CONGRUENCIA, SEMEJANZA Y CONCURRENCIA

Luis Fernando Cáceres-Duque

Departamento de Ciencias Matemáticas
Universidad de Puerto Rico
Recinto Universitario de Mayagüez

Impreso y hecho en Puerto Rico

Todos los ingresos de esta publicación son para el proyecto:
Olimpiadas de Matemáticas de Puerto Rico

Prologo

En este libro presentamos temas básicos de geometría plana desarrollados dentro de tres grandes tópicos: congruencia, semejanza y concurrencia. La teoría está acompañada de ejercicios apropiados para cada uno de los temas. Algunos de estos ejercicios han sido seleccionados de olimpiadas de matemáticas locales e internaciones.

Una de las características principales de estas notas es que comienza con geometría muy básica y rápidamente desarrolla teoremas y conceptos fundamentales. Se asume que el lector tenga algunos conocimientos básicos de terminología usada en geometría, pero en cuanto a resultados geométricos prácticamente se comienza de cero.

Esperamos que el lector resuelva todos los ejercicios ya que geometría, como las demás áreas de la matemática, requiere mucha práctica para lograr un verdadero dominio.

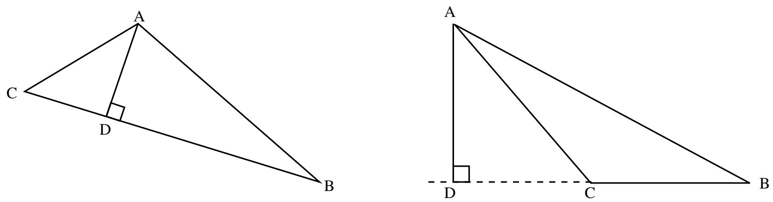
Agradezco a Gabriel Uribe por su ayuda en la edición de estas notas y a María Losada por sus valiosos comentarios y sugerencias.

Enero 2010

Triángulos Congruentes

Comenzamos esta sección con la definición de altura de un triángulo y la fórmula más conocida para calcular el área de cualquier triángulo.

Definición. *Una* **altura del triángulo** ABC *es un segmento que va desde un vértice del triángulo hasta el lado opuesto y es perpendicular a dicho lado opuesto del vértice.*



En los dibujos anteriores se muestran las alturas de los triángulos ABC desde el vértice A, respectivamente. Al punto D se le llama **pie de la altura**.

Ejercicio. *Sabiendo que el área de un triángulo rectángulo es la mitad del producto de las longitudes de sus catetos, hallar el área de un triángulo arbitrario.*

Nota. *Al área del triángulo* ABC *la denotaremos por* (ABC).

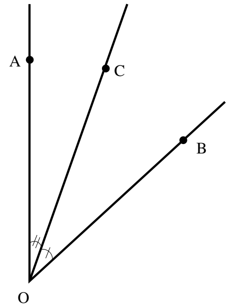
Ejercicio. *Sea el* $\triangle ABC$ *y sean* D *y* E *puntos sobre* AB *y* AC *respectivamente tales que* DE *es paralela a* BC. *Demostrar que* $(ABE) = (ADC)$.

Ejercicio. *En el triángulo* ABC *sea* M *el punto medio de* BC. *Si* P *es un punto cualquiera en* AM *entonces* $(BPM) = (CPM)$.

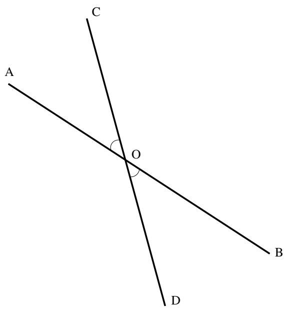
Ejercicio. *Sea el* $\triangle ABC$. *Sean* D *y* E *puntos en* BC *tales que* $BD = DE = EC$. *Entonces* $(ABD) = (ADE) = (AEC)$. *¿Cuánto vale cada una de estas áreas?*

Rectas paralelas y ángulos especiales

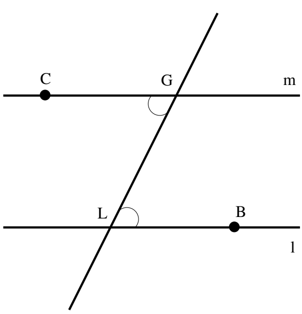
Los ángulos BOC y COA del dibujo se llaman **ángulos adyacentes**.



Los ángulos COA y DOB del dibujo se llaman **opuestos por el vértice** y miden lo mismo.



Los ángulos CGL y BLG del dibujo se llaman **alternos internos**. Las rectas l y m son paralelas si y solo si $\angle CGL = \angle BLG$.



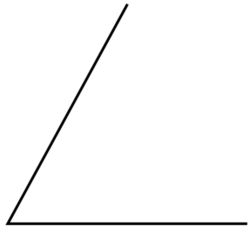
En geometría decimos que dos figuras geométricas son congruentes si tienen exactamente la misma forma y el mismo tamaño. En particular aquí nos interesa el estudio de triángulos congruentes. A continuación damos una definición precisa de lo que se entiende como triángulos congruentes.

Definición. *Dos triángulos son* **congruentes** *si tiene sus lados y sus ángulos correspondientes iguales. Más precisamente, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son congruentes si $AB = A'B'$, $BC = B'C'$ y $CA = C'A'$; y los ángulos en A, B y C son iguales a los ángulos en A', B' y C' respectivamente.*

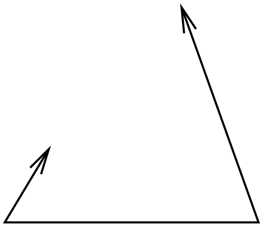
Los siguientes criterios son conocidos como los criterios de congruencia y nos proveen formas rápidas de verificar si dos triángulos son congruentes. Estos criterios son intuitivamente claros.

Criterios de congruencia de triángulos

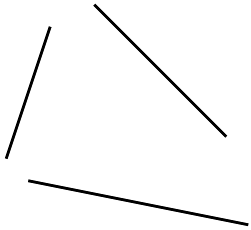
LAL Dos triángulos que tiene dos lados y al ángulo comprendido entre ellos iguales, son congruentes.



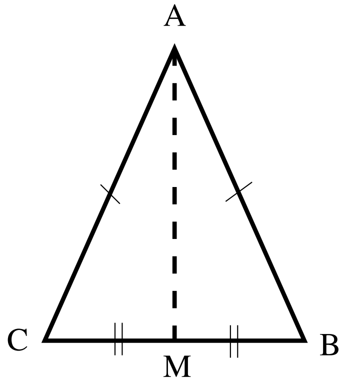
ALA Dos triángulos con un lado igual y dos ángulos adyacentes iguales son congruentes.



LLL Dos triángulos con tres lados iguales son congruentes.



Ejemplo. *Si ABC es un triángulo isósceles con $AB = AC$ se tiene que $\angle BCA = \angle ABC$.*

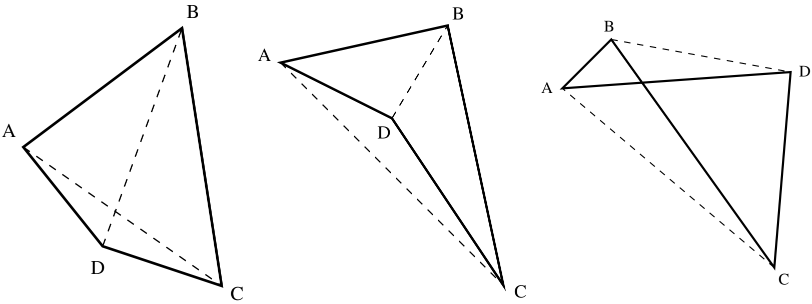


Sea M el punto medio de BC. Los lados AB, BM y MA del triángulo ABM son congruentes respectivamente a AC, CM y MA en el triángulo ACM. Por el criterio LLL, los dos triángulos ABM y ACM son congruentes. Por lo tanto $\angle BCA = \angle ABC$.

Ejemplo. *Todo triángulo equilátero tiene sus tres ángulos iguales.*

Ejemplo. *Si AB y CD son dos segmentos que no están en la misma recta y se bisecan en el punto P, entonces los pares de triángulos APC, BPD y APD, BPC son congruentes.*

Definición. *Un polígono es* **convexo** *si todas sus diagonales están dentro del polígono. En particular, un cuadrilátero es convexo si sus dos diagonales están dentro del cuadrilátero.*



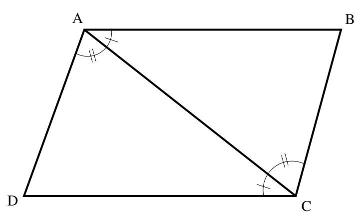
(a) cuadrilátero convexo

(b) cuadrilátero no convexo

(c) cuadrilátero no convexo

Definición. *Un* **paralelogramo** *es un cuadrilátero $ABCD$ tal que AB es paralelo a CD y AD es paralelo a BC.*

Ejemplo. *En un paralelogramo los lados opuestos son congruentes.*



Note que el segmento AC es transversal a las paralelas AD y BC, luego se cumple que $\angle BCA = \angle DAC$. De igual forma $\angle CAB = \angle ACD$. Además, como AC es un lado común a los triángulos ABC y ADC, se tiene por el criterio ALA que estos dos triángulos son congruentes y de aquí se sigue el resultado.

Ejercicio. *Demostrar que en un paralelogramo las diagonales se cortan en el punto medio.*

Ejercicio. *Si en un cuadrilátero los lados opuestos son iguales entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo.*

Ejercicio. *Si en un cuadrilátero las diagonales se bisecan, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo.*

Ejemplo (México 1995). *El pentágono convexo $ABCDE$ tiene la propiedad de que las áreas de los triángulos ABC, BCD, CDE, DEA y EAB son iguales. Demostrar que*

$$\frac{(ABCDE)}{4} < (ABC) < \frac{(ABCDE)}{3}$$

Solución. *Sea T el punto de intersección de DB y CE. Como $(ABC) = (ABE)$, entonces EC y AB son paralelos. Similarmente, como $(EAB) = (EAD)$, entonces EA y DB también son paralelos. Por lo tanto el cuadrilátero $ABTE$ es un paralelogramo. De aquí se sigue que*

$$(ABET) = 2\,(EAB) \tag{1}$$

Note además que

$$(DET) < (DEC) \tag{2}$$

De (1) y (2) se sigue que

$$\begin{aligned}(ABCDE) &= (ABTE) + (BCD) + (EDT)\\ &< 2\,(EAB) + (BCD) + (DEC)\\ &= 4\,(ABC)\end{aligned} \tag{3}$$

Además

$$\begin{aligned}(ABCDE) &= (ABTE) + (BCD) + (EDT)\\ &> 2\,(EAB) + (BCD)\\ &= 3\,(ABC)\end{aligned} \tag{4}$$

Por lo tanto, por (3) y (4) obtenemos las desigualdades deseadas:

$$\frac{(ABCDE)}{4} < (ABC) < \frac{(ABCDE)}{3}$$

.

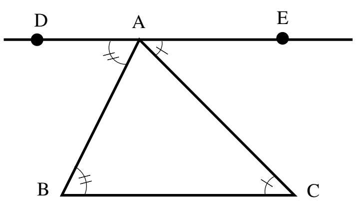
Ejercicio (Hungría 1988). *Cada uno de los cuatro lados de un pentágono convexo $ABCDE$ es paralelo a su diagonal opuesta. Demostrar que el quinto lado también es paralelo a su diagonal opuesta. Ayuda: Note que AB es paralelo a CE si y solo si $(ABC) = (ABE)$.*

En un triángulo rectángulo el lado opuesto al ángulo recto se llama **hipotenusa** y los otros dos lados se llaman **catetos**.

Probamos ahora un principio fundamental de los ángulos interiores de los triángulos.

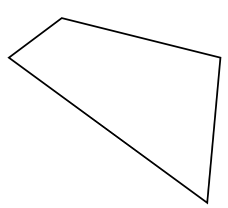
Teorema. *La suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es* $180°$.

Demostración. *Trazamos un triángulo cualquiera ABC. Por el vértice A trazamos una paralela al lado BC como en el dibujo.*



Note que por ángulos alternos internos $\angle DAB = \angle CBA$ y $\angle CAE = \angle ACB$. Además $\angle DAB + \angle BAC + \angle CAE = 180°$. Entonces $\angle CBA + \angle BAC + \angle ACB = 180°$.

Ejemplo. *Los ángulos internos de un cuadrilátero convexo suman* $360°$.



Basta dividir el cuadrilátero en dos triángulos y usar el teorema anterior.

Por el teorema anterior se tiene que en un triángulo ABC ningún ángulo puede ser nulo o llano. Si $\angle ABC = 0°$ o $\angle ABC = 180°$ entonces A, B y C son colineales y no forman un triángulo.

Además es fácil ver que un triángulo no puede tener más de un ángulo recto o tener más de un ángulo obtuso.

Ejercicio. *Si un ángulo de un triángulo es la suma de los otros dos ángulos, entonces el triángulo es rectángulo.*

Ejercicio. *Demostrar que un triángulo ABC que cumple que $\angle CBA = \angle ACB$ es un triángulo isósceles.*

Ejercicio. *Todo triángulo que tiene sus tres ángulos iguales es equilátero.*

Definición. *La* **bisectriz** *del $\angle AOB$ es el rayo que sale de O y divide al ángulo en dos ángulos iguales.*

Ejercicio. *Una perpendicular a la bisectriz de un ángulo forma con sus lados un triángulo isósceles.*

Ejercicio. *Las bisectrices de dos ángulos adyacentes son perpendiculares.*

Ejercicio. *¿Cuánto vale cada uno de los ángulos internos de un pentágono regular? ¿Cuánto vale la suma de los ángulos internos de un polígono convexo de n lados?*

Ejercicio. *Si una bisectriz de un ángulo en un triángulo es también la altura del lado opuesto al ángulo, entonces dicho triángulo es isósceles.*

Ejercicio. *La perpendicular a la bisectriz de un ángulo corta a sus lados en puntos que equidistan del vértice del ángulo.*

Ejercicio (OMPR 2008). *En el triángulo isósceles ABC, $AB = AC$ y $\angle CBA = 75°$. Sobre el lado AC se construye un triángulo isósceles con AD=DC y $\angle ADC = 50°$. Hallar el $\angle BAD$.*

Ejercicio (OMPR 2005). *Sean $ABCD$ un rectángulo, E el punto medio de BC y F el punto medio de CD. Sea G el punto de intersección de DE con BF. Si $\angle FAE = 20°$, hallar la medida del ángulo EGB.*

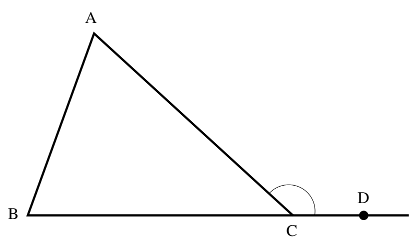
Ejercicio. *Hallar los ángulos de un triángulo rectángulo si la bisectriz del ángulo recto es igual a un cateto.*

Ejercicio. *Hallar el ángulo que forman las bisectrices de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo.*

Ejercicio. *Si en un cuadrilátero sus ángulos opuestos son iguales, entonces dicho cuadrilátero es un paralelogramo.*

Además de los ángulos internos de un triángulo, existen otros ángulos que son importantes, damos la definición a continuación.

Definición. *Un* **ángulo exterior** *de un triángulo se forma cuando un lado del triángulo es extendido.*



El $\angle DCA$ es un ángulo exterior del triángulo que se muestra en la figura.

Demostraremos a continuación que todo ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes.

Teorema. *Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los ángulos internos no adyacentes.*

Demostración. *En efecto, $\angle ACB + \angle CAB + \angle BAC = 180°$, luego*

$$\angle ACB = 180° - \angle CBA - \angle BAC \tag{1}$$

Además, como $\angle DCA + \angle ACB = 180°$, *entonces despejando se obtiene que*

$$\angle DCA = 180° - \angle ACB \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) *en* (2), *se tiene que*

$$\angle DCA = 180° - (180° - \angle CBA - \angle BAC)$$

por lo tanto $\angle DCA = \angle CBA + \angle BAC$.

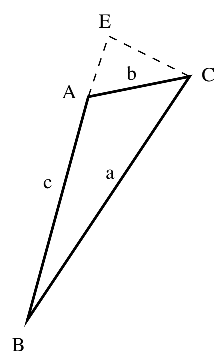
Ejercicio. *Un ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquiera de los ángulos del triángulo no adyacentes a él.*

Ejercicio. *¿Cuánto vale la suma de los tres ángulos exteriores de cualquier triángulo?*

El próximo teorema provee una relación fundamental entre los lados y los ángulos de los triángulos.

Teorema. *En cualquier triángulo, el lado mayor se opone al ángulo mayor.*

Demostración. *Consideremos un triángulo* ABC *y supongamos que* $CB > AB$. *Tomemos un punto* E *en la prolongación de* AB *tal que* $CB = BE$.



Como el triángulo BCE es isósceles se tiene que $\angle ECB = \angle BEC = \angle AEC$. Además como $\angle ECB = \angle ECA + \angle ACB$, entonces

$$\angle AEC = \angle ECA + \angle ACB \qquad (1)$$

Note que $\angle BAC$ es un ángulo exterior del triángulo AEC, entonces $\angle BAC = \angle AEC + \angle ECA$. Sustituyendo (1) en esta última ecuación obtenemos

$$\angle BAC = \angle ACB + 2\angle ECA$$

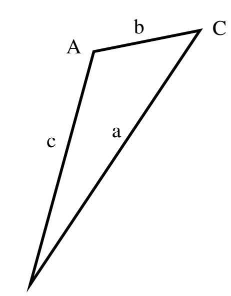
Como $\angle ECA > 0$, entonces $\angle BAC > \angle ACB$.

El recíproco del teorema anterior también es cierto y lo presentamos a continuación.

Teorema. *En cualquier triángulo el ángulo mayor se opone al lado mayor.*

Demostración. *Consideremos el triángulo ABC y supongamos que*

$$\angle BAC > \angle ACB$$



Si comparamos los lados BC y AB tenemos tres posibilidades: $BC = AB$, $BC < AB$ o $BC > AB$. Si $BC = AB$, entonces el triángulo ABC sería isósceles y $\angle BAC = \angle ACB$, lo cual es absurdo ya que $\angle BAC > \angle ACB$. Si $BC < AB$, entonces por el teorema anterior $\angle ACB > \angle BAC$ y esto es absurdo. Por lo tanto la única posibilidad que queda es que $BC > AB$.

