}{2}$.

---

16. ** a) Montrer que, pour tout $x \neq 0$,

$$0 \leq \left|\sin \frac{1}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\right|.$$

b) Étudier la limite en $+\infty$ puis en $-\infty$ de la fonction $x \mapsto \sin\dfrac{1}{x}$.

c) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $x \mapsto x\sin\dfrac{1}{x}$.

$\boxed{\textbf{17.}}$ ** f est la fonction

$$x \mapsto \sqrt{x^2+2x}.$$

a) Trouver l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f.
b) Trouver deux réels a et b tels que

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax-b)=0.$$

c) Trouver deux réels c et d tels que

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)-cx-d)=0.$$

d) Que peut-on dire des droites d'équation $y=ax+b$ et $y=cx+d$ pour la courbe représentative de la fonction f ?

$\boxed{\textbf{18.}}$ * Les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto \ln x$ admettent-elles des asymptotes obliques ?

$\boxed{\textbf{19.}}$ *** Trouver la limite éventuelle de l'expression proposée au point a donné :

$$\begin{array}{llll}
x \mapsto \dfrac{2\cos x-1}{x-\frac{\pi}{3}} & a=\dfrac{\pi}{3}\ ; & x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}-2}{x-4} & a=4\ ; \\
x \mapsto \dfrac{2\cos x-\sqrt{3}}{2\sin x-1} & a=\dfrac{\pi}{6}\ ; & x \mapsto \dfrac{2\sin x-\sqrt{2}}{\tan^2 x-1} & a=\dfrac{\pi}{4}\ ; \\
x \mapsto \dfrac{2\cos^2 x-1}{\tan^2 x-1} & a=\dfrac{\pi}{4}\ ; & x \mapsto \dfrac{\ln\cos x}{x} & a=0.
\end{array}$$

---

3. Continuité

$\boxed{\textbf{20.}}$ * Dire si les fonctions suivantes sont continues (ou continues à droite) en 0 :

a) $\left\{\begin{array}{ll} f(x)=\dfrac{\ln x}{x-\ln x} & \text{si } x>0 \\ f(0)=-1 & \end{array}\right.$; b) Pour $n\in\mathbb{N}$, $\left\{\begin{array}{ll} f(x)=x^n(1-\ln x) & \text{si } x>0 \\ f(0)=0 & \end{array}\right.$.

$\boxed{\textbf{21.}}$ * Dire si les fonctions f suivantes sont prolongeables par continuité (ou prolongeables par continuité à droite ou à gauche) au point a :

a) $f(x)=x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $a=0$; b) $f(x)=E(x+2)+\sqrt{1-E(x)}$ en $a=0$

c) $f(x)=\dfrac{2+\cos x}{x}$ en $a=0$; d) $f(x)=\dfrac{2+\cos x}{x}$ en $a=0$;

e) $f(x)=\dfrac{\cos^4 x-1}{5x^3+x^2}$ en $a=-\dfrac{7}{5}$ et $a=0$; f) $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2-1}$ en $a=-1$;

g) $f(x) = \dfrac{1}{x^4}$ en $a = 0$; h) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+x-6}}$ en $a = 2$;

i) $f(x) = 1 + \tan^2 x$ en $a = \dfrac{\pi}{2}$; j) $f(x) = \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$ en $a = 2$;

k) $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x^2-1}$ en $a = -1$; l) $f(x) = \dfrac{1}{x-x^2} + \dfrac{x-1}{x}$ en $a = 0$;

m) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^3-4x^2+4x}}$ en $a = 2$.

---

22. ** Trouver l'image par la fonction f de l'intervalle I. f réalise-t-elle une bijection sur I ?

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ et $I =]-1;4]$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ et $I = [-1;2[$;

c) $f(x) = \sin \dfrac{x}{2}$ et $I = \left[-\dfrac{\pi}{3}; \dfrac{4\pi}{3}\right]$.

---

23. ** Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

a) Préciser sur quels intervalles f admet une fonction réciproque.

b) Déterminer la fonction réciproque de f sur l'intervalle $]-\infty;-1]$ et tracer les deux graphes.

---

4. Dérivabilité

---

24. * Déterminer la fonction dérivée de la fonction proposée en tout point de son domaine de définition :

$$x \mapsto \sin x + \cos x \qquad x \mapsto x + \sqrt{x} + \frac{1}{x} \qquad x \mapsto \frac{2x^2+3x-4}{x-1}$$
$$x \mapsto \frac{3x^4-2x^3+5x^2-4}{x+2} \qquad x \mapsto \sin\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) \qquad x \mapsto \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$$
$$x \mapsto \sin^2\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad x \mapsto (x^2-4x)^5$$

