COURS COMPLET

MECANIQUE

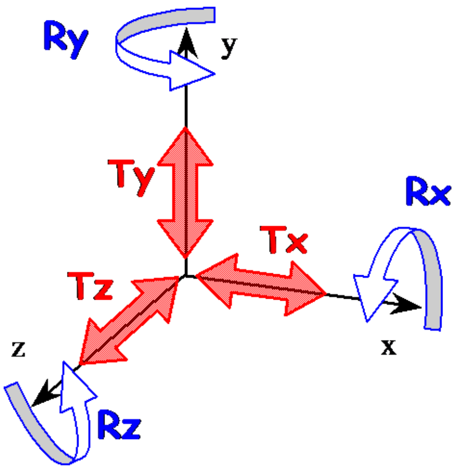
Cours complet de Mécanique

1SSI - TSSI

TABLE DES MATIERES

Modélisation des liaisons

1 - Degrés de liberté d'un solide



Un solide libre dans l'espace possède **6 degrés de liberté** (ou **mobilités**) :

- **3 translations**
- **3 rotations**

Ces 6 degrés de liberté permettent au solide d'occuper n'importe quelle position dans l'espace.

Si ce solide est une pièce d'un **système mécanique** (ex : aiguille d'une montre, roue d'une voiture, contact mobile d'un disjoncteur…) le nombre de ses degrés de liberté sera limité par les **liaisons** qu'il entretient avec les autres pièces du système.

2 - Liaisons élémentaires de 2 solides

Les **liaisons élémentaires** sont les liaisons les plus courantes qui peuvent unir 2 pièces d'un mécanisme.

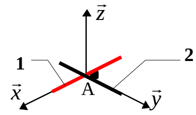
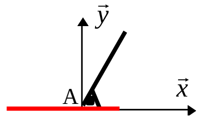
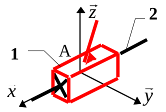
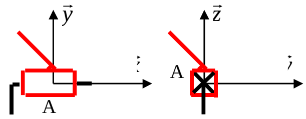
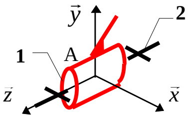
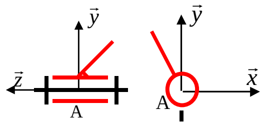
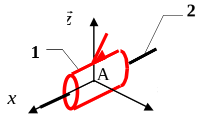
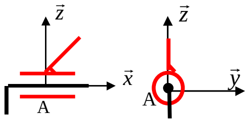
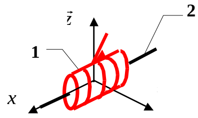
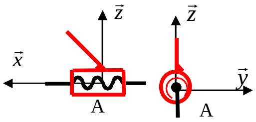
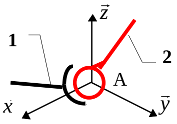
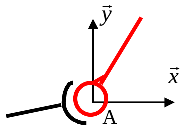
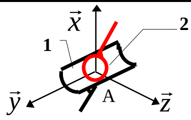
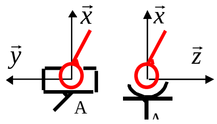
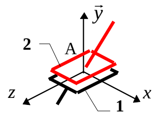
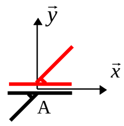
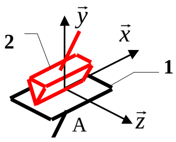
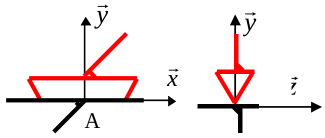
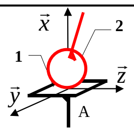
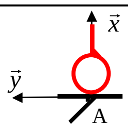
On peut reconnaître une liaison élémentaire entre 2 solides :

- en observant les mouvements possibles d'un solide par rapport à l'autre
- en identifiant la nature des **surfaces de contact** entre les 2 solides.

Pour que les mobilités de la liaison puissent être clairement définies, il faut les exprimer dans un **repère** qui possède une orientation particulière par rapport à la liaison.

On les représente à l'aide de **schémas normalisés** (voir tableau ci-après) qui permettent de modéliser un mécanisme sous la forme d'un **schéma cinématique** (comme on modélise un circuit électrique par un schéma électrique).

Une liaison élémentaire peut être obtenue par **association** d'autres liaisons élémentaires (*ex : glissière d'un étau réalisée par 2 pivots glissants*).
Toute liaison élémentaire peut-être obtenue par association de **liaisons ponctuelles**.

Nature de la liaison et position par rapport au repère	Schématisation spatiale	Schématisation plane	Mouvements possibles dans le repère donné
Encastrement			0 0 0 0 0 0
Glissière d'axe $(A,\vec{x})$			Tx 0 0 0 0 0
Pivot d'axe $(A,\vec{z})$			0 0 0 0 0 Rz
Pivot glissant d'axe $(A,\vec{x})$			Tx Rx 0 0 0 0
Hélicoïdale d'axe $(A,\vec{x})$			combinés Tx Rx 0 0 0 0
Rotule de centre A			0 Rx 0 Ry 0 Rz
Linéaire annulaire de centre A et d'axe $(A,\vec{y})$			0 Rx Ty Ry 0 Rz
Appui plan de normale $(A,\vec{y})$			Tx 0 0 Ry Tz 0
Linéaire rectiligne de normale $(A,\vec{y})$ et de droite de contact $(A,\vec{x})$			Tx Rx 0 Ry Tz 0
Ponctuelle de normale $(A,\vec{x})$			0 Rx Ty Ry Tz Rz

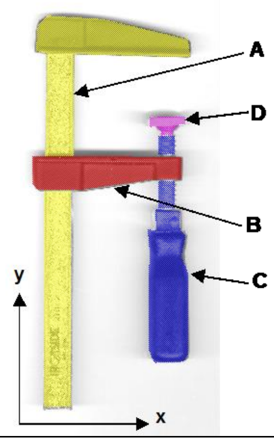
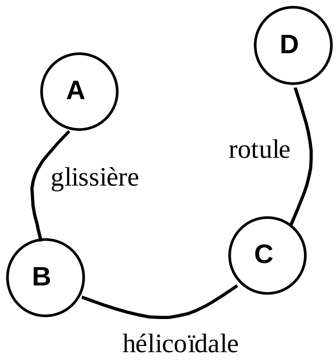
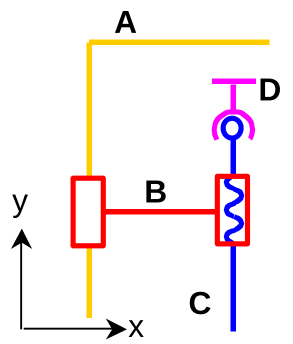
3 -

4 -

5 - Modélisation d'un mécanisme

- ***But de la modélisation*** : la modélisation consiste à représenter un mécanisme de façon simplifiée afin d'étudier son comportement mécanique.

- **Méthode générale pour modéliser un mécanisme :**

Etapes	Conseils	Exemple du serre-joint
1°) Repérer quels sont les différents **groupes cinématiques** (ou **sous-ensembles cinématiquement liés** ou encore **classes d'équivalence**).	Repérer les liaisons encastrement puis colorier d'une même couleur toutes le pièces liées entre elles. Lister les pièces composant chacun des groupes : A = { 1, 3, …} B = { 2,5, …}	
2°) Identifier la **nature des liaisons** existant entre les groupes pour réaliser **le graphe des liaisons**.	Pour reconnaître une liaison entre 2 groupes : - observer les **mobilités** possibles entre ces 2 groupes **sans tenir compte des mobilités supprimées par des liaisons avec d'autres groupes.** - identifier **la nature de la surface de contact** entre les 2 groupes	
3°) Etablir le **schéma cinématique** du mécanisme en utilisant la représentation normalisée des liaisons.	Il est inutile de respecter les dimensions. Par contre il faut absolument respecter la **position relative** et l'**orientation** des liaisons.	
4°) Résoudre un problème technique en appliquant les lois de la mécanique.	ça c'est pour plus tard …	Ex : connaissant l'effort de serrage exercé par le patin « D » sur la pièce à serrer, on désire connaître l'effort exercé par le coulisseau « B » sur le mors fixe « A ».

Modélisation des Actions Mécaniques

1 - Définition d'une Action Mécanique (A.M.)

Une A.M. est un phénomène physique capable de :

créer un déplacement

maintenir un corps en équilibre

déformer un corps

On distingue :

- Les A.M. **de contact** ou **surfaciques**, exercées par un solide sur un autre solide par l'intermédiaire de leur surface de contact.
- Les A.M. **à distance** ou **volumique**, qui s'exercent sur tous les éléments de volume du solide sans qu'il y ait besoin de contact (ex : action de la pesanteur, forces magnétiques).

Remarque importante :

Si un système 1 exerce sur un système 2 une A.M., alors le système 2 exerce sur le système 1 une A.M. exactement opposée.

C'est ce que l'on appelle le **principe des actions réciproques ou la troisième loi de Newton**.

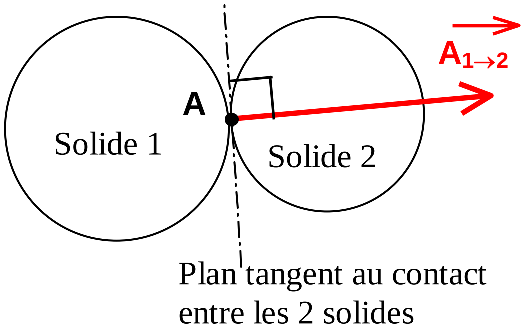
Force exercée par 1 sur 2		Force exercée par 2 sur 1
$\overrightarrow{F_{1/2}}$	=	$-\overrightarrow{F_{2/1}}$

Ex : une balle de tennis exerce sur la raquette une A.M. exactement opposée à celle qu'exerce la raquette sur la balle.

2 - Une A.M. particulière : la Force

2.1 Définition

Une **force** est l'action qu'exerce un solide sur un autre solide lorsqu'ils sont **en liaison ponctuelle**.



2.2 Caractéristiques

La force est définie par :

- un **point d'application** : le point de contact entre les 2 solides (ici le point A)
- une **direction** : normale (=perpendiculaire) au plan tangent au contact.
- un **sens** : du solide 1 vers le solide 2 s'il s'agit de l'A.M. de 1 sur 2.
- une **intensité** exprimée en Newton (N)

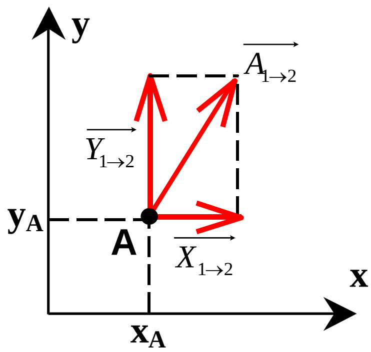
2.3 Modèle mathématique

Le modèle mathématique de la force est le **vecteur lié** ou **pointeur**, c'est à dire un vecteur auquel on associe un **point origine**.

Pour la force exercée en A par le solide 1 sur le solide 2, on utilisera la notation suivante :

$$\vec{A}_{1\to2}$$

dont les propriétés algébrique sont les suivantes :



	Coordonnées du point d'application (en mm ou en m)	Composantes algébriques du vecteur (en N)	Norme du vecteur = intensité de la force (en N)
En 2D	$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$	$\vec{A}_{1/2}\begin{pmatrix} X_{1\to2} \\ Y_{1\to2} \end{pmatrix}$	$\left\Vert\vec{A}_{1\to2}\right\Vert = \sqrt{X_{1\to2}^{\ 2} + Y_{1\to2}^{\ 2}}$
En 3D	$A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$	$\vec{A}_{1/2}\begin{pmatrix} X_{1\to2} \\ Y_{1\to2} \\ Z_{1\to2} \end{pmatrix}$	$\left\Vert\vec{A}_{1\to2}\right\Vert = \sqrt{X_{1\to2}^{\ 2} + Y_{1\to2}^{\ 2} + Z_{1\to2}^{\ 2}}$ notation simplifiée : $A_{1/2}$

3 - A.M. assimilables à des forces

3.1 Le poids d'un solide

La **pesanteur** ou **attraction terrestre** agit sur chaque petit élément constituant un solide (A.M. à distance ou volumique).

La somme de ces petites actions mécaniques élémentaires est équivalente à une **force** dont les caractéristiques sont les suivantes :

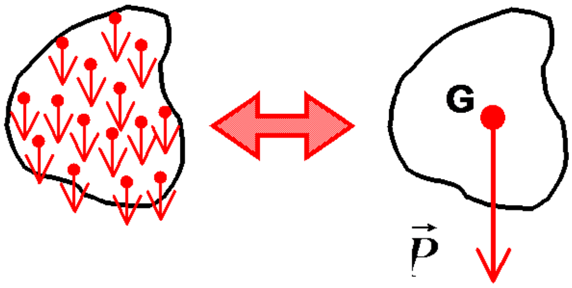
→ point d'application : **G**, **centre de gravité** du solide
→ direction : **Verticale**
→ sens : **Vers le bas**
→ intensité : $P = m \times g$ en Newton (N)

m : masse du solide en Kg

g : accélération de la pesanteur en m.s^{-2}

$g = 9{,}81 m.s^{-2}$ mais on prendra $g = 10\, m.s^{-2}$ (2% d'erreur)

Cette force notée $\vec{P}$ s'appelle le **poids** du solide :



3.2 Les forces de pression

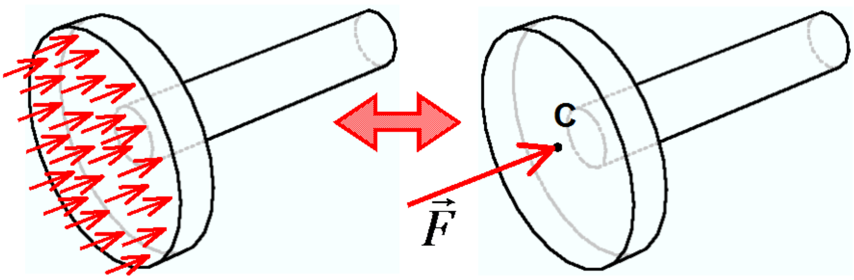
Un fluide sous pression (air, huile, …) en contact avec un solide exerce sur chaque élément de surface du solide une action mécanique élémentaire (A.M. de contact ou surfacique).

La somme de toutes ces A.M. élémentaires est équivalente à une **force** dont voici les propriétés :

→ point d'application : **C**, **centre géométrique** de la surface en contact avec le fluide
→ direction : **normale** (perpendiculaire) à la surface
→ sens : du fluide vers la surface
→ intensité : $F = p \times S$ en Newton (N)

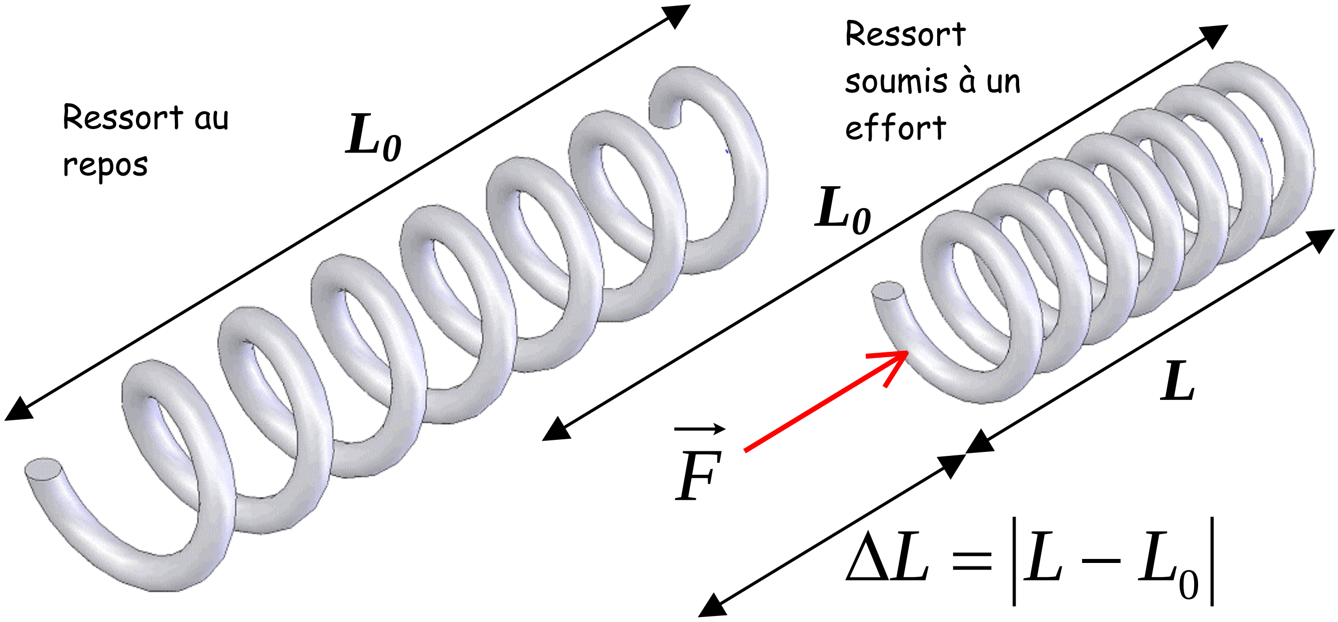
p : pression du fluide en Pa (Pascal) ; 1 Pa = 1 N/m^2

S : surface de contact en m^2



3.3 Force exercée par un ressort hélicoïdal

Un ressort hélicoïdal se comprime ou s'étire proportionnellement à l'effort qui lui est appliqué.



