CURSO DE NIVELACIÓN

Apunte teórico - práctico

Módulo 5: Trigonometría

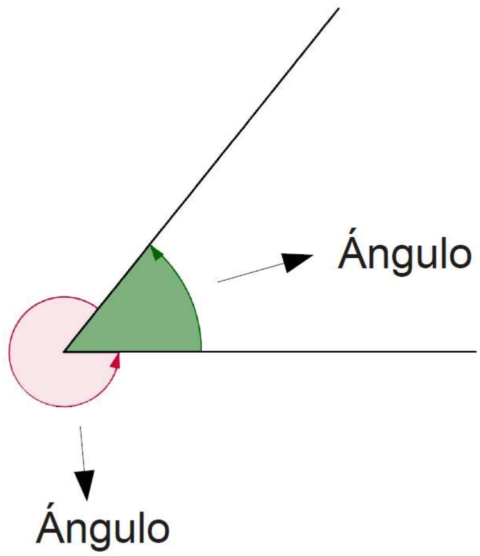
Facultad de Ciencias Astronómicas y Geofísicas
UNIVERSIDAD NACIONAL DE LA PLATA

TRIGONOMETRÍA

En este capítulo trabajaremos con las funciones trigonométricas, que son funciones no algebraicas. Pero para poder entender cómo se definen, primero debemos introducir la idea de ángulo y sus sistemas de medición.

Ángulos y sistemas de medición

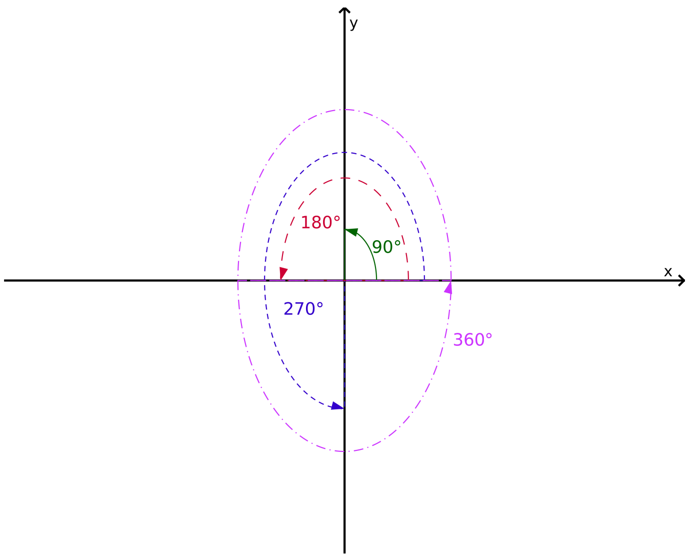
Se denomina ángulo a la sección del plano que queda comprendida entre dos semirrectas que se que se originan en un mismo punto, y están colocadas en distintas direcciones. El punto en que se inician las semirrectas se denomina vértice del ángulo; en tanto que cada una de las semirrectas que lo delimitan, se denominan lados del ángulo.



Se define que **un ángulo es positivo cuando se mide en el sentido contrario a las agujas del reloj** (también llamado sentido antihorario, sentido levógiro o sentido directo), y por lo tanto **es negativo si se mide en sentido contrario, es decir, en el mismo sentido que las agujas del reloj** (sentido horario, sentido dextrógiro o indirecto). **En un sistema de ejes cartesianos, se toma por convención que, los ángulos se miden desde el eje positivo de las abscisas en sentido contrario a las agujas del reloj.** En general los ángulos se denotan con letras griegas.

Existen distintos sistemas de medición de ángulos (de manera análoga a la que existen distintos sistemas para medir, por ejemplo, distancias: millas, kilómetros, leguas, etc.). Los sistemas que veremos en este curso serán el sistema sexagesimal, el sistema horario y el sistema circular.

Sistema sexagesimal En este sistema una vuelta completa equivale a 360 grados. Esto se denota: $360°$. Luego, $\frac{3}{4}$ de vuelta equivale a $270°$, $\frac{1}{2}$ de vuelta equivale a $180°$ y $\frac{1}{4}$ de vuelta equivale a $90°$.



Las fracciones de grado son los minutos y los segundos, esto quiere decir que: un grado equivale a 60 minutos, $1^\circ \equiv 60'$, y 1 minuto equivale a 60 segundos, $1' \equiv 60''$. De este modo podemos escribir un ángulo de dos formas equivalentes: como fracción de grado o lo podemos expresar en grados, minutos y segundos.

Ejemplo: *Supongamos que queremos escribir el ángulo* $\alpha = 42^\circ\, 30'\, 15''$ *como fracción de grado. Para hacer esto tenemos que ver a cuántos grados equivalen* $30'\, 15''$*. Entonces, utilizando las equivalencias dadas anteriormente tenemos que:*

$$\begin{aligned} 60'' &\equiv 1' \\ 15'' &\equiv x \Longrightarrow x = \frac{15''\,.\,1'}{60''} = 0.'25 \end{aligned}$$

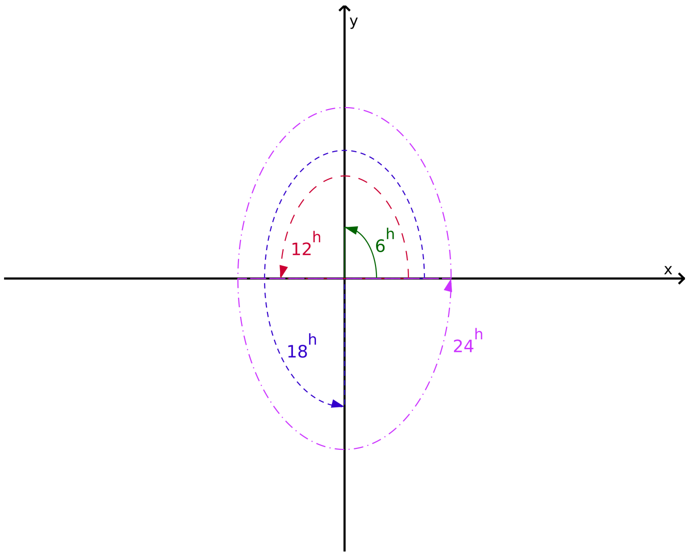
Así encontramos que $15'' \equiv 0.'25$*. Ahora tenemos que* $\alpha = 42^\circ\, 30.'25$*. Finalmente, para pasar de minutos a fracción de grado hacemos el mismo procedimiento que realizamos recién:*

$$\begin{aligned} 60' &\equiv 1^\circ \\ 30.'25 &\equiv x \Longrightarrow x = \frac{30.'25\,.\,1^\circ}{60'} = 0.^\circ 5041\hat{6} \end{aligned}$$

De este modo encontramos que $\alpha = 42^\circ\, 30'\, 15'' = 42.^\circ 5041\hat{6}$*.*

Es importante recordar que cuando estemos trabajando en estas unidades la calculadora debe estar en la función deg (degree, que quiere decir grado en inglés).

Sistema horario En este sistema una vuelta completa equivale a 24 horas. Esto se denota: 24^{h}. Luego, $\frac{3}{4}$ de vuelta equivale a 18^{h}, $\frac{1}{2}$ de vuelta equivale a 12^{h} y $\frac{1}{4}$ de vuelta equivale a 6^{h}.

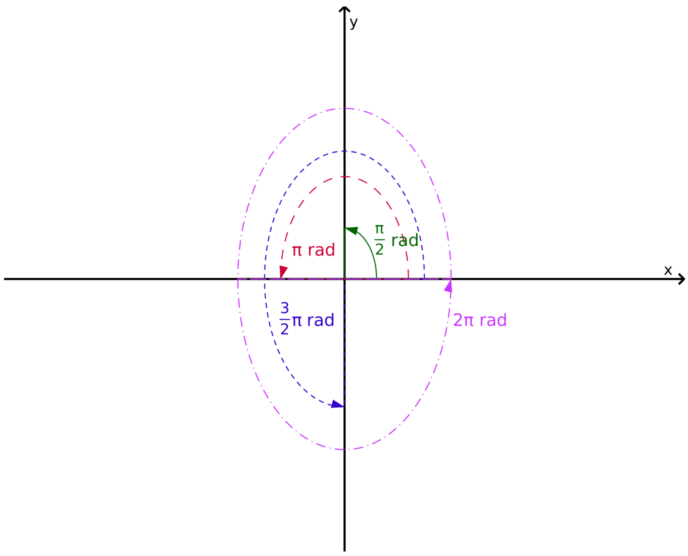


Las fracciones de hora también son los minutos y los segundos, esto quiere decir que: una hora equivale a 60 minutos, $1^{\mathrm{h}} \equiv 60^{\mathrm{m}}$, y 1 minuto equivale a 60 segundos, $1^{\mathrm{m}} \equiv 60^{\mathrm{s}}$. De este modo podemos escribir un ángulo de dos formas equivalentes: como fracción de hora o lo podemos expresar en horas, minutos y segundos.

Ejemplo: *Supongamos que queremos escribir el ángulo* $\alpha = 42^{\mathrm{h}}\,30^{\mathrm{m}}\,15^{\mathrm{s}}$ *como fracción de hora. Utilizando el mismo procedimiento que en el ejemplo del sistema sexagesimal obtenemos que* $\alpha = 42^{\mathrm{h}}\,30^{\mathrm{m}}\,15^{\mathrm{s}} = 42.^{\mathrm{h}}5041\hat{6}$.

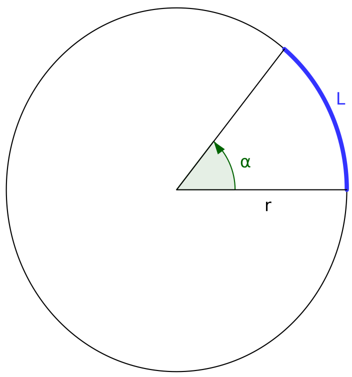
Para este caso las calculadoras no tienen una función específica, pero como las fracciones de hora y de grado son equivalentes, ***para trabajar en este sistema la calculadora debe estar en la función deg****. La diferencia estará en que si estamos trabajando en el sistema horario un ángulo de* 25^{h} *equivale a un día y una hora,* $25^{\mathrm{h}} \equiv 1^{\mathrm{d}}\,1^{\mathrm{h}}$*, mientras que en el sistema sexagesimal un ángulo de* $361°$ *equivale a una vuelta y un grado (pero el ángulo se sigue escribiendo como* $361°$*).*

Sistema circular En este sistema una vuelta completa equivale a 2π radianes. Esto se denota: 2π ó 2π rad. En general en este sistema no se escribe la unidad, es decir que un ángulo de 2π radianes se expresa como 2π. Los radianes se escriben como un número real, las fracciones de radianes no tienen una notación particular.



Es importante recordar que cuando estemos trabajando en estas unidades la calculadora debe estar en la función rad (radianes).