Ejercicio. *En el $\triangle ABC$ se tiene que $\angle A = 40°$ y $\angle B = 50°$. ¿Cuál es el lado mayor del $\triangle ABC$?*

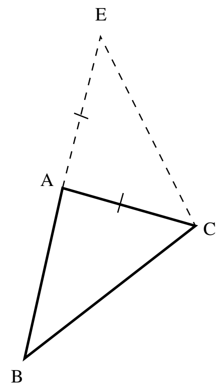
Ejercicio. *Sea el $\triangle ABC$ isósceles con $AB = AC$. Sea D en BC. Probar que AD es menor que AB.*

Ejercicio. *En todo triángulo rectángulo la hipotenusa es el lado mayor.*

El próximo resultado es uno fundamental en geometría y provee una relación que satisfacen los lados de cualquier triángulo.

Teorema (desigualdad del triángulo)**.** *En cualquier triángulo la suma de las longitudes de dos de sus lados es mayor que la longitud del tercer lado.*

Demostración. *Consideremos el triángulo ABC. Sea E en la prolongación de AB tal que $AE = AC$. Como el triángulo ACE es isósceles, entonces $\angle ECA = \angle AEC$. Luego $\angle ECB = \angle ECA + \angle ACB = \angle AEC + \angle ACB$. Como $\angle ACB > 0$, entonces $\angle ECB > \angle AEC$. Por lo tanto, en el triángulo EBC tenemos que el lado opuesto a $\angle ECB$ es mayor que el lado opuesto al $\angle AEC$, es decir $EB > BC$. Pero $EB = EA + AB = AC + AB$, por lo tanto $AC + AB > BC$.*



De manera similar se demuestra que $AC + BC > AB$ y que $BC + AB > AC$.

Ejemplo. *Hallar los posibles valores del lado BC en el triángulo ABC si $AB = 5$ y $AC = 8$.*

Solución. *De la desigualdad triangular se tiene que $BC < 5 + 8$, $8 < 5 + BC$ y $5 < 8 + BC$. Por lo tanto, $BC < 13$, $BC > 3$ y $BC > -3$. Esta última desigualdad no provee ninguna información pues las medidas de los lados del triángulo son positivas. Luego $3 < BC < 13$. Por lo tanto BC es cualquier número real entre 3 y 13.*

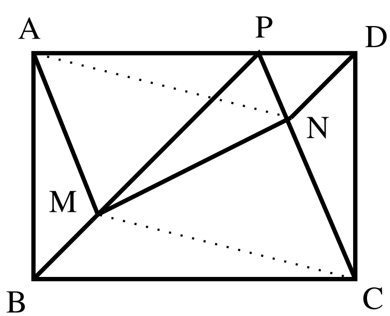
Ejercicio. *Sean a, b, c números positivos con $a + b > c$, $a + c > b$ y $b + c > a$. Demostrar que siempre existe un triángulo con lados de longitudes a, b, c.*

Ejercicio. *Sea AB el lado mayor del $\triangle ABC$. Si P es un punto interior a este triángulo entonces $PA + PB > PC$.*

Ejercicio. *Dos de los lados de un triángulo isósceles miden 5 y 12. Hallar la medida del otro lado del triángulo.*

Ejemplo (MAYO 2008)**.** *En el rectángulo $ABCD$ sea P un punto del lado AD tal que $\angle BPC = 90°$. La perpendicular a BP trazada por A corta a BP en M y la perpendicular a CP trazada por D corta a CP en N. Demostrar que el centro del rectángulo está sobre el segmento MN.*

Solución.



En los triángulos rectángulos ABP y ABM se tiene que $\angle ABM = 90° - \angle APB = 90° - \angle BAM$. Por lo tanto

$$\angle APB = \angle BAM \tag{1}$$

Además por ángulos alternos internos, entre las paralelas AD y BC, tenemos que

$$\angle APB = \angle PBC \tag{2}$$

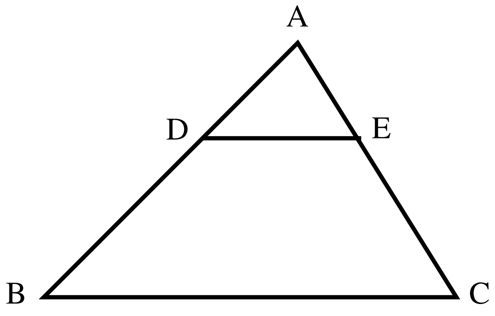
Por otro lado, en el triángulo rectángulo BPC se cumple que $\angle CBP + \angle PCB = 90°$ y como $\angle DCB = 90° = \angle DCP + \angle PCB$, obtenemos

$$\angle DCP = \angle CBP \tag{3}$$

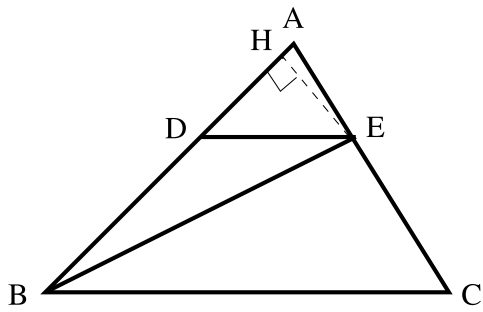
De (1), (2) y (3) se sigue que $\angle BAM = \angle DCP$. Como además $\angle NDC = \angle MBA$ y $AB = CD$, entonces los triángulos ABM y CDN son congruentes. Por lo tanto $AM = CN$. Además como AM y CN son paralelos, ya que ambos segmentos son perpendiculares a BP, entonces $AMCN$ es un paralelogramo. Sea O el punto de intersección de las diagonales de $AMCN$. Como en cualquier paralelogramo las diagonales se cortan en su punto medio, entonces O es el punto medio de AC, es decir, O es el centro del rectángulo. Por lo tanto, el centro del rectángulo, pertenece a MN.

A continuación demostramos uno de los teoremas más fundamentales de la geometría básica y del cual se van a desprender gran cantidad de resultados.

Teorema (Thales)**.** *En un triángulo ABC si D y E son puntos en AB y AC respectivamente, tales que el segmento DE es paralelo al lado BC, entonces los puntos D y E determinan segmentos proporcionales a los lados, es decir $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$.*



Demostración. *Trazamos el segmento BE y la perpendicular EH desde el vértice E al lado AB.*



Observar que el $\triangle ABE$ y el $\triangle ADE$ tienen la misma altura EH. Por lo tanto $(ABE) = \dfrac{AB \cdot EH}{2}$ *y* $(ADE) = \dfrac{AD \cdot EH}{2}$. *Entonces*

$$\frac{(ABE)}{(ADE)} = \frac{AB}{AD} \tag{1}$$

De manera similar se tiene que

$$\frac{(ADC)}{(ADE)} = \frac{AC}{AE} \tag{2}$$

Pero los triángulos DBE y DCE tienen la misma base DE y como DE y BC son paralelas, tienen la misma altura, así que $(DBE) = (DCE)$. Por lo tanto

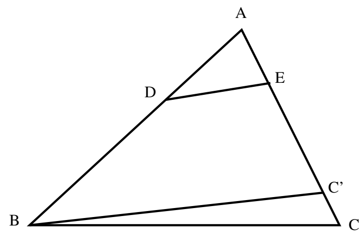
$$\begin{aligned}(ABE) &= (ADE) + (DBE)\\ &= (ADE) + (DCE)\\ &= (ADC)\end{aligned} \tag{3}$$

De (1), (2) *y* (3) *se concluye que* $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$.

El recíproco del Teorema de Thales también es cierto, veamos a continuación.

Teorema (recíproco de Thales). *Si en un triángulo ABC se tienen puntos D y E sobre los lados AB y AC respectivamente, tales que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$ entonces DE es paralelo al lado BC.*

Demostración. *Sea BC' la recta paralela a DE que pasa por B y corta a AC en C'.*



Por el Teorema de Thales se tiene que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC'}{AE}$. Pero por hipótesis sabemos que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AC}{AE}$. Por lo tanto $AC = AC'$ y entonces $C = C'$. Por lo tanto DE es paralelo a BC.

Nota. *Es claro que*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$$

si y solo si

$$\frac{AD + DB}{AD} = \frac{AE + EC}{AE}$$

si y solo si

$$1 + \frac{DB}{AD} = 1 + \frac{EC}{AE}$$

si y solo si

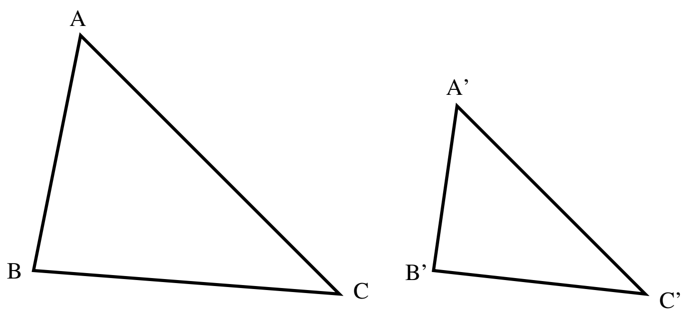
$$\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE}$$

Por lo tanto la conclusión del teorema de Thales (o la hipótesis del recíproco) se puede expresar también como $\dfrac{DB}{AD} = \dfrac{EC}{AE}$.

Semejanza de triángulos

El concepto de semejanza en matemáticas está ligado al concepto de proporcionalidad. En términos informales decimos que dos objetos son semejantes si guardan cierta proporción entre sus partes. A continuación presentamos una definición fundamental que establece, de manera precisa, lo que se entiende por semejanza de triángulos.

Definición. *Dos triángulos son* **semejantes** *si sus ángulos son iguales. Es decir, los triángulos ABC y $A'B'C'$ son semejantes si $\angle A = \angle A'$, $\angle B = \angle B'$, $\angle C = \angle C'$.*



Como la suma de los ángulos internos de cualquier triángulo es 180° entonces para obtener semejanza de dos triángulos es suficiente que ellos tengan dos ángulos correspondientes iguales.

Todo triángulo es semejante a sí mismo. Además si el $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle DEF$, entonces el $\triangle DEF$ es semejante al $\triangle ABC$. Similarmente si el $\triangle ABC$ es semejante el $\triangle DEF$ y el $\triangle DEF$ es semejante al $\triangle GHI$, entonces el $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle GHI$.

Es claro que un triángulo rectángulo no puede ser semejante a un triángulo acutángulo. Así como tampoco un triángulo acutángulo puede ser semejante a un triángulo obtusángulo.

Ejercicio. *Existen triángulos rectángulos que no son semejantes entre si y existen triángulos isósceles que no son semejantes entre si.*

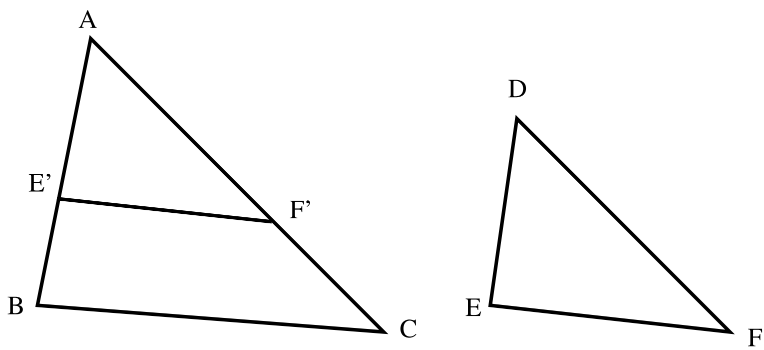
La semejanza entre dos triángulos produce automáticamente una relación de proporcionalidad entre los lados correspondientes de los triángulos. Mostramos esta relación a continuación.

Teorema. *Si dos triángulos son semejantes, es decir si tienen sus ángulos correspondientes iguales entonces sus lados correspondientes son proporcionales.*

Demostración. *Tomamos los triángulos ABC y DEF con ángulos correspondientes iguales y tenemos que demostrar que*

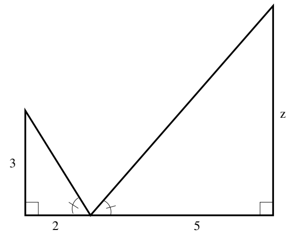
$$\frac{AB}{DE} = \frac{CA}{FD} = \frac{BC}{EF}$$

Demostraremos la primera igualdad, la segunda se hace de manera similar.

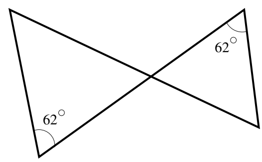


Sean E' y F' puntos en AB y AC respectivamente, tales que $AE' = DE$ y $AF' = DF$. Los triángulos $AE'F'$ y DEF son congruentes por el criterio de congruencia LAL. Por lo tanto $\angle F'E'A = \angle FED = \angle CBA$ y $\angle AF'E' = \angle DFE = \angle ACB$. Por lo tanto $E'F'$ y BC son paralelas. Por el Teorema de Thales, $\dfrac{AB}{AE'} = \dfrac{AC}{AF'}$. Pero como $AE' = DE$ y $AF' = DF$, entonces $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{CA}{FD}$.

Ejercicio. *Encontrar la distancia z.*



Ejercicio. *Explicar por qué los siguientes triángulos son semejantes.*

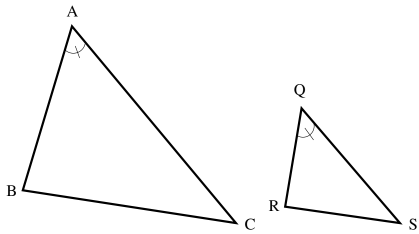


Ejercicio. *Demostrar que la altura correspondiente a la hipotenusa en un triángulo rectángulo lo divide en dos triángulos semejantes entre sí y semejantes al triángulo original.*

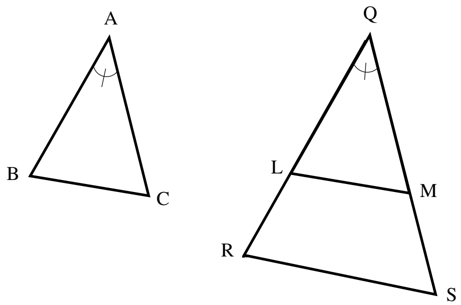
Ejercicio. *Hallar la razón entre los perímetros de dos triángulos semejantes.*

El próximo criterio de semejanza de triángulos combina la proporcionalidad de lados con la igualdad de ángulos.

Teorema (LAL). *Si un ángulo de un triángulo es igual a un ángulo de otro triángulo y los lados que forman dichos ángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.*



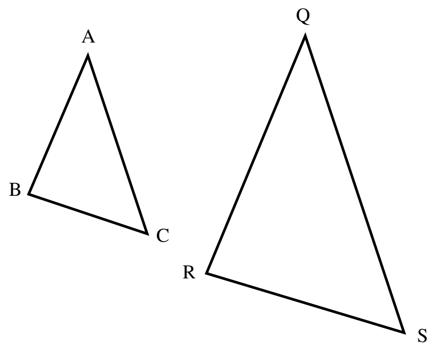
Demostración. *Supongamos que* $\angle A = \angle Q$ *y* $\dfrac{AB}{QR} = \dfrac{AC}{QS}$. *Demostraremos que el* $\triangle ABC$ *es semejante al* $\triangle QRS$.



Se escoge L *en el segmento* QR *de tal forma que* $AB = QL$ *y se dibuja el segmento* LM *paralelo al segmento* RS. *Entonces, se tiene que el* $\triangle QLM$ *es semejante al* $\triangle QRS$. *Por lo tanto* $\dfrac{QL}{QR} = \dfrac{QM}{QS}$. *Como* $\dfrac{AB}{QR} = \dfrac{AC}{QS}$ *y* $AB = QL$, *entonces* $AC = QM$. *Por lo tanto, los triángulos* ABC *y* QLM *son congruentes por* LAL *y así los triángulos* ABC *y* QRS *son semejantes.*

El último criterio de semejanza establece que conociendo la proporcionalidad entre los lados de dos triángulos podemos obtener la semejanza de los dos triángulos.

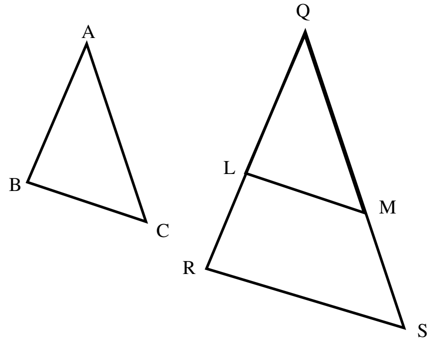
Teorema (LLL). *Si los lados correspondientes de dos triángulos son proporcionales, entonces los triángulos son semejantes.*



Demostración. *Supongamos que*

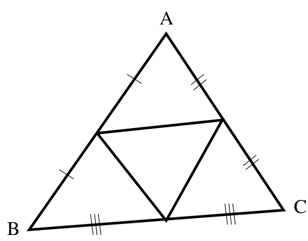
$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RS} = \frac{AC}{QS}$$

Veamos que $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle QRS$.



Dibujar el segmento LM lo mismo que en la demostración anterior. Por el criterio AA se tiene que los triángulos QLM y QRS son semejantes. Por lo tanto $\dfrac{QL}{QR} = \dfrac{LM}{RS} = \dfrac{QM}{QS}$. Usando $\dfrac{AB}{QR} = \dfrac{BC}{RS} = \dfrac{AC}{QS}$ y el hecho de que $AB = QL$ se obtiene que $BC = LM$ y $AC = QM$. Por lo tanto, los triángulos ABC y QLM son congruentes. Por lo tanto el $\triangle ABC$ es semejante al $\triangle QRS$.

Ejercicio. *En la siguiente figura, usando los puntos medios se puede dividir al triángulo grande en cuatro triángulos pequeños.*

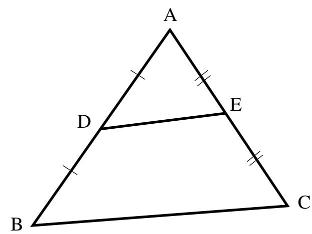


Demostrar que cada uno de los triángulos pequeños es semejante al triángulo grande.

El triángulo que se obtiene al unir los puntos medios de los lados de un triángulo ABC es conocido como el **triángulo medial** del triángulo ABC.

Teorema. *El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y de longitud igual a la mitad de ese tercer lado.*

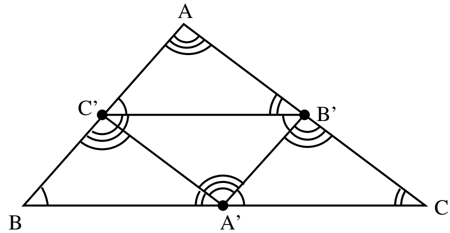
Demostración. *Consideremos el triángulo ABC y sean D y E los puntos medios de AB y AC respectivamente.*



Entonces $\frac{DB}{AD} = \frac{EC}{AE} = 1$. *Por el recíproco del teorema de Thales se tiene que DE es paralelo al lado BC. Esto a su vez implica que los triángulos ADE y ABC son semejantes luego* $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BC}$. *Pero* $AB = 2AD$, *entonces* $\frac{AD}{2AD} = \frac{DE}{BC}$. *Por lo tanto* $BC = 2DE$.