La force appliquée sur le ressort a les propriétés suivantes :

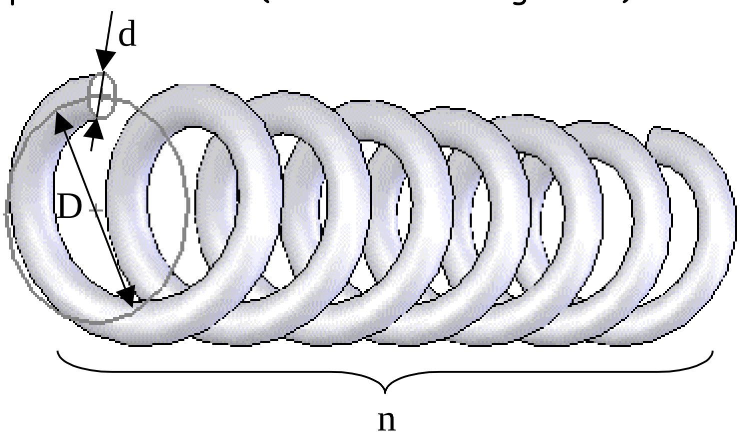
→ point d'application : extrêmité du ressort
→ direction : le long de l'axe du ressort
→ sens : dépend du sens de déformation du ressort (compression ou extension)
→ intensité : $F = k \times \Delta L$ en Newton (N)

k : **raideur** du rssort en N/mm

$\Delta L = |L - L_0|$: **flèche** (déformation du ressort) en mm

Remarque : la raideur d'un ressort dépend du **matériau** qui le compose (généralement de l'acier spécial dit "acier à ressort").
Les autres caractéristiques d'un ressort hélicoïdal qui font varier sa raideur sont :

D : diamètre d'enroulement du ressort (k diminue si D augmente)
d : diamètre du fil du ressort (k augmente si d augmente)
n : nombre de spires du ressort (k diminue si n augmente)

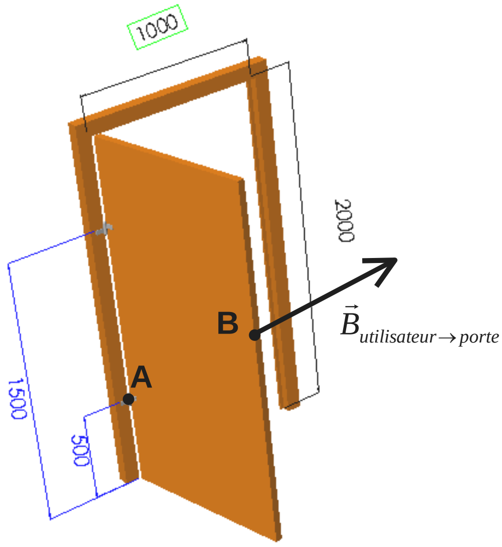


4 - Moment d'une force par rapport à un point

4.1 Signification physique du moment d'une force

Le **moment** d'une force par rapport à un point est un outil qui permet de mesurer la capacité de cette force à créer un mouvement rotation autour de ce point.

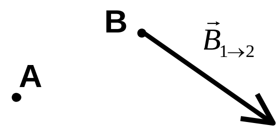
Ex : le moment de la force de l'utilisateur par rapport au point A est sa capacité à faire tourner la porte autour du point A :



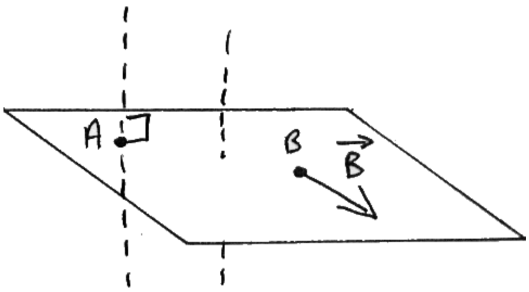
4.2 Modèle mathématique du moment d'une force

On considère une force appliquée en un point B et un point A quelconque.

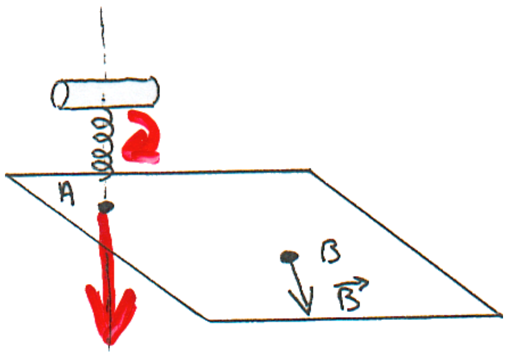
Le **moment** de $\vec{B}_{1\to 2}$ par rapport au point A est un **vecteur** noté $\vec{M}_A\left(\vec{B}_{1\to 2}\right)$ dont les caractéristiques sont les suivantes :

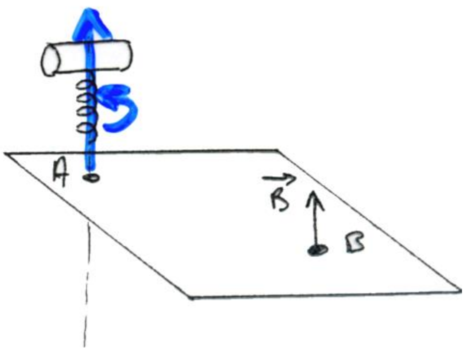


→ **direction** : perpendiculaire au plan contenant le point A et la force $\vec{B}_{1\to 2}$:

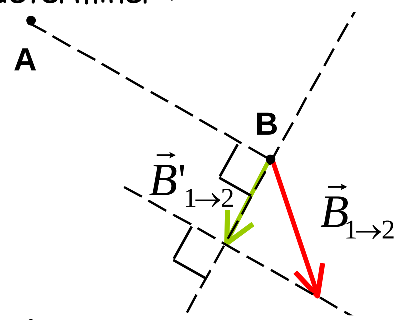


→ **sens** : on applique la ***règle du « tire-bouchon »*** en considérant que $\vec{B}_{1\to 2}$ fait tourner le tire-bouchon autour de A. :

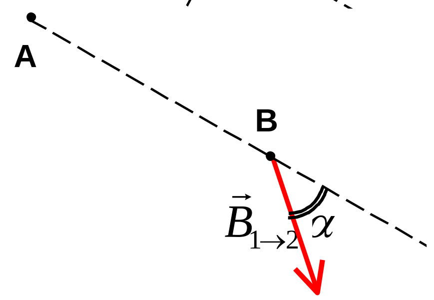




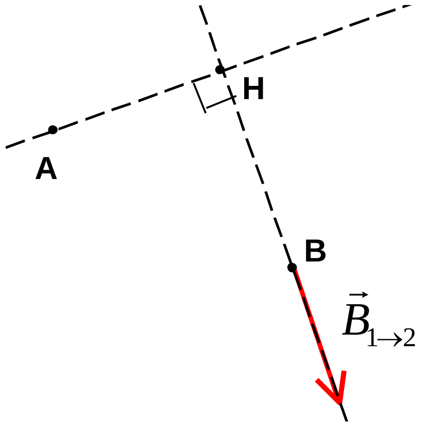
→ **intensité** : elle s'exprime en Newton mètre (N.m) et on a 3 façons équivalentes de la déterminer :



$$\boxed{M_A\left(\vec{B}_{1\to2}\right) = AB \,.\, B'_{1\to2}}$$



$$\boxed{M_A\left(\vec{B}_{1\to2}\right) = AB \,.\, B_{1\to2} \,.\, \sin\alpha}$$



$$\boxed{M_A\left(\vec{B}_{1\to2}\right) = AH \,.\, B_{1\to2}}$$

4.3 Détermination analytique du moment d'une force

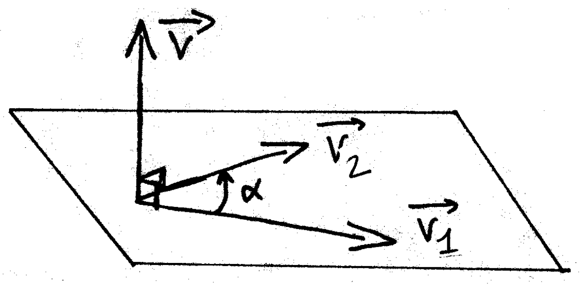
4.3.1. un outil mathématique : le produit vectoriel

Le **produit vectoriel** est une opération entre 2 vecteurs qui donne comme résulta un **vecteur**.

On note $\vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$ qui se lit : « V1 vectoriel V2 »

Si on a $\vec{V} = \vec{V_1} \wedge \vec{V_2}$ alors les caractéristiques de $\vec{V}$ sont les suivantes :

- **direction** : Perpendiculaire à $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$ donc au plan défini par $\vec{V_1}$ et $\vec{V_2}$
- **sens** : Règle du tire-bouchon quand on rabat $\vec{V_1}$ sur $\vec{V_2}$
- **intensité** : $V = V_1 \times V_2 \times \sin\alpha$
  (α : angle entre les 2 vecteurs)



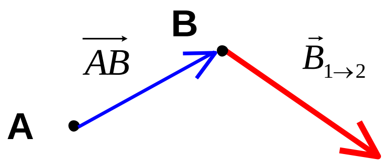
4.3.2. calcul analytique du produit vectoriel

on a les vecteurs suivants : $\vec{V}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \vec{V}_1\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} \quad \vec{V}_2\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix}$

si $\vec{V} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2$ alors
$$\begin{aligned} X &= Y_1Z_2 - Z_1Y_2 \\ Y &= Z_1X_2 - X_1Z_2 \\ Z &= X_1Y_2 - Y_1X_2 \end{aligned}$$

méthode mnémotechnique :
$$\left|\begin{array}{l} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{array}\right. \quad \begin{array}{ll} X_1 & X_2 \\ Y_1 & Y_2 \end{array} = \left|\begin{array}{l} Y_1Z_2 - Z_1Y_2 \\ Z_1X_2 - X_1Z_2 \\ X_1Y_2 - Y_1X_2 \end{array}\right.$$

4.3.3. détermination du moment à l'aide du produit vectoriel



Le moment par rapport au point A de la force appliquée en B a pour expression :

$$\boxed{\vec{M}_A\left(\vec{B}_{1\to 2}\right) = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{B}_{1\to 2}}$$

si les coordonnées des vecteurs et des points sont les suivantes :

$$\vec{M}_A\left(\vec{B}_{1\to 2}\right)\begin{pmatrix} L \\ M \\ N \end{pmatrix} \quad A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \quad B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix} \quad \vec{B}_{1\to 2}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

alors on a :
$$\vec{M}_A\left(\vec{B}_{1\to 2}\right) = \left|\begin{array}{l} L \\ M \\ N \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} X \\ Y \\ Z \end{array}\right.$$

5 - Modélisation d'une force par un torseur

Nous avons vu qu'une **force** était complètement définie par :

- un **point d'application** (ex : **B**)
- un **vecteur** (ex : $\vec{B}_{1\to 2}$)

Elle peut être aussi complètement définie par :

- un **vecteur** (ex : $\vec{B}_{1\to 2}$)
- son **moment** par rapport à un point quelconque (ex : $\vec{M}_A\left(\vec{B}_{1\to 2}\right)$)

On peut alors modéliser la force à l'aide d'un **torseur** :

torseur de la force de 1 sur 2

vecteur force

coordonnées du vecteur force (en N)

base dans laquelle sont exprimées les coordonnées des vecteurs

$$\{\tau_{1\to2}\}=\left\{\begin{matrix}\vec{B}_{1\to2}\\ \vec{M}_A\left(\vec{B}_{1\to2}\right)\end{matrix}\right\}_A=\left\{\begin{matrix}X_{1\to2} & L_{A\,1\to2}\\ Y_{1\to2} & M_{A\,1\to2}\\ Z_{1\to2} & N_{A\,1\to2}\end{matrix}\right\}_{A\,(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

point de réduction du torseur

moment de la force par rapport au point de réduction du torseur

coordonnées du vecteur moment (en N.m)

6 - Modélisation d'une A.M. quelconque par un torseur

Toute action mécanique (force ou autre) exercée sur un système S par une entité E extérieure à S peut être modélisée par un torseur :

$$\{\tau_{E\to S}\}=\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{E\to S}\\ \vec{M}_A(E\to S)\end{matrix}\right\}_A=\left\{\begin{matrix}X & L\\ Y & M\\ Z & N\end{matrix}\right\}_A$$

$\vec{R}_{E\to S}\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}$ est la **résultante** de l'A.M. de E sur S

$\vec{M}_A(E\to S)\begin{pmatrix}L\\M\\N\end{pmatrix}$ est le **moment résultant** au point A de l'A.M. de E sur S

Remarques : ❶ Un même torseur peut s'écrire en n'importe quel point :

$$\{\tau_{E\to S}\}=\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{E\to S}\\ \vec{M}_A(E\to S)\end{matrix}\right\}_A=\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{E\to S}\\ \vec{M}_B(E\to S)\end{matrix}\right\}_B=\left\{\begin{matrix}\vec{R}_{E\to S}\\ \vec{M}_{\dots}(E\to S)\end{matrix}\right\}_{\dots}$$

son expression varie mais il modélise toujours la même A.M.

❷ La résultante d'un torseur est **invariante** (ne change pas) quel que soit le point auquel on exprime le torseur.

$$\vec{R}_{E\to S}=cste$$

❸ $\{\tau_{E\to S}\}$ est souvent la somme des torseurs des forces élémentaires qu'exerce E sur S.

On peut faire la somme de 2 torseurs uniquement s'ils sont **exprimés au même point** (même point de réduction). Dans ce cas on additionne les résultantes entre elles et les moments entre eux :

$$\left\{\begin{matrix} X_1 & L_1 \\ Y_1 & M_1 \\ Z_1 & N_1 \end{matrix}\right\}_A + \left\{\begin{matrix} X_2 & L_2 \\ Y_2 & M_2 \\ Z_2 & N_2 \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} X_1+X_2 & L_1+L_2 \\ Y_1+Y_2 & M_1+M_2 \\ Z_1+Z_2 & N_1+N_2 \end{matrix}\right\}_A$$

❹ Le Principe des actions réciproques stipule que l'A.M. d'un système E sur un système S est exactement opposée à l'A.M. de S sur E :

$$\{\tau_{E\to S}\} = -\{\tau_{S\to E}\}$$

$$\left\{\begin{matrix} \vec{R}_{E\to S} \\ \vec{M}_A(E\to S) \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} -\vec{R}_{S\to E} \\ -\vec{M}_A(S\to E) \end{matrix}\right\}_A$$

$$\left\{\begin{matrix} X_{E\to S} & L_A(E\to S) \\ Y_{E\to S} & M_A(E\to S) \\ Z_{E\to S} & N_A(E\to S) \end{matrix}\right\}_A = \left\{\begin{matrix} -X_{S\to E} & -L_A(S\to E) \\ -Y_{S\to E} & -M_A(S\to E) \\ -Z_{S\to E} & -N_A(S\to E) \end{matrix}\right\}_A$$

7 - Changement du point de réduction d'un torseur

Lorsqu'on change le point de réduction d'un torseur, seule l'expression du moment résultant varie.