Para definir cuánto mide un radián primero debemos definir la longitud de arco. Se define **la longitud de arco, *L*, como un tramo de la longitud total de la circunferencia.**[1]



[1] La historia del número pi y su significado lo pueden ver aquí. (http://www.youtube.com/watch?v=zbRP2OJ99Ek)

Para calcular esta longitud hacemos el siguiente razonamiento: si una vuelta completa, es decir un ángulo de 2π radianes equivale a la longitud total de la circunferencia, $2\pi r$, entonces un ángulo α equivale a una longitud L. Por lo tanto:

$$\frac{2\,\pi}{\alpha} = \frac{2\,\pi\,r}{L}$$

Despejando L obtenemos que:

$$\boxed{L = \alpha\,r} \tag{1}$$

De aquí podemos definir cuánto mide un radián. **Un radián se define como el ángulo para el cual la longitud de arco, L, es igual al radio, r, de la circunferencia.**

Conversión entre sistemas

Para pasar de un sistema de medición a otro se utilizan las equivalencias entre los valores para un mismo ángulo en los distintos sistemas. De las tres figuras anteriores se puede ver que:

$$\begin{aligned}
90^\circ &\equiv 6^h \equiv \frac{\pi}{2} \\
180^\circ &\equiv 12^h \equiv \pi \\
270^\circ &\equiv 18^h \equiv \frac{3}{2}\,\pi \\
360^\circ &\equiv 24^h \equiv 2\,\pi
\end{aligned}$$

Ejemplo: *Supongamos que queremos pasar del sistema sexagesimal al sistema horario el ángulo* $\alpha = 42^\circ\, 30'\, 15''$. *Lo primero que hay que hacer es escribir el ángulo en fracción de grado. Esto nos había dado que* $\alpha = 42^\circ\, 30'\, 15'' \,=\, 42.^\circ 5041\hat{6}$. *Luego para pasar al sistema horario utilizamos, por ejemplo la equivalencia* $180^\circ \,\equiv\, 12^{\mathrm{h}}$. *Entonces,*

$$\begin{aligned} 180^\circ &\equiv 12^{\mathrm{h}} \\ 42.^\circ 5041\hat{6} &\equiv x \Longrightarrow x = \frac{42.^\circ 5041\hat{6}\,.\,12^{\mathrm{h}}}{180^\circ} = 2.^{\mathrm{h}}8336\hat{1} \end{aligned}$$

Para escribir el ángulo en horas, minutos y segundos hacemos el proceso inverso al que hicimos anteriormente.

Primero pasamos a minutos:

$$\begin{aligned} 1^{\mathrm{h}} &\equiv 60^{\mathrm{m}} \\ 0.^{\mathrm{h}}8336\hat{1} &\equiv x \Longrightarrow x = \frac{0.^{\mathrm{h}}8336\hat{1}\,.\,60^{\mathrm{m}}}{1^{\mathrm{h}}} = 50.^{\mathrm{m}}01\hat{6} \end{aligned}$$

Y la fracción de minutos la pasamos a segundos:

$$\begin{aligned} 1^{\mathrm{m}} &\equiv 60^{\mathrm{s}} \\ 0.^{\mathrm{m}}01\hat{6} &\equiv x \Longrightarrow x = \frac{0.^{\mathrm{m}}1\hat{6}\,.\,60^{\mathrm{s}}}{1^{\mathrm{m}}} = 1^{\mathrm{s}} \end{aligned}$$

Finalmente, obtuvimos que $\alpha = 42^\circ\, 30'\, 15'' \,=\, 2^{\mathrm{h}}\, 50^{\mathrm{m}}\, 1^{\mathrm{s}}$.

Supongamos ahora que queremos pasar al sistema circular. De forma análoga tenemos que si $\alpha = 2^{\mathrm{h}}\, 50^{\mathrm{m}}\, 1^{\mathrm{s}} \,=\, 2.^{\mathrm{h}}8336\hat{1}$ *entonces para cambiar de sistema hacemos lo siguiente:*

$$\begin{aligned} 24^{\mathrm{h}} &\equiv 2\,\pi \\ 2.^{\mathrm{h}}8336\hat{1} &\equiv x \Longrightarrow x = \frac{2.^{\mathrm{h}}8336\hat{1}\,.\,2\,\pi}{24^{\mathrm{h}}} = 0{,}741837654 \end{aligned}$$

Por lo tanto $\alpha = 42^\circ\, 30'\, 15'' \,=\, 2^{\mathrm{h}}\, 50^{\mathrm{m}}\, 1^{\mathrm{s}} \,=\, 0{,}741837654$.

Ejercicio

Escribe verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

a) $15^\circ\, 24' \,=\, 924^{\mathrm{m}}$

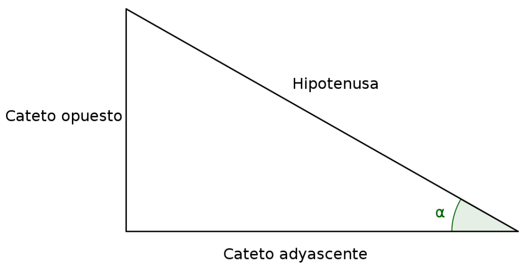
b) $162.^\circ 5 \,=\, 132^\circ\, 5'$

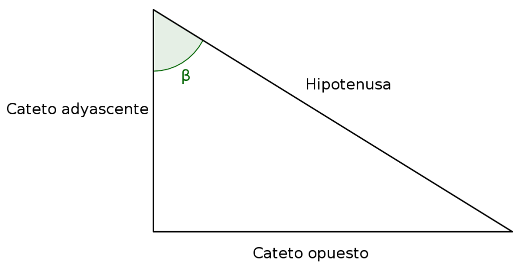
c) $\dfrac{5}{4}\,\pi \,=\, 225^\circ$

Funciones trigonométricas

Una primera manera de definir las funciones trigonométricas es a partir de un triángulo rectángulo.

Un triángulo rectángulo es aquél que tiene un ángulo recto como uno de sus ángulos interiores. En este caso, **los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos, y el tercer lado es la hipotenusa. Si uno toma un ángulo interior, que no sea el ángulo recto, entonces el cateto que forma dicho ángulo será el cateto adyacente, mientras que el otro será el cateto opuesto.**

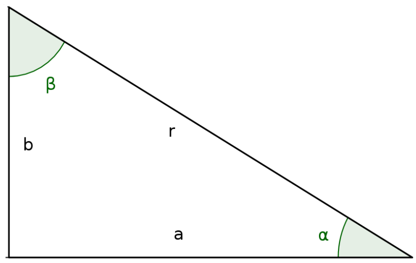




Las funciones trigonométricas son el seno, sen; el coseno, cos, y la tangente, tan y se definen como:

$$\begin{aligned}\text{sen } \alpha &= \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}}\\ \cos \alpha &= \frac{\text{Cateto adyascente}}{\text{Hipotenusa}}\\ \tan \alpha &= \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyascente}}\end{aligned}$$

Entonces en el triángulo, de la figura siguiente, formado por los lados r, a y b, las funciones trigonométricas serán:



$$
\begin{aligned}
\text{sen } \alpha &= \frac{b}{r} & \text{sen } \beta &= \frac{a}{r} \\
\cos \alpha &= \frac{a}{r} & \cos \beta &= \frac{b}{r} \\
\tan \alpha &= \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{b}{a} & \tan \beta &= \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} = \frac{a}{b}
\end{aligned}
$$

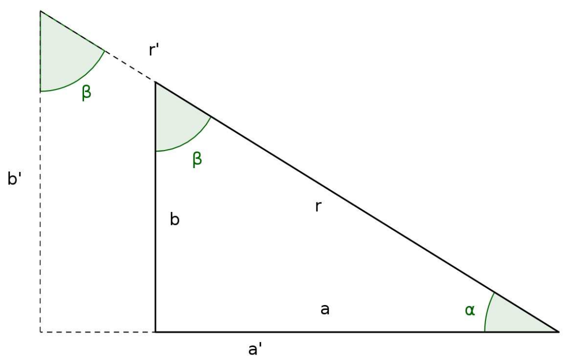
El teorema de Pitágoras (que demostraremos más a delante) dice que $r^2 = a^2 + b^2$. De aquí se tiene que $r^2 \geq a^2$ y $r^2 \geq b^2$. Aplicando raíz cuadrada en ambos miembros obtenemos que $r \geq a$ y $r \geq b$. Luego $1 \geq |\frac{a}{r}|$ y $1 \geq |\frac{b}{r}|$. Finalmente, teniendo en cuenta que $\cos \alpha = \text{sen } \beta = \frac{a}{r}$ y $\text{sen } \alpha = \cos \beta = \frac{b}{r}$ resulta que:

$$
\begin{aligned}
|\cos \alpha| = |\text{sen } \beta| \leq 1 \\
|\text{sen } \alpha| = |\cos \beta| \leq 1
\end{aligned}
$$

De este resultado se puede decir que para cualquier ángulo, α, tenemos que:

$$
\boxed{\begin{array}{c} -1 \leq \text{sen}\, \alpha \leq 1 \\ -1 \leq \cos \alpha \leq 1 \end{array}} \tag{2}
$$

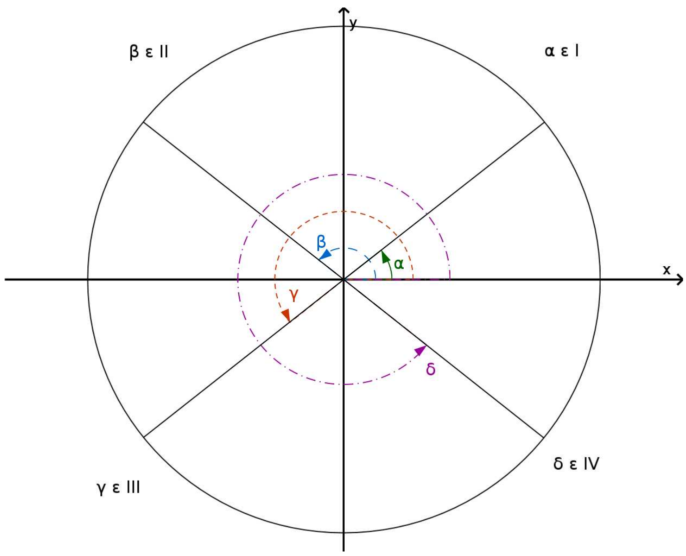
Si ahora agrandamos el triángulo sin modificar sus ángulos interiores, por ejemplo el triángulo formado por los lados r', a' y b', resulta que



