CORRECTION D'EXERCICES SUR LA CINÉMATIQUE DU POINT

Exercice 3 :

1. Le mouvement est plan car z = 0. Donc le mouvement a lieu sur le plan xOy

2. $\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = 2t \\ y = 2t^2 - 5t \end{cases} \Rightarrow t = \frac{x}{2} \Rightarrow \mathbf{y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x}$: la trajectoire est parabolique.

3. $x = 10 \Rightarrow 2t = 10 \Rightarrow \mathbf{t = 5\ s}$; $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = 2 \\ v_y = 4t - 5 \end{cases} \Rightarrow v = \sqrt{2^2 + (4t-5)^2}$; pour t = 5 s : $\mathbf{v = 15,13\ m/s}$

Exercice 4 :

1. $x = 3t \Rightarrow t = \frac{x}{3} \Rightarrow \mathbf{y(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}x}$: la trajectoire est parabolique

2. Au sommet de la trajectoire $v_y = 0 \Rightarrow \vec{v_S}\begin{cases} v_{Sx} = 3 \\ v_{Sy} = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{v_S = 3\ m/s}$

3. $y = 1 \Rightarrow -t^2 + 2t = 1 \Rightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Rightarrow t = 1\ s \Rightarrow \mathbf{v_S = 3\ m/s}$

4. $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a}\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -2 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{\vec{a} = -2\vec{j}} \Rightarrow \mathbf{a = 2\ m.s^{-2}}$ et $\mathbf{\vec{v} = 3\vec{i} + (-2t + 2)\vec{j}} \Rightarrow \vec{a}.\vec{v} = 2\vec{j}.[3\vec{i} + (-2t+2)\vec{j}] = -4t + 4 \Rightarrow -4t + 4 = 0 \Rightarrow t = 1\ s$

t	**0**	**1** $+\infty$
$\vec{a}.\vec{v}$	+	-
Nature du mouvement	**Accéléré**	**Retardé**

Exercice 5 :

1. $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v}\begin{cases} v_x = 3 \\ v_y = 2t \end{cases} \Rightarrow v(t = 2) = \sqrt{3^2 + (2x2)^2} = 5\ m.s^{-1}$

2. $v = \sqrt{9 + 4t^2} \Rightarrow a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{8t}{2\sqrt{9+4t^2}}$; pour t = 2 s: $a_t = \frac{4x2}{\sqrt{9+4x2^2}} = \mathbf{1,6\ m.s^{-1}}$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_t^2} \text{ or } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2\ m.s^{-2} \Rightarrow a_n = \sqrt{2^2 - 1{,}6^2} = \mathbf{1,2\ m.s^2}$$

3. $a_n = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{5^2}{1{,}2} = \mathbf{21\ m}$

Exercice 6 :

1. $x = X_m\cos(w_0t + \varphi)$ or $\mathbf{w_0} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \mathbf{\pi\ rad.s^{-1}}$

$$A\ t = 0;\ x_0 = X_m \Rightarrow X_m\cos\varphi = X_m \Rightarrow \cos\varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \mathbf{x = 0,15\cos(\pi t)}$$

2. $v = \frac{dx}{dt} = -0{,}15\sin(\pi t)$; pour t = 0,5 s : $v = -15\pi\sin(\pi x0{,}5) = \mathbf{-0,47\ m.s^{-1}}$

3. $x = -7{,}5\text{ cm} \Rightarrow 0{,}15\cos(\pi t) = -0{,}075 \Rightarrow \cos(\pi t) = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos(\pi t) = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \pi t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \pi t = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$; or $v < 0$(déplacement dans le sens négatif) $\Rightarrow -X_m w\sin(wt + \varphi) < 0 \Rightarrow \sin(wt + \varphi) > 0 \Rightarrow wt + \varphi > 0$. On choisi la solution positive : $\pi t = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow t = \frac{2}{3} + 2k$