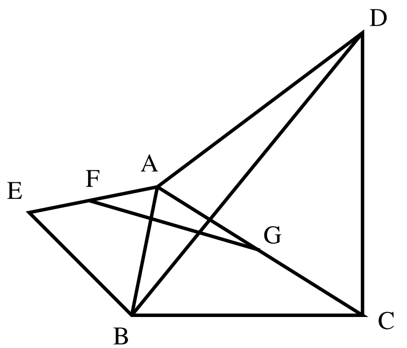
Ejercicio. *Los puntos medios de los lados de un triángulo determinan cuatro triángulos congruentes.*

Dado un triángulo cualquiera ABC, de acuerdo al ejercicio anterior, los puntos medios de los lados determinan cuatro triángulos congruentes como se ve en la figura



Por lo tanto $\angle A + \angle B + \angle C = \angle B'A'C' + \angle CA'B' + \angle C'A'B = 180°$ Entonces hemos demostrado, de una manera diferente, que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°.

Ejercicio (OMPR 2007)**.** *En el triángulo ABC se construyen triángulos equiláteros ACD y AEB como se muestra en la figura. Si F y G son los puntos medios de EA y AC respectivamente, hallar la razón $\dfrac{BD}{FG}$.*



Ejercicio. *Los puntos medios de los lados de cualquier cuadrilátero son los vértices de un paralelogramo. Este paralelogramo se llama* **paralelogramo de Varignon** *de ese cuadrilátero.*

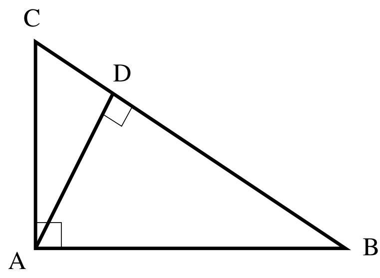
Ejercicio. *Las bases de un trapecio son a y b. Encontrar la longitud del segmento que une los puntos medios de las diagonales.*

Ejercicio. *Sea un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en A. Sea D el pie de la altura desde A. Demostrar que $AD^2 = BD \cdot DC$.*

Demostramos a continuación uno de los teoremas mas conocidos de la matemática.

Teorema (Pitágoras)**.** *En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.*

Demostración. *Consideremos un triángulo rectángulo ABC con ángulo recto en A. Sea D el pie de la perpendicular desde A.*



Note que los triángulos DBA *y* ABC *son semejantes por* AA *ya que ambos son rectángulos y comparten el ángulo en* B*. Por lo tanto* $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{DB}{AB}$*, luego*

$$AB^2 = DB \cdot CB \tag{1}$$

De igual manera los triángulos DAC *y* ABC *son semejantes. Entonces* $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CD}{CA}$ *y se tiene que*

$$CA^2 = CD \cdot CB \tag{2}$$

Sumando las ecuaciones (1) y (2) obtenemos

$$\begin{aligned} AB^2 + CA^2 &= DB \cdot CB + CD \cdot CB \\ &= CB\,(DB + CD) \\ &= CB \cdot CB \\ &= CB^2 \end{aligned}$$

Entonces $AB^2 + CA^2 = CB^2$.

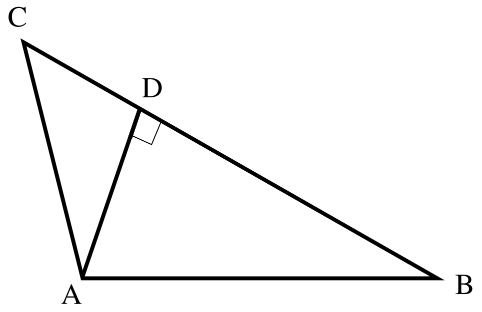
Ejercicio. *Un punto* P *en la hipotenusa* AB *del triángulo rectángulo* ABC *equidista de los catetos. Hallar* CP *en términos de los catetos.*

Ejercicio. *Sea* ABC *un triángulo isósceles con* $AB = AC$*. Sea* AF *la altura del lado* AB*. Probar que* $BC^2 = 2AB \cdot BF$.

El recíproco del teorema de Pitágoras también es cierto y provee una herramienta poderosa para determinar si un triángulo dado es rectángulo.

Teorema (recíproco de Pitágoras)**.** *Si en un triángulo se tiene que el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, entonces el triángulo es rectángulo.*

Demostración. *Supongamos que ABC es un triángulo cualquiera que cumple $CA^2 + AB^2 = CB^2$.*



Sea D el pie de la perpendicular desde A sobre el lado BC. Por el teorema de Pitágoras se tiene que $AD^2 + DB^2 = AB^2$ y $CD^2 + AD^2 = CA^2$. Sumando estas dos ecuaciones tenemos que $2AD^2 + DB^2 + CD^2 = CA^2 + AB^2$. Pero por hipótesis $CA^2 + AB^2 = CB^2$, luego

$$2DA^2 + DB^2 + CD^2 = CB^2 \tag{1}$$

Por otro lado

$$CB^2 = (CD + DB)^2 = CD^2 + 2 \cdot CD \cdot DB + DB^2 \tag{2}$$

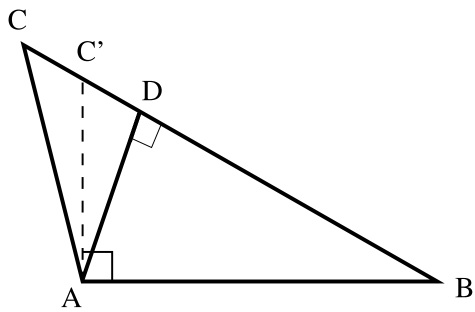
De (1) y (2) tenemos que

$$2AD^2 + DB^2 + CD^2 = CD^2 + 2 \cdot CD \cdot DB + DB^2$$

Simplificando obtenemos

$$AD^2 = CD \cdot DB \tag{3}$$

Sea C' el punto de corte de BC con la perpendicular a AB que pasa por A.



Note que los triángulos rectángulos ADB y $C'AB$ son semejantes. De igual manera los triángulos $C'DA$ y $C'AB$ son semejantes. Por lo tanto los triángulos ADB y $C'DA$ son también semejantes. Por lo tanto

$$\frac{AD}{C'D} = \frac{BD}{AD}$$

entonces $AD^2 = BD{\cdot}C'D$. Igualando esta última ecuación con la ecuación (3) se tiene que $CD{\cdot}DB = BD{\cdot}C'D$. Entonces $CD = C'D$ y esto implica que $C = C'$. Por lo tanto el triángulo ABC es rectángulo.

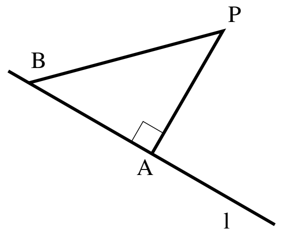
Ejercicio. *Hallar la altura desde la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 6 y 14.*

Ejemplo. *Si dos triángulos rectángulos tienen dos de sus lados congruentes, entonces los dos triángulos son congruentes. Esto se sigue fácilmente por el teorema de Pitágoras y el criterio LLL.*

La **distancia de un punto a una recta** está dada por la longitud del segmento que va desde el punto a la recta y que es perpendicular a la recta. Obviamente si el punto P está sobre la recta, la distancia entre el punto y la recta es cero. Por el Teorema de Pitágoras podemos probar que la distancia entre un punto y una recta es la distancia más corta.

Teorema. *Sea l una recta y P un punto fuera de l. Sea A en l tal que AP es perpendicular a l. La distancia más corta desde P hasta l está dada por la longitud del segmento AP.*

Demostración. *Consideremos la recta l y P un punto fuera de l.*

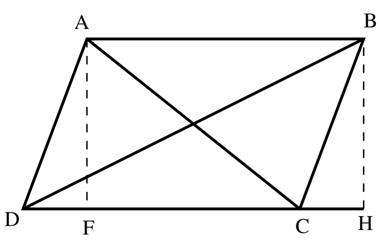


Sea A en l tal que AP es perpendicular a l. Por Pitágoras, cualquier otro punto B en la recta cumple que $PB^2 = PA^2 + AB^2$ Por lo tanto $PB > PA$.

Las longitudes de los lados y las diagonales de un paralelogramo cumplen una relación interesante que se conoce como la ley del paralelogramo.

Teorema (Ley del paralelogramo)**.** *La suma de los cuadrados de las diagonales de un paralelogramo es igual a la suma de los cuadrados de sus lados.*

Demostración. *Consideremos el paralelogramo $ABCD$. Sean F y H sobre la recta que contiene el segmento CD tal que BH y AF son perpendiculares a DC. Ver la siguiente figura.*



Aplicando el teorema de Pitágoras a los triángulos DBH, ACF y AFD se obtienen respectivamente las siguientes ecuaciones

$$BD^2 = (DC + CH)^2 + HB^2 \tag{1}$$

$$AC^2 = (DC - DF)^2 + AF^2 \tag{2}$$

$$AD^2 = DF^2 + AF^2 \tag{3}$$

Sumando (1) y (2) se tiene

$$BD^2 + AC^2 = (DC + CH)^2 + HB^2 + (DC - DF)^2 + AF^2 \qquad (4)$$

Es claro que $DF = CH$ *y* $AF = BH$, *entonces sustituyendo en (4) y simplificando obtenemos*

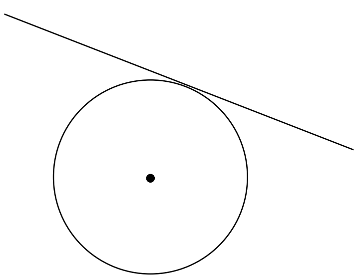
$$\begin{aligned} BD^2 + AC^2 &= (DC + DF)^2 + HB^2 + (DC - DF)^2 + AF^2 \\ &= 2DC^2 + 2DF^2 + HB^2 + AF^2 \end{aligned}$$

Como HB *y* AF *son alturas del paralelogramo, entonces* $HB = AF$ *y*

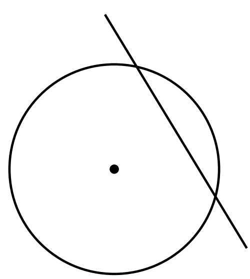
$$\begin{aligned} BD^2 + AC^2 &= 2DC^2 + 2DF^2 + 2AF^2 \\ &= 2DC^2 + 2\left(DF^2 + AF^2\right) \end{aligned}$$

Por último, usando (3), se obtiene $BD^2 + AC^2 = 2DC^2 + 2AD^2$.

Definición. *Una recta es* **tangente** *a una circunferencia si corta en un punto a la circunferencia. Si la recta corta en dos puntos decimos que es una recta* **secante**.



(d)Recta Tangente



(e) Recta secante

El siguiente teorema caracteriza las rectas tangentes a una circunferencia.

Teorema. *Dado un círculo con centro en* O *y radio* OB, *una recta* l *es tangente al círculo en* B *si y solo si la recta* l *pasa por* B *y es perpendicular a* OB.

Demostración. *Supongamos que la recta l es tangente al círculo en el punto B.*

Supongamos que l no fuera perpendicular a OB. Sea P el punto en l tal que OP es perpendicular a l. Sea R un punto en la recta, al otro lado de B y tal que $PB = PR$. Por lo tanto, por LAL, los triángulos rectángulos PBO y PRO son congruentes. Entonces $OB = OR$. Pero esto implica que el punto R está en el círculo y como $B \neq R$, esto contradice el hecho de que B es el punto de tangencia. Supongamos ahora que la recta l es perpendicular al radio OB en B.

Sea P otro punto cualquiera en la recta. Note que $\angle BPO < \angle PBO = 90°$. Como en cualquier triángulo el ángulo más pequeño está opuesto al lado más pequeño, entonces $OB < OP$. Por lo tanto P no está en la circunferencia, lo que implica que la recta solamente toca a la circunferencia en B y por lo tanto es tangente a la circunferencia.

Ejercicio. *Considerar el triángulo equilátero ABC con sus tres vértices en una circunferencia. Las tangentes a la circunferencia en A y en C se cortan en D. ¿Qué clase de figura es $ABCD$?*

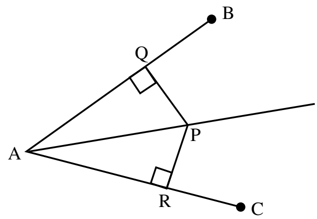
Teorema (propiedad de la barquilla)**.** *Si trazamos dos rectas tangentes a una circunferencia desde un punto P, entonces los segmentos de recta desde P a los puntos de tangencia son iguales y el centro de la circunferencia yace en la bisectriz del ángulo entre las rectas.*

Demostración. *Consideremos una circunferencia con centro en O y un punto P fuera de la circunferencia. Sean B y C puntos en la circunferencia tales que PB y PC son tangentes a la misma.*

Notemos que los triángulos OBP y OCP son triángulos rectángulos que comparten el lado OP y cumplen que $OB = OC$. Por el teorema de Pitágoras se tiene que $PB = PC$. Por lo tanto, por el criterio LLL, se tiene que los dos triángulos OBP y OCP son congruentes. Esto implica que $\angle BPO = \angle OPC$, es decir que O se encuentra en las bisectriz del ángulo BPC.

Teorema. *Todos los puntos que están en la bisectriz de un ángulo equidistan a cada lado del ángulo.*

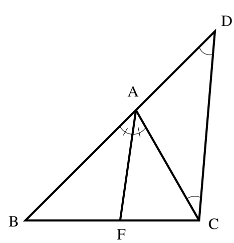
Demostración. *Consideremos el* $\angle CAB$ *y* P *un punto en su bisectriz. Sean* Q *el pie de la perpendicular que va desde* P *a* AB *y* R *el pie de la perpendicular de* P *a* AC.



Note que los triángulos rectángulos QPA *y* RPA *son congruentes ya que tienen sus tres ángulos congruentes; el* $\angle CAP = \angle PAB$ *por definición de bisectriz,* $\angle AQP = \angle PRA = 90°$ *y el tercer ángulo en los triángulos es igual pues la suma de los ángulos internos de un triángulo es siempre igual a* $180°$ *y comparten el lado* AP. *Por lo tanto* $QP = PR$.

Teorema (de la bisectriz)**.** *La bisectriz interna* AF *del ángulo en* A *de un triángulo* ABC *divide al lado opuesto* BC *en razón* $\dfrac{AB}{AC}$, *es decir* $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BF}{FC}$.

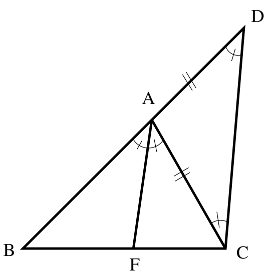
Demostración. *Sea* ABC *un triángulo y sea* AF *la bisectriz desde el ángulo* A. *Entonces* $\angle BAF = \angle FAC$.



Trazamos una paralela a la bisectriz AF *que pase por* C. *Sea* D *el punto de corte de esta paralela con la prolongación del lado* AB. *Como* AF *y*

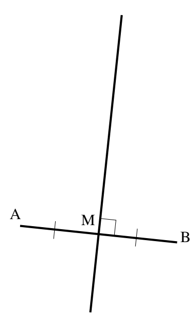
DC son paralelas, entonces $\angle FAC = \angle DCA$ y $\angle BAF = \angle ADC$. De todas estas igualdades de ángulos obtenemos que $\angle DCA = \angle FAC = \angle BAF = \angle ADC$. Por lo tanto $\angle DCA = \angle ADC$ y así el triángulo ADC es isósceles. Lo cual implica que

$$AD = AC \tag{1}$$



Por el teorema de Thales se tiene que $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BF}{FC}$. Usando (1) obtenemos $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BF}{FC}$

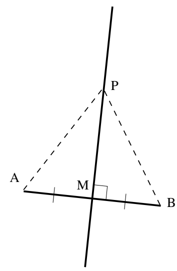
Definición. *La* **mediatriz** *de un segmento AB es la recta que es perpendicular a AB y pasa por el punto medio de AB.*



Ejercicio. *Si la mediatriz de un lado de un triángulo corta a otro lado en su punto medio, entonces el triángulo es rectángulo.*

Teorema. *Cualquier punto sobre la mediatriz del segmento AB equidista de A y de B.*

Demostración. *Consideremos un segmento AB y un punto P cualquiera sobre su mediatriz. Sea M el punto medio de AB.*



Del teorema de Pitágoras y sabiendo que $AM = BM$ se deduce que $PA^2 = PM^2 + AM^2 = PM^2 + BM^2 = PB^2$. Por lo tanto $PA^2 = PB^2$. Luego $PA = PB$.

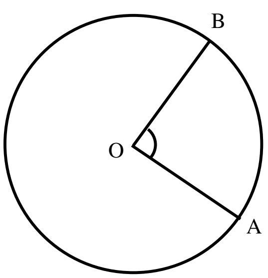
Ejercicio. *En un triángulo isósceles la bisectriz del ángulo diferente es también una altura del triángulo y una mediatriz.*

Ejercicio. *Sea ABC un triángulo isósceles con $AB = AC$. Si P es un punto de la bisectriz del $\angle A$, entonces $PC = PB$.*

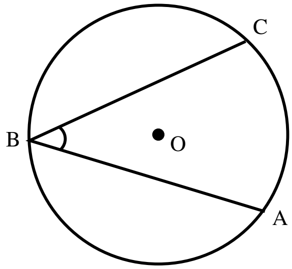
Angulo central versus ángulo inscrito

Existen diferentes ángulos asociados con los círculos. Unos de los más importantes son los ángulos centrales y los ángulos inscritos. En esta sección veremos una relación fundamental entre ellos.