---

25. * Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction proposée, au point d'abscisse a donné (ou des demi-tangentes au point d'affixe a) :

$$\begin{array}{llll}
x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + 3 & a = 0 \text{ ;} & x \mapsto \dfrac{1}{x-1} & a = 2 \text{ ;} \\
x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-2} & a = 0 \text{ ;} & x \mapsto \dfrac{x^3+1}{x^3-1} & a = -1 \text{ ;} \\
x \mapsto |x^3 - x| & a = \dfrac{1}{2} \text{ ;} & x \mapsto \dfrac{-8x-22}{(2x+5)^2} & a = -2 \text{ ;} \\
x \mapsto \ln\left(\dfrac{1}{x+1}\right) & a = 0 \text{ ;} & e^{\sin x - x^3} & a = 1 \text{ ;} \\
x \mapsto x^2 + 2x - |x| & a = 0 \text{ ;} & x \mapsto \sqrt{x^2-x-2} & a = 2 \text{ ;} \\
x \mapsto \sqrt{|x(x+3)|} & a = -3. & &
\end{array}$$

---

26. * Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes en tout point de leur domaine de définition :

$$x \mapsto \cos(\sqrt{x}) \qquad x \mapsto \sin(\ln x)$$
$$x \mapsto e^{\frac{x}{2}\ln(\sin x)} \quad x \mapsto \sqrt{\frac{1+\sin\sqrt{x}}{1-\sin\sqrt{x}}}$$

---

27. ** On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.
a) Montrer que f est une bijection de $[0;+\infty[$ sur $[1;+\infty[$.
b) Montrer que la fonction réciproque de f est la fonction g définie par :

$$g(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

dont on précisera le domaine de définition.

---

28. * Les fonctions suivantes, dont on admettra qu'elles sont continues en 0, sont-elles dérivables en 0 ?
a) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln x}{x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$
b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{cases} f(x) = x^n(x - \ln x) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -0 \end{cases}$.

---

29. * Calculer les deux premières fonctions dérivées de la fonction proposée sur son domaine de définition :

$$x \mapsto \cos^2(x^2) \quad x \mapsto \tan^2 x$$
$$x \mapsto \frac{1}{\cos^2 x} \quad x \mapsto \sin\sqrt{x}$$

---

30. ** Étudier l'existence de la dérivée n-ième des fonctions suivantes en tout point de leur domaine de définition et calculer celle-ci :

$$x \mapsto \frac{1}{x-1} \qquad x \mapsto \frac{1}{(x-1)(x-2)} \qquad x \mapsto x\cos x$$

Problèmes de synthèse

Problème 1

Soit la fonction a définie par $q(x) = \sqrt{2x^3+3x^2}$ pour $x \in \left[-\dfrac{3}{2};0\right]$.
a) Justifier que q est dérivable sur $\left]-\dfrac{3}{2};0\right[$ et calculer $q'(x)$ pour $x \in \left]-\dfrac{3}{2};0\right[$.
b) q est-elle dérivable en 0 ? Si oui, donner la valeur de $q'(0)$.

c) q est-elle dérivable en $-\dfrac{3}{2}$? Si oui, donner la valeur de $q'\left(-\dfrac{3}{2}\right)$.
d) Donner le tableau de variation de q.
e) Démontrer que l'équation $q(x) = \dfrac{1}{2}$ a une unique solution α dans l'intervalle $]-1;0]$.
Trouver, avec la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
f) Représenter graphiquement la fonction q.

Problème 2

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - e^{2x-2}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
On prendra 5 cm comme unité.

1. a) Déterminer la limite de f en $-\infty$.
b) Vérifier que, pour tout réel x non nul,

$$f(x) = x\left[1 - 2e^{-2} \times \left(\frac{e^{2x}}{2x}\right)\right].$$

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Déterminer f'. Étudier le signe de $f'(x)$ et calculer la valeur exacte du maximum de f.

3. Démontrer que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$.
Étudier la position relative de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

4. On note A le point de la coube $(\mathcal{C})$ d'abscisse 1.
Déterminer une équation de la tangente $(\mathcal{T})$ en A à la courbe $(\mathcal{C})$.

5. a) On note I l'intervalle $[0; 0,5]$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans l'intervalle I une unique solution qu'on notera a.
b) Déterminer une valeur approchée de a à 10^{-1} près.

6. Construire la courbe $(\mathcal{C})$, l'asymptote $(\mathcal{D})$ et la tangente $(\mathcal{T})$.

Partie B

Détermination d'une valeur approchée de a.

On définit dans $\mathbb{R}$ la suite $(u_n)_n$ par

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = e^{2u_n - 2}.$$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = e^{2x-2}.$$

Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à $g(x) = x$. En déduire $g(a)$.

2. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, on a :

$$|g'(x)| \leq \frac{2}{e}.$$

3. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle I, $g(x)$ appartient à I.
On admettra que, pour tout entier naturel n,

$$|u_{n+1} - a| \leq \left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

4. En déduire que la suite $(u_n)_n$ converge et donner sa limite.

5. Déterminer un entier naturel p tel que

$$|u_p - a| < 10^{-5}$$

6. En déduire une valeur approchée de a à 10^{-5} près.