La **loi du transport des moments** permet alors, connaissant le moment de l'A.M. en un point, de déterminer le moment en n'importe quel point :

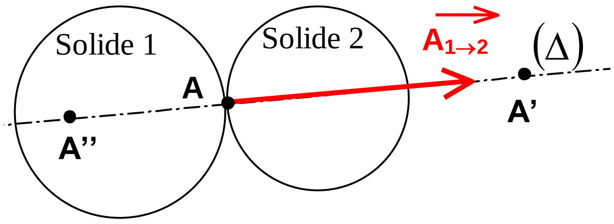
$$\boxed{\vec{M}_B(1\to 2) = \vec{M}_A(1\to 2) + \overrightarrow{BA}\wedge\vec{R}_{1\to 2}}$$

8 - Torseurs particuliers

8.1 Le torseur glisseur

Un **torseur glisseur** est un torseur qui peut toujours s'écrire avec un **moment résultant nul**, à condition qu'on l'exprime en un point d'une droite particulière appelée **axe principal** du torseur :

$\{\tau\} = \left\{\begin{matrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{matrix}\right\}_A$ si $A\in(\Delta)$ $\quad(\Delta)$: axe principal du torseur ex : Les A.M. de type force sont modélisables par des glisseurs. En effet, quelle que soit le point de la droite d'action de la force où l'on exprime le torseur, son moment résultant est nul :



$$\{\tau_{1\to 2}\} = {}_A\begin{Bmatrix} X_{1\to 2} & 0 \\ Y_{1\to 2} & 0 \\ Z_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix} = {}_{A'}\begin{Bmatrix} X_{1\to 2} & 0 \\ Y_{1\to 2} & 0 \\ Z_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix} = {}_{A''}\begin{Bmatrix} X_{1\to 2} & 0 \\ Y_{1\to 2} & 0 \\ Z_{1\to 2} & 0 \end{Bmatrix}$$

car $A, A', A'' \in (\Delta)$

8.2 Le torseur couple

Un **torseur couple** est un torseur dont la résultante est nulle quel que soit le point auquel on l'exprime :

$$\{\tau\} = {}_A\begin{Bmatrix} 0 & L \\ 0 & M \\ 0 & N \end{Bmatrix} \quad \forall A$$

D'après la loi du transport des moments :

$$\vec{M}_B(\tau) = \vec{M}_A(\tau) + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{R}(\tau) = \vec{M}_A(\tau) \qquad \text{car} \qquad \vec{R}(\tau) = 0$$

Donc l'expression d'un torseur couple reste la même quel que soit son point de réduction.

ex : l'A.M. qu'exerce le stator d'un moteur électrique sur son rotor peut être modélisée par un torseur couple

9 - A.M. transmissibles par les liaisons usuelles

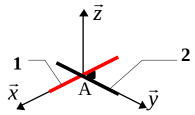
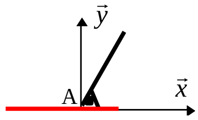
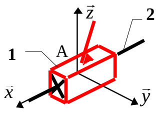
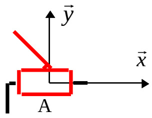
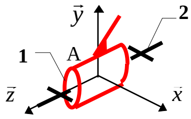
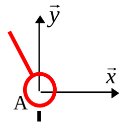
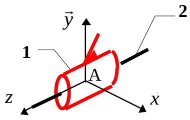
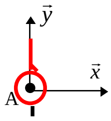
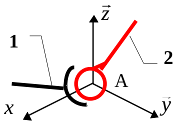
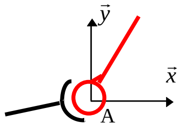
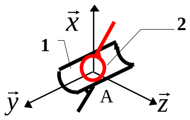
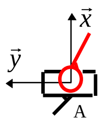
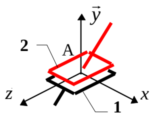
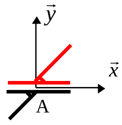
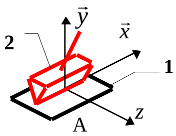
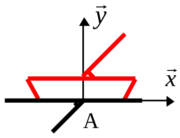
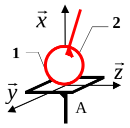
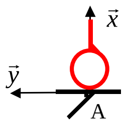
9.1 Cas des liaisons parfaites

On dit que des liaisons sont « parfaites » si on considère qu'il n'y pas de **frottement**, c'est à dire que les déplacements autorisés par la liaison se font sans aucune résistance.

Lorsque 2 pièces (ou groupes cinématiques) sont liées par une liaison usuelle parfaite, la forme de l'A.M. qu'elles peuvent exercer l'une sur l'autre dépend de la nature de la liaison (voir tableau).

Si la liaison permet un mouvement de **translation** suivant une direction, **aucune résultante** ne peut alors être transmise suivant cette direction.

Si la liaison permet un mouvement de **rotation** autour d'un axe, **aucun moment** ne peut alors être transmis selon cet axe.

Nature de la liaison et position par rapport au repère	Schématisation spatiale	Schématisation plane	Mouvements possibles	Torseur transmissible $\{\mathcal{T}_{1\to 2}\}$ au point A
Encastrement R quelconque			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Glissière d'axe $(A,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} Tx & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & M \\ Z & N \end{Bmatrix}$
Pivot d'axe $(A,\vec{z})$			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & Rz \end{Bmatrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Pivot glissant d'axe $(A,\vec{z})$			$\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ Tz & Rz \end{Bmatrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} X & L \\ Y & M \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$
Rotule de centre A			$\begin{Bmatrix} 0 & Rx \\ 0 & Ry \\ 0 & Rz \end{Bmatrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} X & 0 \\ Y & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Linéaire annulaire de centre A et d'axe $(A,\vec{y})$			$\begin{Bmatrix} 0 & Rx \\ Ty & Ry \\ 0 & Rz \end{Bmatrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ Z & 0 \end{Bmatrix}$
Appui plan de normale $(A,\vec{y})$			$\begin{Bmatrix} Tx & 0 \\ 0 & Ry \\ Tz & 0 \end{Bmatrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & L \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$
Linéaire rectiligne de normale $(A,\vec{y})$ et de droite de contact $(A,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} Tx & Rx \\ 0 & Ry \\ Tz & 0 \end{Bmatrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y & 0 \\ 0 & N \end{Bmatrix}$
Ponctuelle de normale $(A,\vec{x})$			$\begin{Bmatrix} 0 & Rx \\ Ty & Ry \\ Tz & Rz \end{Bmatrix}$	${}_{A}\begin{Bmatrix} X & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}$

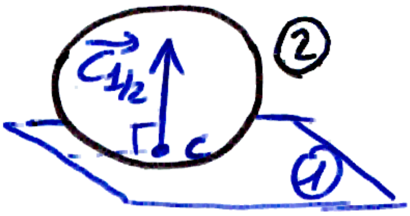
9.2 Cas des contacts avec frottement

Jusqu'à présent nous avons considéré les liaisons comme parfaites, c'est à dire sans efforts dus au frottement.

Dans la réalité, les frottements vont créer des efforts supplémentaires qui s'opposent aux déplacements.

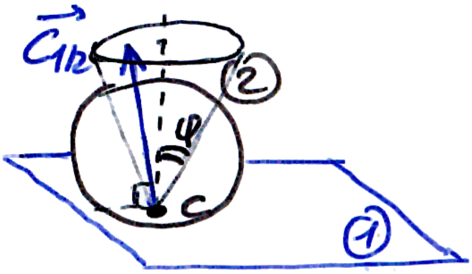
ex : contact ponctuel

Sans frottement



$\vec{C}_{1\to 2}$ est normale à la surface de contact.

Avec frottement

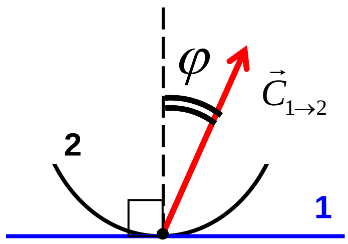


$\vec{C}_{1\to 2}$ est comprise dans un cône de demi-angle au sommet φ par rapport à la normale au contact.

Le **coefficient de frottement** $f = \tan\varphi$ dépend essentiellement du couple de matériaux en contact.

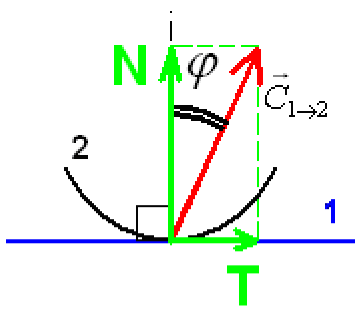
Tant que $\vec{C}_{1\to 2}$ est à l'intérieur du cône de frottement d'angle φ, il n'y a pas glissement possible entre les solides 1 et 2 (on dit qu'il y a adhérence).

Lorsqu'il y a glissement entre 1 et 2, $\vec{C}_{1\to 2}$ se trouve en limite du cône d'adhérence et fait donc un angle φ avec la normale au contact :



L'effort réel C1/2 se décompose en un effort normal au contact N et un effort tangentiel au contact T .

On a donc : $\boldsymbol{f = \tan\varphi = T/N}$



Principe Fondamental de la Statique

1 - Isolement d'un système matériel

On appelle **Système Matériel** une quantité de matière dont la masse reste constante pendant qu'on l'étudie.

Un système matériel peut être :

- un solide (ex : mors mobile de l'étau)
- un ensemble de solides (ex : l'étau complet)
- une masse de fluide (ex : l'eau d'un barrage E.D.F.)
- des solides et des fluides (ex : un vérin hydraulique)

Isoler un système matériel consiste à « diviser » l'univers en 2 parties :

- le système matériel considéré, noté S.
- le milieu extérieur à S, c'est à dire tout ce qui n'est pas S et qui est susceptible d'agir sur lui, que l'on note ext.

On distingue alors :

- les A.M. **intérieures** à S, qui agissent entre les éléments de S.
- les A.M. **extérieures** à S, qui sont exercées par ext sur S.

L'ensemble des A.M. extérieures peut être modélisée par un unique torseur expimé en un point A quelconque:

$$\{\tau_{ext\rightarrow S}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}(ext \rightarrow S) \\ \vec{M}_A(ext \rightarrow S) \end{Bmatrix}$$

2 - Equilibre d'un système matériel dans un repère galiléen

Un système matériel est en **équilibre** par rapport à un repère s'il est **immobile** dans ce repère.

Un repère est dit **galiléen** s'il est **fixe** ou en mouvement de **translation rectiligne à vitesse constante** dans l'univers.

Pour nos études de mécanique, les repères liés à la Terre ou en translation rectiligne à vitesse constante par rapport à la Terre seront considérés comme galiléens.

Ex :
- un repère lié à un véhicule qui roule en ligne droite à vitesse constante sera considéré comme galiléen.
- un repère lié à un véhicule qui prend un virage, qui freine ou qui accélère ne pourra pas être considéré comme galiléen.

3 - Principe fondamental de la statique

Si un système matériel S est en équilibre dans un repère galiléen, **alors** le torseur des A.M. extérieures est égal au torseur nul :

$$\boxed{\{T_{ext \to S}\} = \{\vec{0}\}}$$

Ce qui se traduit par 2 théorèmes :

→ Théorème de la résultante statique :

Si le système est en équilibre alors la somme des résultantes des A.M. extérieures est nulle.

→ Théorème du moment statique :

Si le système est en équilibre alors la somme des moments des A.M. extérieures par rapport à un même point est nulle.

Remarques :

❶ L'application du P.F.S. fournit 6 équations :

théorème de la résultante statique : $\begin{cases} \sum R_X = 0 \\ \sum R_Y = 0 \\ \sum R_Z = 0 \end{cases}$ théorème du moment statique : $\begin{cases} \sum M_X = 0 \\ \sum M_Y = 0 \\ \sum M_Z = 0 \end{cases}$

❷ ***Attention !***

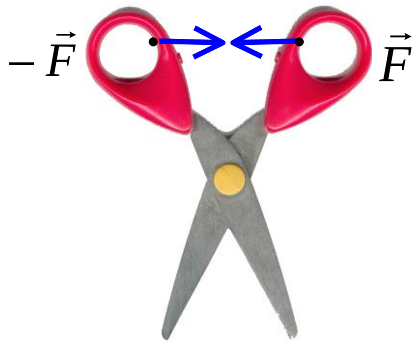
Si le torseur des A.M. extérieures à un système est nul, le système n'est pas forcément en équilibre.

C'est la **première loi de Newton** ou principe de l'inertie (initialement formulé par Galilée)

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{0} \quad => \quad \vec{v} = \vec{Cte}}$$

Ex : une paire de ciseaux

Si l'utilisateur exerce 2 forces opposées sur les ciseaux, le torseur des A.M. extérieures aux ciseaux est nul, mais le système n'est pas en équilibre (les ciseaux vont se fermer à vitesse constante)



4 - Cas d'un système soumis à 2 ou 3 forces

4.1 Système soumis à 2 forces

Soit un système S en équilibre sous l'action de 2 forces $\vec{A}_{ext\to S}$ et $\vec{B}_{ext\to S}$ appliquées en **A** et en **B**.

L'application du P.F.S. se traduit par :

→ Le théorème de la résultante statique :

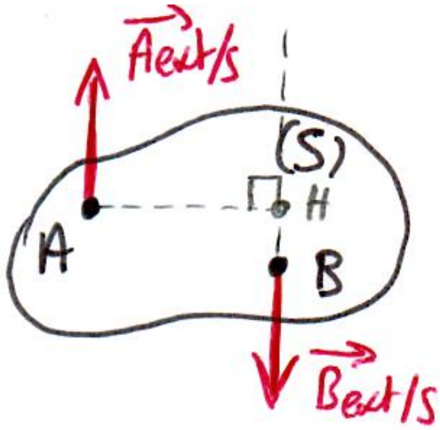
$$\vec{A}_{ext\to S} + \vec{B}_{ext\to S} = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \vec{A}_{ext\to S} = -\vec{B}_{ext\to S}$$

Conclusion : Les 2 forces sont **opposées** (même norme, même direction, sens contraire)

→ Le théorème du moment statique :

La somme des moments de chacune de ces forces par rapport à un point quelconque est nulle.

ex :



On doit avoir :

$$\vec{M}_A\left(\vec{A}_{ext\to S}\right) + \vec{M}_A\left(\vec{B}_{ext\to S}\right) = \vec{0}$$

or $\vec{M}_A\left(\vec{A}_{ext\to S}\right) = \vec{0}$ car A est le point d'application de la force

donc $\vec{M}_A\left(\vec{B}_{ext\to S}\right) = \vec{0}$

or $M_A\left(\vec{B}_{ext\to S}\right) = AH \times B_{ext\to S}$

comme $B_{ext\to S} \neq 0$ alors $\boxed{AH = 0}$

Conclusion : Les 2 forces ont **même droite d'action**.

En résumé : Si un système est en équilibre sous l'action de 2 forces alors ces 2 forces sont **opposées** et ont **même droite d'action**.

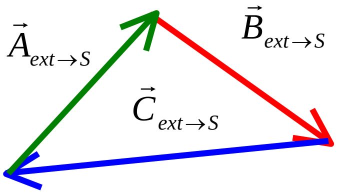
4.2 Système soumis à 3 forces

Soit un système S en équilibre sous l'action de 3 forces quelconques $\vec{A}_{ext\to S}$, $\vec{B}_{ext\to S}$ et $\vec{C}_{ext\to S}$ appliquées aux points **A**, **B** et **C**.