Definición. *Los* **ángulos centrales** *son aquellos formados por dos radios del círculo. El vértice es el centro del círculo. En la figura, $\angle AOB$ es un ángulo central.*



Definición. *A cualquier segmento de recta que tenga sus extremos sobre la circunferencia y que no sea diámetro se le llama* **cuerda**. *Un* **ángulo inscrito** *en una circunferencia es cualquier ángulo formado por dos cuerdas, o un diámetro y una cuerda, que tienen un extremo común sobre la circunferencia. En la figura el $\angle ABC$ es un ángulo inscrito.*



Ejercicio. *Hallar la longitud de una cuerda que está a una distancia 4 del centro de un círculo de radio 6.*

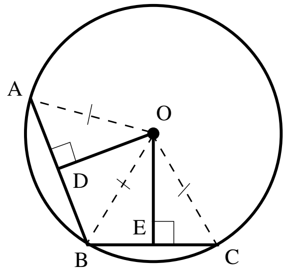
Ejercicio. *Los extremos de dos diámetros distintos en una circunferencia son los vértices de un paralelogramo.*

Ejercicio. *Dadas dos circunferencias concéntricas, toda cuerda de la circunferencia mayor que es tangente a la circunferencia menor es bisecada por su punto de tangencia.*

Ejercicio. *Dos cuerdas en una circunferencia son iguales si y solo si sus ángulos centrales son iguales.*

Teorema. *Dados tres puntos no colineales, siempre existe un círculo que pasa por los tres puntos.*

Demostración. *Tomemos tres puntos A, B y C no colineales. Ver dibujo. Sea O el punto de intersección de las dos mediatrices de los segmentos AB y BC. Note que la no colinealidad de los puntos A, B y C garantiza que estas dos mediatrices se intersecan.*

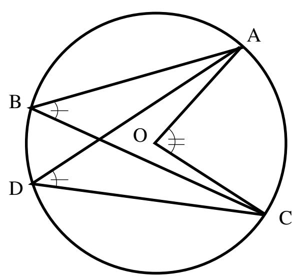


Como O está en la mediatriz de AB, entonces O equidista a A y a B. Similarmente, como O está en la mediatriz de BC, entonces O equidista a B y a C. Por lo tanto los puntos A, B y C están en la circunferencia con centro en O y radio $OA = OB = OC$.

Ejercicio. *Demostrar que dados tres puntos no colineales A, B y C, el círculo que pasa por ellos es único. Ayuda: Si existiera otro círculo por estos puntos con centro O', pruebe que O' estaría en las mediatrices de AB y BC que se cortan ya en O.*

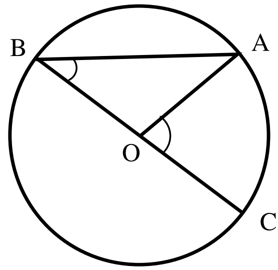
Demostramos ahora un teorema fundamental que relaciona los ángulos centrales con los ángulos inscritos. Este teorema es una herramienta muy útil en la solución de problemas geométricos.

Teorema (ángulo central vs. ángulo inscrito)**.** *Si dos ángulos inscritos en un círculo abren el mismo arco, entonces ellos son iguales e iguales a la mitad del ángulo central correspondiente. Es decir,*



$\angle CDA = \angle CBA = \frac{1}{2}\angle COA$

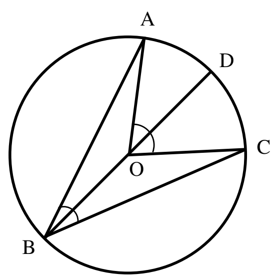
Demostración. *Haremos la demostración en tres casos.*
Caso 1: Uno de los lados del ángulo inscrito pasa por el centro de la circunferencia.



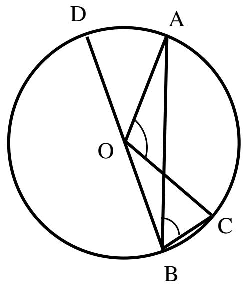
Como el triángulo ABO *es isósceles, entonces* $\angle OBA = \angle BAO = \angle CBA$. *Además, como la medida del ángulo exterior de un triángulo es la suma de los otros dos ángulos no adyacentes, entonces*

$$\begin{aligned}\angle COA &= \angle OBA + \angle BAO \\ &= 2\angle CBA\end{aligned}$$

Caso 2: El centro de la circunferencia es un punto interior del ángulo inscrito.



Sea BD *el diámetro de la circunferencia que pasa por* O *y* B. *Sean* $\alpha_1 = \angle DBA$ *y* $\alpha_2 = \angle CBD$. *Note que* $\angle CBA = \alpha_1 + \alpha_2$. *Por el Caso 1. se tiene que* $\angle DOA = 2\alpha_1$ *y* $\angle COD = 2\alpha_2$. *Además,* $\angle COA = \angle DOA + \angle COD$. *Por lo tanto* $\angle COA = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\angle CBA$.
Caso 3: El centro de la circunferencia es un punto exterior del ángulo inscrito.

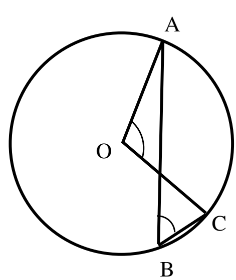


Sea BD el diámetro que pasa por O y B. Sean $\alpha_1 = \angle ABD$ y $\alpha_2 = \angle CBD$. Note que $\angle CBA = \alpha_2 - \alpha_1$. Además, por el Caso 1, se tiene que $\angle AOD = 2\alpha_1$ y $\angle COD = 2\alpha_2$. Entonces

$$\begin{aligned}\angle COA &= \angle COD - \angle AOD \\ &= 2\alpha_2 - \alpha_1 \\ &= 2\left(\alpha_2 - \alpha_1\right) \\ &= 2\angle CBA\end{aligned}$$

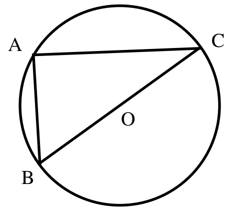
De los tres casos anteriores se concluye que el ángulo inscrito es la mitad del ángulo central que abre el mismo arco. De aquí se sigue, de manera inmediata, que dos ángulos inscritos que abren el mismo arco son iguales.

Ejercicio. *En la siguiente figura, encontrar la medida del $\angle CBA$, sabiendo que $\angle COA = 80°$.*



El siguiente ejercicio nos da una propiedad importante de los ángulos inscritos cuyos extremos están sobre un diámetro de la circunferencia.

Ejercicio. *Demostrar que en la figura siguiente $\angle BAC = 90°$, donde el segmento BC es un diámetro de la circunferencia.*



El recíproco de la propiedad del ejercicio anterior es también cierto, dejamos su demostración como ejercicio.

Ejercicio. *Si un ángulo inscrito es un ángulo recto, entonces los puntos finales del ángulo están sobre un diámetro.*

Ejercicio (OMPR 2007)**.** *El trapecio isósceles $ABCD$ es tal que $AB = BC = AD$ y $DC = 2AB$, donde AB es paralelo a DC. Hallar la medida del ángulo CAD.*

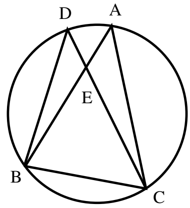
Ejercicio. *Demostrar que la recta que pasa por el centro de una circunferencia y por el punto medio de una cuerda es perpendicular a la cuerda.*

Ejercicio. *Todo diámetro perpendicular a una cuerda la biseca.*

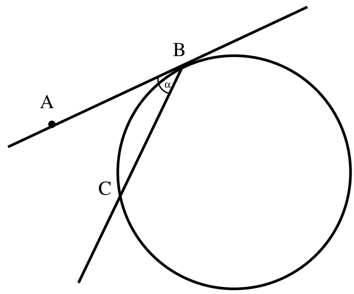
Ejercicio. *La mediatriz de una cuerda pasa por el centro de la circunferencia.*

Ejercicio. *Las tangentes a una circunferencia en los extremos de un diámetro son paralelas.*

Ejercicio (México 2005)**.** *Los triángulos ABC y BCD son isósceles con $AB = AC$ y $BD = BC$. Si el ángulo BAC mide $30°$, hallar la medida del ángulo AEC.*

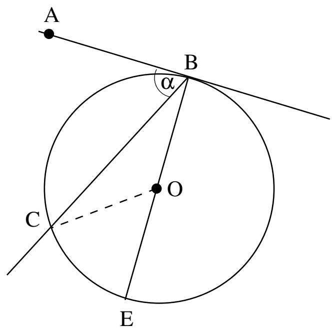


Definición. *Un ángulo se llama* **semi-inscrito** *si tiene su vértice en la circunferencia, uno de los lados es una tangente y el otro una secante. En el dibujo se muestra el ángulo semi-inscrito* $\alpha = \angle ABC$.



Teorema (del ángulo semi-inscrito)**.** *Todo ángulo semi-inscrito es igual a la mitad del ángulo central que abre el mismo arco.*

Demostración. *Consideremos el ángulo semi-inscrito ABC en la circunferencia con centro en O y sea E en la circunferencia tal que BE es diámetro.*



Como AB es tangente a EB se tiene que $\angle ABC = 90° - \angle CBE$. Además el ángulo inscrito $\angle CBE$ abre el mismo arco que el ángulo central $\angle COE$, por lo tanto $\angle CBE = \dfrac{\angle COE}{2}$. Además $\angle COE = 180° - \angle BOC$. Por lo *tanto*

$$\begin{aligned}\angle ABC &= 90^\circ - \angle CBE \\ &= 90^\circ - \frac{\angle COE}{2} \\ &= 90^\circ - \left(\frac{180^\circ - \angle BOC}{2}\right) \\ &= \frac{\angle BOC}{2}\end{aligned}$$

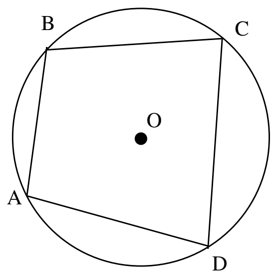
Entonces $\angle ABC = \dfrac{\angle BOC}{2}$.

Definición. *Un polígono está* **inscrito** *en un círculo si sus vértices se encuentran en el círculo. A los cuadriláteros que están inscritos se les llama* **cuadriláteros cíclicos**.

El siguiente teorema caracteriza los cuadriláteros cíclicos y es quizás el criterio más usado para saber si un cuadrilátero dado es cíclico o no.

Teorema. *Un cuadrilátero es cíclico si y solo si sus ángulos opuestos son suplementarios.*

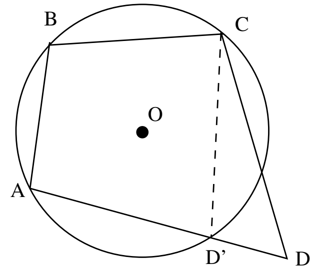
Demostración. *Supongamos que tenemos un cuadrilátero cíclico* $ABCD$



Entonces por la relación entre ángulos inscritos y centrales que abren el mismo arco se tiene que $\angle CDA = \frac{1}{2}\angle COA$ *y* $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle AOC$. *Sumando estas ecuaciones se obtiene*

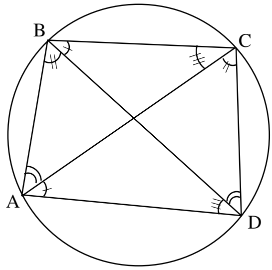
$$\angle CDA + \angle ABC = \frac{1}{2}\angle COA + \frac{1}{2}\angle AOC = \frac{1}{2}\left(\angle COA + \angle AOC\right)$$

Pero $\angle COA + \angle AOC = 360°$ Por lo tanto $\angle CDA + \angle ABC = 180°$. Recíprocamente supongamos que el cuadrilátero $ABCD$ cumple que $\angle CDA + \angle ABC = 180°$. Trazamos el círculo que pasa por los puntos A, B y C. Sea D' el punto de corte del lado AD con el círculo.



Como el cuadrilátero $ABCD'$ es cíclico, por lo que acabamos de demostrar se cumple que $\angle CD'A + \angle ABC = 180°$. Por lo tanto $\angle CD'A = \angle CDA$. Pero esto implica que $DD' = 0$. Luego $D = D'$ y el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico.

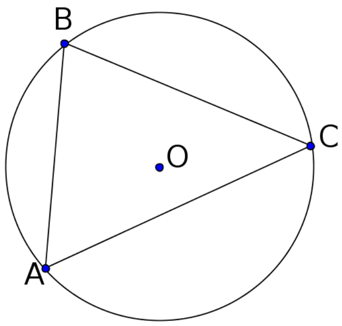
Ejemplo. *Si el cuadrilátero $ABCD$ es cíclico, entonces por el teorema anterior se tiene que $\angle CDA + \angle ABC = 180°$ y $\angle BCD + \angle DAB = 180°$. Además se tiene inmediatamente que $\angle DAC = \angle DBC$, $\angle ABD = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle BDA$ y $\angle CDB = \angle CAB$.*



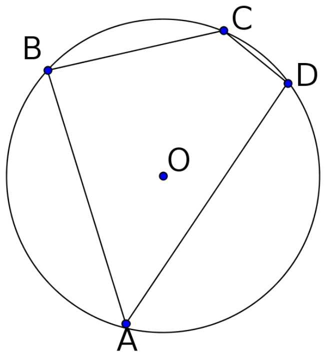
Ejercicio. *Si el cuadrilátero $ABCD$ cumple cualquiera de las siguientes igualdades de ángulos: $\angle DAC = \angle DBC$, $\angle ABD = \angle ACD$, $\angle BCA = \angle BDA$ o $\angle CDB = \angle CAB$ demostrar que el cuadrilátero es cíclico.*

En los siguientes ejercicios, O es el centtro de la circunferencia.

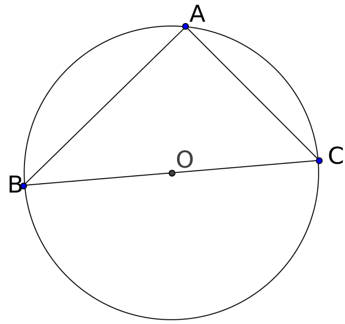
Ejercicio. *Si el $\angle BOC = 120^o$ y el $\angle AOB = 90^o$, hallar los ángulos interiores del $\triangle ABC$.*



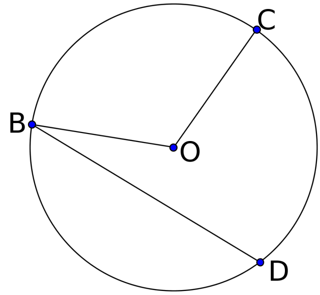
Ejercicio. *Si el $\angle BOC = 70^o$, el $\angle COD = 30^o$ y el $\angle DOA = 140^o$ hallar los ángulos internos del cuadrilátero $ABCD$.*



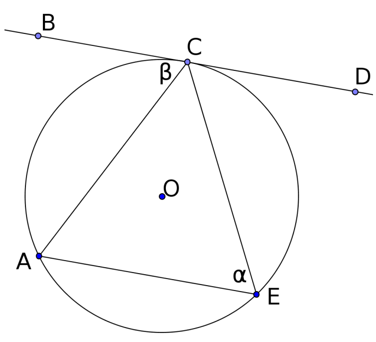
Ejercicio. *En la figura* $AB = 6$ *y* $AC = 5$, *hallar* BC.



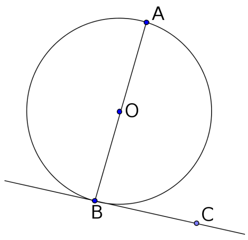
Ejercicio. *El* $\angle COD = 116^o$ *y el* $\angle BOC = 108^o$ *hallar el* $\angle OBD$.



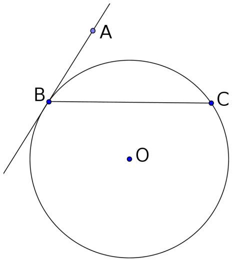
Ejercicio. *En la figura* BD *es paralela a* AE *y el* $\angle EOA = 100^o$ *hallar* α *y* β.



Ejercicio. *Calcular la medida del ángulo semiinscrito* $\angle ABC$ *en cada caso.*

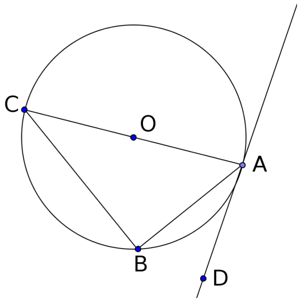


(a) $\angle AOB = 178^o$

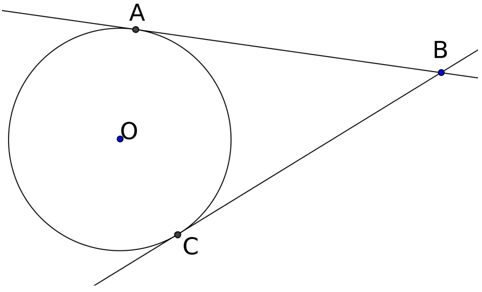


(b) $\angle COB = 250^o$

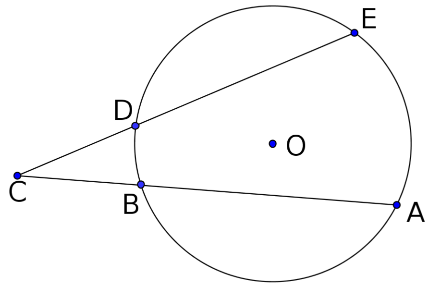
Ejercicio. *En la figura el* $\angle BOC = 106^o$*, hallar el* $\angle ACB$ *y el* $\angle DAB$*.*



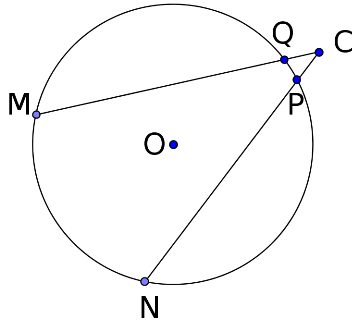
Ejercicio. *En la figura* BA *y* BC *son tangentes a la circunferencia y el* $\angle AOC = 260^o$*, hallar el* $\angle ABC$*.*



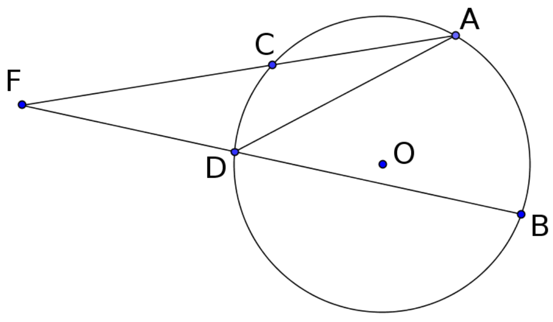
Ejercicio. *Si el* $\angle EOA = 80^o$ *y el* $\angle BOD = 40^o$*, hallar el* $\angle DCB$.