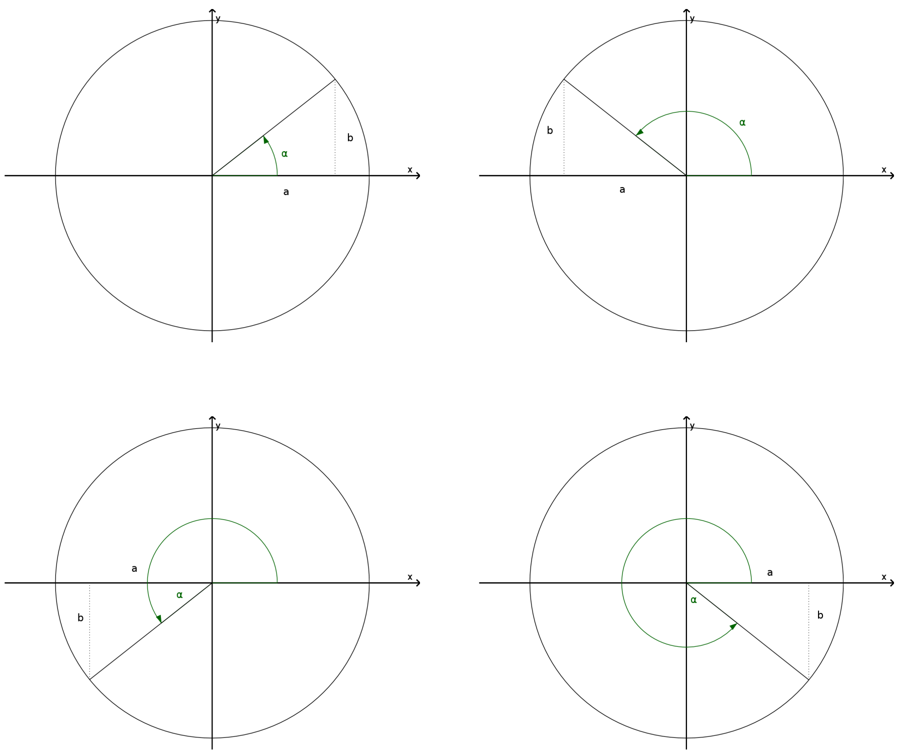
$$
\begin{aligned}
\text{sen}\ \alpha &= \frac{b}{r} = \frac{b'}{r'} & \text{sen}\ \beta &= \frac{a}{r} = \frac{a'}{r'} \\
\cos\ \alpha &= \frac{a}{r} = \frac{a'}{r'} & \cos\ \beta &= \frac{b}{r} = \frac{b'}{r'} \\
\tan\ \alpha &= \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} & \tan\ \beta &= \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}
\end{aligned}
$$

Esto significa que el valor de las funciones trigonométricas dependen del ángulo y no del tamaño del triángulo. Por lo tanto podemos deshacernos del triángulo y extender las funciones trigonométricas a todos los ángulos (y no restringirnos a los ángulos menores que 180° solamente como veníamos haciendo). Entonces ahora vamos a trabajar en lo que se llama la **circunferencia trigonométrica**, que **es una circunferencia de radio unidad cuyo centro coincide con el origen del sistema de coordenadas cartesiano.**

En el sistema de ejes cartesianos, el plano $x\,y$ se divide en 4 cuadrantes: el primer cuadrante corresponde al semiplano en el cual x e y son positivos; en el segundo cuadrante $x < 0$ e $y > 0$; en el tercer cuadrante x e y son negativos, y en el cuarto cuadrante $x > 0$ e $y < 0$. Estos cuadrantes se denotan con números romanos. Con este criterio y teniendo en cuenta que los ángulos positivos se miden desde el eje positivo de las abscisas y en sentido antihorario tendremos que un ángulo pertenece al primer cuadrante si está entre 0 y $\pi/2$, pertenece al segundo cuadrante si está entre $\pi/2$ y π, pertenece al tercer cuadrante si está entre π y $(3/2)\pi$; y pertenece al cuarto cuadrante si está entre $(3/2)\pi$ y 2π.



Para calcular el valor de las funciones trigonométricas en la circunferencia, lo que se hace es asociarle un triángulo rectángulo a cada ángulo. Este triángulo se construye trazando un segmento paralelo al eje de la ordenadas desde el punto de intersección entre el lado del ángulo y la circunferencia, hasta el eje de la abscisas. Entonces:



$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{1} = b \quad \cos \alpha = \frac{a}{1} = a \quad \tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{b}{a}$$

Como estamos en un sistema de ejes cartesianos tendremos que:

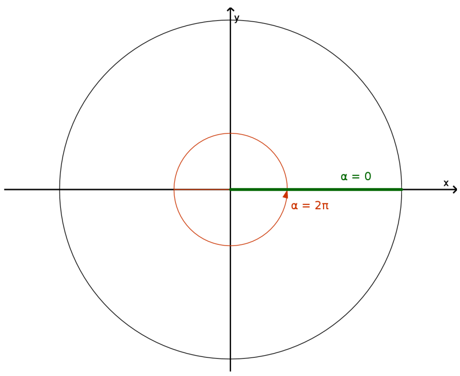
$$\alpha \in \mathrm{I} \Longrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\,\alpha > 0 \\ \mathrm{sen}\,\alpha > 0 \end{cases} \Longrightarrow \tan\,\alpha > 0$$

$$\alpha \in \mathrm{II} \Longrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\,\alpha < 0 \\ \mathrm{sen}\,\alpha > 0 \end{cases} \Longrightarrow \tan\,\alpha < 0$$

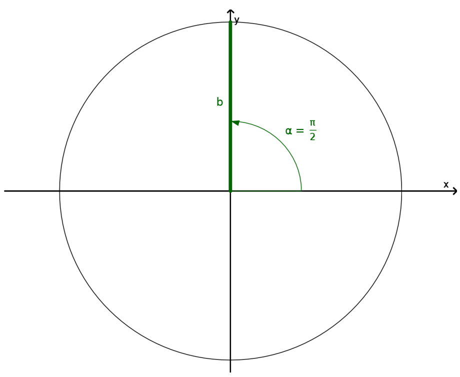
$$\alpha \in \mathrm{III} \Longrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\,\alpha < 0 \\ \mathrm{sen}\,\alpha < 0 \end{cases} \Longrightarrow \tan\,\alpha > 0$$

$$\alpha \in \mathrm{IV} \Longrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \cos\,\alpha > 0 \\ \mathrm{sen}\,\alpha < 0 \end{cases} \Longrightarrow \tan\,\alpha < 0$$

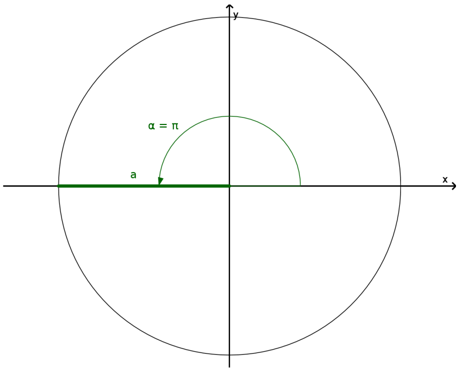
Para los extremos de los cuadrantes la funciones trigonométricas son:



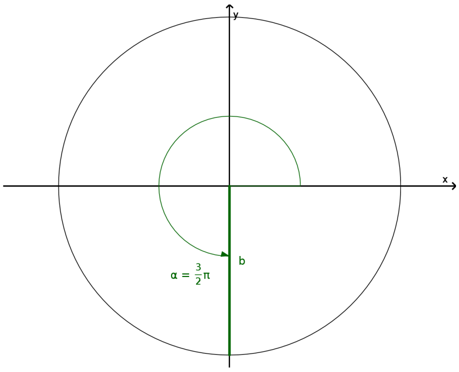
$$\begin{matrix} \alpha = 0 \\ \alpha = 2\,\pi \end{matrix} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{sen}\,\alpha = 0 \\ \cos\,\alpha = 1 \end{cases} \Longrightarrow \tan\,\alpha = 0$$



$$\alpha = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow \begin{cases} \mathrm{sen}\,\alpha = 1 \\ \cos\,\alpha = 0 \end{cases} \Longrightarrow \nexists\, \tan\,\alpha$$



$$\alpha = \pi \Longrightarrow \begin{cases} \text{sen}\ \alpha = 0 \\ \cos\ \alpha = -1 \end{cases} \Longrightarrow \tan\ \alpha = 0$$

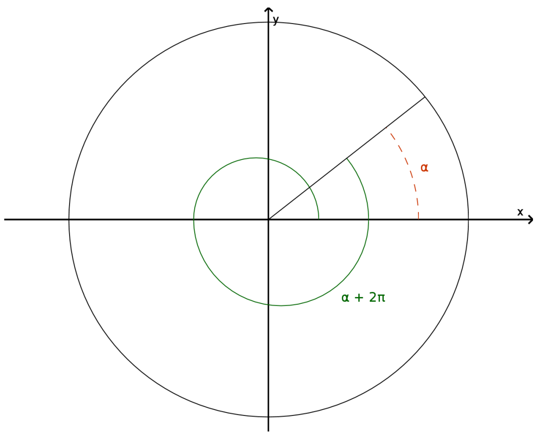


$$\alpha = \frac{3}{2}\pi \Longrightarrow \begin{cases} \text{sen}\ \alpha = -1 \\ \cos\ \alpha = 0 \end{cases} \Longrightarrow \nexists \tan\ \alpha$$

ATENCIÓN

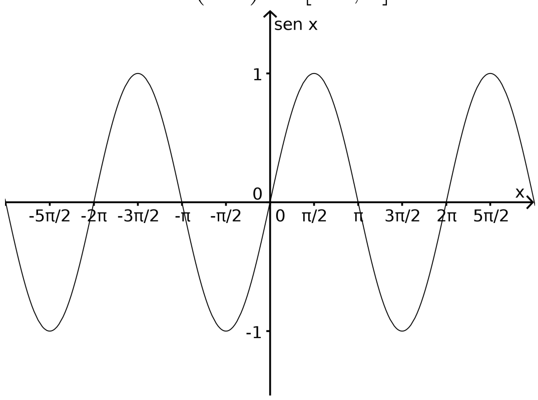
Los ángulos pueden ser mayores a $2\,\pi$, esto significa que los ángulos pueden dar una o varias vueltas. Por ejemplo, **el ángulo α y el ángulo $\beta_1 = \alpha + 2\,\pi$, son ángulos distintos pero los valores de sus funciones trigonométricas son iguales porque caen en el mismo lugar en la circunferencia trigonométrica.**
Lo mismo sucede si damos dos vueltas, $\beta_2 = \alpha + 2\,(2\,\pi)$, o tres vueltas, $\beta_3 = \alpha + 3\,(2\,\pi)$, o si damos una cantidad de vueltas tan grande como se quiera. Entonces, resulta que

$$\forall\, k \in \mathbb{Z} \begin{cases} \text{sen}\ \alpha &=& \text{sen}\,(\alpha + 2\,k\,\pi) \\ \cos\ \alpha &=& \cos\,(\alpha + 2\,k\,\pi) \\ \tan\ \alpha &=& \tan\,(\alpha + 2\,k\,\pi) \end{cases}$$

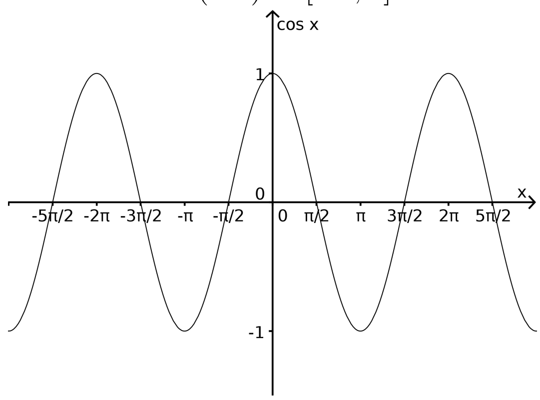


Es importante resaltar que el dominio de las funciones trigonométricas seno y coseno son números reales que representan ángulos. Sin embargo, la imagen tanto del seno como del coseno son los números reales que están entre -1 y 1, es decir, $Im(\text{sen}) = Im(\cos) = [-1, 1]$. Mientras que el dominio de la tangente son todos los números reales excepto los números $(\pi/2)+2k\pi$ y $(3\pi/2)+2k\pi$, con $k \in \mathbb{Z}$.