Premier passag: $k = 0 \Rightarrow \mathbf{t = \frac{2}{3}\ s}$; deuxième passage $k = 1 \Rightarrow \mathbf{t = \frac{8}{3}\ s}$; troisième passage $k = 2 \Rightarrow \mathbf{t = \frac{14}{3}\ s}$

Exercice 7 :

1. $x = A\cos(wt) + B\sin(wt)$; à $t = 0 \Rightarrow x(0) = A\cos(0) + B\sin(0) \Rightarrow \mathbf{A = x_0 = 4\ cm}$.

$$a = \frac{dv}{dt} = -Aw^2\cos(wt) - Bw^2\sin(wt)\ ;\ \text{à } t = 0 : a(0) = -Aw^2\cos(0) - Bw^2\sin(0) \Rightarrow a_0 = -Aw^2 \Rightarrow -16\pi^2 = -Aw^2 \Rightarrow w^2 = \frac{16\pi^2}{4} \Rightarrow \mathbf{w = 2\pi\ rad.s^{-1}}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = -Aw\sin(wt) + Bw\cos(wt);\ \text{à } t = 0 : v(0) = -Aw\sin(0) + Bw\cos(0) \Rightarrow v_0 = Bw \Rightarrow B = \frac{v_0}{w} = \frac{6\pi}{2\pi} \Rightarrow \mathbf{B = 3\ cm}$$

2. $x = X_m\cos(wt + \varphi) = X_m(\cos wt.\cos\varphi - \sin wt.\sin\varphi) = X_m\cos\varphi.\cos(wt) - X_m\sin\varphi.\sin(wt)$ or $x = A\cos(wt) + B\sin(wt)$. Par identification : $\begin{cases} A = X_m\cos\varphi \\ B = -X_m\sin\varphi \end{cases}$

Donc x(t) peut se mettre sous la forme $x(t) = X_m\cos(wt + \varphi)$

$$A^2 + B^2 = X_m^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \Rightarrow \mathbf{X_m} = \sqrt{A^2 + B^2} = \mathbf{5\ cm}$$

$$\frac{B}{A}=\frac{-X_m\sin\varphi}{X_m\cos\varphi}\Rightarrow\tan\varphi=-\frac{B}{A}=-0{,}75\Rightarrow\boldsymbol{\varphi=-0,64\ rad}.\ \text{Donc } \boldsymbol{x(t)=0,05\cos(2\pi t-0,64)}$$

3. $v(t)=-0{,}05(2\pi)\sin(2\pi t-0{,}64)\Rightarrow a(t)=-0{,}05(2\pi)^2\cos(2\pi t-0{,}64)$. Pour $t=1$ s : $\boldsymbol{a=-1,57\ m.s^{-2}}$

Exercice 8 :

1. $v=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Rightarrow\vec{v}\begin{cases}v_x=-2(4\pi)\sin(4\pi t)\\v_y=-2(4\pi)\cos(4\pi t)\end{cases}\Rightarrow \boldsymbol{v}=\sqrt{64\pi^2(\sin^2 4\pi t+\cos^2 4\pi t)}=\boldsymbol{8\pi\ m.s^{-1}}$: la vitesse est donc constante.

2. $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}\Rightarrow\vec{a}\begin{cases}a_x=-32\pi^2\cos(4\pi t)\\a_y=-32\pi^2\sin(4\pi t)\end{cases}\Rightarrow\boldsymbol{a}=\sqrt{1024\pi^4(\sin^2 4\pi t+\cos^2 4\pi t)}=\boldsymbol{32\pi^2\ m.s^{-2}}$: l'accélération est aussi constante.

3. $x=3+2\cos(4\pi t)\Rightarrow\cos(4\pi t)=\frac{x-3}{2}$ et $y=1-2\sin(4\pi t)\Rightarrow\sin(4\pi t)=\frac{1-y}{2}$

En faisant la somme au carré on a : $\cos^2(4\pi t)+\sin^2(4\pi t)=\left(\frac{x-3}{2}\right)^2+\left(\frac{1-y}{2}\right)^2\Rightarrow\boldsymbol{(x-3)^2+(y-1)^2=2^2}$.