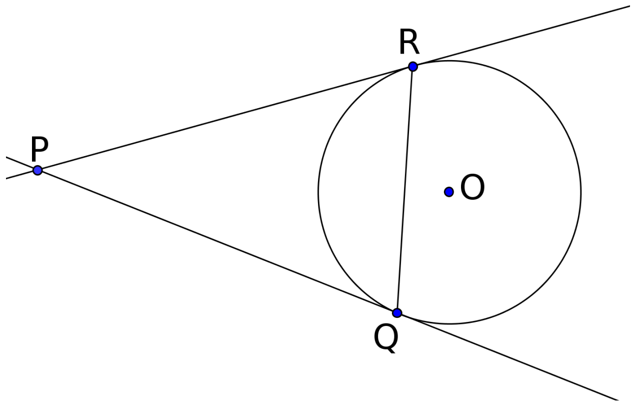
Ejercicio. *Si el* $\angle QOP = 10^o$ *y el* $\angle PCQ = 40^o$*, hallar el* $\angle NOM$.



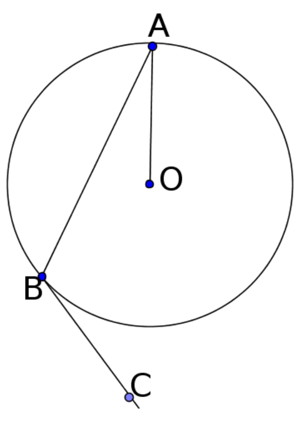
Ejercicio. *Si el* $\angle DAC = 30^o$ *y el* $\angle AOB = 80^o$*, hallar el* $\angle CFD$.



Ejercicio. *Si el $\angle ROQ = 220^o$, PR y PQ son tangentes a la circunferencia en R y Q respectivamente, hallar el $\angle RPQ$.*

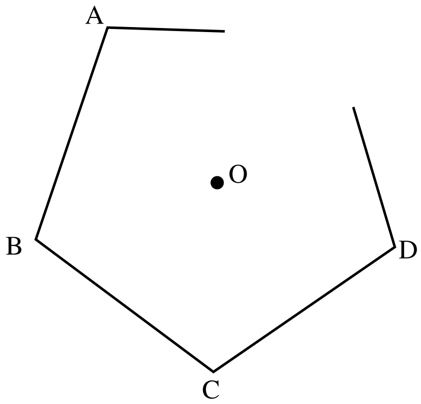


Ejercicio. *BC es tangente a la circunferencia en B y el $\angle ABC = 118^o$, hallar el $\angle OAB$.*



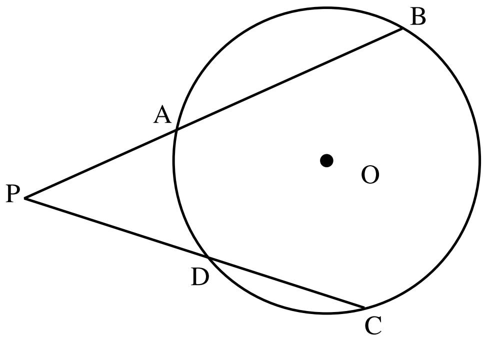
Ejemplo. *Todo polígono regular es cíclico.*

Solución. *Sea $ABCD\ldots$ un polígono regular. Debemos hallar una circunferencia que pase por $A, B, C, D, \ldots$. Consideremos la circunferencia con centro en O que pasa por A, B y C.*



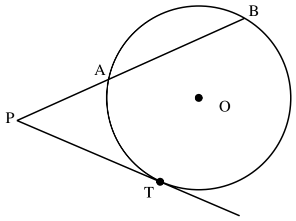
Demostraremos que pasa por D y por lo tanto pasa por los demás vértices del polígono regular. Sabemos que $OB = OC$ por ser radios. Además $AB = CD$ por ser lados de un polígono regular. Además $\angle DCB = \angle CBA$ por ser ángulos de un polígono regular. Entonces $\angle DCO + \angle OCB = \angle CBO + \angle OBA$. Pero $\angle CBO = \angle OCB$ pues el triángulo OBC es isósceles. Entonces $\angle DCO = \angle OBA$. Por LAL los triángulos ABO y DCO son congruentes. Luego $OA = OD$ y esto implica que D está en la circunferencia.

Ejercicio. *Considerar la siguiente figura en donde O es el centro de la circuferencia.*



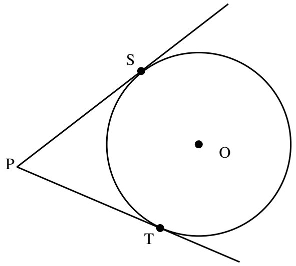
Probar que $\angle CPA = \frac{1}{2}[\angle DOB - \angle AOC]$

Ejercicio. *Considerar la siguiente figura en donde O es el centro de la circunferencia y T es un punto de tangencia.*



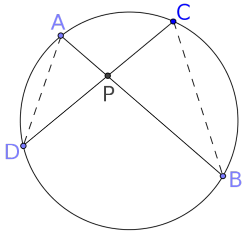
Demostrar que $\angle TPA = \frac{1}{2}[\angle TOB - \angle AOT]$

Ejercicio. *Considerar la siguiente figura en donde O es el centro de la circunferencia y S y T son puntos de tangencia.*



Demostrar que $\angle TPS = \frac{1}{2}[\angle TOS - \angle SOT]$

Ejemplo. *Las cuerdas AB y CD se cortan en P, entonces $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.*



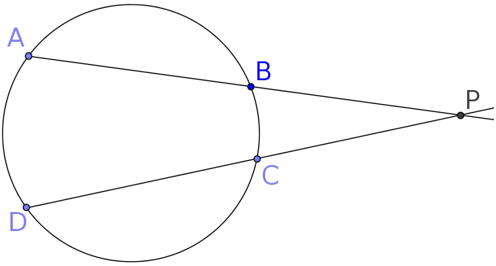
Solución. *El* $\angle BAD = \angle BCD$ *pues abren el mismo arco y* $\angle APC = \angle BPD$ *ya que son opuestos por el vértice. Entonces por* AA*, el* $\triangle ADP$ *es semejante al* $\triangle CBP$*. Por lo tanto*

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

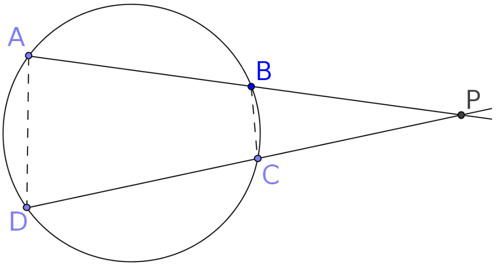
de donde $PA \cdot PB = PC \cdot PD$*.*

Ejemplo. *En la figura, las secantes se cortan en* P*. Entonces*

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$



Solución. *El* $\angle PBC = \angle ADC$ *ya que* $\angle ADC + \angle CBA = 180^o$ *y* $\angle PBC + \angle CBA = 180^o$*.*

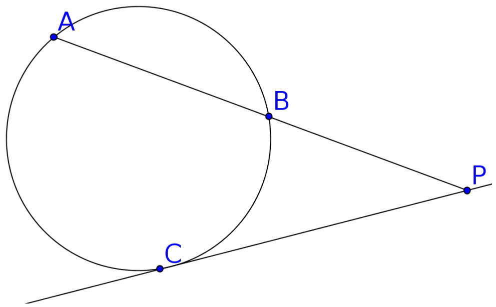


Entonces el $\triangle PBC$ *es semejante al* $\triangle PDA$ *por* AA*. Por lo tanto*

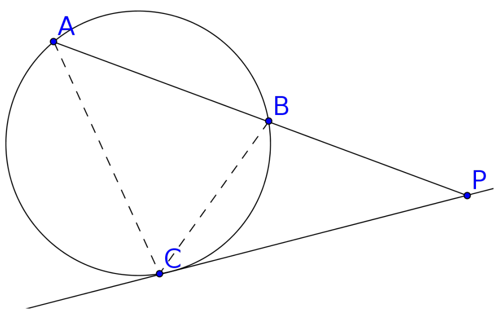
$$\frac{PC}{PA} = \frac{BC}{PD}$$

de donde se obtiene el resultado.

Ejemplo. *En la figura la secante se corta con la tangente en P. Entonces* $PA \cdot PB = PC^2$.



Solución. *El* $\angle BAC = \angle PBC$ *ya que uno es inscrito y el otro semiinscrito y ambos abren el mismo arco. Entonces el* $\triangle PAC$ *es semejante al* $\triangle PCB$ *por* AA.



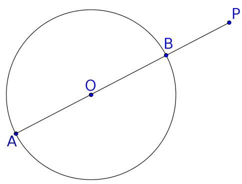
Luego $\dfrac{PA}{PC} = \dfrac{PC}{PB}$.

De los tres ejercicios anteriores se deduce que si P es un punto en el plano y se tiene una circunferencia con centro O, entonces para cualquier linea que pase por P y corte a la circunferencia en A y B se cumple que $PA \cdot PB$ es constante, es decir que no depende de la linea.

Definición. *La* **potencia de un punto** P *con respecto una circunferencia con centro en* O *y radio* r *se define como*

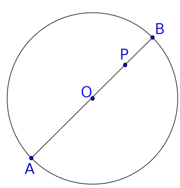
$$|PO^2 - r^2|$$

i) Si P es exterior a la circunferencia, entonces



$$\begin{aligned} PO^2 - r^2 &= (PO+r)(PO-r) \\ &= PA \cdot PB \end{aligned}$$

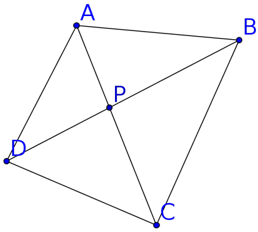
ii) Si P es interior a la circunferencia, entonces



$$\begin{aligned} r^2 - PO^2 &= (r+PO)(r-PO) \\ &= PA \cdot PB \end{aligned}$$

iii) Si P está sobre la circunferencia, entonces la potencia es 0.

Teorema. *Si $ABCD$ es un cuadrilátero, tal que sus diagonales se intersecan en P, entonces $ABCD$ es cíclico si y solo si $PA \cdot PC = PB \cdot PD$.*

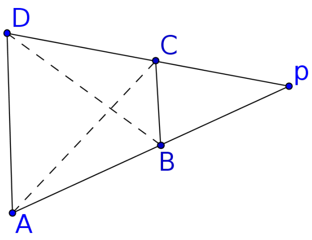


Demostración. *Como* $\frac{PA}{PB} = \frac{PD}{PC}$ *y* $\angle APB = \angle CPD$, *entonces el* $\triangle PAB$ *es semejante al* $\triangle PDC$ *por* LAL. *Entonces* $\angle PBA = \angle DCP$ *y esto implica que el cuadrilátero* $ABCD$ *es cíclico.*

La otra implicación ya se probó en un ejemplo anterior.

Teorema. *Sea* $ABCD$ *un cuadrilátero tal que sus lados opuestos se cortan en* P. *Entonces* $ABCD$ *es cíclico si y solo si* $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Demostración. *Como* $\frac{PA}{PD} = \frac{PC}{PB}$, *entonces el* $\triangle PCB$ *es semejante al* $\triangle PAD$ *por* LAL. *Por lo tanto* $\angle PCB = \angle DAB$, *entonces*

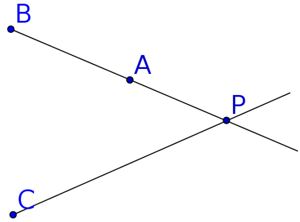


$$\begin{aligned}\angle DAB + \angle BCD &= \angle DAB + (180^o - \angle PCB)\\ &= \angle DAB + (180^o - \angle DAB)\\ &= 180^o\end{aligned}$$

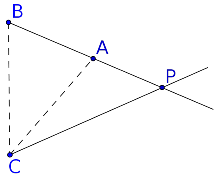
Esto implica que $ABCD$ *es cíclico.*

La otra implicación ya se probó en un ejemplo anterior.

Teorema. *En la figura, supongamos que* $PA \cdot PB = PC^2$. *Entonces el círculo que pasa por* A, B *y* C *es tangente a* PC.



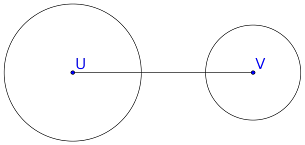
Demostración. *Como* $\frac{PA}{PC} = \frac{PC}{PB}$*, entonces por* LAL*, el* $\triangle PAC$ *es semejante al* $\triangle PCB$*.*



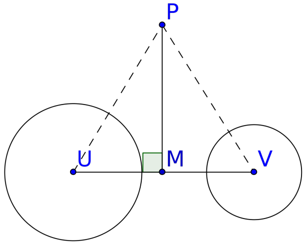
Por lo tanto $\angle PBC = \angle ACP$*. Esto implica que* $\angle ACP$ *es semiinscrito en la circunferencia que pasa por* A, B *y* C *por lo tanto* PC *es tangente a dicha circunferencia.*

Definición. *El* **eje radical** *de dos circunferencias es el conjunto de puntos cuyas potencias a las dos circunferencias son iguales.*

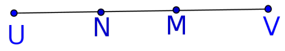
Consideremos inicialmente dos circunferencias no concéntricas cuyos centros son U, V y sus radios son r y s respectivamente.



i) Supongamos que P es un punto con la misma potencia a las dos circunferencias. Sea M en UV tal que $PM \perp UV$. Entonces $PU^2 - r^2 = PV^2 - s^2$. Luego $PU^2 - r^2 - MP^2 = PV^2 - s^2 - MP^2$. Por lo tanto $MU^2 - r^2 = MV^2 - s^2$. Entonces M está en el eje radical.



ii) De $MU^2 - r^2 = MV^2 - s^2$ se obtiene que $MU^2 - MV^2 = r^2 - s^2$. Luego $(MU - MV)(MU + MV) = r^2 - s^2$. Entonces $(MU - MV)UV = r^2 - s^2$. Por lo tanto



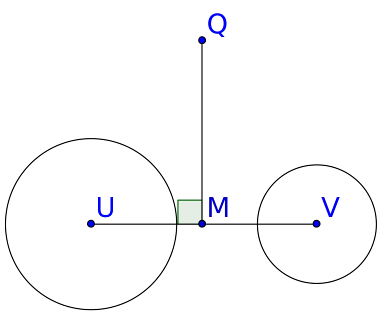
$MU - MV = \frac{r^2 - s^2}{UV}$ que es constante. Luego el punto M existe y además es único. Si N fuera otro punto de UV en el eje radical, entonces $NU^2 - r^2 = NV^2 - s^2$. Luego $(UM - NM)^2 - r^2 = (MV + NM)^2 - s^2$. Por lo tanto

$$UM^2 - 2UMNM + NM^2 - r^2 = MV^2 + 2MVNM + NM^2 - s^2$$

De donde $-2UMNM = 2MVNM$. Entonces $NM(UV) = 0$. Luego $NM = 0$ y esto implica que $N = M$.

iii) Por lo tanto, si un punto tiene potencia igual con respecto a las dos circunferencias, entonces el punto está en una perpendicular a la recta que une los centros de los círculos.

iv) Por otro lado, si un punto está en la perpendicular de UV por M,

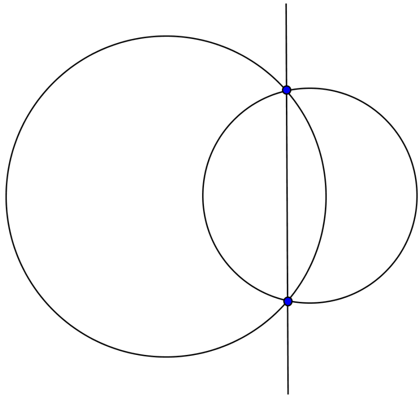


entonces dicho punto está en el eje radical. En efecto, sea Q en dicha perpendicular. Como $MU^2 - r^2 = MV^2 - s^2$, entonces $QM^2 + MU^2 - r^2 = QM^2 + MV^2 - s^2$. Por lo tanto $QU^2 - r^2 = QV^2 - s^2$. Esto implica que Q está en el eje radical.

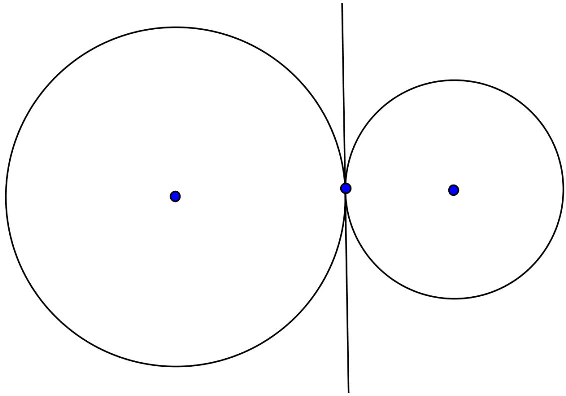
De todas estas observaciones se concluye el siguiente teorema:

Teorema. *El eje radical de dos circunferencias no concéntricas es una línea perpendicular a la línea que une los centros de las circunferencias.*

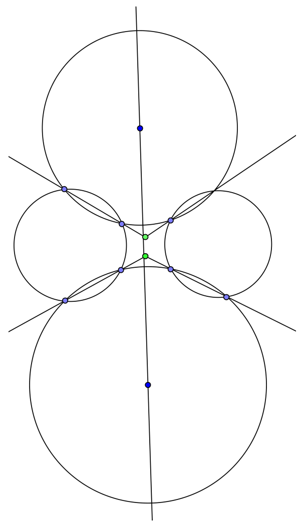
Ejemplo. *Si dos circunferencias son secantes, los puntos de corte tienen potencia 0 y por lo tanto están en el eje radical de las circunferencias. Entonces el eje radical es la recta que pasa por sus puntos de corte.*



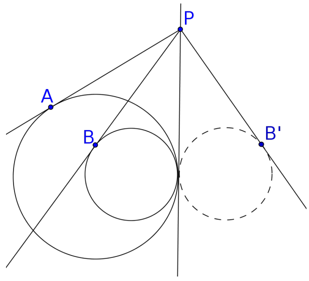
Ejemplo. *Si dos rectas son tangentes, entonces el punto de tangencia pertenece al eje radical y por la propiedad de perpendicularidad del eje radical. con respecto a la línea que une los centros se tiene que el eje radical es la tangente por el punto común.*



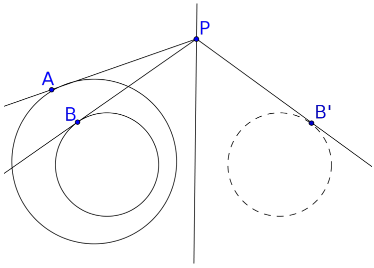
Ejemplo. *Si dos circunferencias no se cortan, se pueden trazar dos circunferencias secantes a ambas y unir los puntos de intersección de las cuerdas comunes. Por transitividad estos puntos comunes tiene la misma potencia con respecto a las dos circunferencias.*



Ejemplo. *Los siguientes dibujos ilustran el eje radical en otras situaciones*



$$PA = PB = PB'$$



$$PA = PB = PB'$$

Ejercicio. *Si desde un punto P del eje radical de dos circunferencias se trazan las tangentes a las circunferencias, las distancias desde P a los dos puntos de tangencia son iguales.*

Ejercicio. *Los ejes radicales de tres circunferencias con centros no colineales tomadas por pares son concurrentes. El punto de concurrencia se llama* **centro radical**.