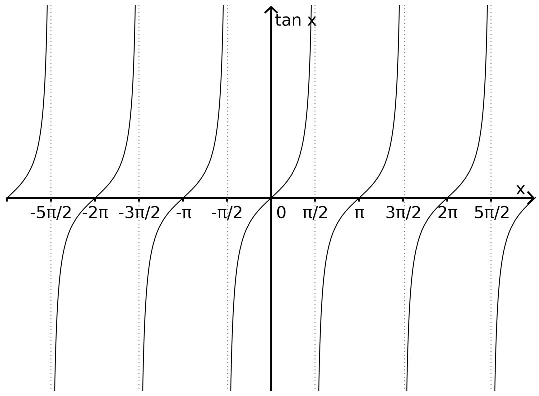
$$Dom(\text{sen}) = \mathbb{R}$$
$$Im(\text{sen}) = [-1; 1]$$



$$Dom(\cos) = \mathbb{R}$$
$$Im(\cos) = [-1; 1]$$



$$Dom(\tan) = \mathbb{R} - \{\alpha /\, \alpha \neq (\pi/2) + 2k\pi,\, \alpha \neq (3\pi/2) + 2k\pi \text{ y } k \in \mathbb{Z}\}$$
$$Im(\tan) = \mathbb{R}$$



Ejercicio

Completá con V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Justificá.

a) Si el coseno de un ángulo es negativo, el ángulo pertenece al tercer o cuarto cuadrante.

b) Si el coseno de un ángulo es negativo y el seno del mismo ángulo es positivo, el ángulo pertenece al segundo cuadrante.

c) Si la tangente de un ángulo es positiva, se puede asegurar que dicho ángulo pertenece al primer cuadrante.

d) Si un ángulo pertenece al tercer cuadrante, el seno de dicho ángulo es positivo.

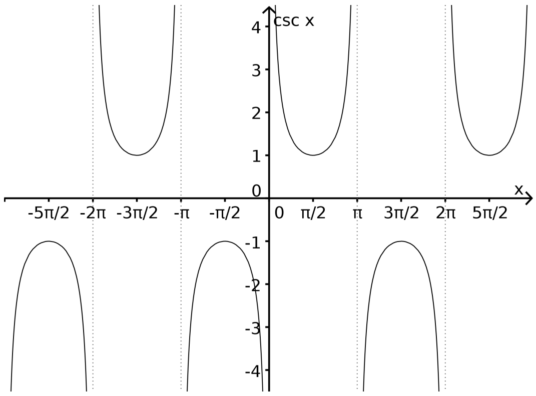
e) Si el seno de un ángulo es positivo y la tangente es positiva, el ángulo pertenece al primer cuadrante.

Funciones trigonométricas recíprocas

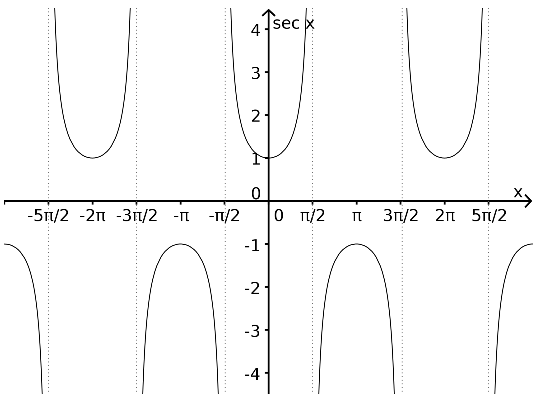
Las funciones trigonométricas recíprocas (no son las funciones trigonométricas inversas) son la cosecante, csc; la secante, sec; y la cotangente, cot, y se definen como:

$$\boxed{\begin{aligned} \csc\alpha &= \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} && \text{para sen } \alpha \neq 0 \\ \sec\alpha &= \frac{1}{\cos\alpha} && \text{para cos } \alpha \neq 0 \\ \cot\alpha &= \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} && \text{para sen } \alpha \neq 0 \end{aligned}} \tag{3}$$

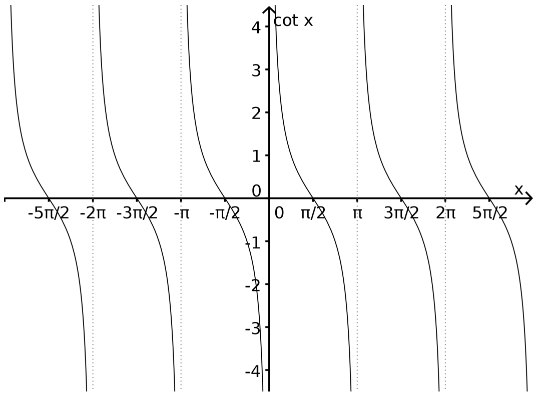
$$Dom(\csc) = \mathbb{R} - \{\alpha / \, \alpha \neq 2k\pi, \, \alpha \neq \pi + 2k\pi \text{ y } k \in \mathbb{Z}\}$$
$$Im(\csc) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$



$$Dom(\sec) = \mathbb{R} - \{\alpha / \, \alpha \neq (\pi/2) + 2k\pi, \, \alpha \neq (3\pi/2) + 2k\pi \text{ y } k \in \mathbb{Z}\}$$
$$Im(\sec) = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$$



$$Dom(\cot) = \mathbb{R} - \{\alpha / \, \alpha \neq k\pi; \; k \in \mathbb{Z}\}$$
$$Im(\cot) = \mathbb{R}$$



Relaciones Fundamentales

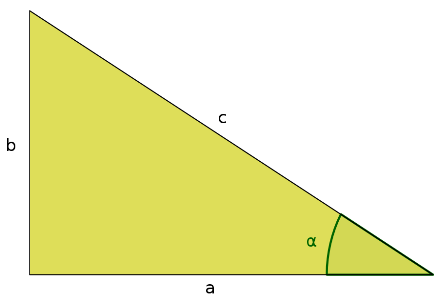
Lo que vamos a ver ahora son las relaciones que existen entre el seno y el coseno. Para la tangente también existen estas relaciones, pero como la tangente se define como el cociente del seno por el coseno, se pueden demostrar utilizando las identidades que veremos a continuación.

- **Relación pitagórica**

  Para poder demostrar esta identidad, primero vamos a demostrar el teorema de Pitágoras.

Teorema de Pitágoras

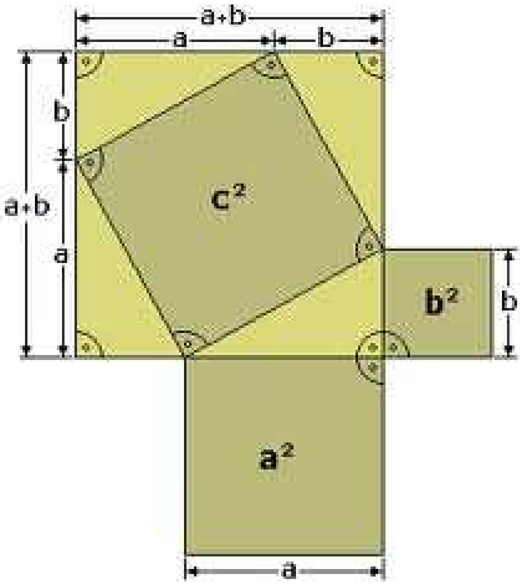
Dado un triángulo rectángulo cualquiera, el cuadrado de la longitud de su hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de la longitud de sus catetos.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

Demostración

Para demostrar la identidad vamos a utilizar un cuadrado de lado $a + b$ subdividido como se muestra en la figura:



La superficie del cuadrado es $(a + b)^2$, pero también la podemos escribir como la suma de la superficie del cuadrado del medio más la superficie de los 4 triángulos: $c^2 + 4\,\frac{a\,b}{2}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} (a + b)^2 &= c^2 + 4\,\frac{a\,b}{2} \\ a^2 + b^2 + \cancel{2\,a\,b} &= c^2 + \cancel{2\,a\,b} \\ a^2 + b^2 &= c^2 \end{aligned}$$

De este modo hemos demostrado que **la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa**[2].

$$\boxed{a^2 + b^2 = c^2} \tag{4}$$

[2]Esta misma demostración es la que explica Paenza aquí (http://www.youtube.com/watch?v=BA61JrwgKDQ). Si querés saber más sobre este teorema hacé clic aquí (http://www.youtube.com/watch?v=yvsmwRROCkw).

Una vez demostrado el teorema de Pitágoras, podemos reemplazar sus catetos por expresiones en función del ángulo α. Esto lo hacemos de la siguiente manera:

$$\operatorname{sen}\,\alpha = \frac{b}{c} \implies b = c\,\operatorname{sen}\,\alpha$$

$$\cos\,\alpha = \frac{a}{c} \implies a = c\,\cos\,\alpha$$

Si reemplazamos estas dos expresiones en el teorema de Pitágoras obtenemos que:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= c^2 \\ (c\,\cos\,\alpha)^2 + (c\,\operatorname{sen}\,\alpha)^2 &= c^2 \\ c^2\,\cos^2\,\alpha + c^2\,\operatorname{sen}^2\,\alpha &= c^2 \\ \cancel{c^2}\,(\cos^2\,\alpha + \operatorname{sen}^2\,\alpha) &= \cancel{c^2} \end{aligned}$$

Así obtenemos la **relación pitagórica**:

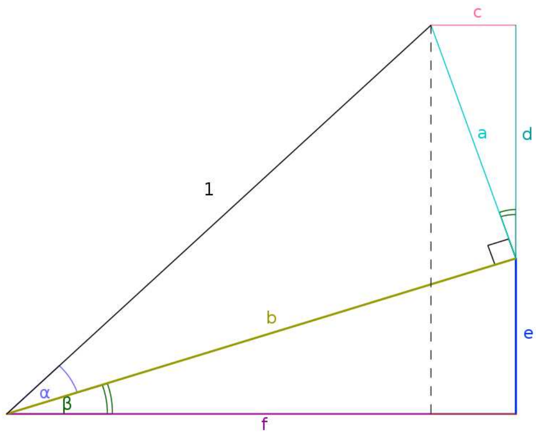
$$\boxed{\cos^2\,\alpha + \operatorname{sen}^2\,\alpha = 1} \tag{5}$$

Esta relación es una identidad, por lo tanto vale para cualquier ángulo.