Le P.F.S. se traduit alors par :

→ Le théorème de la résultante statique :

$$\vec{A}_{ext \to S} + \vec{B}_{ext \to S} + \vec{C}_{ext \to S} = \vec{0}$$



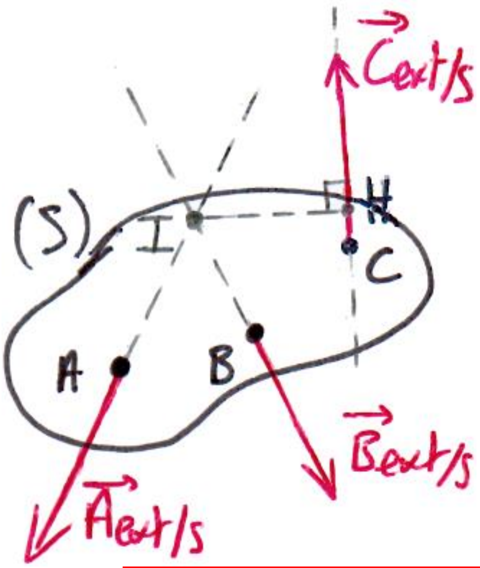
Ceci se traduit graphiquement par le fait que le triangle formé par les 3 vecteurs mis bout à bout est fermé et donc que les 3 vecteurs sont contenus dans un même plan.

Conclusion : La **somme** ***vectorielle*** des 3 vecteurs force est **nulle** et ces 3 vecteurs sont donc **coplanaires**.

→ Le théorème du moment statique :

La somme des moments de chacune des 3 forces par rapport à un point quelconque est nulle.

ex :



Soit I le point d'intersection des droites d'action de $\vec{A}_{ext \to S}$ et $\vec{B}_{ext \to S}$

On doit avoir :

$$\vec{M}_I\left(\vec{A}_{ext \to S}\right) + \vec{M}_I\left(\vec{B}_{ext \to S}\right) + \vec{M}_I\left(\vec{C}_{ext \to S}\right) = \vec{0}$$

or $\vec{M}_I\left(\vec{A}_{ext \to S}\right) = \vec{0}$ et $\vec{M}_I\left(\vec{B}_{ext \to S}\right) = \vec{0}$ car I est sur les droites d'action de $\vec{A}_{ext \to S}$ et $\vec{B}_{ext \to S}$

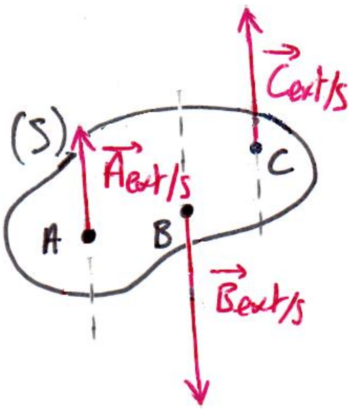
donc $\vec{M}_I\left(\vec{C}_{ext \to S}\right) = \vec{0}$

donc $M_I\left(\vec{C}_{ext \to S}\right) = IH \times \vec{C}_{ext \to S} = 0$

comme $C_{ext \to S} \neq 0$ alors $\boxed{IH = 0}$

Conclusion : Les droites d'action des 3 forces sont **concourantes**.

Attention,
cas particulier :



Si 2 des 3 forces sont parallèles alors elles ne peuvent pas être concourantes.

Dans ce cas, la 3ème force est forcément parallèle aux 2 autres pour que leur somme vectorielle puisse être nulle.

De plus pour que le théorème du moment statique soit respecté, les 3 forces doivent se trouver dans un même plan.

En résumé : Si un système est en équilibre sous l'action de 3 forces **non parallèles**, alors ces 3 forces sont **concourantes**, **coplanaires** et de **somme vectorielle nulle**.

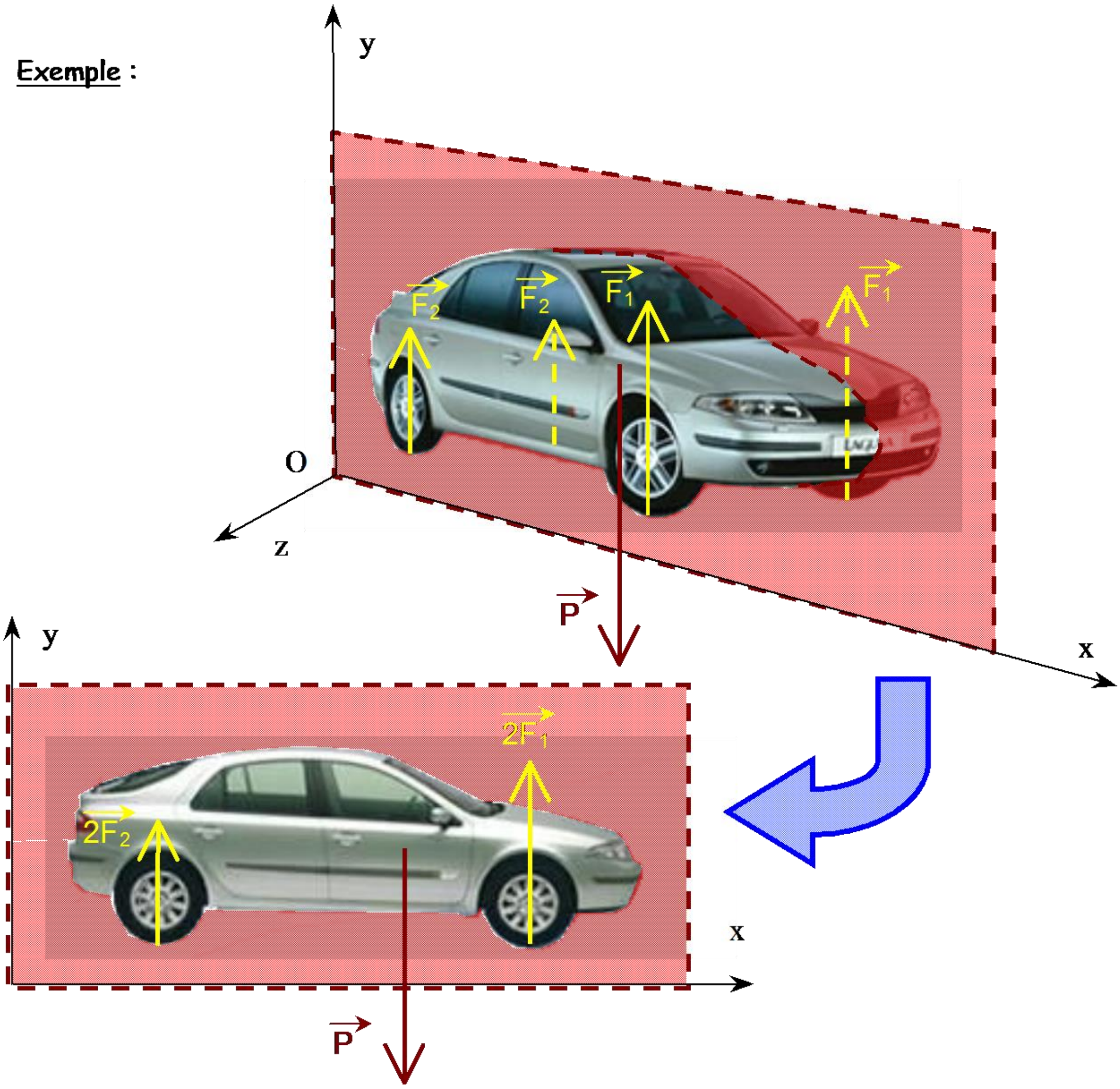
Si un système est en équilibre sous l'action de 3 forces dont 2 sont **parallèles**, alors ces 3 forces sont **parallèles**, **coplanaires** et de **somme vectorielle nulle**.

5 - Simplification plane

Si la géométrie des liaisons d'un système matériel présente un **plan de symétrie** et que les A.M. extérieures exercées sur ce système sont symétriques par rapport à ce plan, alors on peut admettre que le mécanisme est **« plan »**, c'est à dire que :

- les **résultantes** des A.M. extérieures sont contenues **dans le plan de symétrie**
- les **moments** des A.M. extérieures sont **perpendiculaires au plan de symétrie**.

Exemple :



Le plan (O,x,y) est plan de symétrie de la géométrie et des A.M. extérieurs donc toutes les A.M. s'écrivent sous la forme suivante :

$$_A\left\{\begin{array}{cc} X & - \\ Y & - \\ - & N \end{array}\right\} \quad \text{A quelconque}$$

L'application du PFS ne nécessite donc que la résolution de **3 équations** :

$$\begin{cases} \sum R_X = 0 \\ \sum R_Y = 0 \\ \sum M_Z = 0 \end{cases}$$

6 - Equilibre isostatique ou hyperstatique

6.1 Définition

Un système matériel est en **équilibre isostatique** si les composantes inconnues des torseurs des A.M. extérieures peuvent être déterminées uniquement avec les 6 équations fournies par le P.F.S. (3 équations dans le cas d'un système plan).

Dans le cas contraire (plus d'inconnues que d'équations fournies par le PFS), on dit que le système est en **équilibre hyperstatique**.

6.2 Comment reconnaître un système en équilibre hyperstatique ?

Si le système que l'on isole possède plus de liaisons élémentaires avec l'extérieur que le strict minimum permettant d'assurer ses mobilités, alors il est en équilibre hyperstatique.

6.3 Exemples de systèmes en équilibre iso ou hyperstatique

Systèmes isostatiques :	Systèmes hyperstatiques :
- la porte avec une seule charnière - un tabouret en appui sur 3 pieds	- la porte avec plus d'une charnière - le coulisseau de la carrelette avec ses 2 liaisons pivot glissant - un tabouret en appui sur 4 pieds

6.4 Comment résoudre un problème hyperstatique ?

- En formulant des hypothèses simplificatrices

  ex : pour le cric hydraulique on fait l'hypothèse que les A.M. sur les roues sont identiques de chaque côté (hypothèse de symétrie)

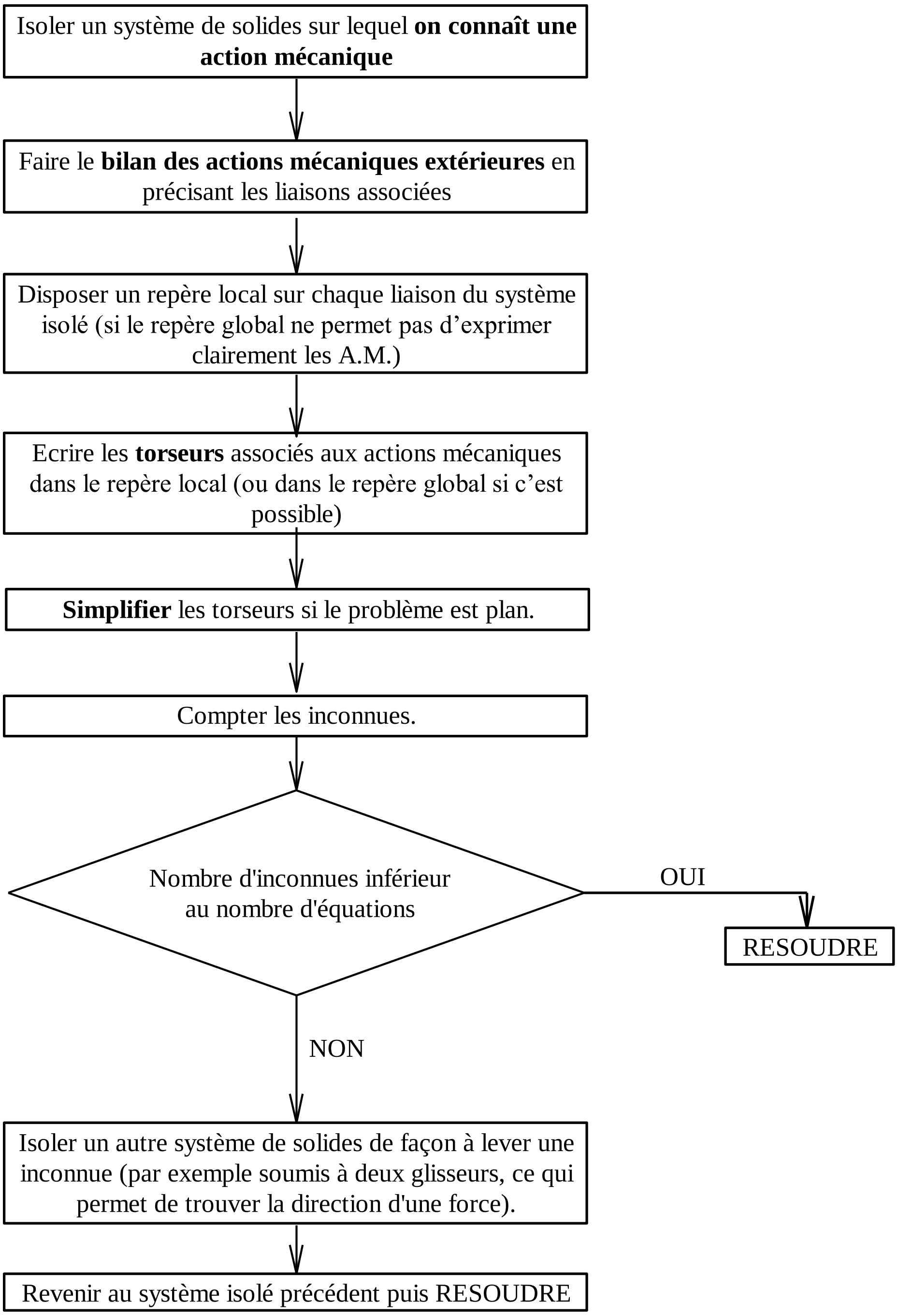
  ex : pour la carrelette on a remplacé les 2 pivots glissants par une glissière

- En faisant appel à des calculs d'élasticité des matériaux (hors programme).

6.5 Avantages et inconvénients des systèmes iso ou hyperstatiques

	Avantages	**Inconvénients**
Système Isostatique	• Calcul aisé des efforts ext. • Montage facile • Positionnement relatif peu précis des liaisons	• Solidité et rigidité réduites ou obtenues en apportant beaucoup de matière.
Système Hyperstatique	• Solidité et rigidité avec peu de matière	• Difficultés de calcul des efforts • Montage parfois délicat • Nécessité de réalisation des liaisons avec plus de précision.

7 - Démarche de résolution d'un problème de statique



Remarques :

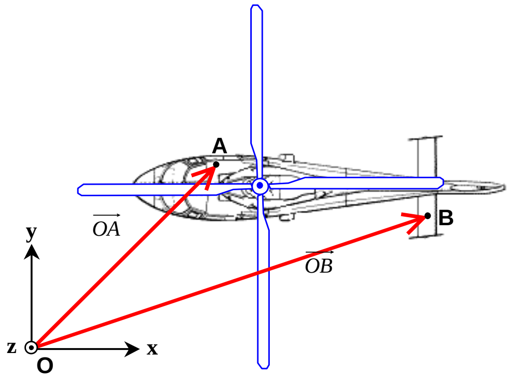
❶ Pour simplifier la résolution il est conseillé d'appliquer le théorème du moment statique au centre d'une liaison dont le torseur associé comporte beaucoup d'inconnues. On limite ainsi le nombre d'inconnues dans les équations obtenues.

❷ Lorsqu'un système comporte beaucoup de pièces à isoler, il est conseillé de commencer par isoler les solides soumis à 2 forces.
Ceci permet de déterminer rapidement la direction de ces forces et simplifie les calculs par la suite.

Cinématique

1 - Trajectoire, vitesse, accélération

1.1 Position d'un solide

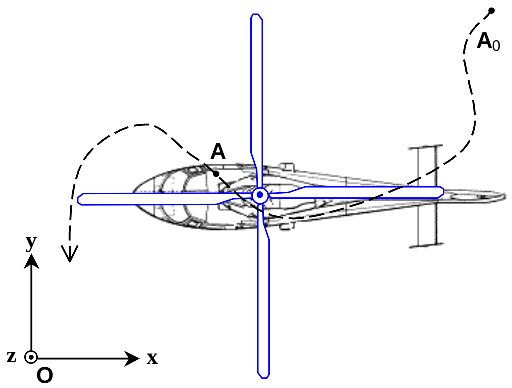


La **position** d'un solide par rapport à un repère R est définie par les coordonnées de ses différents point dans ce repère.

$$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OB}\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$$

Ces coordonnées varient en fonction du temps.

1.2 Trajectoire d'un point et abscisse curviligne



La **trajectoire** d'un point est l'ensemble des positions qu'il a occupé pendant un intervalle de temps donné.