Donc la trajectoire est cercle de centre $I(3,1)$et de rayon $R=2$ m.

4. L'accélération est centripète et radiale.

Exercice 9 :

1. $x(t)=X_m\cos(wt+\varphi)$ or $\boldsymbol{w}=\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0{,}2}=\boldsymbol{10\ rad.s^{-1}}$. A $t=0$; $x_0=0\Rightarrow X_m\cos(\varphi)=0\Rightarrow\cos\varphi=\cos\frac{\pi}{2}\Rightarrow$ $\begin{cases}\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$; $v_0=-X_m w\sin\varphi>0\Rightarrow\sin\varphi<0\Rightarrow\varphi<0$. Donc $\boldsymbol{\varphi=-\frac{\pi}{2}\ rad}$. Ainsi $\boldsymbol{x(t)=0,04\cos\left(10\pi t-\frac{\pi}{2}\right)}$

2. Pour $x=-2$ cm ; $0{,}04\cos\left(10\pi t-\frac{\pi}{2}\right)=-0{,}02\Rightarrow\cos\left(10\pi t-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}\Rightarrow\cos\left(10\pi t-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow$ $\begin{cases}\left(10\pi t-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\\\left(10\pi t-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\end{cases}$. Le mobile se déplace dans le sens positif $v>0\Rightarrow -X_m\sin(wt+\varphi)>0\Rightarrow$ $\sin(wt+\varphi)<0\Rightarrow wt+\varphi<0$. Donc on choisit $10\pi t-\frac{\pi}{2}=-\frac{2\pi}{3}+2k\pi\Rightarrow 10t=-\frac{1}{6}+2k\Rightarrow t=-\frac{1}{60}+\frac{k}{5}$. Pour $k=1$: $\boldsymbol{t=0,183\ s}$ et $\begin{cases}\boldsymbol{v=1,08\ m.s^{-1}}\\\boldsymbol{a=20,1\ m.s^{-2}}\end{cases}$

Exercice 10 :

1. $t=x\Rightarrow y(x)=x^2-4x+3$

2. $\vec{v}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\Rightarrow\vec{v}\begin{cases}v_x=1\\v_y=2t-4\end{cases}\Rightarrow v=\sqrt{1+(2t-4)^2}$

3. $a_t=\frac{dv}{dt}=\frac{2x2(2t-4)}{2\sqrt{1+(2t-4)^2}}=\frac{4t-8}{\sqrt{1+(2t-4)^2}}$. Pour $t=0$; $\boldsymbol{a_t=-1,94\ m.s^{-2}}$

$a_n=\sqrt{a^2-a_t^2}$ or $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}\Rightarrow\vec{a}\begin{cases}a_x=0\\a_y=2\end{cases}\Rightarrow a=2\ m.s^{-2}\Rightarrow a_n=\sqrt{2^2-(-1{,}94)^2}=\boldsymbol{0,49\ m.s^{-2}}$

4. $\vec{a}=2\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{\imath}+(2t-4)\vec{j}\Rightarrow\vec{a}.\vec{v}=4t-8$; si $4t-8=0\Rightarrow t=2$

t	**0**	**2** $+\infty$
$\vec{a}.\vec{v}$	-	+
Nature du mouvement	**Retardé**	**Accéléré**

Exercice 11 :

1. $\boldsymbol{T}=\frac{1}{f}=\boldsymbol{\frac{3}{2}\ s}=1{,}5$ s ; $\boldsymbol{w}=2\pi f=\boldsymbol{\frac{4\pi}{3}\ rad}$

2. $x(t)=X_m\cos(wt+\varphi)$; à $t=0$: $x(0)=0\Rightarrow X_m\cos\varphi=0\Rightarrow\cos\varphi=0\Rightarrow\cos\varphi=\cos\frac{\pi}{2}\Rightarrow\begin{cases}\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\\varphi=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$; $v_0<0$ (déplacement dans le sens négatif) $\Rightarrow -X_m\sin\varphi<0\Rightarrow\sin\varphi>0\Rightarrow\varphi>0\Rightarrow\boldsymbol{\varphi=\frac{\pi}{2}\ rad}\Rightarrow\boldsymbol{x(t)=0,05\cos\left(\frac{4\pi}{3}t+\frac{\pi}{2}\right)}$.