- **Funciones trigonométricas de la suma de dos ángulos**

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{sen}\,(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen}\,\alpha\,\cos\,\beta + \cos\,\alpha\,\operatorname{sen}\,\beta \\ \cos\,(\alpha + \beta) &= \cos\,\alpha\,\cos\,\beta - \operatorname{sen}\,\alpha\,\operatorname{sen}\,\beta \end{aligned}} \tag{6}$$

Estas expresiones las vamos a demostrar gráficamente. Tomemos dos triángulos. El primero será un triángulo cuya hipotenusa es igual a uno, sus catetos son a y b, y α es el ángulo formado por b y la hipotenusa. El segundo tiene a b como hipotenusa, sus catetos son e y f y β es el ángulo formado por b y f.



$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\,\alpha &= a \\ \cos\,\alpha &= b \\ \operatorname{sen}\,\beta &= \frac{e}{b} = \frac{c}{a} \\ \cos\,\beta &= \frac{f}{b} = \frac{d}{a} \end{aligned}$$

Ahora, despejando c, d, e y f tenemos que:

$$\begin{aligned} c &= a \text{ sen } \beta \\ d &= a \cos \beta \\ e &= b \text{ sen } \beta \\ f &= b \cos \beta \end{aligned}$$

Y reemplazando a y b por $\operatorname{sen}\alpha$ y $\cos\alpha$, respectivamente, obtenemos que:

$$\begin{aligned} c &= \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \\ d &= \text{sen } \alpha \cos \beta \\ e &= \cos \alpha \text{ sen } \beta \\ f &= \cos \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

Por otro lado, de la figura también tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(\alpha + \beta) &= d + e \\ \cos\,(\alpha + \beta) &= f - c \end{aligned}$$

Reemplazando c, d, e y f por las expresiones encontradas obtenemos que:

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(\alpha + \beta) &= d + e = \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta \\ \cos\,(\alpha + \beta) &= f - c = \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \end{aligned}$$

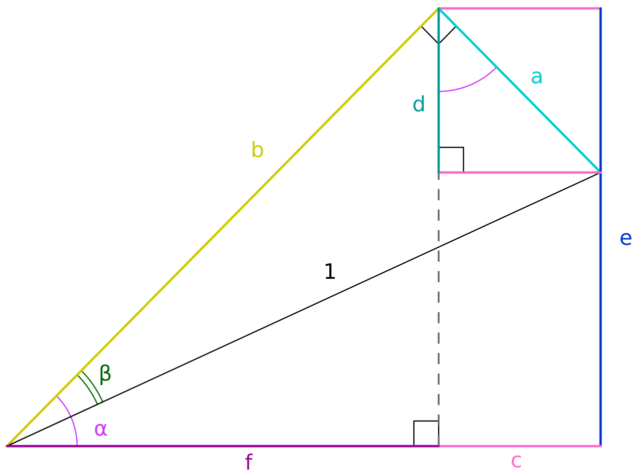
De este modo hemos encontrado las funciones trigonométricas para la suma de dos ángulos:

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(\alpha + \beta) &= \text{sen } \alpha \cos \beta + \cos \alpha \text{ sen } \beta \\ \cos\,(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \end{aligned}$$

- **Funciones trigonométricas de la resta de dos ángulos**

$$\boxed{\begin{aligned} \text{sen}\,(\alpha - \beta) &= \text{sen } \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{ sen } \beta \\ \cos\,(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta \end{aligned}} \qquad (7)$$

Esto lo vamos a demostrar de forma análoga al procedimiento anterior. De la siguiente figura tenemos que:



$$
\begin{aligned}
\text{sen } \beta &= a \\
\cos \beta &= b \\
\text{sen } \alpha &= \frac{e}{b} = \frac{c}{a} \\
\cos \alpha &= \frac{f}{b} = \frac{d}{a}
\end{aligned}
$$

Ahora, despejando c, d, e y f tenemos que:

$$
\begin{aligned}
c &= a \text{ sen } \alpha \\
d &= a \cos \alpha \\
e &= b \text{ sen } \alpha \\
f &= b \cos \alpha
\end{aligned}
$$

Y reemplazando a y b por $\text{sen}\, \alpha$ y $\cos \alpha$, respectivamente, obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
c &= \text{sen } \beta \text{ sen } \alpha \\
d &= \text{sen } \beta \cos \alpha \\
e &= \cos \beta \text{ sen } \alpha \\
f &= \cos \beta \cos \alpha
\end{aligned}
$$

De la figura también tenemos que:

$$
\begin{aligned}
\text{sen}\,(\alpha - \beta) &= e - d \\
\cos\,(\alpha - \beta) &= f + c
\end{aligned}
$$

Reemplazando c, d, e y f por las expresiones encontradas obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
\text{sen}\,(\alpha - \beta) &= e - d = \cos \beta \text{ sen } \alpha - \text{sen } \beta \cos \alpha \\
\cos\,(\alpha - \beta) &= f + c = \cos \beta \cos \alpha + \text{sen } \beta \text{ sen } \alpha
\end{aligned}
$$

De este modo hemos encontrado las funciones trigonométricas para la suma de dos ángulos:

$$
\begin{aligned}
\text{sen}\,(\alpha - \beta) &= \text{sen } \alpha \cos \beta - \cos \alpha \text{ sen } \beta \\
\cos\,(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \text{sen } \alpha \text{ sen } \beta
\end{aligned}
$$

Las relaciones fundamentales se pueden sintetizar de la siguiente manera:

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos^2\alpha + \text{sen}^2\,\alpha = 1 \\ \text{sen}\,(\alpha \pm \beta) = \text{sen}\,\alpha\,\cos\beta \pm \cos\alpha\,\text{sen}\,\beta \\ \cos\,(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\,\cos\beta \mp \text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta \end{array}} \quad (8)$$

De estas expresiones se pueden deducir las funciones trigonométricas para el ángulo opuesto, el ángulo doble y el ángulo mitad.

- **Funciones trigonométricas del ángulo opuesto**

  Si α es un ángulo cualquiera, su opuesto será el ángulo $-\alpha$. Las funciones trigonométricas del ángulo $-\alpha$ se pueden escribir en función de α. Para esto vamos a utilizar las expresiones encontradas para la resta de dos ángulos (relación 7) teniendo en cuenta que el ángulo opuesto se puede escribir como una resta: $-\alpha = 0 - \alpha$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(-\alpha) &= \text{sen}\,(0 - \alpha) \\ &= \underbrace{\text{sen}\,(0)}_{=0}\cos(\alpha) - \underbrace{\cos\,(0)}_{=1}\,\text{sen}(\alpha) \\ &= -\,\text{sen}\,\alpha \end{aligned}$$

  Para el coseno hacemos lo mismo:

$$\begin{aligned} \cos\,(-\alpha) &= \cos\,(0 - \alpha) \\ &= \underbrace{\cos\,(0)}_{=1}\cos(\alpha) + \underbrace{\text{sen}\,(0)}_{=0}\,\text{sen}(\alpha) \\ &= \cos\alpha \end{aligned}$$

  Por lo tanto, **las funciones trigonométricas para el ángulo opuesto son:**

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \cos\,(-\alpha) &=& \cos\alpha \\ \text{sen}\,(-\alpha) &=& -\,\text{sen}\,\alpha \end{array}} \quad (9)$$

- **Funciones trigonométricas del ángulo doble**

  Ahora vamos a utilizar las relaciones encontradas para la suma de dos ángulos (relaciones 6) ya que si α es un ángulo cualquiera, el ángulo doble será $2\,\alpha = \alpha + \alpha$. Entonces,

$$\begin{aligned} \text{sen}\,(2\,\alpha) &= \text{sen}\,(\alpha + \alpha) \\ &= \text{sen}\,(\alpha)\,\cos(\alpha) + \cos\,(\alpha)\,\text{sen}(\alpha) \\ &= 2\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\alpha \end{aligned}$$

  Para el coseno hacemos lo mismo:

$$\begin{aligned}\cos(2\,\alpha) &= \cos(\alpha\,+\,\alpha)\\ &= \cos(\alpha)\,\cos(\alpha)\,-\,\operatorname{sen}(\alpha)\,\operatorname{sen}(\alpha)\\ &= \cos^2\alpha\,-\,\operatorname{sen}^2\alpha\end{aligned}$$

Por lo tanto, **las funciones trigonométricas para el ángulo doble son:**

$$\boxed{\begin{aligned}\cos(2\,\alpha) &= \cos^2\alpha\,-\,\operatorname{sen}^2\alpha\\ \operatorname{sen}(2\,\alpha) &= 2\,\operatorname{sen}\,\alpha\,\cos\,\alpha\end{aligned}} \tag{10}$$

- **Funciones trigonométricas del ángulo mitad**

  Esta demostración requiere un poco más de esfuerzo, pero de todos modos es bastante simple. Para encontrar las funciones del ángulo mitad vamos a hacer lo siguiente. Escribimos a un ángulo cualquiera α como $\frac{1}{2}\,\alpha\,+\,\frac{1}{2}\,\alpha$. Luego el coseno de α es:

$$\begin{aligned}\cos\,\alpha &= \cos\left(\frac{1}{2}\,\alpha\,+\,\frac{1}{2}\,\alpha\right)\\ &= \cos^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\,-\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\end{aligned}$$

  Ahora, por la relación pitagórica (ec. 5) tenemos que:

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\,+\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\,=\,1$$

  Entonces, para encontrar el seno del ángulo mitad despejamos el cuadrado del coseno de la relación anterior, esto es:

$$\cos^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\,=\,1\,-\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)$$

  Y esto lo reemplazamos en la expresión para el coseno de α. Así encontramos que:

$$\begin{aligned}\cos\,\alpha &= \cos^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\,-\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\\ &= \left[1\,-\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\right]\,-\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\\ &= 1\,-\,2\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\end{aligned}$$

Finalmente, despejando el seno del ángulo mitad:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) \;=\; \pm\sqrt{\frac{1\,-\,\cos\,\alpha}{2}}$$

Para hallar el coseno del ángulo mitad despejamos el coseno cuadrado de la relación pitagórica y la reemplazamos en la expresión del coseno de α.

$$\begin{aligned}
\cos\,\alpha \;&=\; \cos^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) \,-\, \operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\\
&=\; \cos^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) \,-\, \left[1\,-\,\cos^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)\right]\\
&=\; -1\,+\,2\,\operatorname{sen}^2\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right)
\end{aligned}$$

Finalmente, despejando el coseno del ángulo mitad:

$$\cos\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) \;=\; \pm\sqrt{\frac{1\,+\,\cos\,\alpha}{2}}$$

Por lo tanto **las funciones trigonométricas para el ángulo mitad serán:**

$$\boxed{\begin{aligned}
\cos\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) \;&=\; \pm\sqrt{\frac{1\,+\,\cos\,\alpha}{2}}\\
\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\,\alpha\right) \;&=\; \pm\sqrt{\frac{1\,-\,\cos\,\alpha}{2}}
\end{aligned}} \tag{11}$$

El doble signo está asociado a la incertidumbre del cuadrante en el cual se encuentre el ángulo $\frac{1}{2}\,\alpha$.