Ejercicio. *Si dos circunferencias se intersecan, la cuerda en común biseca las tangentes en común a dicha circunferencia.*

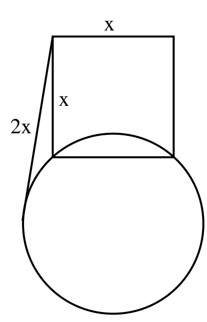
Ejercicio. *Sea ABC un triángulo tal que $\angle C = 90 + \frac{1}{2}\angle B$. Sea Z en AB tal que $BZ = BC$. El círculo que pasa por B, C y Z es tangente al lado AC en C.*

Ejercicio. *Supóngase que AB y CD son dos cuerdas perpendiculares de un círculo y sea E el punto de intersección. Si $AE = 2$, $EB = 6$ y $ED = 3$, encontrar el diámetro del círculo.*

Ejercicio. *Está dado un ángulo con vértice O y una circunferencia inscrita en él, la cual toca a sus lados en A y B. Por el punto A se traza una línea paralela a OB la cual interseca a la circunferencia en el punto C. El segmento OC interseca a la circunferencia en E. Las líneas AE y OB se intersecan en el punto K. Probar que $OK = KB$.*

Ejercicio. *Una línea paralela al lado de BC de un triángulo ABC corta a AB en F y AC en E. Probar que las circunferencias que tienen como diámetros a BE y a CF se cortan en un punto que cae en la altura del $\triangle ABC$ dibujada desde el vértice A.*

Ejercicio. *En la siguiente figura, desde un vértice del cuadrado está trazada una tangente, la cual tiene una longitud igual al doble del lado del cuadrado. Encontrar el radio de la circunferencia en función del lado del cuadrado.*



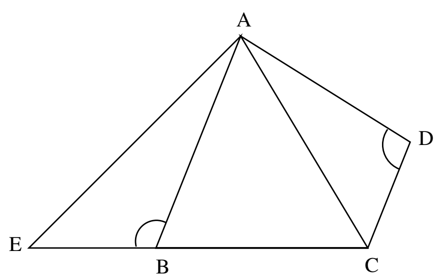
Ejercicio. *Por un punto en el eje radical de dos circunferencias, se dibujan secantes a cada una de las dos circunferencias. Estas secantes determinan cuatro puntos sobre la circunferencias. Demostrar que estos puntos determinan un cuadrilátero cíclico.*

Ejercicio. *La circunferencia inscrita en el triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en los puntos D, E, F respectivamente. AD corta a la circunferencia en un segundo punto Q. Demostrar que la recta EQ pasa por el punto medio de AF si y solo si $AC = BC$.*

El siguiente teorema caracteriza los cuadriláteros cíclicos en términos de las longitudes de sus lados y sus diagonales.

Teorema (Ptolomeo)**.** *El cuadrilátero $ABCD$ es cíclico si y solo si $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.*

Demostración. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero cualquiera. Sea E tal que $\triangle AEB$ sea semejante al $\triangle ACD$.*



De la semejanza de los triángulos AEB y ACD se tiene que

$$\frac{AB}{AD} = \frac{EB}{CD}$$

luego

$$EB = \frac{AB \cdot CD}{AD} \tag{1}$$

Además como $\angle EAC = \angle BAD$, *entonces por* LAL, $\triangle EAC$ *es semejante al* $\triangle BAD$. *Por lo tanto*

$$\frac{EC}{BD} = \frac{AC}{AD}$$

y así

$$EC = \frac{BD \cdot AC}{AD} \tag{2}$$

Supongamos que $ABCD$ *es cíclico. Por lo tanto* $\angle ADC = \angle ABE$. *Entonces los puntos* C, B, E *son colineales. Luego*

$$EC = EB + BC \tag{3}$$

Usando (1), (2) y (3) obtenemos:

$$\frac{AC \cdot BD}{AD} = \frac{AB \cdot CD}{AD} + BC$$

Por lo tanto, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

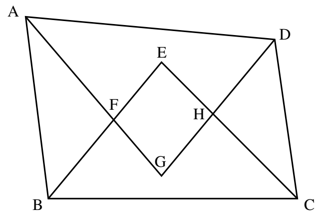
Recíprocamente, si $ABCD$ *no es cíclico, entonces* $EC < EB + BC$, *luego* $AC \cdot BD < AB \cdot CD + BC \cdot AD$.

Ejercicio. *El triángulo equilátero* ABC *está inscrito en un círculo.* P *es un punto sobre el arco que va desde* B *hasta* C. *Probar que* $PA = PB + PC$. *Ayuda: Usar Ptolomeo.*

Ejercicio (CENTRO 2008)**.** *Sea* $ABCD$ *un cuadrilátero convexo inscrito en una circunferencia de centro* O *tal que* AC *es un diámetro. Se construyen los paralelogramos* $DAOE$ *y* $BCOF$. *Demostrar que si los puntos* E *y* F *pertenecen a la circunferencia entonces* $ABCD$ *es un rectángulo.*

Ejercicio. *Sean* AD, BE *y* CF *las alturas de un triángulo* ABC *y* H *su punto de intersección. Demostrar que los cuadriláteros* $AEHF, CEHD$, $BDHF$, $BCEF$, $ACDF$ *y* $ABDE$ *son cíclicos.*

Ejercicio. *En la siguiente figura están trazadas las bisectrices de los ángulos interiores del cuadrilátero $ABCD$, las cuales se intersectan en los puntos E, F, G y H, como se muestra en la figura. Demostrar que el cuadrilátero $EFGH$ es cíclico.*



Ejercicio. *En un cuadrado $ABCD$, M es el punto medio de AB. Una línea perpendicular a MC por M intersecta AD en K. Demostrar que $\angle BCM = \angle KCM$.*

Ejercicio. *Sea AL la bisectriz del ángulo A de un triángulo acutángulo ABC. Sean M y N puntos sobre los lados AB y AC respectivamente de manera que $\angle MLA = \angle B$ y $\angle NLA = \angle C$. Demostrar que $AMLN$ es un cuadrilátero cíclico.*

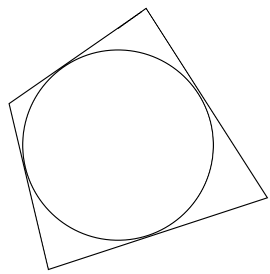
Ejercicio. *Las circunferencias $C1$ y $C2$ se intersecan en los puntos A y B. Por el punto A se traza una recta que corta a las circunferencias $C1$ y $C2$ en los puntos C y D respectivamente. Por los puntos C y D se trazan tangentes a las circunferencias, las cuales se intersecan en el punto M. Demostrar que el cuadrilátero $MCBD$ es cíclico.*

Ejercicio. *Sobre la tangente por B a una circunferencia de diámetro AB, se toman dos puntos C y D. Si AC corta a la circunferencia en F y AD corta a la circunferencia en E, demostrar que el cuadrilátero $CDEF$ es cíclico.*

Ejercicio. *Sean A y B los puntos en común de dos circunferencias secantes. Una recta pasa por A e intersecta a las circunferencias en C y D. Sean P y Q las proyecciones de B sobre las tangentes a las dos circunferencias en C y D, respectivamente. Las tangentes se intersecan en T. Demostrar que $TCBD$ y $TPQB$ son cíclicos.*

Ejercicio. *Dos círculos se intersecan en A y B. AC y AD son diámetros de los círculos. Demostrar que C, B y D son colineales.*

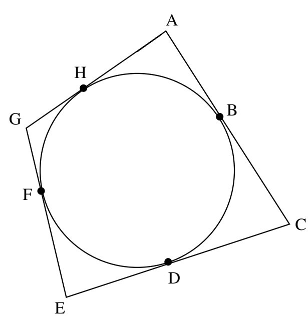
Definición. *Un cuadrilátero se llama* **inscribible** *si todos sus lados son tangentes a una misma circunferencia.*



El siguiente teorema provee una caracterización de los cuadriláteros inscribibles.

Teorema. *Un cuadrilátero es inscribible si y solo si la suma de dos lados opuestos es igual a la suma de los otros dos lados.*

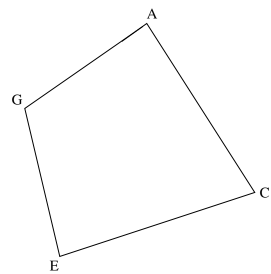
Demostración. *Consideremos el cuadrilátero inscribible de la figura.*



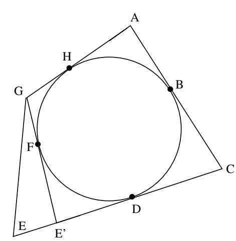
Por la propiedad de la barquilla tenemos que $AB = AH$, $GF = HG$, $FE = ED$, $BC = DC$. Sumando estas ecuaciones obtenemos, $AB + GF + FE + BC = AH + HG + ED + DC$. Como $AB + BC = AC$, $GF + FE = GE$, $AH + HG = AG$ y $ED + DC = EC$, entonces $AC + GE = AG + EC$.

Consideremos ahora un cuadrilátero $ACEG$ que satisface

$$AC + GE = AG + EC \tag{1}$$



Supongamos que el cuadrilátero $ACEG$ no fuera inscribible.
Trazamos la circunferencia tangente a GA, AC y CE. Sea E' el punto de corte del lado EC con la tangente de la circunferencia trazada desde el punto G. Claramente $E \neq E'$.



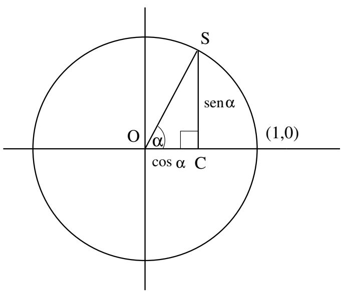
Como el cuadrilátero $ACE'G$ es inscribible, entonces $AC + GE' = AG + E'C$. Usando esta ecuación junto con (1), obtenemos $GE - GE' = EC - E'C$. Luego $GE - GE' = EE'$. Entonces $GE = GE' + EE'$ y esto sólo puede ser cierto si G, E' y E son colineales. Entonces $E = E'$ y esto es una contradicción. Por lo tanto la suposición que hicimos no es cierta y así el cuadrilátero $ACEG$ es inscribible.

Seno y coseno de un ángulo

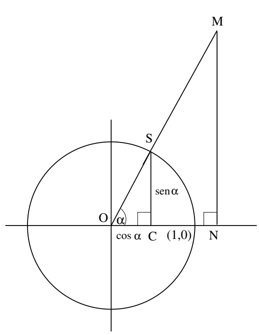
Consideremos un punto O en el plano y cualquier ángulo agudo $\angle AOB$ con vértice en O. Note que al $\angle AOB$ siempre lo podemos llevar, mediante una traslación, a que su vértice esté en el origen del plano cartesiano.

Además, podemos considerar al lado OA sobre el eje x en el plano cartesiano y de esta manera se dice que el ángulo está en **posición estándar**.

Definición. *Si consideramos un círculo con centro en el origen, radio 1 y un ángulo* $\alpha = \angle COS$. *La proyección* OC *del radio sobre el lado se denomina el* **coseno de** α, *que es la longitud del cateto* OC *en el triángulo rectángulo* OCS. *La longitud del otro cateto* CS *se denomina el* **seno de** α. *Estos dos número se denotan por* $\cos\alpha$ *y* $sen\alpha$. *En otras palabras* $sen\alpha = CS$ *y* $\cos\alpha = OC$.



Consideremos dos puntos M *y* N *en los lados del ángulo* OS *y* OC *respectivamente tales que* MN *sea paralelo a* CS. *Notemos que los triángulos* MON *y* SOC *son semejantes. Por lo tanto* $\dfrac{ON}{OM} = \dfrac{OC}{OS} = \dfrac{\cos\alpha}{1} = \cos\alpha$ *y* $\dfrac{MN}{OM} = \dfrac{SC}{OS} = \dfrac{sen\alpha}{1} = sen\alpha$



Es decir que si consideramos un triángulo rectángulo MNO, con ángulo recto en N se tiene que

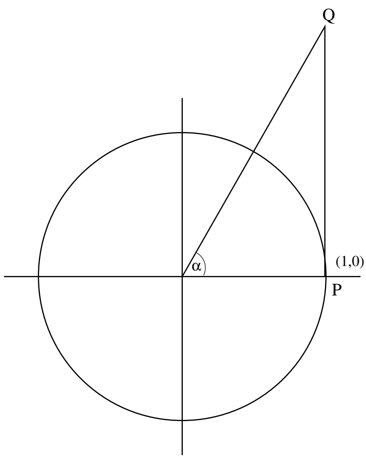
$$sen\alpha = \frac{\textit{longitud del cateto opuesto}}{\textit{longitud de la hipotenusa}} \ y$$
$$\cos\alpha = \frac{\textit{longitud del cateto adyancente}}{\textit{longitud de la hipotenusa}}$$

Las definiciones de seno y coseno se pueden extender a cualquier ángulo obtuso α de la siguiente manera: $sen\alpha = sen\alpha'$ y $\cos\alpha = -\cos\alpha'$, donde α' es el ángulo suplementario a α. También se puede extender la definición a ángulos rectos tomando $sen 90° = 1$ y $\cos 90° = 0$.

Definición. *La* **tangente del ángulo** α *se define como* $\tan\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}$ *que resulta ser, en cualquier triángulo rectángulo, igual a*

$$\tan\alpha = \frac{\textit{longitud del cateto opuesto al ángulo } \alpha}{\textit{longitud del cateto adyacente al ángulo } \alpha}$$

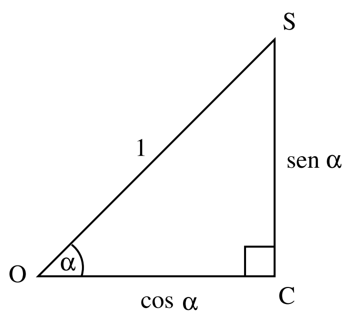
En el siguiente dibujo se muestra una interpretación geométrica de la tangente del ángulo α. Note que $\tan\alpha$ es igual a la longitud del segmento PQ que es tangente a la circunferencia de radio 1 en el punto P



Probamos a continuación la identidad fundamental de la trigonometría.

Teorema (identidad Fundamental). *Para cualquier ángulo α se cumple que $(\cos\alpha)^2 + (sen\alpha)^2 = 1$.*

Demostración. *Considere el siguiente dibujo.*



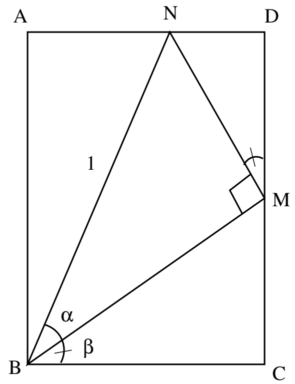
Usando el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo OCS se obtiene que $OC^2 + CS^2 = OS^2$. Por lo tanto $(\cos\alpha)^2 + (sen\alpha)^2 = 1$.

Ejercicio. *Considerar el rectángulo $ABCD$ y el triángulo rectángulo BMN de hipotenusa 1, como se muestra en la figura. Sea $\angle MBN = \alpha$.*

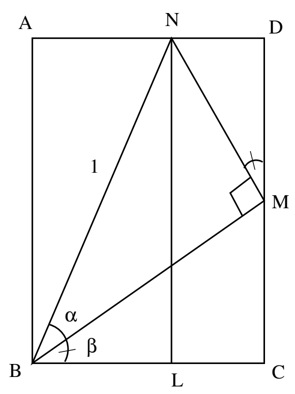
a. *Sea $\angle CBM = \beta$. Explicar porqué el $\angle DMN = \beta$.*

b. *Encontrar la longitud de los siguientes segmentos en términos de seno y coseno de los ángulos α y β .*

- $BC =$ ______
- $CM =$ ______
- $MD =$ ______
- $ND =$ ______



c. *Sea L el pie de la perpendicular desde N hasta el lado BC. Usando el triángulo BLN, encontrar una expresión para $sen\,(\alpha+\beta)$ y otra para* $\cos(\alpha+\beta)$.

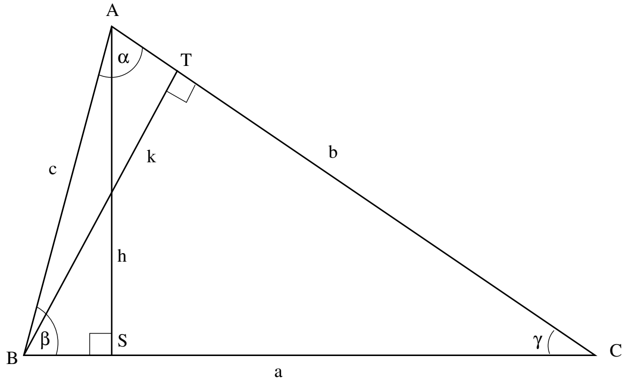


Ejercicio. *Usando las expresiones encontradas en el ejercicio anterior, escribir expresiones para $sen\,(2\alpha)$ y* $\cos(2\alpha)$.

Ejercicio. *Considerar un rectángulo $ABCD$ y el triángulo rectángulo BMN como en los ejercicios anteriores. Pero ahora la hipotenusa del triángulo no necesariamente mide* 1. *El segmento AD mide* 1. *Usando el mismo procedimiento que en los ejercicios anteriores, encontrar una expresión para* $\tan(\alpha+\beta)$.

Hasta el momento se ha estudiado la relación de ángulos y lados para triángulos rectángulos. En el siguiente teorema se estudia la relación entre ángulos y lados de triángulos arbitrarios.