L'**abscisse curviligne** s est la longueur de l'arc allant de l'origine de la trajectoire A_0 (position de A à t=0) au point A (position à l'instant présent).

$$s = \overline{A_0 A}$$

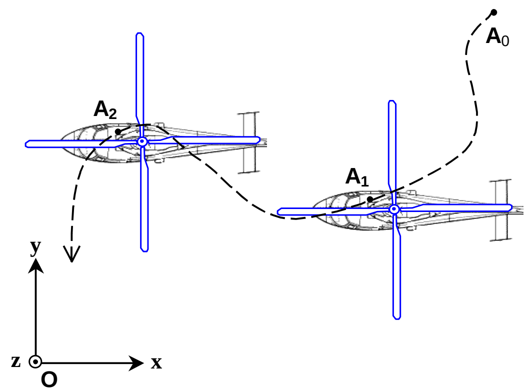
1.3 Vitesse d'un point

1.3.1. vitesse moyenne

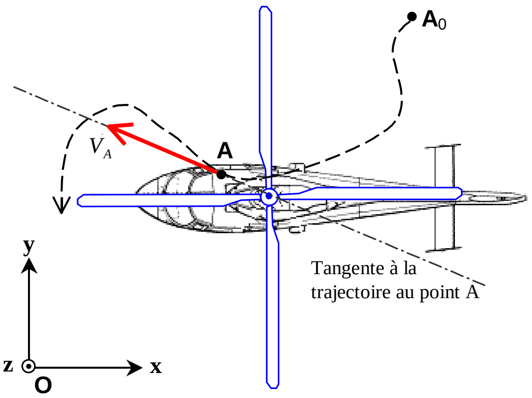
La vitesse moyenne d'un point A entre 2 dates t_1 et t_2 est :

$$V_{moy} = \frac{\overline{A_1 A_2}}{t_2 - t_1} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps de parcours}}$$

en m/s (ou m.s^{-1})



1.3.2. vecteur vitesse instantannée



Les propriétés du vecteur vitesse du point A à l'instant t sont les suivantes :

$\vec{V}_A$
- point d'application : A (position à l'instant t)
- direction : tangente à la trajectoire
- sens : sens de parcours de la trajectoire
- intensité : $v(t) = \dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\text{variation infime de trajectoire}}{\text{variation infime de temps}}$
- en m/s (ou m.s^{-1})

Le vecteur vitesse instantanée est en fait la dérivée par rapport au temps du vecteur position :

$$\vec{V}_A = \frac{d\overrightarrow{OA}}{dt} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \vec{V}_A \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

1.4 Accélération d'un point

1.4.1. vecteur accélération instantanée

$$\overrightarrow{a_A} = \frac{d\vec{V}_A}{dt} = \begin{vmatrix} v_x'(t) \\ v_y'(t) \\ v_z'(t) \end{vmatrix} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{a_A} = \frac{d^2\overrightarrow{OA}}{dt^2} = \begin{vmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{vmatrix}$$

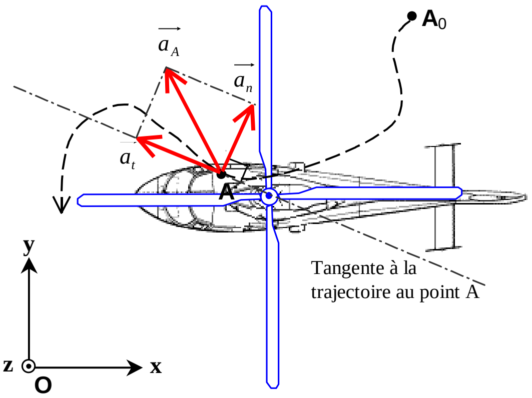
intensité en m/s^2 (ou m.s^{-2})

1.4.2. accélération normale et tangentielle

Le vecteur accélération instantanée peut toujours se décomposer en :

- un composante perpendiculaire à la trajectoire : l'**accélération normale**
- un composante tangente à la trajectoire : l'**accélération tangentielle**

$$\overrightarrow{a_A} = \overrightarrow{a_t} + \overrightarrow{a_n}$$



- $\overrightarrow{a_t}$ est dans le sens de la trajectoire si le point A accélère et dans le sens opposé s'il ralentit.

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

- $\overrightarrow{a_n}$ est toujours dirigée vers l'intérieure de la courbure de la trajectoire.

$a_n = \dfrac{v^2}{R}$ R : rayon de courbure de la trajectoire

1.5 Mouvements particuliers d'un point

1.5.1. Mouvement rectiligne uniforme (M.R.U.)

La trajectoire du point est rectiligne et sa vitesse est constante.

Si $(O,\vec{x})$ est l'axe de la trajectoire, l'équation des abscisses est :

$$\boxed{x(t) = v.t + x_0}$$

avec $x(t)$: abscisse du point sur $(O,\vec{x})$ en fonction du temps t

v : vitesse constante (indépendante de t)

x_0 : abscisse à $t = 0$

1.5.2. Mouvement rectiligne uniformément varié (M.R.U.V.)

La trajectoire est rectiligne et l'accélération est constante (positive ou négative).
Si $(O,\vec{x})$ est l'axe de la trajectoire,

- l'équation de la vitesse est : $\boxed{v(t) = a.t + v_0}$
- l'équation des abscisses est : $\boxed{x(t) = \frac{1}{2}a.t^2 + v_0.t + x_0}$

avec $v(t)$: vitesse en fonction du temps t

$x(t)$: abscisse du point sur $(O,\vec{x})$ en fonction du temps t

a : accélération constante (indépendante de t)

v_0 : vitesse à $t = 0$

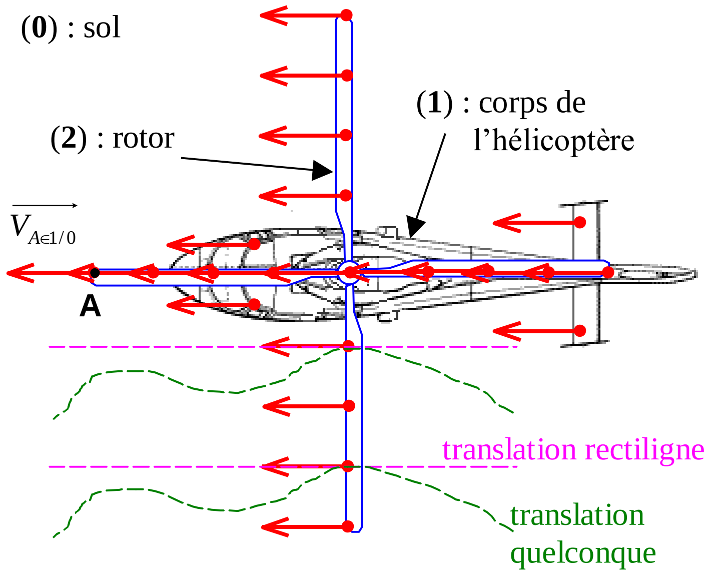
x_0 : abscisse à $t = 0$

2 - Mouvements plans

2.1 Mouvement de translation

Le corps 1 est en mouvement de **translation** par rapport au sol 0.

→ Les vecteurs vitesse de 1/0 sont **identiques en tout point** (appartenant ou non physiquement au solide 1).

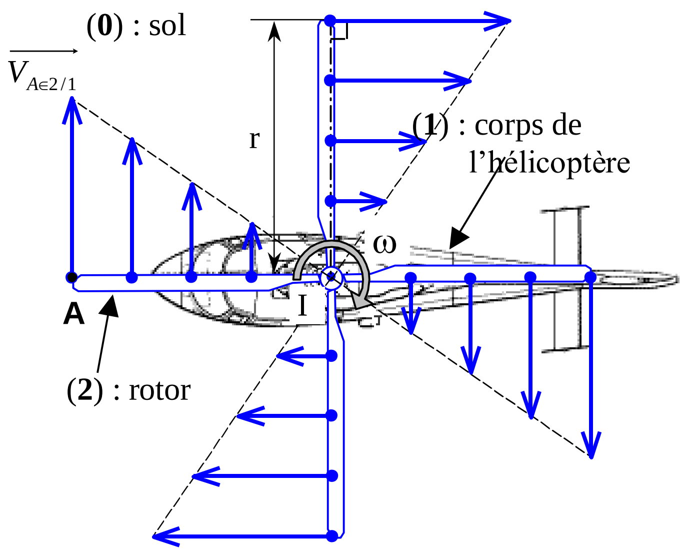


On distingue :

- la **translation rectiligne** (les trajectoires des points sont des droites parallèles).
- la **translation quelconque** (les trajectoires des points sont quelconques mais toutes identiques).

2.2 Mouvement de rotation

Le rotor 2 est en mouvement de **rotation** par rapport au corps 1.



→ Les vecteurs vitesse de 2/1 sont perpendiculaires à la droite joignant leur origine et le centre de rotation I.

Intensité :

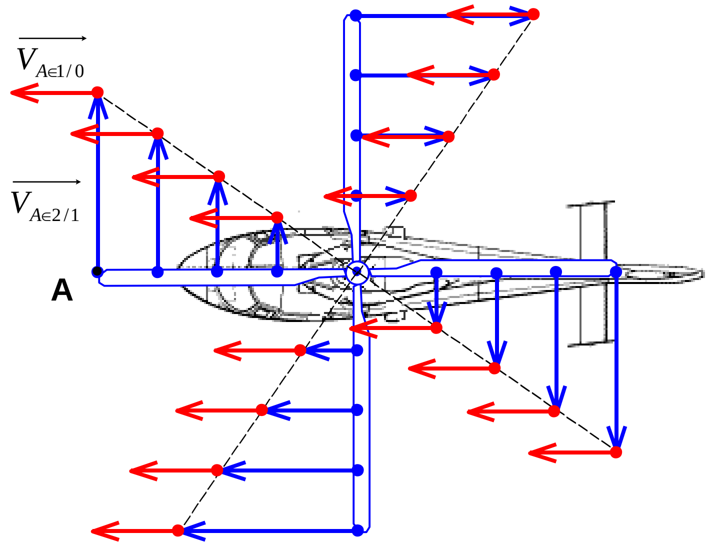
$$\boxed{V = \omega . r = 2\pi N . r}$$

ω en rad/s

N en tour/s

2.3 Composition de mouvement

Le mouvement de 2/0 est la **composition** du mouvement de 2/1 et du mouvement de 1/0.

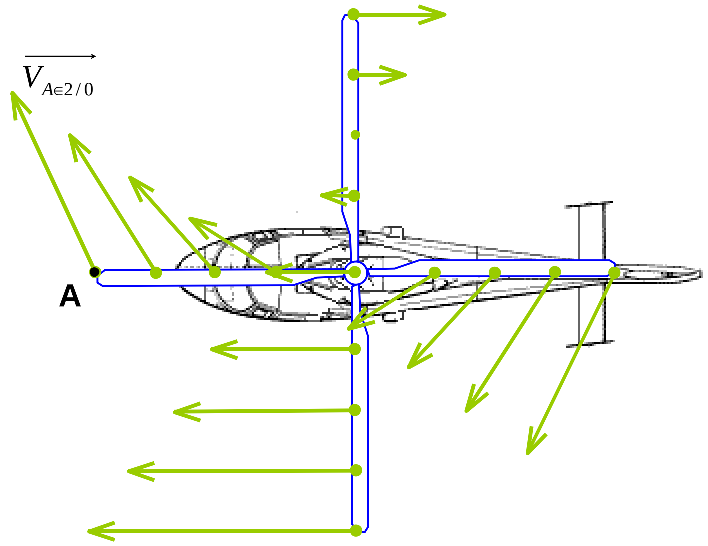


En tout point A on a :

$$\boxed{\vec{V}_{A\in 2/0} = \vec{V}_{A\in 2/1} + \vec{V}_{A\in 1/0}}$$

De façon générale on a :

$$\vec{V}_{A\in a/i} = \vec{V}_{A\in a/b} + \vec{V}_{A\in b/c} + \ldots$$
$$\ldots + \vec{V}_{A\in g/h} + \vec{V}_{A\in h/i}$$

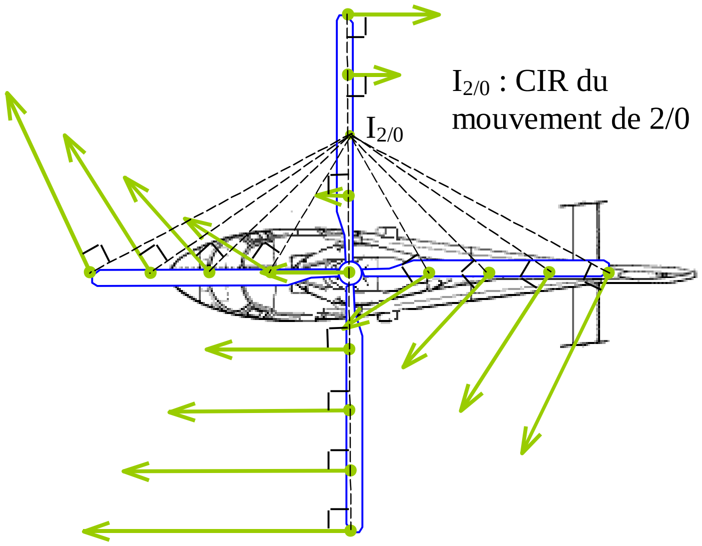


C'est la loi de **composition des vitesses**.

2.4 Centre instantané de rotation (C.I.R.)

Pour tout mouvement d'un solide par rapport à un autre qui n'est pas une translation rectiligne pure, il existe à tout instant un point où **la vitesse est nulle**, c'est le **C.I.R.** (**Centre instantané de rotation**).

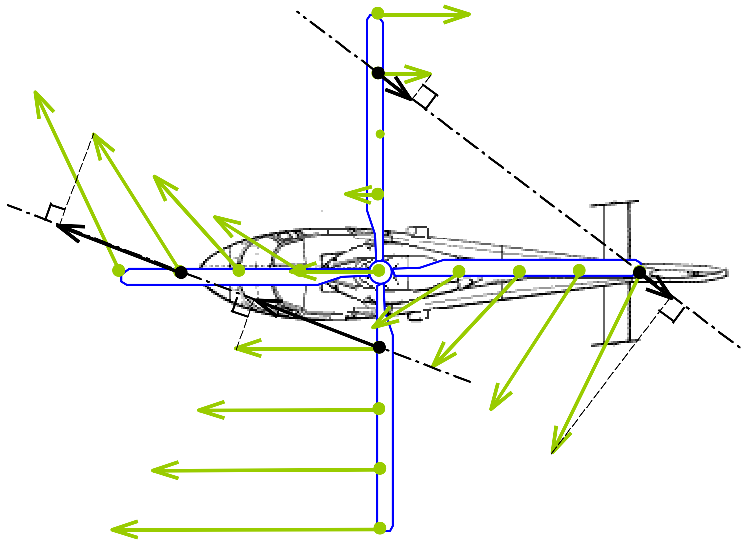
Tous les vecteurs vitesse de ce mouvement sont perpendiculaires à la droite joignant leur origine et le C.I.R.



2.5 Equiprojectivité des vecteurs vitesse

Quel que soit le mouvement entre 2 solide, les projections orthogonales de 2 vecteurs vitesse quelconques de ce mouvement sur l'axe joignant leurs origines sont identiques.

On dit qu'il y a **équiprojectivité** du champ des vecteurs vitesse.