ATENCIÓN

.

Tener en cuenta que estas últimas tres demostraciones se desprenden de la suma y resta de ángulos. Se pueden deducir y no es necesario aprenderlas de memoria.

.

Ejercicios

1. Hallar el seno, el coseno y la tangente del ángulo β, en función de las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha \in \mathrm{I}$, sabiendo que:

   a) α y β son ángulos complementarios.

   b) α y β son ángulos suplementarios.

2. Demuestre, utilizando las relaciones fundamentales, las siguientes identidades:

   a) $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

   b) $\operatorname{sen} \gamma = \dfrac{\cos \gamma}{\cot \gamma}$

   c) $\sec \delta = \sqrt{1 + \tan^2 \delta}$

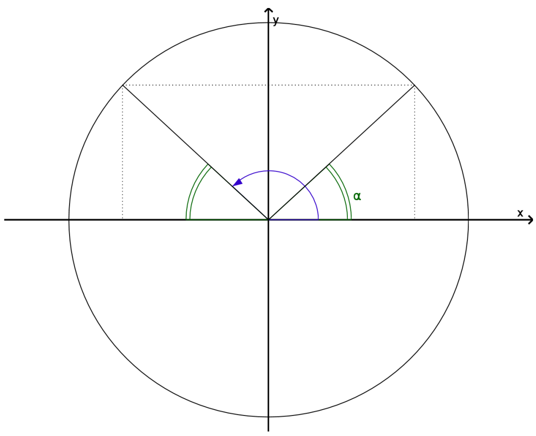
   d) $1 - \operatorname{sen} \theta = (\operatorname{sen} \theta/2 - \cos \theta/2)^2$

   e) $\sec(2\epsilon) = \dfrac{-1}{1 - 2\cos^2 \epsilon}$

Reducción al primer cuadrante

La reducción al primer cuadrante consiste en escribir el seno y el coseno de un ángulo cualquiera, en función de las funciones trigonométricas de un ángulo α, tal que $\alpha \in \mathrm{I}$.

- Ángulo perteneciente al segundo cuadrante.



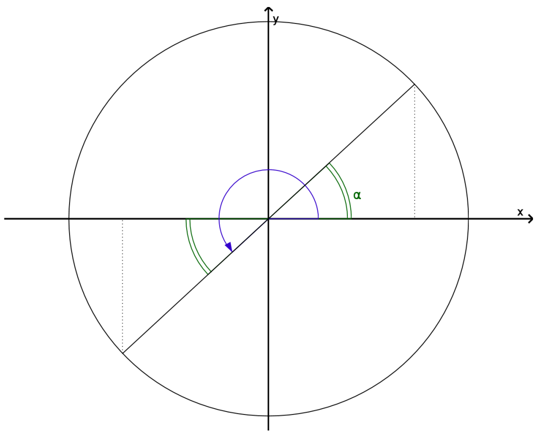
Del gráfico se ve que para cualquier ángulo del segundo cuadrante existe su suplementario. Por lo tanto, se puede escribir como $\pi - \alpha$. Utilizando las relaciones fundamentales se encuentra que:

$$\begin{aligned}
\cos(\pi - \alpha) &= \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \cos \alpha + \underbrace{\operatorname{sen} \pi}_{=0} \operatorname{sen} \alpha = -\cos \alpha \\
\operatorname{sen}(\pi - \alpha) &= \underbrace{\operatorname{sen} \pi}_{=0} \cos \alpha - \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \operatorname{sen} \alpha = \operatorname{sen} \alpha
\end{aligned}$$

Luego, para cualquier ángulo del segundo cuadrante tendremos que:

$$\boxed{\begin{aligned}
\cos(\pi - \alpha) &= -\cos \alpha \\
\operatorname{sen}(\pi - \alpha) &= \operatorname{sen} \alpha
\end{aligned}} \tag{12}$$

- Ángulo perteneciente al tercer cuadrante.



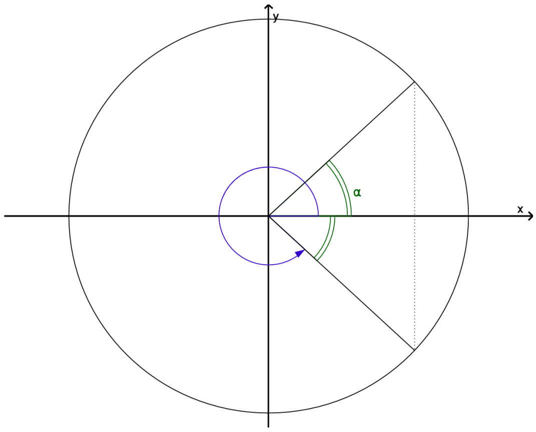
Del gráfico se ve que cualquier ángulo del tercer cuadrante se puede escribir como $\pi + \alpha$. Utilizando las relaciones fundamentales se encuentra que:

$$\begin{aligned}
\cos(\pi + \alpha) &= \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \cos \alpha - \underbrace{\operatorname{sen} \pi}_{=0} \operatorname{sen} \alpha = -\cos \alpha \\
\operatorname{sen}(\pi + \alpha) &= \underbrace{\operatorname{sen} \pi}_{=0} \cos \alpha + \underbrace{\cos \pi}_{=-1} \operatorname{sen} \alpha = -\operatorname{sen} \alpha
\end{aligned}$$

Luego, para cualquier ángulo del tercer cuadrante tendremos que:

$$\boxed{\begin{aligned}
\cos(\pi + \alpha) &= -\cos \alpha \\
\operatorname{sen}(\pi + \alpha) &= -\operatorname{sen} \alpha
\end{aligned}} \tag{13}$$

- Ángulo perteneciente al cuarto cuadrante.



Del gráfico se ve que cualquier ángulo del cuarto cuadrante se puede escribir como $2\,\pi\,-\,\alpha$. Utilizando las relaciones fundamentales se encuentra que:

$$\begin{aligned}
\cos(2\,\pi\,-\,\alpha) &= \underbrace{\cos(2\,\pi)}_{=1}\,\cos\,\alpha + \underbrace{\operatorname{sen}(2\,\pi)}_{=0}\,\operatorname{sen}\,\alpha = \cos\,\alpha \\
\operatorname{sen}(2\,\pi\,-\,\alpha) &= \underbrace{\operatorname{sen}(2\,\pi)}_{=0}\,\cos\,\alpha - \underbrace{\cos(2\,\pi)}_{=1}\,\operatorname{sen}\,\alpha = -\operatorname{sen}\,\alpha
\end{aligned}$$

Luego, para cualquier ángulo del cuarto cuadrante tendremos que:

$$\boxed{\begin{aligned}
\cos(2\,\pi\,-\,\alpha) &= \cos\,\alpha \\
\operatorname{sen}(2\,\pi\,-\,\alpha) &= -\operatorname{sen}\,\alpha
\end{aligned}} \tag{14}$$

Las relaciones encontradas para el seno y el coseno de $(\pi\,-\,\alpha)$, $(\pi\,+\,\alpha)$ y $(2\,\pi\,-\,\alpha)$ valen siempre, aunque α no pertenezca al primer cuadrante. Esto es así porque hemos utilizado las relaciones encontradas para el seno y el coseno para la suma y para la resta de ángulos.

Ejercicio

Completa la siguiente tabla.

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	2π
sen x																	
cos x																	
tan x																	
csc x																	
sec x																	
cot x																	

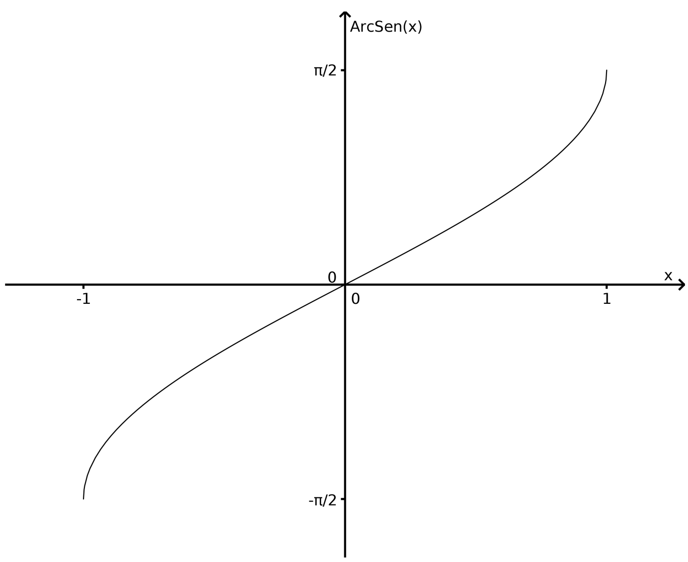
A estos ángulos se les conoce con exactitud el valor de sus funciones trigonométricas. Esto quiere decir que en la resolución de problemas los podemos tomar como datos conocidos.

Funciones trigonométricas inversas

Son las funciones arcoseno (arc sen), arcocoseno (arc cos) y arcotangente (arctan). Estas funciones se utilizan cuando la incógnita forma parte del argumento de las funciones trigonométricas. Es importante mencionar que la imagen de estas funciones son ángulos.

Función arcoseno: Se define como:

$$\begin{cases} Dom(\text{arc sen}) = [-1;1] \\ Im(\text{arc sen}) = [-\pi/2;\pi/2] \\ f(x) \;=\; \text{arc sen}\,(x) \end{cases}$$



Que el seno y el arcoseno sean funciones inversas significa que si sen $\alpha = x$ entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{arc\,sen}[\operatorname{sen}\ \alpha] &= \alpha \\ \operatorname{sen}[\operatorname{arc\,sen}\ x] &= x \end{aligned}$$

En las calculadoras normalmente esta función se denota como $\mathbf{sen}^{-1}$, en este caso $\mathbf{sen}^{-1}\,\boldsymbol{\alpha} \neq \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{sen}\ \boldsymbol{\alpha}}$.