Ejercicio (ley del seno)**.** *Sea el triángulo ABC con los ángulos en A, B y C iguales a α, β y γ respectivamente. Supongamos que $AB = c$, $AC = b$ y $BC = a$. Entonces $\dfrac{a}{sen\alpha} = \dfrac{b}{sen\beta} = \dfrac{c}{sen\gamma}$. Ayuda: Considerar el siguiente dibujo.*



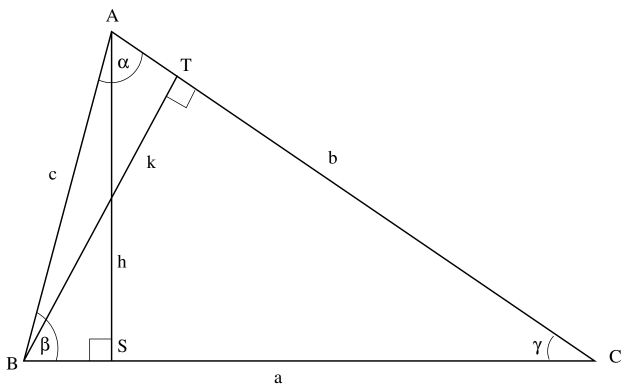
a. *Determinar la altura h en términos de c y el seno de un ángulo. Determinar la altura h en términos de b y el seno de un ángulo. Concluir que $\dfrac{b}{sen\beta} = \dfrac{c}{sen\gamma}$.*

b. *Determinar la altura k en términos de c y el seno de un ángulo. Determinar la altura k en términos de a y el seno de un ángulo. Concluir que $\dfrac{c}{sen\gamma} = \dfrac{a}{sen\alpha}$.*

c. *Concluir que $\dfrac{a}{sen\alpha} = \dfrac{b}{sen\beta} = \dfrac{c}{sen\gamma}$.*

Otra ley fundamental de la trigonometría es la ley del coseno que relaciona los lados de un triángulo cualquiera con uno de los ángulos del triángulo.

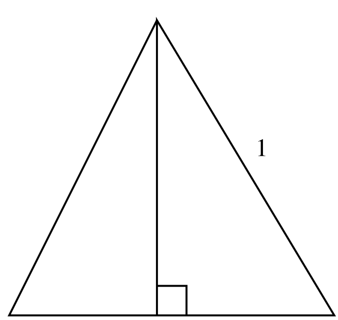
Ejercicio (ley del coseno)**.** *Sea el triángulo ABC con el ángulo en A igual a α. Supongamos que $AB = c$, $AC = b$ y $BC = a$. Entonces $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$. Se pueden obtener fórmulas similares para los otros dos ángulos del triángulo. Ayuda: Considerar la siguiente figura:*



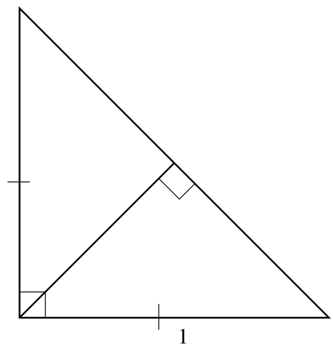
a. *En el triángulo ABT aplicar Pitágoras para encontrar una relación entre AT, k y c. Repetir lo anterior, pero con el triángulo BTC para encontrar una relación entre TC, a y k.*

b. *Restando las ecuaciones obtenidas en a. y usando la definición del coseno, encontrar la identidad $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$.*

Ejercicio. *Considerar un triángulo equilátero de lado 1 con una de sus alturas:*



Y considerar un triángulo isósceles rectángulo con dos lados iguales a 1 y su altura desde el ángulo recto:



a. *Encontrar la medida de todos los segmentos de las dos figuras anteriores y todos los ángulos interiores.*

b. *Usar la información obtenida en la parte a. y las definiciones de las funciones trigonométricas para llenar la siguiente tabla:*

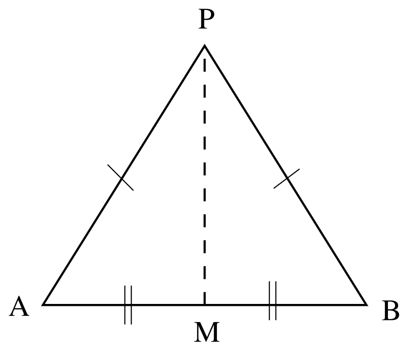
Ángulo	*Seno*	*Coseno*	*Tangente*
$30°$			
$45°$			
$60°$			

Concurrencia

En esta sección estudiamos varios puntos importantes de concurrencia de rectas en un triángulo y damos un criterio fundamental para saber si tres rectas son concurrentes.

Teorema. *Si un punto P equidista a los dos extremos de un segmento AB, entonces P se encuentra en la mediatriz del segmento.*

Demostración. *Sea un punto P equidistante a los extremos del segmento AB. Sea M el punto medio de AB.*

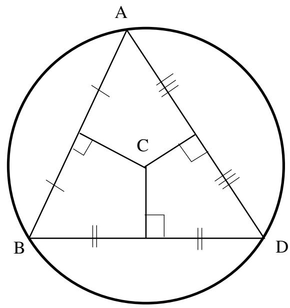


Por LLL tenemos que los triángulos PMA y PMB son congruentes. Por lo tanto $\angle BMP = \angle PMB$ y como estos dos ángulos suman $180°$, *entonces cada uno debe medir* $90°$. *Por lo tanto PM es la mediatriz del segmento AB.*

Teorema. *Las mediatrices de cualquier triángulo son concurrentes.*

Demostración. *Consideremos el $\triangle ABD$. Sea C el punto de corte de las mediatrices de los segmentos AB y BD. Como C está en la mediatriz de AB, entonces C equidista a A y a B. Como C está en la mediatriz de BD, entonces C equidista a B y a D . Por lo tanto C equidista a A y a D. Por el teorema anterior tenemos que C está en la mediatriz del segmento AD. Por lo tanto las tres mediatrices del $\triangle ABD$ concurren en C.*

El punto de concurrencia de las mediatrices se llama el **circuncentro** del triángulo. Note que si C es el circuncentro del $\triangle ABC$, entonces C está en las tres mediatrices del triángulo y por lo tanto equidista a los tres vértices del triángulo. Por lo tanto el circuncentro es el centro de un círculo que pasa por los tres vértices del triángulo. Este círculo se llama el **circuncírculo o circulo circunscrito** al triángulo. Su radio se llama el **circunradio**.



Ejercicio. *Las mediatrices de un triángulo ABC corresponden a las alturas de su triángulo medial.*

Ejercicio. *Considerar un $\triangle ABC$. Si trazamos una paralela a cada lado del triángulo que pase por el vértice opuesto se forma otro triángulo $A'B'C'$. Demostrar que las alturas del $\triangle ABC$ son las mediatrices del $\triangle A'B'C'$.*

Ejercicio. *Usando el ejercicio anterior, demostrar que las alturas de un triángulo cualquiera son concurrentes. Este punto de concurrencia se llama el* **ortocentro** *del triángulo.*

Definición. *Al unir los pies de las alturas de un triángulo no rectángulo ABC se obtiene otro triángulo llamado* **triángulo órtico**.

Ejercicio. *Si $A'B'C'$ es el triángulo órtico del $\triangle ABC$ entonces los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle AB'C'$, $\triangle A'BC'$ y $\triangle A'B'C$ son semejantes. Ayuda: Probar que los triángulos $AB'B$ y $AC'C$ son semejantes y luego, usando LAL, probar que el triángulo ABC y $AB'C'$ son semejantes.*

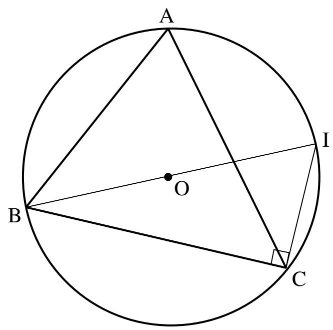
Ejercicio. *Si ABC es un triángulo cuyos ángulos son agudos, sus alturas son las bisectrices de su triángulo órtico.*

Ejercicio. *Sea el $\triangle ABC$ tal que todos sus ángulos son agudos. El triángulo que se obtiene al unir los puntos medios de los segmentos que van del ortocentro a los vértices es congruente al triángulo medial del $\triangle ABC$.*

Teorema (Ley del Seno Extendida). *Para un triángulo ABC con circunradio R se tiene que:*

$$\frac{AB}{\operatorname{sen}\angle C} = \frac{BC}{\operatorname{sen}\angle A} = \frac{AC}{\operatorname{sen}\angle B} = 2R$$

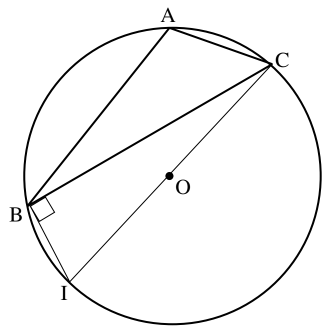
Demostración. *Consideremos el circuncírculo del triángulo ABC con centro en O y radio R. Sea BI un diámetro como se muestra en la figura.*



Además $\angle ICB = 90°$. Por lo tanto $\operatorname{sen}\angle BIC = \dfrac{BC}{2R}$.
Los ángulos $\angle BAC$ y $\angle BIC$ son inscritos y abren el mismo arco, luego son iguales. Así, $\operatorname{sen}\angle BAC = \operatorname{sen}\angle A = \dfrac{BC}{2R}$.

Entonces $\dfrac{BC}{\operatorname{sen}\angle A} = 2R$. De manera similar se demuestran las otras.

En caso que se tenga la situación del siguiente dibujo, es decir el $\triangle ABC$ obstuso, entonces



$\angle CIB = 180^\circ - \angle A$ y $\operatorname{sen}\angle CIB = \operatorname{sen}\angle A$. Luego

$$\operatorname{sen}\angle A = \operatorname{sen}\angle CIB = \frac{BC}{2R}$$

y también se obtiene

$$\frac{BC}{\operatorname{sen}\angle A} = 2R$$

Ejercicio. *En el $\triangle ABC$ se cumple que*

$$BC(\operatorname{sen}\angle B - \operatorname{sen}\angle C) + AC(\operatorname{sen}\angle C - \operatorname{sen}\angle A) + AB(\operatorname{sen}\angle A - \operatorname{sen}\angle B) = 0$$

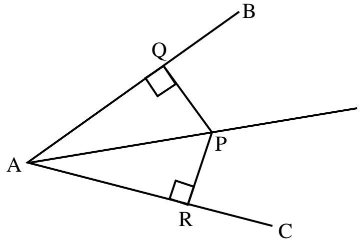
Ejercicio. *Dado el $\triangle ABC$, entonces*

$$(ABC) = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4R}$$

donde R es el radio del circuncírculo del $\triangle ABC$.

Teorema. *Si un punto P dentro de un ángulo $\angle CAB$ equidista a los dos lados del ángulo, entonces el punto está en la bisectriz del ángulo.*

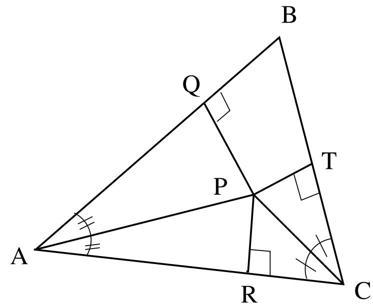
Demostración.



Si P es un punto dentro del ángulo $\angle CAB$ tal que $QP = PR$ (donde R y Q son los pies de las perpendiculares de P sobre CA y AB respectivamente), entonces los triángulos QPA y RPA son congruentes ya que sus tres lados son congruentes (comparten el lado AP y el tercer lado es igual por Pitágoras). Por lo tanto los ángulos correspondientes de los triángulos QPA y RPA son iguales y en particular $\angle RAP = \angle PAQ$ y esto implica que P está en la bisectriz del $\angle CAB$.

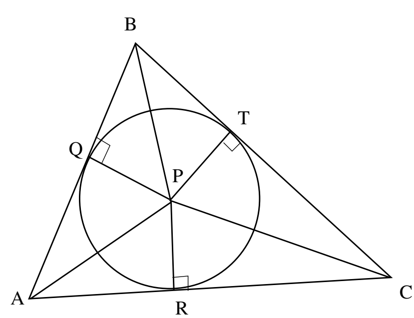
Teorema. *Las bisectrices internas de un triángulo son concurrentes.*

Demostración. *Consideremos el triángulo ABC.*



Trazamos la bisectriz del ángulo CAB y la bisectriz del ángulo BCA. Sea P el punto de corte de estas dos bisectrices. Sean Q, T y R los pies de las perpendiculares desde P hacia AB, BC y CA respectivamente. Entonces se tiene que $PQ = PR$ y $PR = PT$. Por lo tanto $PQ = PT$. Entonces por el teorema anterior se tiene que P está en la bisectriz del ángulo ABC. Entonces P es el punto de concurrencia de las tres bisectrices internas de los ángulos del triángulo ABC.

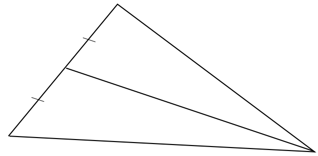
El punto de concurrencia de las bisectrices de un triángulo se llama el **incentro** del triángulo. Además como $PQ = PR = PT$, entonces existe un círculo que queda inscrito en el triángulo, es decir tangente a los tres lados, llamado el **incírculo**. El radio del incírculo se llama el **inradio**.



Ejercicio. *Si ABC es un triángulo cuyos ángulos son agudos, su ortocentro es el incentro de su triángulo órtico.*

Ejercicio. *Si ABC es un triángulo tal que $\angle BAC$ es obtuso, entonces A es el incentro del triángulo órtico de ABC.*

Definición. *En un triángulo los segmentos que van de un vértice al punto medio del lado opuesto se llaman* **medianas**.



Ejercicio. *Las medianas dividen al triángulo en seis triángulos. Demostrar que estos seis triángulos tienen la misma área.*

Ejercicio. *Si una mediana en un triángulo es también la altura del triángulo, entonces el triángulo es isósceles.*

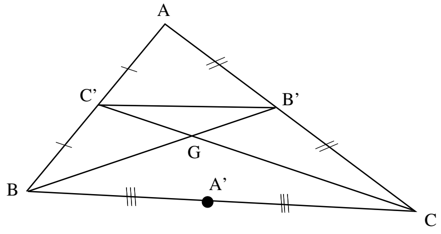
Ejercicio. *Hallar el ángulo que forman las medianas de un triángulo equilátero.*

Ejercicio. *Si un triángulo ABC es equilátero, entonces los seis triángulos que se forman al construir las medianas son congruentes.*

Ejercicio. *Las medianas del triángulo medial del triangulo ABC corresponden a las medianas del triángulo ABC.*

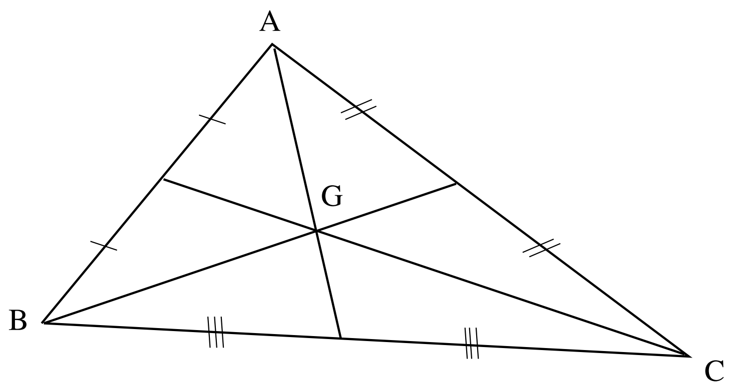
Teorema. *Las medianas de un triángulo son concurrentes.*

Demostración. *Sea un triángulo ABC y sean A', B' y C' los puntos medios de BC, AC y AB respectivamente. Sea G el punto de corte de las medianas BB' y CC'.*



Como $C'B'$ es paralelo a BC, los triángulos $GB'C'$ y GBC tienen lados paralelos y por lo tanto son semejantes. Además como $C'B'$ mide la mitad de BC, esta semejanza es en razón $2:1$. Por lo tanto las medianas BB' y CC' se cortan en el punto G que divide a cada una de ellas en razón $2:1$. De la misma manera se demuestra que G divide a la mediana AA' en razón $2:1$. Por lo tanto las tres medianas se cortan en G.

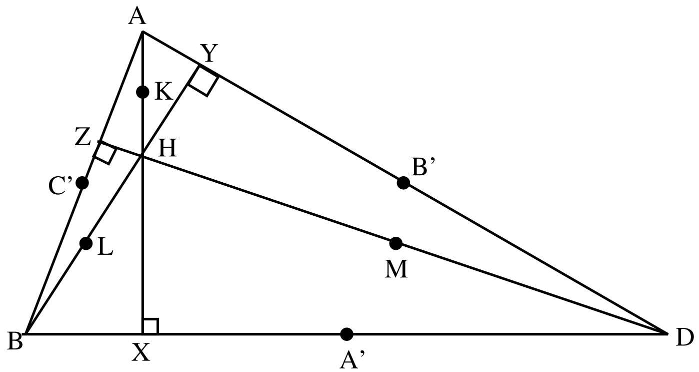
El punto de concurrencia de las medianas de un triángulo ABC se llama el **centroide o centro de gravedad** del triángulo.



Ejercicio. *En un triángulo ABD sean H y C su ortocentro, y circuncentro respectivamente. Sea A' el punto medio del lado BD. Demostrar que $AH = 2CA'$. Ayuda: Si B' es el punto medio de DA, demostrar que los triángulos $CA'B'$ y HAB son semejantes con razón $2:1$.*

Ejercicio. *Demostrar que en un triángulo ABD el ortocentro, el centroide y el circuncentro son colineales. La recta donde se encuentran estos tres puntos se llama la* **Recta de Euler**. *Ayuda: Sean H, C y G el ortocentro, el circuncentro y el centroide del triángulo ABD respectivamente. Sea A' el punto medio del lado BD . Muestre que $\angle HAG = \angle CA'G$. Usando el ejercicio anterior y el hecho de que el centroide divide a las medianas en razón $2:1$, probar que los triángulos $A'GC$ y HGA son semejantes. Deducir que $\angle A'GC = \angle HGA$.*

En la siguiente figura, A', B' y C' son los puntos medios de los lados del $\triangle ABD$; K, L y M son los puntos medios de los segmentos AH, BH y DH respectivamente y X, Y y Z son los pies de las alturas.



Los segmentos $C'B'$ y LM son paralelos al lado BD y

$$C'B' = LM = \frac{1}{2}BD$$

Similarmente se cumple que $C'L$ y $B'M$ son paralelas y

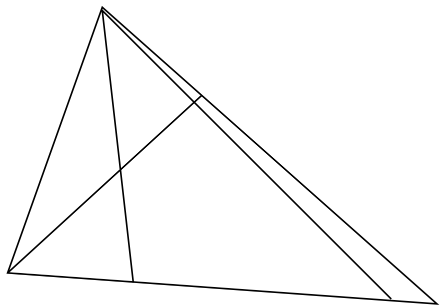
$$C'L = B'M = \frac{1}{2}AH$$

Por lo tanto, $B'C'LM$ es un paralelogramo. Además como AH y BD son perpendiculares, entonces $B'C'LM$ es un rectángulo. Similarmente se puede probar que $A'B'KL$ y $C'A'MK$ son rectángulos. Por otro lado en un rectángulo las diagonales son iguales y se cortan en el punto medio. Además cada uno de estos tres rectángulos tienen una diagonal en común, por lo tanto $A'K, B'L$ y $C'M$ son diámetros de un mismo círculo que a su vez es el circuncírculo del triángulo medial $A'B'C'$. Como $\angle A'XK = 90°$, dicho círculo pasa por X. Similarmente se observa que pasa por Y y Z. Hemos demostrado el siguiente teorema.