3. $x=2{,}5$ cm $\Rightarrow 0{,}05\cos\left(\frac{4\pi}{3}t+\frac{\pi}{2}\right)=0{,}025\Rightarrow\cos\left(\frac{4\pi}{3}t+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\Rightarrow\begin{cases}\frac{4\pi}{3}t+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\\frac{4\pi}{3}t+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$

$v<0\Rightarrow -X_m\sin(wt+\varphi)<0\Rightarrow wt+\varphi>0\Rightarrow\frac{4\pi}{3}t+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\Rightarrow t=-\frac{1}{8}+\frac{3k}{2}$; pour $k=1$: $\boldsymbol{t=1,375\ s}$

Exercice 12 :

1. Pour M_1 : $x = 1 + 2\sin(2\pi t) \Rightarrow \sin(2\pi t) = \frac{x-1}{2}$ et $y = 4 + 2\cos(2\pi t) \Rightarrow \cos(2\pi t) = \frac{y-4}{2}$

En faisant la somme au carré : $\sin^2(2\pi t) + \cos^2(2\pi t) = \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-4}{2}\right)^2 \Rightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2^2$

La trajectoire est un cercle de centre C (1, 4) et de rayon R = 2 m.

Pour M_2 : $x = 1 + \sin(2\pi t) \Rightarrow \sin(2\pi t) = x - 1$ et $y = -2 - 3\cos(4\pi t)$ or $\cos(4\pi t) = \cos(2\pi t + 2\pi t) = \cos(2\pi t).\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t).\sin(2\pi t) = \cos^2(2\pi t) - \sin^2(2\pi t) = 1 - \sin^2(2\pi t) - \sin^2(2\pi t) = 1 - 2\sin^2(2\pi t) \Rightarrow$ $y = -2 - 3(1 - 2\sin^2(2\pi t)) = -5 + 6\sin^2(2\pi t) \Rightarrow y(x) = -5 + 6(x-1)^2 = 6x^2 - 12x + 1$

Donc la trajectoire est parabolique.

2. Pour M_1 : $\vec{v_1} = \frac{d\overrightarrow{OM_1}}{dt} \Rightarrow \vec{v_1}\begin{cases} v_{1x} = 4\pi\cos(2\pi t) \\ v_{1y} = -4\pi\sin(2\pi t) \end{cases} \Rightarrow v = 4\pi\ m.s^{-1}$

$$\vec{a_1} = \frac{d\vec{v_1}}{dt} \Rightarrow \vec{a_1}\begin{cases} a_{1x} = -8\pi^2\sin(2\pi t) \\ a_{2x} = -8\pi^2\cos(2\pi t) \end{cases} \Rightarrow a_1 = 8\pi^2\ m.s^{-2}$$

Pour M_2 : $\vec{v_2} = \frac{d\overrightarrow{OM_2}}{dt} \Rightarrow \vec{v_2}\begin{cases} v_{2x} = 2\pi\cos(2\pi t) \\ v_{2y} = 12\pi\sin(4\pi t) \end{cases} \Rightarrow a_2 = \sqrt{4\pi^2\cos^2(2\pi t) + 144\pi^2\sin^2(4\pi t)}$ et $\vec{a_2} = \frac{d\vec{v_2}}{dt} \Rightarrow$