3 - Torseur cinématique

3.1 Définition

Le **torseur cinématique** permet de définir complètement **à un instant donné** le mouvement d'un solide (2) par rapport à un autre (1) :

torseur du mouvement de 2 par rapport à 1

vecteur rotation instantanée

coordonnées du vecteur rotation instantanée (en rad/s)

$$\{\mathbf{V}_{2/1}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{2/1}\\ \vec{V}_{A\in 2/1}\end{matrix}\right\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\Omega x_{2/1} & Vx_{A\in 2/1}\\ \Omega y_{2/1} & Vy_{A\in 2/1}\\ \Omega z_{2/1} & Vz_{A\in 2/1}\end{matrix}\right\}_{(\vec{x},\vec{y},\vec{z})}$$

base dans laquelle sont exprimées les coordonnées des vecteurs

point de réduction du torseur

vecteur vitesse instantanée du point de réduction

coordonnées du vecteur vitesse instantanée (en m/s)

3.2 Changement de point de réduction

Lorsqu'on connaît le torseur cinématique du mouvement d'un solide en un point, on peut le déterminer en n'importe quel point :

$$\{\mathbf{V}_{2/1}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{2/1}\\ \vec{V}_{A\in 2/1}\end{matrix}\right\} = {}_B\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{2/1}\\ \vec{V}_{\mathbf{B}\in 2/1}\end{matrix}\right\} \quad \text{avec} \quad \vec{V}_{\mathbf{B}\in 2/1} = \vec{V}_{A\in 2/1} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{\Omega}_{2/1}$$

3.3 Cas particuliers

3.3.1. Expression du torseur au C.I.R.

Au C.I.R. du mouvement de 2/1 qu'on appelle $I_{2/1}$, la vitesse est nulle :

$$\{\mathbf{V}_{2/1}\} = {}_{I_{2/1}}\left\{\begin{matrix}\vec{\Omega}_{2/1}\\ \vec{0}\end{matrix}\right\} \quad \text{d'où} \quad \vec{V}_{M\in 2/1} = \overrightarrow{MI_{2/1}} \wedge \vec{\Omega}_{2/1} = \vec{\Omega}_{2/1} \wedge \overrightarrow{I_{2/1}M}$$

En réalité, dans l'espace il y a une infinité de C.I.R. le long d'un axe parallèle à $\vec{\Omega}_{2/1}$. On parle d'**axe instantané de rotation**.

3.3.2. Torseur d'un mouvement de translation

Dans le cas d'une translation de 2/1, le vecteur rotation est nul :

$$\{\mathbf{V}_{2/1}\} = {}_A\left\{\begin{matrix}\vec{0}\\ \vec{V}_{A\in 2/1}\end{matrix}\right\} \quad \text{avec} \quad \vec{V}_{\mathbf{B}\in 2/1} = \vec{V}_{A\in 2/1} + \overrightarrow{BA} \wedge \vec{0} = \vec{V}_{A\in 2/1}$$

L'expression du torseur est la même en n'importe quel point (la vitesse est identique en chaque point du solide).

Energétique

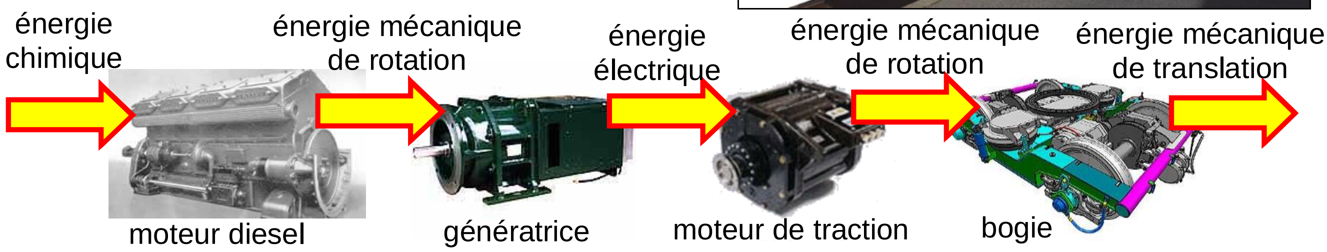
1 - L'énergie

L'**énergie** est une grandeur physique qui peut donner naissance à une action (déplacer chauffer, éclairer, casser, …)

Elle peut prendre plusieurs formes : **thermique**, **mécanique**, **électrique**, **chimique**, **nucléaire**, …

Dans les systèmes que nous étudierons, on appellera « machine » tout organe qui transformera l'énergie d'une forme à une autre.

Exemple de chaîne de transformation d'énergie :
locomotive diesel-électrique



L'énergie se note W (de l'anglais Work = travail), son unité est le **joule (J)**.

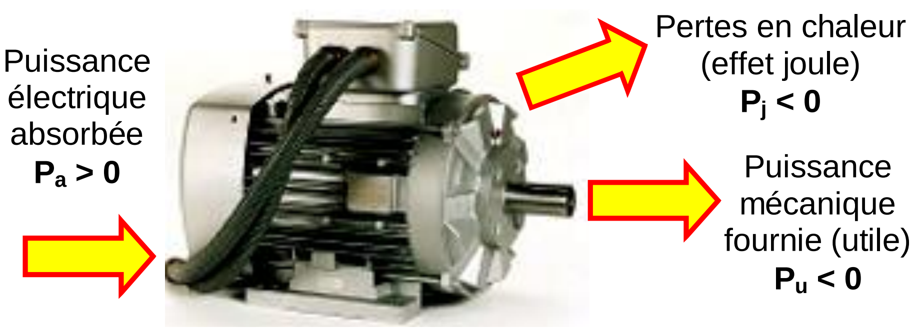
2 - La puissance

La puissance exprime la variation d'énergie par rapport au temps :

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt}}$$

Elle s'exprime en watt (W). 1 W = 1 J/s

Par convention, si on isole une machine, la puissance qu'elle reçoit est positive, celle qu'elle fournit est négative. Exemple du moteur électrique :



3 - Le principe de la conservation de l'énergie

L'énergie peut se transformer mais ne peut jamais disparaître. Si on isole une machine qui ne stocke pas d'énergie, elle doit donc en fournir autant qu'elle en reçoit. Dans l'exemple précédent du moteur électrique on doit donc avoir :

$$P_a + P_u + P_j = 0$$

4 - Rendement d'un système

Le rendement η (« êta ») d'une machine est le rapport entre la puissance utile fournie par celle-ci et la puissance absorbée :

$$\boxed{\eta = \frac{P_{utile}}{P_{absorbée}}} \quad \text{avec } P_{utile} = P_{absorbée} - P_{perdue}$$

Aucun système n'étant parfait, il y a toujours de l'énergie perdue, généralement par **effet joule** (chaleur). On a donc toujours :

$$\eta < 1$$

Dans une chaîne d'énergie (voir exemple de la locomotive diesel-électrique) le rendement total de la chaîne est le produit des rendement de chacune des machines la constituant :

$$\eta = \eta_1 \times \eta_2 \times ..... \times \eta_i$$

5 - Travail et puissance d'une action mécanique

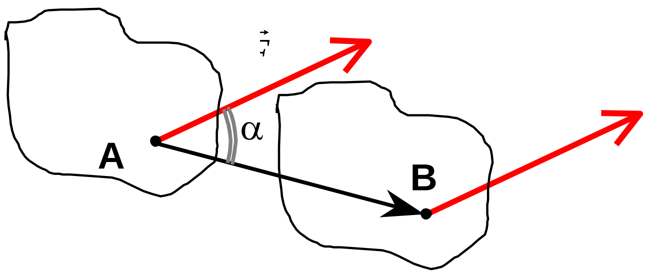
5.1 Travail et puissance d'une force

5.1.1. Travail d'une force

Le **travail** d'une force est l'énergie développée par une force pour contribuer à un déplacement dans un repère.

Il s'exprime en joules et il est égal au **produit scalaire** du vecteur force par le vecteur déplacement de son point d'application.

Exemple : travail d'une force $\vec{F}$ pour un déplacement de A vers B :

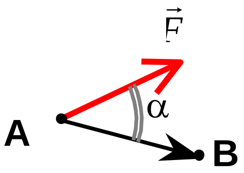
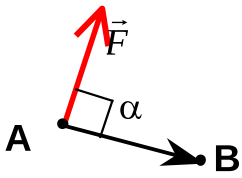
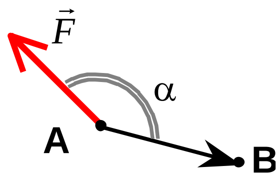


$$\boxed{W = \vec{F}.\overrightarrow{AB} = \|\vec{F}\|.\|\overrightarrow{AB}\|.\cos\alpha}$$

avec $\vec{F}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

alors $\boxed{W = X.x + Y.y + Z.z}$

L'intensité et le signe du travail dépendent de l'orientation de la force par rapport au déplacement :

		
$0 < \alpha < 90°$ force et déplacement dans le **même sens**	$\alpha = 90°$ force et déplacement **orthogonaux**	$90° < \alpha < 180°$ force et déplacement en **sens opposés**
$W > 0$ **Travail moteur**	$W = 0$ **Travail nul**	$W < 0$ **Travail résistant**

5.1.2. Travail élémentaire et puissance d'une force

Le travail élémentaire d'une force $\vec{F}$ effectuant un déplacement élémentaire $\mathrm{d}\vec{l}$ est :

$$\mathrm{d}W = \vec{F}.\mathrm{d}\vec{l}$$

La puissance instantanée développée par la force est alors :

$$P = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \vec{F}.\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}t}$$

or $\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{\mathrm{d}t} = \vec{V}$ est la vitesse instantanée du point d'application de la force, d'où :

$$\boxed{P = \vec{F}.\vec{V}}$$

5.2 Puissance d'une A.M. quelconque sur un déplacement quelconque

De façon générale, si un solide S se déplace dans un référentiel R avec un champ de vitesses $\{\mathbf{V}_{S/R}\}$ et qu'il est soumis à une A.M. extérieure $\{\tau_{ext\to S}\}$, alors la puissance développée par cette action mécanique sera égale au **comoment** du **torseur d'action mécanique** par le **torseur cinématique** :

$$\boxed{P = \{\tau_{ext\to S}\}\cdot\{\mathbf{V}_{S/R}\}}$$

$$P = {}_A\begin{Bmatrix} \vec{R}_{ext\to S} \\ \overrightarrow{M_A}(ext\to S) \end{Bmatrix} \cdot {}_A\begin{Bmatrix} \vec{\Omega}_{S/R} \\ \vec{V}_{A\in S/R} \end{Bmatrix} = \vec{R}_{ext\to S}\cdot\vec{V}_{A\in S/R} + \overrightarrow{M_A}(ext\to S)\cdot\vec{\Omega}_{S/R}$$

$$P = {}_A\begin{Bmatrix} X & L_A \\ Y & M_A \\ Z & N_A \end{Bmatrix} \cdot {}_A\begin{Bmatrix} \Omega x & Vx_A \\ \Omega y & Vy_A \\ \Omega z & Vz_A \end{Bmatrix} = X\cdot Vx_A + Y\cdot Vy_A + Z\cdot Vz_A + L_A\cdot\Omega x + M_A\cdot\Omega y + N_A\cdot\Omega z$$

5.3 Expression du travail et de la puissance dans les cas les plus simples

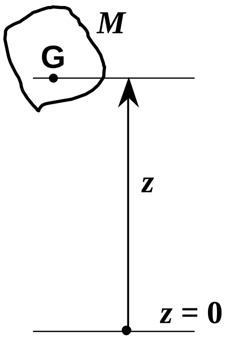
Action mécanique	Force $\vec{F}$	Couple $\vec{C}$
Mouvement	Déplacement $\vec{l}$ à vitesse $\vec{V}$ colinéaire à la force	Rotation d'angle θ à vitesse angulaire ω autour du même axe que le couple
Travail	$\boxed{W = F \cdot l}$	$\boxed{W = C \cdot \theta}$
Puissance	$\boxed{P = F \cdot V}$	$\boxed{P = C \cdot \omega}$

6 - Les différentes formes de l'énergie mécanique

6.1 Energie potentielle de pesanteur

Un corps soumis à la pesanteur acquiert de l'**énergie potentielle** (capacité à fournir de l'énergie) lorsqu'il s'élève en altitude. Il pourra par exemple restituer cette énergie en retombant au sol.

L'expression de l'**énergie potentielle de pesanteur** est alors :



$$\boxed{E_p = M.g.z}$$

avec M : masse du solide considéré (en kg)

g : accélération de la pesanteur (g =9.81 m.s^{-2})

z : altitude du centre de gravité du solide (en m)

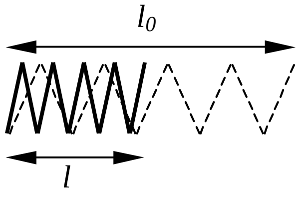
remarque : l'altitude $z = 0$ est choisie arbitrairement.

6.2 Energie potentielle élastique

Un ressort (ou autre corps élastique) qu'on comprime ou qu'on étire acquiert de l'**énergie potentielle** qu'il pourra libérer en revenant a sa position initiale.

Pour un ressort hélicoïdal, l'**énergie potentielle élastique** est :

$$\boxed{E_{élast} = \frac{k}{2} \cdot (l_0 - l)^2}$$



avec k : raideur du ressort en N/m

l_0 : longueur à vide du ressort en m

l : longueur du ressort comprimé ou tendu en m

6.3 Energie cinétique

Un solide en mouvement possède une énergie appelée **énergie cinétique**.

• Pour un solide de masse M en mouvement de **translation** avec une vitesse V, elle s'exprime de la façon suivante :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} \cdot M \cdot V^2}$$

• Pour un solide en mouvement de **rotation** autour d'un axe (Δ) avec une vitesse angulaire ω et dont le **moment d'inertie** (voir chapitre sur la dynamique) autour de (Δ) est J, elle s'exprime de la façon suivante :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2}$$

• Pour un solide en **mouvement quelconque**, l'énergie cinétique sera :

$$\boxed{E_c = \frac{1}{2} M.V_G{}^2 + \frac{1}{2} J_{\Delta G}.\omega^2}$$

avec M : masse du solide

V_G : vitesse de son centre de gravité (ou centre d'inertie)

$J_{\Delta G}$: moment d'inertie du solide autour de l'axe parallèle au vecteur rotation passant par le centre de gravité G.

ω : vitesse de rotation du solide (rad/s)

7 - Conservation de l'énergie mécanique

Si un système est isolé (pas d'échange d'énergie avec l'extérieur) alors son énergie mécanique totale reste constante :

$$\boxed{E_{méca} = E_p + E_{élast} + E_c = \text{cste}}$$

8 - Théorème de l'énergie cinétique

Dans un repère (R) galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un solide entre les dates t_1 et t_2 est égale à la somme des travaux des A.M. extérieures appliquées sur (S) entre ces 2 dates :

$$\boxed{E_{c2} - E_{c1} = W_1^2(ext \to S)}$$

En appliquant ce théorème sur un intervalle de temps élémentaire on a :

$$\boxed{\frac{dE_c}{dt} = P_{ext \to S}}$$

la puissance des A.M. extérieures est égale à la dérivée de l'énergie cinétique.

Dynamique

1 - Principe fondamental de la dynamique (P.F.D.)

C'est la **deuxième loi de Newton** (ou théorème du centre d'inertie) :

$$\Sigma \vec{F} = m \vec{a}$$

1.1 P.F.D. appliqué à un point matériel

On appelle **point matériel** un point (sans volume) affecté d'une masse.

On considère un système matériel élémentaire (S) constitué uniquement d'un point matériel M de masse m.

(S) est soumis à des A.M. extérieures modélisées par le torseur $\{\tau_{ext \to S}\}$ et il subit une accélération $\overrightarrow{a_{M \in S/R}}$ par rapport à un repère **galiléen** R (voir chapitre sur le P.F.S.).

En un point quelconque A, le principe fondamental de la dynamique (P.F.D.) s'exprime alors de la façon suivante :

$$\{\tau_{ext \to S}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ext \to S}} \\ \overrightarrow{M_{A(ext \to S)}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{a_{M \in S/R}} \\ \overrightarrow{AM} \wedge m\,\overrightarrow{a_{M \in S/R}} \end{Bmatrix}$$

1.2 P.F.D. appliqué à un système matériel

Un **système matériel** (S) quelconque de masse m peut être considéré comme une somme de points matériels de masses m_i avec $m = \sum_{(S)} m_i$

On appelle G le centre de gravité de (S).

Le P.F.D. appliqué à (S) s'exprime alors de la façon suivante en un point A quelconque :

$$\{\tau_{ext \to S}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ext \to S}} \\ \overrightarrow{M_{A(ext \to S)}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\overrightarrow{a_G} \\ \sum_{(S)}\left(\overrightarrow{AM} \wedge m\,\overrightarrow{a_{M \in S/R}}\right) \end{Bmatrix}$$

les accélérations étant comme précédemment par rapport à un référentiel galiléen.