Dependiendo del signo del argumento del arcoseno, la imagen será un ángulo de algún cuadrante en particular. Es decir, si $\alpha = \operatorname{arc\,sen}(x)$ entonces resulta que $x = \operatorname{sen}(\alpha)$. Entonces, entre $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ tendremos que:

$$\begin{cases} \text{si } x = -1 & \Longrightarrow \quad \alpha = -\frac{\pi}{2} \\ \text{si } -1 < x < 0 & \Longrightarrow \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \text{IV} \\ \text{si } x = 0 & \Longrightarrow \quad \alpha = 0 \\ \text{si } 0 < x < 1 & \Longrightarrow \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \text{I} \\ \text{si } x = 1 & \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{15}$$

ATENCIÓN

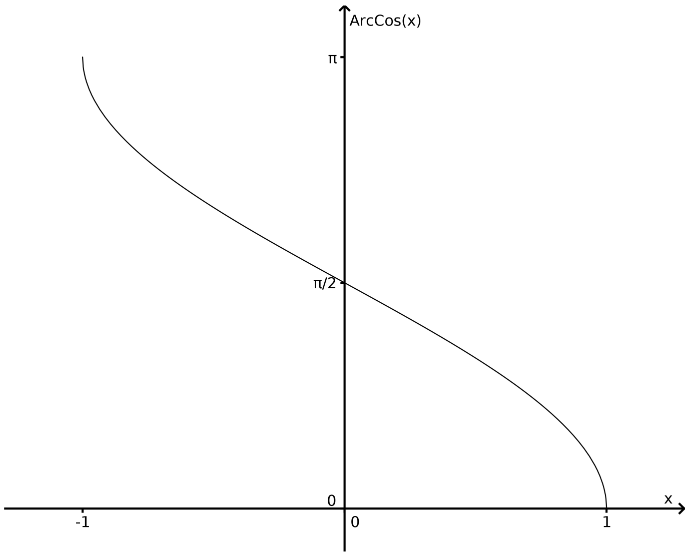
Utilizando las relaciones encontradas anteriormente, cuando estudiamos la reducción al primer cuadrante (relaciones 12, 13 y 14), podemos encontrar los valores de $\alpha \in [0; 2\pi)$ que satisfacen $\alpha = \operatorname{arc\,sen}(x)$.

$$\begin{cases} \text{si } x = -1 & \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{3}{2}\pi \\ \text{si } -1 < x < 0 & \Longrightarrow \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \quad \text{ó} \quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \text{III} \quad \text{ó} \quad \alpha \in \text{IV} \\ \text{si } x = 0 & \Longrightarrow \quad \alpha = 0 \quad \text{ó} \quad \alpha = \pi \\ \text{si } 0 < x < 1 & \Longrightarrow \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \Longrightarrow \quad \alpha \in \text{I} \quad \text{ó} \quad \alpha \in \text{II} \\ \text{si } x = 1; & \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{16}$$

De aquí que entre $[0; 2\pi)$ siempre tendremos dos soluciones, excepto cuando $\operatorname{sen}(\alpha) = 1$ o $\operatorname{sen}(\alpha) = -1$.

Función arcocoseno: Se define como:

$$\begin{cases} Dom(\arccos) = [-1;1] \\ Im(\arccos) = [0;\pi] \\ f(x) \ = \ \arccos(x) \end{cases}$$



Ahora si $\cos\,\alpha \ = \ x$ entonces,

$$\begin{aligned} \arccos[\cos\,\alpha] &= \alpha \\ \cos[\arccos\,x] &= x \end{aligned}$$

En las calculadoras normalmente esta función se denota como $\cos^{-1}$.

Dependiendo del signo del argumento la imagen será un ángulo de algún cuadrante en particular. Si $\alpha \ = \ \arccos(x)$ entonces resulta que $x \ = \ \cos(\alpha)$. Entonces, entre $[0;\pi]$ tendremos que:

$$\begin{cases} \text{si } x = -1 & \Longrightarrow \ \alpha = \pi \\ \text{si } -1 < x < 0 & \Longrightarrow \ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \ \Longrightarrow \ \alpha \in \mathrm{II} \\ \text{si } x = 0 & \Longrightarrow \ \alpha = \frac{\pi}{2} \\ \text{si } 0 < x < 1 & \Longrightarrow \ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \ \Longrightarrow \ \alpha \in \mathrm{I} \\ \text{si } x = 1 & \Longrightarrow \ \alpha = 0 \end{cases} \tag{17}$$

ATENCIÓN

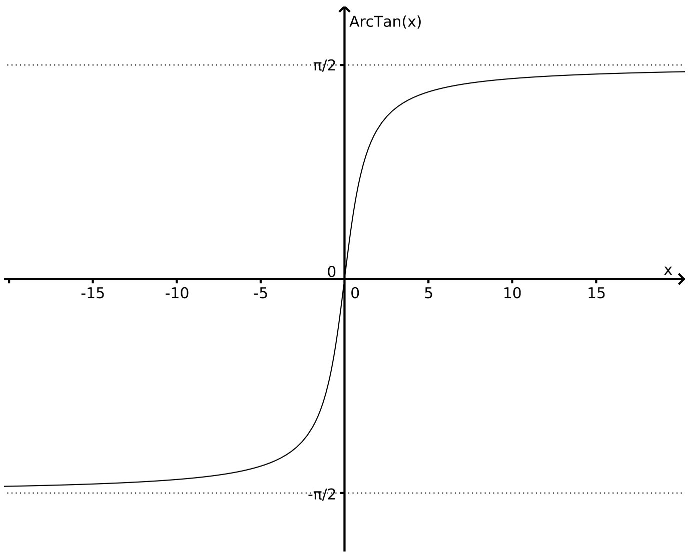
Utilizando las relaciones encontradas anteriormente, cuando estudiamos la reducción al primer cuadrante (relaciones 12, 13 y 14), podemos encontrar los valores de $\alpha \in [0; 2\pi)$ que satisfacen $\alpha = \arccos(x)$.

$$\begin{cases} \text{si } x = -1 & \Longrightarrow \alpha = \pi \\ \text{si } -1 < x < 0 & \Longrightarrow \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \text{ó} \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi \quad \Longrightarrow \alpha \in \text{II} \quad \text{ó} \quad \alpha \in \text{III} \\ \text{si } x = 0 & \Longrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad \alpha = \frac{3}{2}\pi \\ \text{si } 0 < x < 1 & \Longrightarrow 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi \quad \Longrightarrow \alpha \in \text{I} \quad \text{ó} \quad \alpha \in \text{IV} \\ \text{si } x = 1; & \Longrightarrow \alpha = 0 \end{cases} \tag{18}$$

De aquí que entre $[0; 2\pi)$ siempre tendremos dos soluciones, excepto cuando $\cos(\alpha) = 1$ o $\cos(\alpha) = -1$.

Función arcotangente: Se define como:

$$\begin{cases} Dom(\arctan) = \mathbb{R} \\ Im(\arctan) = (-\pi/2; \pi/2) \\ f(x) = \arctan(x) \end{cases}$$



Ahora si $\tan \alpha = x$ entonces,

$$\begin{aligned} \arctan[\tan \alpha] &= \alpha \\ \tan[\arctan x] &= x \end{aligned}$$

En las calculadoras normalmente esta función se denota como $\tan^{-1}$.

Dependiendo del signo del argumento la imagen será un ángulo de algún cuadrante en particular. Si $\alpha = \arctan(x)$ entonces resulta que $x = \tan(\alpha)$. Entonces, entre $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ tendremos que:

$$\begin{cases} \text{si } x < 0 & \Longrightarrow & -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0 & \Longrightarrow & \alpha \in \text{IV} \\ \text{si } x = 0 & \Longrightarrow & \alpha = 0 & & \\ \text{si } 0 < x & \Longrightarrow & 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} & \Longrightarrow & \alpha \in \text{I} \end{cases} \tag{19}$$

ATENCIÓN

Utilizando las relaciones encontradas anteriormente, cuando estudiamos la reducción al primer cuadrante (relaciones 12, 13 y 14), podemos encontrar los valores de $\alpha \in [0; 2\pi)$ que satisfacen $\alpha = \arctan(x)$.

$$\begin{cases} \text{si } x < 0 & \Longrightarrow & \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \text{ó} \quad \frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi & \Longrightarrow & \alpha \in \text{II} \quad \text{ó} \quad \alpha \in \text{IV} \\ \text{si } x = 0 & \Longrightarrow & \alpha = 0 \quad \text{ó} \quad \alpha = \pi & & \\ \text{si } 0 < x & \Longrightarrow & 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \text{ó} \quad \pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi & \Longrightarrow & \alpha \in \text{I} \quad \text{ó} \quad \alpha \in \text{III} \end{cases} \tag{20}$$

De aquí que entre $[0; 2\pi)$ siempre tendremos dos soluciones.

Ejemplos: *Vamos a resolver ecuaciones donde la incógnita es el ángulo, utilizando las funciones trigonométricas inversas:*

- **Ejemplo 1:** *Supongamos que queremos hallar un ángulo α tal que su seno sea igual a $1/2$. La ecuación que queremos resolver es:*

$$\text{sen } \alpha = \frac{1}{2}$$

Entonces para despejar nuestra incógnita de la ecuación aplicamos la función arcoseno en ambos miembros.

$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{1}{2} \\ \text{arc sen}[\text{sen } \alpha] &= \text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right) \\ \alpha &= \text{arc sen}\left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Ahora, como sen $\alpha > 0$ *tenemos entonces que* $\alpha \in I$ *ó* $\alpha \in II$*. De acuerdo a las relaciones encontradas en 16 y a los resultados encontrados en el ejercicio anterior, tendremos que las soluciones, en* $[0; 2\,\pi)$*, serán* $\alpha_1 = \pi/6$ *y* $\alpha_2 = \pi - \alpha_1 = \frac{5}{6}\pi$.

En el caso en el que las soluciones no estén restringidas a un intervalo particular, entonces las soluciones son de la forma $\alpha_1 = \pi/6 + 2\,\pi\,k$ *y* $\alpha_2 = \frac{5}{6}\pi + 2\,\pi\,k$*, con* $k \in \mathbb{Z}$.

- **Ejemplo 2:** *Supongamos que queremos hallar un ángulo* β *tal que su coseno sea igual a* $-1/2$*. La ecuación que queremos resolver es:*

$$\cos\beta = -\frac{1}{2}$$

Entonces para despejar nuestra incógnita de la ecuación aplicamos la función arcocoseno en ambos miembros.

$$\begin{aligned} \cos\beta &= -\frac{1}{2} \\ \arccos[\cos\beta] &= \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \beta &= \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Ahora, como $\cos\beta < 0$ *tenemos entonces que* $\beta \in II$ *ó* $\beta \in III$*. Entonces, de acuerdo a las relaciones 18 y a los resultados encontrados en el ejercicio anterior, las soluciones, en* $[0; 2\,\pi)$*, serán* $\beta_1 = \frac{2}{3}\pi$ *y* $\beta_2 = 2\,\pi - \beta_1 = \frac{4}{3}\pi$.

En el caso de que las soluciones no estén restringidas a un intervalo particular, entonces las soluciones son de la forma $\beta_1 = \frac{2}{3}\pi + 2\,\pi\,k$ *y* $\beta_2 = \frac{4}{3}\pi + 2\,\pi\,k$*, con* $k \in \mathbb{Z}$.