$\vec{a_2}\begin{cases} a_{2x} = -4\pi^2\sin(2\pi t) \\ a_{2y} = 48\pi^2\cos(4\pi t) \end{cases} \Rightarrow a_2 = \sqrt{16\pi^4\sin^2(2\pi t) + 2304\pi^4\cos^2(4\pi t)}$

3. Le mouvement de M1 est circulaire uniforme car sa trajectoire est cercle et sa vitesse est constante.

4. Pour t = 0,5 s : $v_2 = 2\pi\ m.s^{-1}$ et $a_2 = 48\pi^2\ m.s^{-2}$

5. $a_2 = \frac{v_2^2}{R_2} \Rightarrow R_2 = \frac{v_2^2}{a_2} = 0{,}083\ m = 8{,}3\ cm$

Exercice 13 :

1. $v = Rw = R\frac{d\alpha}{dt} = R(3t^2 - 1)$. Pour $t = 1{,}5$ s: $v = 1{,}15\ m.s^{-1}$. Le mouvement n'est pas uniforme car la norme du vecteur vitesse dépend du temps.

2. $a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(1{,}15)^2}{0{,}20} = 6{,}61\ m.s^{-2}$ et $a_t = \frac{dv}{dt} = 6Rt$; pour $t = 1{,}5$ s: $a_t = 1{,}8\ m.s^{-2}$. $a = \sqrt{a_n{}^2 + a_t{}^2} = 6{,}85\ m.s^{-2}$

$\tan\alpha = \frac{a_n}{a_t} = 3{,}67 \Rightarrow \alpha = 75°$. Donc l'accélération fait un angle de 75° avec a_t.

Exercice 14 :

1. $x(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \Rightarrow x(t) = -5t^2 + 15t$

2. $v_x = \frac{dx}{dt} \Rightarrow v_x = -10t + 15$

3. Au point culminant $v_x = 0 \Rightarrow -10t + 15 = 0 \Rightarrow x_S = 1{,}5\ s \Rightarrow x_S = -5(1{,}5)^2 + 15x1{,}5 = 11{,}25\ m.$

4. $x_1 = -5(1)^2 + 15x1 = 10$ m et $v_{1x} = -10x1 + 15 = 5\ m.s^{-1}$: le mobile se déplace vers le haut

$x_2 = -5(2)^2 + 15x2 = 10$ m et $v_{2x} = -10x2 + 15 = -5\ m.s^{-1}$: le mobile se déplace vers le bas

5. Si elle repasse au point O : $x = 0 \Rightarrow -5t^2 + 15t = 0 \Rightarrow t = 3\ s \Rightarrow v = -10x3 + 15 = -15\ m.s^{-1} \Rightarrow \vec{v} = -15\vec{i}$

6. Au sol : $x = -2 \Rightarrow -5t^2 + 15t = -2 \Rightarrow -5t^2 + 15t + 2 = 0$. $\Delta = b^2 - 4ac = 16{,}27 \Rightarrow$

$$\begin{cases} t_1 = \frac{-15+16{,}27}{-10} = -0{,}127\ s\ \text{(impossible car } t > 0) \\ t_2 = \frac{-15-16{,}27}{-10} = 3{,}127\ s\ \text{(solution à retenir)} \end{cases}$$

Exercice 16 :

1. $z = -3$ = constante, donc il y a pas de mouvement suivant z. ainsi le mouvement est plan et se déroule sui le plan xOy.

2. $y = 2t + 1 \Rightarrow t = \frac{y-1}{2} \Rightarrow y(x) = 4\left(\frac{y-1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{y-1}{2}\right) \Rightarrow y(x) = y^2 - 3y + 2$. La trajectoire est parabolique.