2 - P.F.D. appliqué à un solide en mouvement de translation (rectiligne ou curviligne)

2.1 Réduction en un point A quelconque

$$\{\tau_{ext \to S}\} = {}_A\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ext \to S}} \\ \overrightarrow{M_{A(ext \to S)}} \end{Bmatrix} = {}_A\begin{Bmatrix} m\,\vec{a} \\ \overrightarrow{AG} \wedge m\,\vec{a} \end{Bmatrix}$$

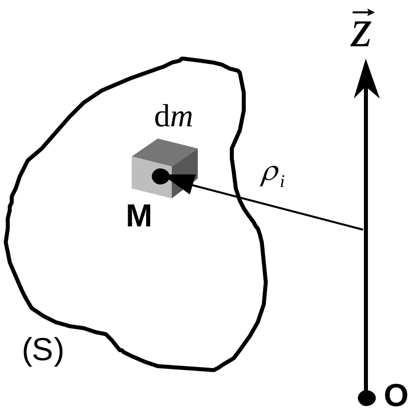
2.2 Réduction en G centre de gravité de S

$$\{\tau_{ext \to S}\} = {}_G\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ext \to S}} \\ \overrightarrow{M_{G(ext \to S)}} \end{Bmatrix} = {}_G\begin{Bmatrix} m\,\vec{a} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

3 - P.F.D. appliqué à un solide en mouvement de rotation autour d'un axe fixe de symétrie de (S)

3.1 Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe

3.1.1. définition



Soit dm la masse d'un point matériel élémentaire M appartenant à un solide (S)

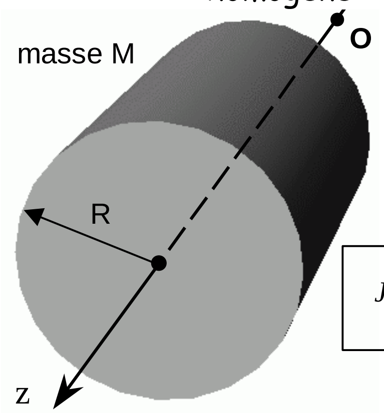
On considère un axe $(0,\vec{z})$. Soit ρ_i la distance entre M et $(0,\vec{z})$.

On appelle **moment d'inertie** J_{Oz} de (S) par rapport à l'axe $(0,\vec{z})$ le scalaire suivant :

$$\boxed{J_{Oz} = \sum_{(S)} \rho_i^{\,2}\, \mathrm{d}m}$$

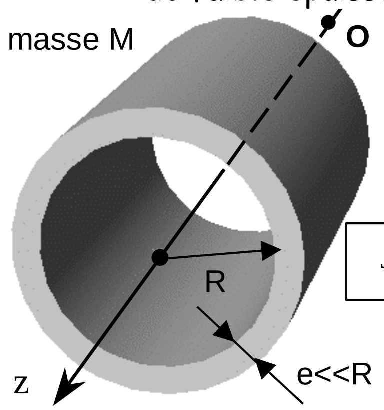
3.1.2. quelques valeurs particulières à connaître

Cylindre de révolution plein et homogène



$$\boxed{J_{Oz} = \frac{1}{2} M R^2}$$

Enveloppe cylindrique homogène de faible épaisseur



$$\boxed{J_{Oz} = M R^2}$$

3.2 P.F.D. exprimé en un point O de l'axe de rotation

$$\{\tau_{ext\to S}\} = {}_O\begin{Bmatrix} \overrightarrow{R_{ext\to S}} \\ \overrightarrow{M_{G(ext\to S)}} \end{Bmatrix} = {}_O\begin{Bmatrix} \vec{0} \\ J_{Oz}\theta''\vec{z} \end{Bmatrix}$$

θ'' est l'accélération angulaire de (S) autour de $(0,\vec{z})$.

O est un point quelconque de l'axe d rotation $(0,\vec{z})$ qui est aussi un axe de symétrie de (S).

Résistance des matériaux

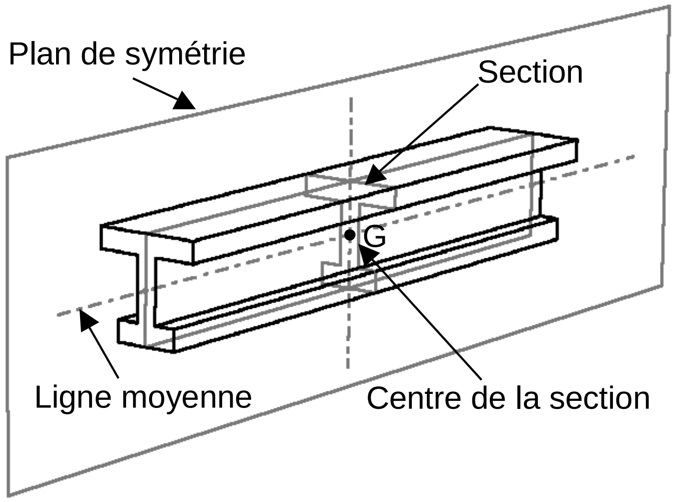
1 - Hypothèses de la R.D.M.

La résistance des matériaux (R.D.M.) se base sur un certain nombre d'hypothèses simplificatrices :

• Le **matériau** est **homogène** (pareil partout) et **isotrope** (même propriétés dans toutes les direction, ce qui n'est pas le cas des matériaux composites)

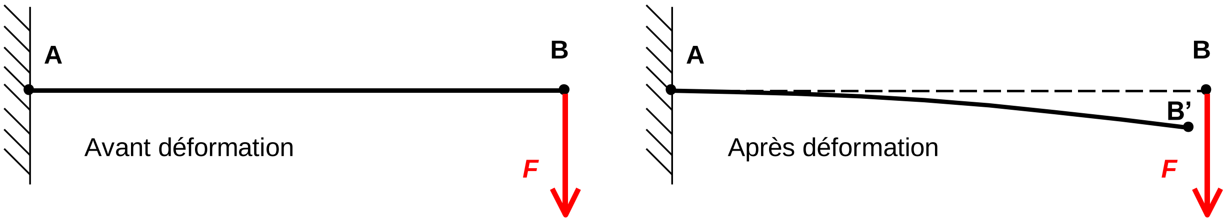
• Les **pièces** étudiées sont assimilables à des **poutres** c'est à dire :

- grande longueur par rapport aux autres dimensions
- forme droite (ou très faiblement courbée)
- section constante (ou variant très progressivement)
- existence d'un plan de symétrie dans le sens de la longueur.



• Les **actions mécaniques** sont comprises dans le plan de symétrie de la poutre ou sont symétriques par rapport à celui-ci.

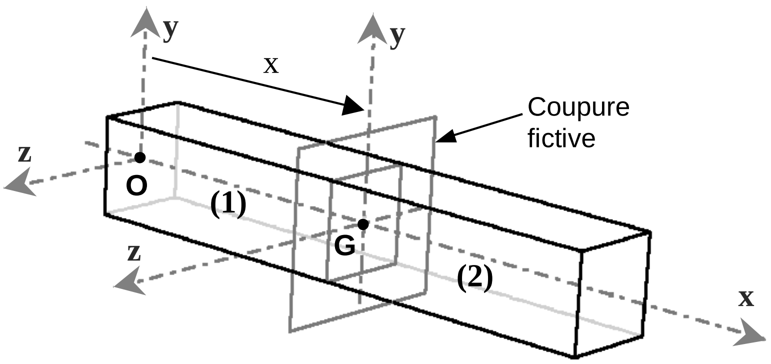
• Les **déformations** sont **faibles** donc on suppose que les points d'application des A.M. ne bougent pas après déformation.

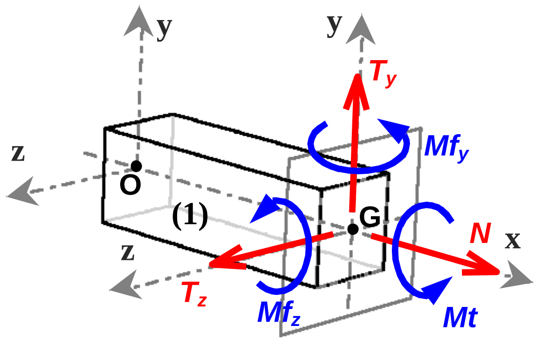


2 - Torseur de cohésion d'une poutre

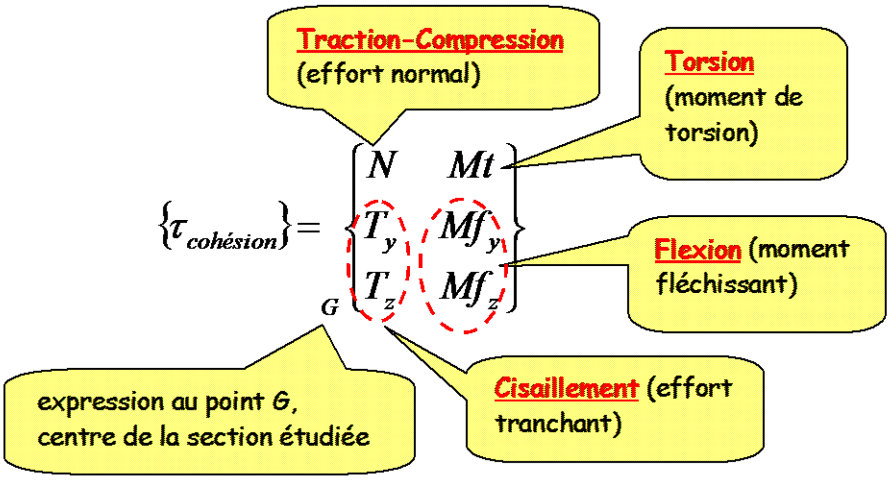
Le **torseur de cohésion** modélise l'action mécanique d'une partie de la poutre sur une autre partie de la poutre, de part et d'autre d'une coupure fictive.

C'est la somme de toutes les A.M. élémentaires qu'exercent les particules de matière (atomes, molécules) pour assurer la cohésion du matériau.





$$\{\tau_{cohésion}\} = \{\tau_{2\to1}\}$$
$$= -\{\tau_{Ext\to1}\}$$
$$= \{\tau_{Ext\to2}\}$$

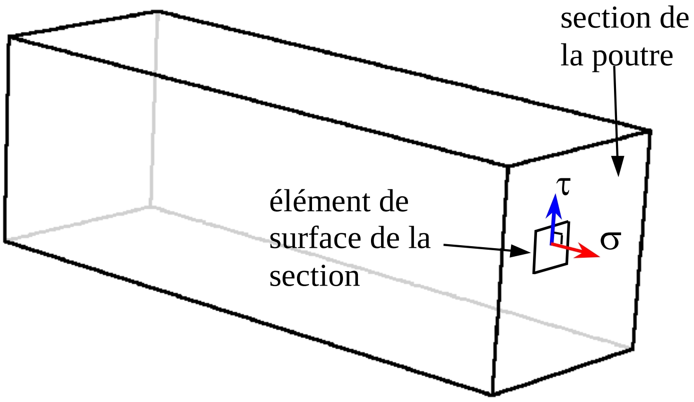


3 - Contraintes locales dans le matériau

L'A.M. de cohésion se traduit en différents points de la section étudiée par des **contraintes locales**.

Ces contraintes peuvent être de 2 types :

- contraintes **normales** σ , perpendiculaires à la section.
- contraintes **tangentielles** τ , parallèles à la section.



σ et τ s'expriment en **pascal** (Pa) ou **méga-pascal** (Mpa)

1 Pa = 1 N/m^2
1 MPa = 1 N/mm^2

4 - Caractéristiques mécaniques d'un matériau

Suivant l'intensité des contraintes qu'on lui applique le matériau à des comportements différents :

- **déformations élastiques** : le matériau se déforme sous la contrainte puis revient en position initiale lorsqu'on supprime les efforts.
- **déformations plastiques** : le matériau se déforme sous la contrainte et reste déformé lorsqu'on supprime les efforts.
- **rupture** : sous la contrainte, le matériau se rompt.

Pour caractériser chaque matériau on utilise alors les paramètres suivants :

E : **module de Young** (coefficient d'élasticité longitudinale)
G : **module de Coulomb** (coefficient d'élasticité transversale)
σ_e et τ_e : contraintes limites de comportement élastique
σ_r et τ_r : contraintes de rupture.

Exemples de valeurs (approximatives, varient en fonction des alliages et traitements) :

Matériau	E (MPa)	σ_e (MPa)	σ_r (MPa)	G (MPa)	τ_e (MPa)	τ_r (MPa)
Acier d'usage courant	200000	250	400	80000	$\sigma_e/2$	$\sigma_r/2$
Acier spéciaux	200000	400	750	80000	$\sigma_e/2$	$\sigma_r/2$
Fonte	100000	200	300	40000		σ_r
Aluminium (Duralumin)	72000	240		32000		
Béton		comp. 15 trac. 1,5				
Polyamide	1830	49				

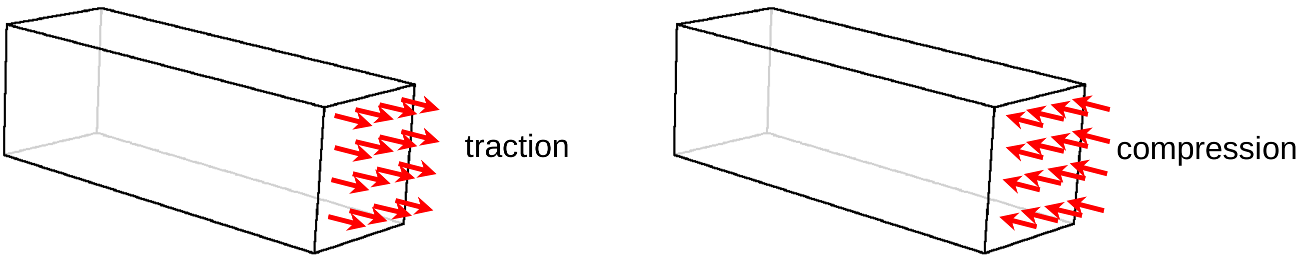
5 - Traction – Compression

5.1 Relation Sollicitation – Contrainte

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{S}}$$

N : effort normal en N
S : surface de la section en m^2

La contrainte normale engendrée est identique dans toute la section :



5.2 Loi de comportement élastique

$$\boxed{\sigma = E.\varepsilon}$$

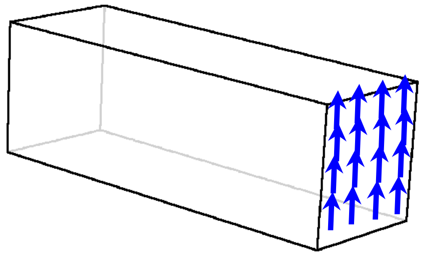
E : module de Young en Pa
$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}$: allongement relatif (sans unité)

6 - Cisaillement

6.1 Relation Sollicitation – Contrainte

$$\boxed{\tau = \frac{T}{S}}$$

T : effort tranchant en N
S : surface de la section en m^2



La contrainte tangentielle engendrée est identique dans toute la section :

6.2 Loi de comportement élastique

$$\boxed{\tau = G.\gamma}$$

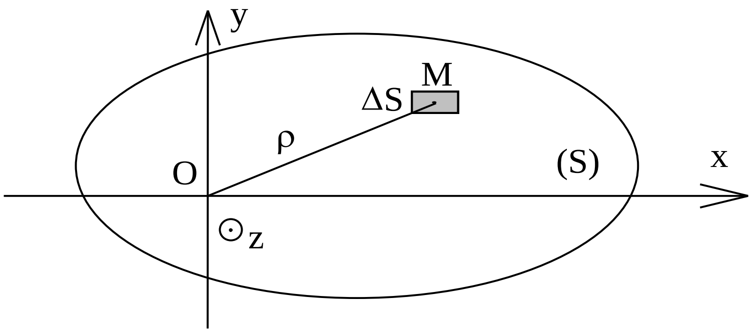
G : module de Coulomb en Pa

$\gamma = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$: glissement transversal relatif (sans unité)

7 - Torsion

7.1 Moment quadratique polaire

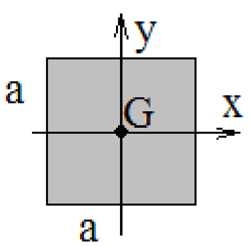
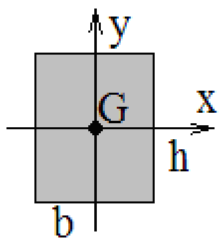
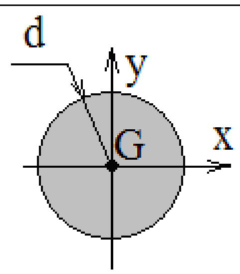
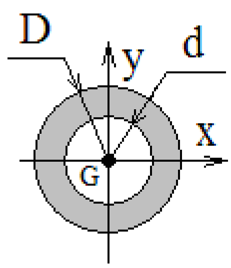
7.1.1. définition



Le **moment quadratique polaire** de la surface (S) par rapport au point O est :

$$I_o = \sum_{(S)} \rho^2 . \Delta S$$

7.1.2. quelques expressions usuelles

			
$I_G = \dfrac{a^4}{6}$	$I_G = \dfrac{bh \cdot \left(b^2 + h^2\right)}{12}$	$I_G = \dfrac{\pi \cdot d^4}{32}$	$I_G = \dfrac{\pi \cdot \left(D^4 - d^4\right)}{32}$

7.2 Relation Sollicitation – Contrainte

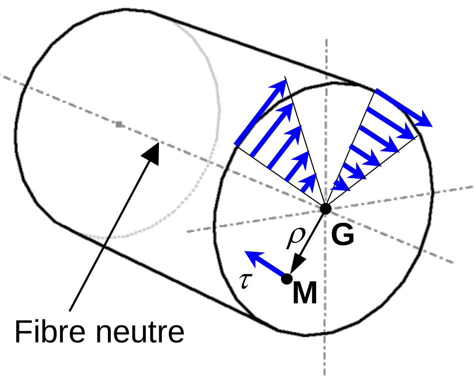
$$\boxed{\tau = \frac{Mt}{I_G} \cdot \rho}$$

M_t : moment de torsion en Nm

I_G : moment quadratique polaire de la section en m^4

ρ : distance au centre de la section en m

La contrainte tangentielle engendrée est nulle au centre de la section (fibre neutre) et est de plus en plus élevée lorsqu'on s'en éloigne.