Teorema (Circunferencia de los Nueve Puntos). *Los pies de las alturas de un triángulo, los puntos medios de los tres lados y los puntos medios de los segmentos que van desde los vértices al ortocentro están en una circunferencia.*

Definición. *Dado un triángulo, una* **ceviana** *es un segmento que va desde un vértice hasta un punto en el lado opuesto.*

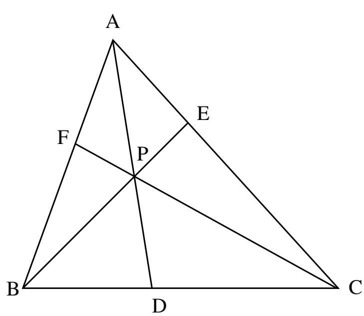
En el siguiente dibujo se muestran varias cevianas del triángulo



El siguiente teorema es una de las herramientas más fuertes para determinar si tres rectas son o no concurrentes.

Teorema (Ceva)**.** *En el $\triangle ABC$ sean D, E y F puntos sobre BC, AC y AB respectivamente. Las cevianas AD, BE y CF son concurrentes si y solo si* $\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = 1$.

Demostración. *(***Usando áreas***) En el $\triangle ABC$ sean AD, BE y CF cevianas que concurren en un punto P.*



Los triángulos BDP y CDP tienen la misma altura h y sus áreas están dadas por $(BDP) = \dfrac{BD \cdot h}{2}$ *y* $(CDP) = \dfrac{DC \cdot h}{2}$*. Entonces* $\dfrac{(BDP)}{(CDP)} =$

$\frac{BD}{DC}$. De la misma forma se tiene que $\frac{(ABD)}{(ACD)} = \frac{BD}{DC}$. Usando estas dos últimas igualdades se tiene que

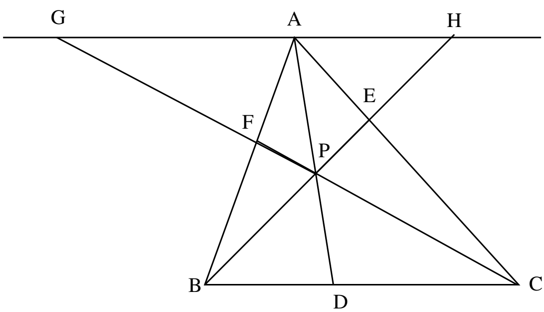
$$\frac{BD}{DC} = \frac{(ABD)}{(ACD)} = \frac{(BDP)}{(CDP)} = \frac{(ABD) - (BDP)}{(ACD) - (CDP)}$$

Pero $\frac{(ABD) - (BDP)}{(ACD) - (CDP)} = \frac{(ABP)}{(ACP)}$. Luego $\frac{BD}{DC} = \frac{(ABP)}{(ACP)}$. De la misma manera se puede probar que $\frac{CE}{EA} = \frac{(BCP)}{(ABP)}$ y $\frac{AF}{FB} = \frac{(ACP)}{(BCP)}$. De estas tres igualdades obtenemos que

$$\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = \frac{(ACP)}{(BCP)}\frac{(ABP)}{(ACP)}\frac{(BCP)}{(ABP)} = 1$$

Antes de demostrar el recíproco, hacemos otra demostración de esta parte del teorema, usando un argumento de semejanza de triángulos.

(**usando semejanza**): *En el* $\triangle ABC$ *sean* AD, BE *y* CF *cevianas que concurren en un punto* P. *Trazamos una recta paralela al segmento* BC *y que pase por* A. *Sean* G *y* H *los cortes de esta paralela con las prolongaciones de* CF *y* BE *respectivamente.*



Los triángulos BPD *y* HPA *son semejantes, al igual que* DPC *y* APG; *de donde se obtiene* $\frac{BD}{PD} = \frac{HA}{PA}$ *y* $\frac{PD}{DC} = \frac{PA}{AG}$. *Por lo tanto*

$$\frac{BD}{DC} = \frac{HA}{AG} \tag{1}$$

Los triángulos EBC y EHA son semejantes. Entonces

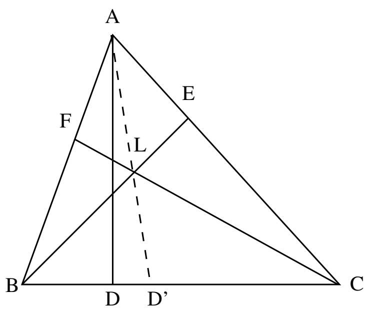
$$\frac{CE}{EA} = \frac{CB}{HA} \tag{2}$$

De igual manera los triángulos FBC y FAG son semejantes. Por lo tanto

$$\frac{AF}{FB} = \frac{AG}{CB} \tag{3}$$

De (1), (2) y (3) se obtiene $\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = \frac{AG}{CB}\frac{HA}{AG}\frac{CB}{HA} = 1$. *Por lo tanto* $\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = 1$.

Supongamos ahora que $\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = 1$ *y demostremos que las cevianas AD, BE y CF son concurrentes. Supongamos que no fueran concurrentes. Sea L el punto de concurrencia de las cevianas BE y CF. Consideremos la ceviana AD que pasa por L. Entonces $D \neq D'$.*



Como BE, CF y AD' son concurrentes, entonces $\frac{AF}{FB}\frac{BD'}{D'C}\frac{CE}{EA} = 1$ *, pero por hipótesis tenemos* $\frac{AF}{FB}\frac{BD}{DC}\frac{CE}{EA} = 1$. *Igualando estas dos ecuaciones y simplificando se obtiene* $\frac{BD'}{D'C} = \frac{BD}{DC}$. *Esto implica que $DD' = 0$. Por lo tanto, $D = D'$. Esto es una contradicción, por lo tanto las cevianas AD, BE y CF si son concurrentes.*

Ejercicio. *Usar el teorema de Ceva para demostrar que las medianas de un triángulo son concurrentes.*

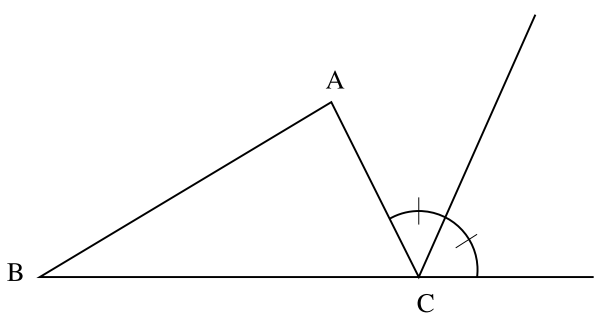
Ejercicio. *Usando las funciones trigonométricas y el teorema de Ceva, demostrar que las alturas de un triángulo son concurrentes.*

Ejercicio. *Considerar las cevianas que unen cada vértice con el punto de tangencia del incírculo con el lado opuesto. Demostrar que estas cevianas son concurrentes. Este punto de concurrencia se llama el punto de* **Gergonne** *del triángulo.*

Ejercicio. *Sobre los lados BC, CA y AB de un $\triangle ABC$ se encuentran respectivamente L, M y N de manera que $AB + BL = LC + CA$, $BC + CM = MA + AB$ y $CA + AN = NB + BC$. Demostrar que AL, BM y CN son concurrentes. Este punto se llama el punto de* **Nagel** *del triángulo.*

Ejercicio. *Usando el teorema de Ceva y el teorema de la bisectríz, demostrar que las bisectrices de cualquier triángulo son concurrentes.*

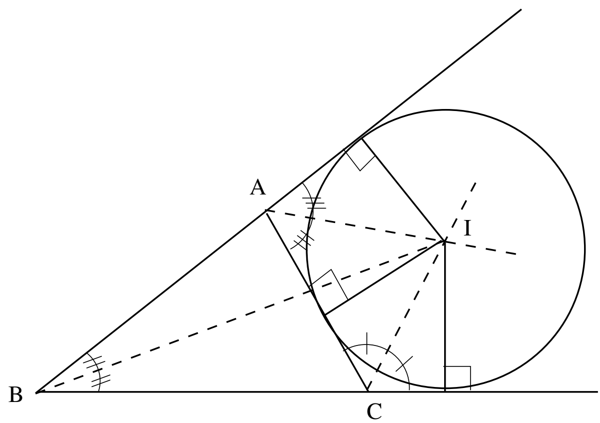
En el siguiente dibujo se muestra una de las **bisectrices exteriores** del triángulo ABC.



Ejercicio (Teorema de las bisectrices exteriores)**.** *Demostrar que las bisectrices exteriores de un triángulo dividen al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los lados adyacentes. Ayuda: Sea el triángulo ABC. Considerar la bisectriz exterior AT del ángulo en A, donde T está en la prolongación de BC. Sea M en AC tal que BM es paralela a AT. Notar que el triángulo ABM es isósceles y usar Thales para deducir que* $\dfrac{BT}{TC} = \dfrac{AB}{AC}$.

Ejercicio. *Dado un $\triangle ABC$. Demostrar que la bisectríz interior de un ángulo y las dos bisectrices exteriores de los otros dos ángulos son concurrentes. El punto de concurrencia se llama* **excentro**.

Definición. *El excentro es el centro de una circunferencia, llamada* **excírculo**, *que es tangente a un lado del triángulo y a las prolongaciones de los otros dos lados. En el siguiente dibujo se muestra uno de los tres excírculos del triángulo ABC.*

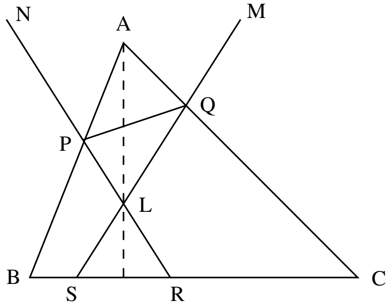


Ejercicio. *Sea ABC un triángulo. Explicar por qué la bisectriz interna y la bisectriz externa en A son perpendiculares.*

Ejercicio. *Demostrar que las cevianas que van de los vértices de un triángulo a los puntos de tangencia de los excírculos con los lados del triángulo son concurrentes. El punto de concurrencia es el punto de Nagel.*

Ejemplo (CENTRO 2008). *Sea ABC un triángulo acutángulo. Se toman P y Q en el interior de los lados AB y AC, respectivamente, tales que B, P, Q y C estén en una misma circunferencia. La circunferencia circunscrita al $\triangle ABQ$ corta a BC de nuevo en S y la circunferencia circunscrita al $\triangle APC$ corta a BC de nuevo en R. PR y QS se intersecan en L. Demuestre que la intersección de AL y BC no depende de la elección de P y Q.*

Solución. *Como $BAQS$ y $CAPR$ son cuadriláteros cíclicos, entonces $\angle LRS = \angle BAC = \angle RSL$. Por lo tanto el $\triangle LRS$ es isósceles.*



Sean M y N puntos en las prolongaciones de SQ y RP respectivamente. Como $BPQC$ y $BAQS$ son cíclicos, entonces $\angle PQA = \angle AQM$. Similarmente $\angle QPA = \angle APN$. Por lo tanto AQ y AP son bisectrices externas del triángulo PQL y A es excentro de dicho triangulo. Por lo tanto AL es bisectriz del $\angle PLQ$. Como el $\triangle LRS$ es isósceles AL es perpendicular a BC, lo que implica que el punto de corte de la prolongación de AL con BC es el pie de la altura del triángulo ABC trazada desde A y por lo tanto independiente de la elección de P y Q.

Los siguientes ejercicios proveen diversas fórmulas para encontrar el área de un triángulo.

Ejercicio. *Dado el triángulo ABC, demostrar que la altura desde A es igual a $\dfrac{AC \cdot AB}{2R}$ donde R es el radio del circuncírculo del triángulo. Ayuda: Considerar el triángulo con su circuncírculo. Sea E el pie de la altura desde A. Sea D en el círculo tal que AD es un diámetro del circuncírculo. Probar que los triángulos rectángulos ABE y ADC son semejantes.*

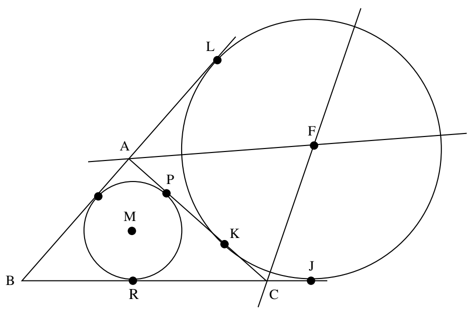
Ejercicio. *Usar el ejercicio anterior para demostrar que el área del triángulo ABC está dada por $\dfrac{AC \cdot AB \cdot BC}{4R}$, donde R es el circunradio del círculo.*

Note que si se conoce el área de un triángulo dado, entonces con la fórmula del ejercicio anterior se puede hallar el radio del circuncírculo.

El siguiente ejercicio provee una fórmula para hallar el radio del incírculo de un triángulo conociendo su área. El **semiperímetro** de un triángulo es la mitad de su perímetro.

Ejercicio. *Demostrar que el área del triángulo ABC está dado por sr, donde s y r son el semiperímetro y el inradio del triángulo respectivamente. Ayuda: Note que $(ABC) = (ABI) + (ACI) + (BCI)$, donde I es el centro del incírculo.*

Ejercicio. *En el siguiente dibujo se muestra un triángulo ABC y los puntos de tangencia con su incírculo y uno de los excírculos. Sean r el radio del incírculo y s el semiperímetro del triángulo.*



a. *Demostrar que $BJ + BL = 2s$. Deducir de aquí que $BJ = BL = s$.*

b. *Notar que $CK = CJ = BJ - BC = s - BC$.*

c. *Demostrar que los triángulos BMR y BFJ son semejantes. De aquí deducir que $\dfrac{r}{FJ} = \dfrac{s - AC}{s}$.*

d. *Demostrar que los triángulos MRC y CJF son semejantes. Deducir de aquí que $\dfrac{r}{s - AB} = \dfrac{s - BC}{FK}$.*

e. *Demostrar que el radio del incírculo esta dado por*

$$r = \sqrt{\frac{(s - AB)(s - BC)(s - AC)}{s}}$$

y el radio del excírculo

$$FJ = \sqrt{\frac{(s-AB)(s-BC)s}{s-AC}}$$

Ejercicio (Fórmula de Heron). *Demostrar que el área del triángulo ABC está dado por $\sqrt{s(s-AB)(s-BC)(s-AC)}$, donde s es el semiperímetro del triángulo.*

Ejercicio. *Hallar el área de un triángulo de lados 7, 9, 12.*

Ejercicio. *El área de un triángulo es la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo comprendido entre ellos.*

Ejercicio. *Hallar el área máxima que puede tener un triángulo isósceles con dos lados iguales a 1.*

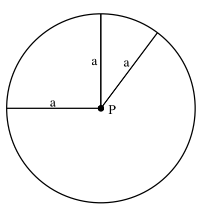
Ejercicio. *Hallar el área de un triángulo equilátero de lado l.*

Ejercicio. *La razón de las áreas de dos triángulos semejantes es igual al cuadrado de la razón de la semejanza.*

Ejercicio. *La razón entre las alturas de dos triángulos semejantes es igual a la razón de la semejanza de los dos triángulos.*

Definición. *Un* **lugar geométrico (L.G)** *es el conjunto de todos los puntos del plano que cumplen con una condición dada.*

Iniciemos determinando los puntos de un plano que están a una distancia dada "a" de un punto P del mismo plano. Vemos que los puntos que cumplen con esta condición son los que forman parte de la circunferencia de centro P y radio a.



Luego, la circunferencia es el L.G. de todos los puntos del plano que están a una distancia dada de un punto dado.

Ejercicio. *Completar las siguientes oraciones:*

1. *La ______________________ es el L.G. de todos los puntos que equidistan de los extremos de un segmento dado.*

2. *La ______________________ es el L.G. de todos los puntos del plano que están a la distancia r del punto P.*

3. *La ______________________ es el L.G. de todos los centros de circunferencias de radio r que pasan por el punto dado P.*

4. *La ______________________ es el L.G. de todos los puntos del plano que equidistan de los puntos A y B.*

5. *La ______________________ es el L.G. de todos los centros de las circunferencias que pasan por los puntos A y B.*

6. *Las ______________________ representan el L.G. de todos los puntos del plano que se encuentran a la distancia d de la recta L.*

7. *Las ______________________ representan el L.G. de los centros de todas las circunferencias de radio d tangentes a la recta dada L.*

8. *La ______________________ a dos rectas paralelas dadas representa el L.G. de todos los puntos del plano equidistantes de las rectas.*

9. *La ______________________ a dos rectas paralelas dadas representa el L.G. de los centro de todas las circunferencias tangentes a las paralelas dadas.*

10. *La ______________________ de un ángulo dado es el L.G. de todos los puntos del plano que se encuentran equidistantes de los lados del ángulo.*

11. *La ______________________ de un ángulo dado es el L.G. de los centros de todas las circunferencias tangentes a los lados del ángulo.*

12. *Dadas dos circunferencias concéntricas, la* ____________________ *es el L.G. de todos los puntos del plano equidistantes de las circunferencias dadas.*

13. *Dadas dos circunferencias concéntricas,* ____________________ *es el L.G. de los centros de todas las circunferencias tangentes a las circunferencias dadas.*

14. *La* ____________________ *es el L.G. de los vértices correspondientes al ángulo recto de todos los triángulos rectángulos de hipotenusa AB.*

15. *El* ____________________ *es el L.G. de todos los puntos que equidistan a los lados de un triángulo dado.*

16. *El* ____________________ *es el L.G. de todos los puntos que equidistan a los vértices de un triángulo dado.*

Referencias

1. Bulajich Radmila y Gómez José A. *Geometría*, Universidad Nacional Autónoma de México, México 2004.

2. Hvidsten Michael. *Geometry*, McGraw Hill, New York, 2006.

3. Jurgensen Ray, Brown Richard y Jurgensen John. *Geometry*, McDougal Littell, Evanson, IL, 2000.

4. Rincón Germán. *Un recorrido por la geometría*, Universidad Antonio Nariño, Bogotá 1994.

5. Rhoad Richard, Milauskas George y Whipple Rogert. *Geometry for Enjoyment and Challenge*, McDougal Littell, Evanson, IL, 2000.