3.1. $M_1\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 3 \\ z_1 = -3 \end{cases}$

3.2. $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \Rightarrow \vec{v_1}\begin{cases} v_{1x} = 8t - 2 \\ v_{1y} = 2 \\ v_{1z} = 0 \end{cases}$; pour $t = 1 \Rightarrow \vec{v_1}\begin{cases} v_{1x} = 6 \\ v_{1y} = 2 \end{cases} \Rightarrow v_1 = 6{,}32\ m.s^{-1}$

3.3. $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a_1}\begin{cases} a_{1x} = 8 \\ a_{1y} = 0 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 8\ m.s^{-2}$

4. $\vec{a} = 8\vec{i}$ et $\vec{v} = (8t - 2)\vec{i} + 2\vec{j} \Rightarrow \vec{a}.\vec{v} = 8(8t - 2)$, si $8t - 2 = 2 \Rightarrow t = 0{,}25$ s

t	0	0,25 $+\infty$
$\vec{a}.\vec{v}$	-	+
Nature du mouvement	**Retardé**	**Accéléré**

5. $x = 0 \Rightarrow 4t^2 - 2t = 0 \Rightarrow \mathbf{t = 0,5\ s} \Rightarrow v_2 = \sqrt{(8X0,5-2)^2 + 2^2} = \mathbf{2,83\ m.s^{-1}}$

Exercice 17 :

1. Par lecture graphique : $\mathbf{x_0 = -2\ cm}$; $\mathbf{X_m = 4\ cm}$; $\mathbf{T_0 = 0,4\ s} \Rightarrow \mathbf{w} = \frac{2\pi}{0,4} = \mathbf{5\pi\ rad.s^{-1}}$

À $t = 0$: $x_0 = -2\text{ cm} \Rightarrow \cos\varphi = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \varphi = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$. À t = 0 le mobile se déplace dans le sens négatif : $-X_m\sin\varphi < 0 \Rightarrow \sin\varphi > 0 \Rightarrow \varphi > 0 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = \frac{2\pi}{3}}$ **rad**

2. $\mathbf{x(t) = 0,04\cos\left(5\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)}$

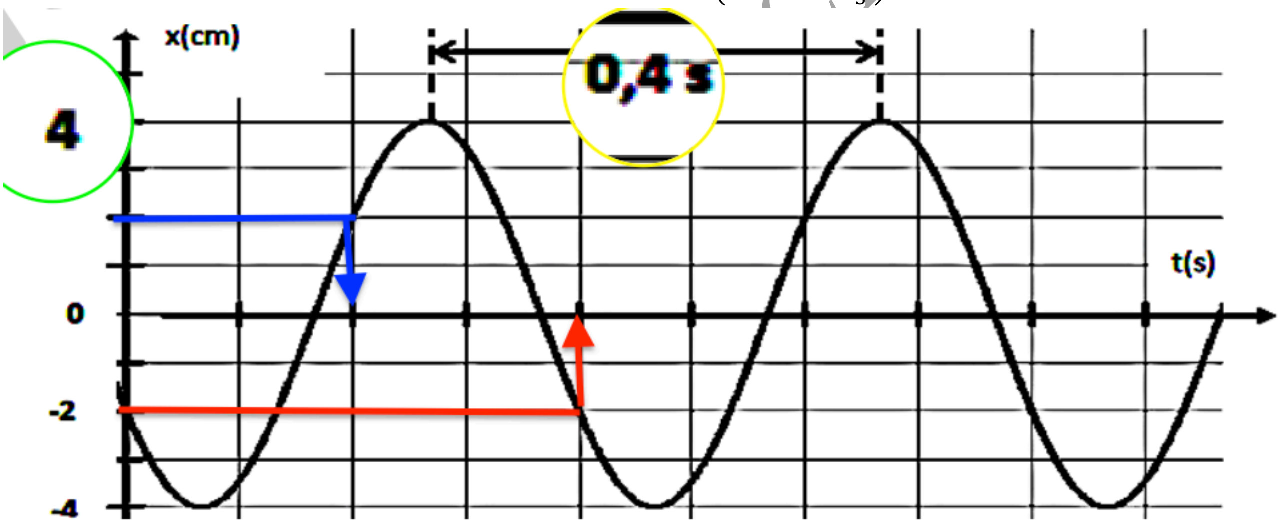
3. $\mathbf{v(t) = -0,2\pi\sin\left(5\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)}$