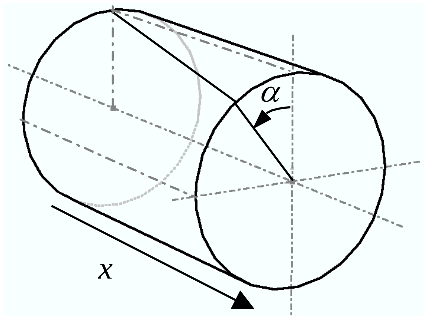
7.3 Loi de comportement élastique

$$\boxed{Mt = G \cdot \theta \cdot I_G}$$

G : module de Coulomb en Pa

$\theta = \frac{\alpha}{x}$: angle de torsion unitaire en rad/m

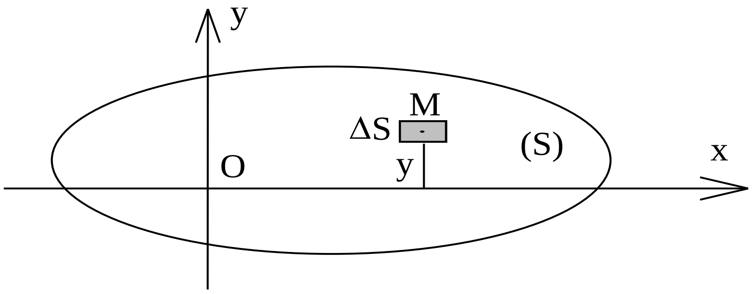
I_G : moment quadratique polaire de la section en m^4



8 - Flexion

8.1 Moment quadratique par rapport à un axe

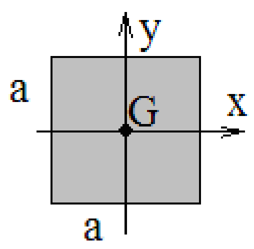
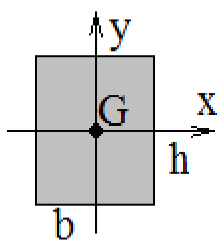
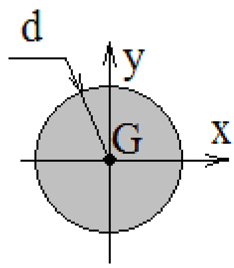
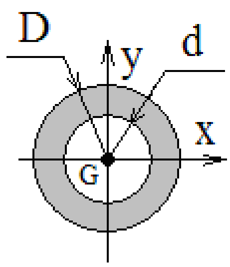
8.1.1. définition



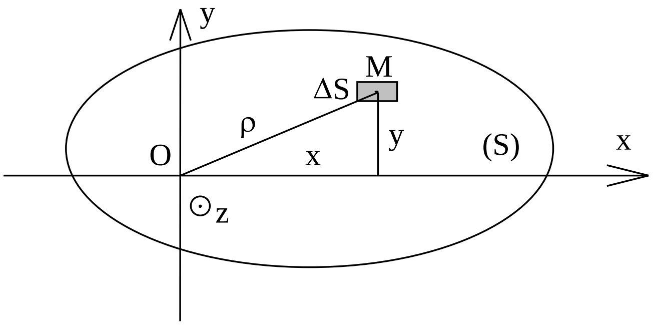
Le **moment quadratique** de la surface (S) par rapport à l'axe (Ox) est :

$$I_{Ox} = \sum_{(S)} y^2 \cdot \Delta S$$

8.1.2. quelques expressions usuelles

			
$I_{Gx} = I_{Gy} = \frac{a^4}{12}$	$I_{Gx} = \frac{bh^3}{12}$ $I_{Gy} = \frac{hb^3}{12}$	$I_{Gx} = I_{Gy} = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$	$I_{Gx} = I_{Gy} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{64}$

8.1.3. relation entre moment quadratique polaire et axial



On a : $\rho^2 = x^2 + y^2$

donc : $I_O = \sum_{(S)} \rho^2.\Delta S = \sum_{(S)} x^2.\Delta S + \sum_{(S)} y^2.\Delta S$

d'où : $\boxed{I_O = I_{Ox} + I_{Oy}}$

8.2 Relation Sollicitation – Contrainte

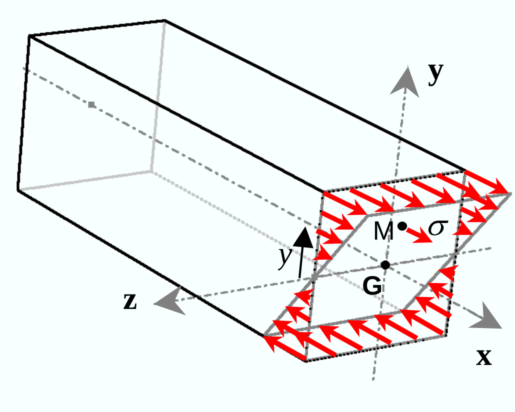
$$\boxed{\sigma = -\frac{Mf_z}{I_{Gz}} \cdot y}$$

Mf_z : moment de flexion en Nm

I_{Gz} : moment quadratique de la section par rapport à l'axe (Gz) en m^4

y : distance par rapport à l'axe (Gz) en m

La contrainte normale engendrée est nulle le long de l'axe (Gz) (fibre neutre) et est de plus en plus élevée lorsqu'on s'en éloigne.



8.3 Loi de comportement élastique

$$\boxed{Mf_z = E \cdot I_{Gz} \cdot f''}$$

Mf_z : moment de flexion en Nm

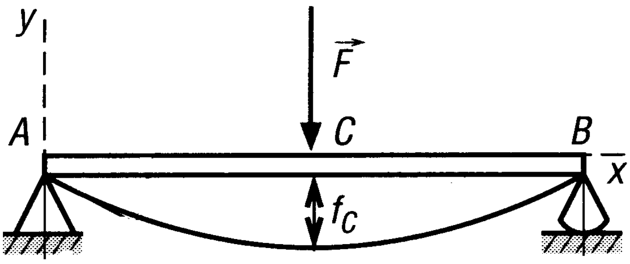
E : module de Young en Pa

I_{Gz} : moment quadratique par rapport à l'axe z de la section en m^4

f : flèche (écart verticale par rapport à la position sans sollicitation) en m

f'' : dérivée seconde de la flèche par rapport à l'abscisse x

Pour obtenir l'expression de la flèche, on intègre 2 fois la formule précédente. Les constantes qui apparaissent lors des intégrations sont déterminées grâce aux conditions aux limites.



Mécanique des fluides

1 - Hypothèses

Tous les fluides que nous étudierons seront considérés comme incompressible, c'est à dire que leur masse volumique reste constante :

$\rho = \dfrac{m}{V} = constante$ avec m : masse en kg V : volume en m^3
ρ : masse volumique en kg/m^3

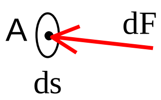
Les liquides comme l'eau ou l'huile pourront être considérés comme des fluides incompressibles. Les gaz comme l'air ne pourront pas être considérés comme des fluides incompressibles.

2 - Statique des fluides (hydrostatique)

2.1 Pression d'un fluide

2.1.1. définition

La pression en un point quelconque d'un fluide caractérise la force élémentaire exercée sur une surface élémentaire de fluide :



$p = \dfrac{dF}{dS}$ avec dF force élémentaire en N
dS surface élémentaire en m^2
p pression en Pa (ou N/m^2)

2.1.2. unités usuelles

L'unité légale est le **pascal** : $1\ Pa = 1\ N/m^2$
mais on rencontre souvent :

- le **mégapascal** : $1\ MPa = 1\ N/mm^2$
- le **bar** : $1\ bar \approx 10^5\ Pa \approx 0{,}1\ MPa \approx 0{,}1\ daN/cm^2$

1 bar équivaut à la pression atmosphérique terrestre au niveau de la mer.

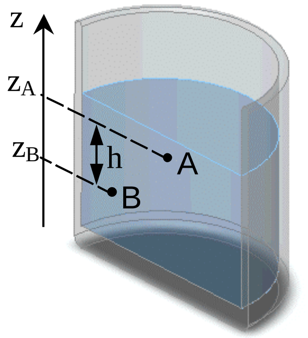
2.1.3. pression relative (ou effective)

C'est la pression couramment indiquée par les appareils de mesure. C'est la différence entre la pression absolue (réelle) et la pression atmosphérique :

$$p_{eff} = p_{réelle} - p_0$$

La pression d'un pneumatique d'automobile s'exprime par exemple en pression relative.

2.2 Pression dans un fluide soumis à l'attraction terrestre



Considérons 2 points A et B dans un fluide à des altitudes différentes z_A et z_B. Les pressions p_A et p_B respectivement au point A et B sont alors liées par la relation suivante :

$$p_A - p_B = \rho \cdot g \cdot (z_B - z_A)$$

ou $\boxed{\Delta p = \rho \cdot g \cdot h}$

avec ρ : masse volumique du fluide en $\mathrm{kg/m^3}$
$g = 9{,}81 \approx 10\,\mathrm{m.s^{-2}}$: accélération de la pesanteur

2.3 Théorème de Pascal

Toute variation de pression en un point d'un fluide au repos entraîne la même variation de pression en tout point du fluide.

3 - Ecoulement permanent

3.1 Débit d'un fluide dans une conduite

3.1.1. débit volumique

$\boxed{q_V = S \cdot \mathrm{v}}$

avec S : section de la conduite en $\mathrm{m^2}$
v : vitesse (ou célérité) du fluide dans la conduite en $\mathrm{m/s}$
q_V : débit volumique en $\mathrm{m^3/s}$

3.1.2. débit massique

$\boxed{q_m = \rho \cdot q_V}$

avec ρ : masse volumique du fluide en $\mathrm{kg/m^3}$
q_V : débit volumique en $\mathrm{m^3/s}$
q_m : débit massique en $\mathrm{kg/s}$

3.2 Caractéristiques d'un écoulement – nombre de Renolds

Le nombre de Renolds permet de caractériser un écoulement. Il s'exprime de la façon suivante :

$\boxed{R = \dfrac{\mathrm{v}.d}{\nu}}$

avec v : vitesse (ou célérité) du fluide dans la conduite en $\mathrm{m/s}$
d : diamètre de la conduite en m
ν : viscosité cinématique du fluide en $\mathrm{m^2/s}$
(unité courante : le stocke : $1\ \mathrm{St} = 10^{-3}\ \mathrm{m^2/s}$)

- $R < 2000$ → écoulement **laminaire**
- $2000 < R < 10^5$ → écoulement **turbulent lisse**
- $R > 10^5$ → écoulement **turbulent rugueux**

3.3 Pertes de charge

On appelle pertes de charge J l'énergie perdue par unité de masse d'un fluide. Elle s'exprime en $\mathrm{J/kg}$ et son signe est toujours négatif (perte d'énergie).

3.3.1. Pertes de charge régulières

C'est l'énergie perdue par frottement entre les filets de fluide (viscosité) et contre les parois :

$$\boxed{J = -\lambda \frac{\mathrm{v}^2}{2} \cdot \frac{l}{d}}$$

avec λ : coefficient de pertes de charge (sans unité)
l : longueur de la conduite considérée en m

- écoulement laminaire → $\lambda = \dfrac{64}{R}$ (Poiseuille)
- écoulement turbulent lisse → $\lambda = 0{,}316 R^{-0{,}25}$ (Blasius)
- écoulement turbulent rugueux → $\lambda = 0{,}79\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{d}}$ (Blench)

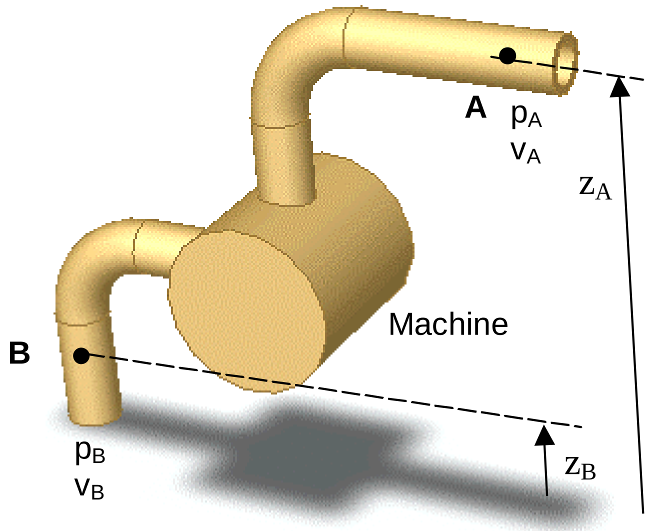
3.3.2. Pertes de charge singulières

C'est l'énergie perdue par les turbulences des filets de fluides dans les variations brusques de section, coudes, etc. :

$$\boxed{J = -\xi \frac{\mathrm{v}^2}{2}}$$

avec ξ : coefficient caractéristique de « l'accident » de section (sans unité, valeurs données dans des tableaux)

3.4 Théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie)



L'énergie mécanique totale d'un fluide devant rester constante, la variation totale d'énergie par unité de masse entre 2 points d'un circuit hydraulique doit rester nulle (en $\mathrm{J/kg}$) :

Energie fournie ou prélevée par une machine ($\Delta W > 0$ pour une pompe, $\Delta W < 0$ pour une turbine)

$$\Delta W + J = \frac{\Delta p}{\rho} + \frac{\Delta\left(\mathrm{v}^2\right)}{2} + g \cdot \Delta z$$

Variation d'énergie potentielle de pesanteur

Pertes de charge régulières ou singulières ($J < 0$)

Variation d'énergie due à la pression

Variation d'énergie cinétique

En multipliant par la masse de fluide m déplacée, on obtient une équation d'énergie en joule (J) :

$$\Delta W + J = Vol \cdot \Delta p + \frac{1}{2} m \cdot \Delta\left(\mathrm{v}^2\right) + m \cdot g \cdot \Delta z$$

En multipliant par la masse volumique ρ, on obtient une équation de pression en pascal (Pa).

$$\Delta W + J = \Delta p + \frac{\rho}{2} \Delta\left(\mathrm{v}^2\right) + \rho \cdot g \cdot \Delta z$$

En divisant par l'accélération de la pesanteur g, on obtient une équation en hauteur de liquide en mètres :

$$\Delta W + J = \frac{\Delta p}{\rho \cdot g} + \frac{\Delta\left(\mathrm{v}^2\right)}{2g} + \Delta z$$