4. Pour $t = 0$; $v_0 = -0,2\pi\sin\left(5\pi x0 + \frac{2\pi}{3}\right) = \mathbf{-0,544\ m.s^{-1}}$

5.1. Graphiquement **t_1 = 0,4 s (flèche rouge)**

5.2. $x_0 = -2\text{ cm} \Rightarrow \cos\left(5\pi t + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} 5\pi t + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 5\pi t + \frac{2\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$. Le mobile se déplace dans le sens négatif alors $v < 0 \Rightarrow -X_m\sin(wt + \varphi) < 0 \Rightarrow \sin(wt+\varphi) > 0 \Rightarrow wt + \varphi > 0 \Rightarrow 5\pi t + \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow t = \frac{2}{5}k$. Pour $k = 1 \Rightarrow \mathbf{t = 0,4\ s}$

6. Pour $x = 2$ cm ; $t = 0,2$ s (**flèche bleue**) $\Rightarrow v = -0,2\pi\sin\left(5\pi x0,2 + \frac{2\pi}{3}\right) = \mathbf{0,544\ m.s^{-1}}$



Exercice 21 :

1. $\mathbf{X_m = 3\ cm}$

Sur le graphique 2,1 cm $\longrightarrow$ 0,05 s or la période est représentée par 8,3 cm $\Rightarrow \mathbf{T = \frac{8,3x0,05}{2,1} = 0,20\ s}$

2. La pulsation : $\mathbf{w} = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0,2} = \mathbf{10\pi\ rad.s^{-1}}$ et la fréquence : $\mathbf{f} = \frac{1}{T} = \frac{1}{0,2} = \mathbf{5\ Hz}$

3. $x(t) = X_m\cos(wt + \varphi)$ or à $t = 0$; $x_0 = 1,5\text{ cm} \Rightarrow x_0 = X_m\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi = \frac{x_0}{X_m} = \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \varphi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

À t = 0 le mobile se déplace dans le sens négatif : $-X_m\sin\varphi < 0 \Rightarrow \sin\varphi < 0 \Rightarrow \varphi < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\varphi = -\frac{\pi}{3}}$ **rad** $\Rightarrow$

$$\mathbf{x(t) = 0,03\cos\left(10\pi t - \frac{\pi}{3}\right)}$$

4. $\mathbf{v(t) = -0,3\pi\sin\left(10\pi t - \frac{\pi}{3}\right)}$ et $\mathbf{a(t) = -3\pi^2\cos\left(10\pi t - \frac{\pi}{3}\right)}$

5. $x = -1{,}5 \text{ cm} \Longrightarrow \cos\left(10\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \Longrightarrow \begin{cases} 10\pi t - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ 10\pi t - \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

Comme le mobile se déplace dans le sens négatif : $v < 0 \Longrightarrow -X_m \sin(wt + \varphi) > 0 \Longrightarrow wt + \varphi > 0 \Longrightarrow 10\pi t - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Longrightarrow t = \frac{1}{10} + \frac{k}{5}$; pour $k = 0$: $\mathbf{t = 0,10\ s}$

On peut retrouver graphiquement cette valeur (**voir flèche rouge**)

Pour $t = 0{,}10$ s ; $a = -3\pi^2 \cos\left(10\pi x 0{,}1 - \frac{\pi}{3}\right) = \mathbf{1,5\pi^2\ m.s^{-2}}$

6. Pour $t = 0{,}2$ s ; $x = 0{,}03 \cos\left(10\pi x 0{,}2 - \frac{\pi}{3}\right) = 0{,}015 \text{ m} = \mathbf{1,5\ cm}$

Cette valeur aussi peut être retrouvée graphiquement (**voir flèche verte**)