- **Ejemplo 3:** *Supongamos que queremos hallar un ángulo* γ *tal que su tangente sea igual a* -1*. La ecuación que queremos resolver es:*

$$\tan\gamma = -1$$

Entonces para despejar nuestra incógnita de la ecuación aplicamos la función arcotangente en ambos miembros.

$$\begin{aligned} \tan\gamma &= -1 \\ \arctan[\tan\gamma] &= \arctan(-\,1) \\ \gamma &= \arctan(-1) \end{aligned}$$

Ahora, como $\tan\gamma < 0$ *tenemos entonces que* $\gamma \in II$ *ó* $\gamma \in IV$*. Entonces, de acuerdo a las relaciones 20 y a los resultados encontrados en el ejercicio anterior, las soluciones, en* $[0; 2\,\pi)$*, serán* $\gamma_1 = \frac{3}{4}\pi$ *y* $\gamma_2 = \pi + \gamma_1 = \frac{7}{4}\pi$*.*

En el caso de que las soluciones no estén restringidas a un intervalo particular, entonces las soluciones son de la forma $\gamma_1 = \frac{3}{4}\pi + 2\,\pi\,k$ *y* $\gamma_2 = \frac{7}{4}\pi + 2\,\pi\,k$*, con* $k \in \mathbb{Z}$*.*

Ejercicio

Encuentra el valor de los ángulos, pertenecientes al intervalo $[0, 2\pi)$, que satisfacen las siguientes condiciones:

a) $\tan(\gamma) = 1$

b) $\operatorname{sen}(\epsilon) = \sqrt{3}\,\cos(\epsilon)$

c) $\arccos 1 = \theta$

Resolución de triángulos

Una aplicación de la trigonometría es la resolución de triángulos. Esto consiste en determinar los lados y/o los ángulos interiores a un triángulo conociendo algunos datos del mismo.

Para resolver este tipo de problemas, además de poder utilizar la relaciones fundamentales vistas anteriormente (identidades 8 y las relaciones 16, 18 y 20) vamos a utilizar dos teoremas y las relaciones entre los ángulos interiores de un triángulo.

Teorema del seno

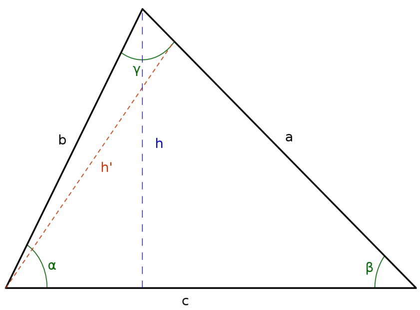
El teorema del seno dice que **dado cualquier triángulo de lados a, b y c, y cuyos ángulos interiores son α, formado por los lados b y c; β, formado por los lados a y c; y γ, formado por los lados a y b, se cumple que:**

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\,\beta}{b} = \frac{\operatorname{sen}\,\gamma}{c}} \tag{21}$$

Demostración

Para demostrar este teorema hay que ver que la relación 21 se cumple para todos los triángulos, por lo que vamos a demostrarlo para los triángulos acutángulo, obtusángulo y recto.

- **Triángulo acutángulo:** Si en el triángulo trazamos la altura h tomando al lado c como base podemos escribir que:



$$\left.\begin{array}{rcl} \text{sen } \alpha & = & \dfrac{h}{b} \\ \text{sen } \beta & = & \dfrac{h}{a} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} h & = & b \text{ sen } \alpha \\ h & = & a \text{ sen } \beta \end{array}\right.$$

Luego, igualando las dos expresiones de h encontramos que:

$$\begin{array}{rcl} b \text{ sen } \alpha & = & a \text{ sen } \beta \\ \dfrac{\text{sen } \alpha}{a} & = & \dfrac{\text{sen } \beta}{b} \end{array}$$

Si ahora trazamos la altura h' tomando al lado a como base podemos escribir que:

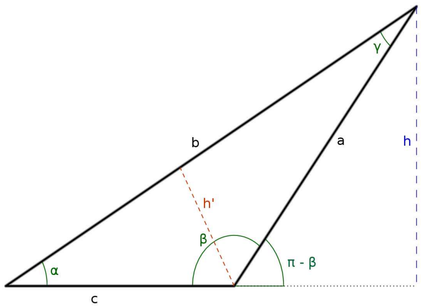
$$\left.\begin{array}{rcl} \text{sen } \beta & = & \dfrac{h'}{c} \\ \text{sen } \gamma & = & \dfrac{h'}{b} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} h' & = & c \text{ sen } \beta \\ h' & = & b \text{ sen } \gamma \end{array}\right.$$

Luego, igualando las dos expresiones de h' encontramos que:

$$\begin{array}{rcl} c \text{ sen } \beta & = & b \text{ sen } \gamma \\ \dfrac{\text{sen } \beta}{b} & = & \dfrac{\text{sen } \gamma}{c} \end{array}$$

Finalmente, encontramos que como $\dfrac{\text{sen } \alpha}{a} = \dfrac{\text{sen } \beta}{b}$ y $\dfrac{\text{sen } \beta}{b} = \dfrac{\text{sen } \gamma}{c}$ demostramos que el teorema del seno se cumple para los triángulos acutángulos.

- **Triángulo obtusángulo:** Esta demostración sigue la misma metodología que llevamos a cabo anteriormente. Trazamos la altura h tomando al lado c como base. Entonces,



$$\left.\begin{array}{rcl} \text{sen } \alpha & = & \dfrac{h}{b} \\ \text{sen}(\pi - \beta) = \text{sen } \beta & = & \dfrac{h}{a} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} h & = & b \text{ sen } \alpha \\ h & = & a \text{ sen } \beta \end{array}\right.$$

Por lo tanto,

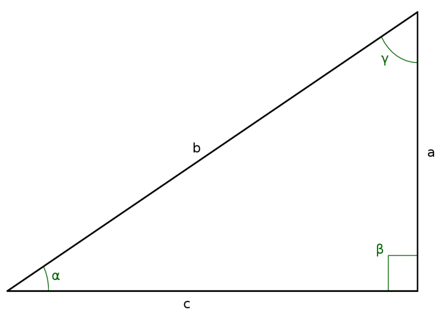
$$\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b}$$

Si ahora trazamos la altura h' tomando al lado b como base podemos escribir que:

$$\left.\begin{array}{rcl} \text{sen } \alpha & = & \dfrac{h'}{c} \\ \text{sen } \gamma & = & \dfrac{h'}{a} \end{array}\right\} \Longrightarrow h' = c \text{ sen } \alpha = a \text{ sen } \gamma \Longrightarrow \frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$$

Finalmente, encontramos que como $\dfrac{\text{sen } \alpha}{a} = \dfrac{\text{sen } \beta}{b}$ y $\dfrac{\text{sen } \alpha}{a} = \dfrac{\text{sen } \gamma}{c}$ demostramos que el teorema del seno se cumple para los triángulos obtusángulos.

- **Triángulo rectángulo:** Esta demostración es un poco más simple porque ahora $\beta = \pi/2$ entonces sen $\beta = 1$.



$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{a}{b} \\ b \text{ sen } \alpha &= a \\ b \text{ sen } \alpha &= a \text{ sen } \beta \quad (\text{vale porque } \operatorname{sen} \beta = 1) \\ \frac{\text{sen } \alpha}{a} &= \frac{\text{sen } \beta}{b} \end{aligned}$$

Análogamente tenemos que:

$$\begin{aligned} \text{sen } \gamma &= \frac{c}{b} \\ b \text{ sen } \gamma &= c \\ b \text{ sen } \gamma &= c \text{ sen } \beta \\ \frac{\text{sen } \gamma}{c} &= \frac{\text{sen } \beta}{b} \end{aligned}$$

Finalmente, encontramos que como $\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b}$ y $\frac{\text{sen } \beta}{b} = \frac{\text{sen } \gamma}{c}$ demostramos que el teorema del seno se cumple para los triángulos rectángulos.

De este modo hemos demostrado que el teorema del seno vale para cualquier triángulo.

Teorema del coseno

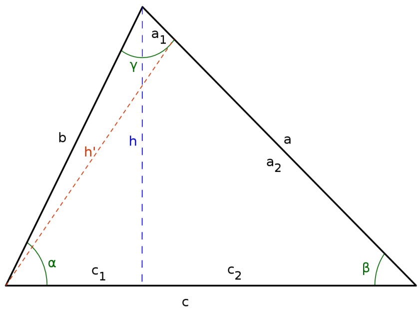
El teorema del coseno dice que **dado cualquier triángulo de lados a, b y c, y cuyos ángulos interiores son α, formado por los lados b y c; β, formado por los lados a y c; y γ, formado por los lados a y b, se cumple que:**

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos \gamma \end{aligned}} \tag{22}$$

Demostración

Nuevamente este teorema hay que demostrarlo para todos los triángulos.

- **Triángulo acutángulo:** Si en el triángulo trazamos la altura h tomando al lado c como base podemos escribir que:



$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{b} &\implies h = b \operatorname{sen} \alpha \\ \cos \alpha = \frac{c_1}{b} &\implies c_1 = b \cos \alpha \\ c = c_1 + c_2 &\implies c_2 = c - c_1 = c - b \cos \alpha \end{aligned}$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$a^2 = h^2 + c_2^2$$

Luego, reemplazamos que $h = b \operatorname{sen} \alpha$ y $c_2 = c - b \cos \alpha$,

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + c_2^2 \\ &= (b \operatorname{sen} \alpha)^2 + (c - b \cos \alpha)^2 \\ &= b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha + c^2 - 2\,c\,b \cos \alpha + b^2 \cos^2 \alpha \\ &= b^2(\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + c^2 - 2\,b\,c \cos \alpha \\ &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos \alpha \end{aligned}$$

De este modo encontramos que $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos \alpha$. Ahora hay que encontrar las otras dos igualdades. Esto se hace de forma análoga.

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \beta = \frac{h}{a} &\implies h = a \operatorname{sen} \beta \\ \cos \beta = \frac{c_2}{a} &\implies c_2 = a \cos \beta \\ c = c_1 + c_2 &\implies c_1 = c - c_2 = c - a \cos \beta \end{aligned}$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + c_1^2 \\ &= (a \text{ sen } \beta)^2 + (c - a \cos \beta)^2 \\ &= a^2 \text{ sen}^2 \beta + c^2 - 2\,c\,a \cos \beta + a^2 \cos^2 \beta \\ &= a^2(\text{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta) + c^2 - 2\,a\,c \cos \beta \\ &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos \beta \end{aligned}$$

Y para encontrar la última igualdad trazamos la altura h' y luego hacemos lo siguiente:

$$\begin{aligned} \text{sen } \gamma = \frac{h'}{b} &\implies h' = b \text{ sen } \gamma \\ \cos \gamma = \frac{a_1}{b} &\implies a_1 = b \cos \gamma \\ a = a_1 + a_2 &\implies a_2 = a - a_1 = a - b \cos \gamma \end{aligned}$$

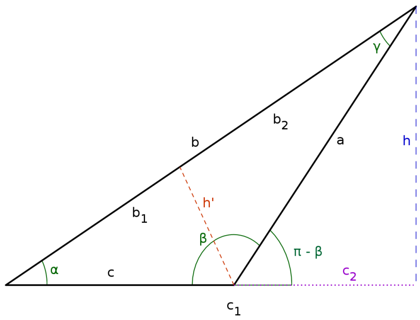
Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned} c^2 &= (h')^2 + a_2^2 \\ &= (b \text{ sen } \gamma)^2 + (a - b \cos \gamma)^2 \\ &= b^2 \text{ sen}^2 \gamma + a^2 - 2\,a\,b \cos \gamma + b^2 \cos^2 \gamma \\ &= b^2(\text{sen}^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + a^2 - 2\,a\,b \cos \gamma \\ &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos \gamma \end{aligned}$$

Finalmente, encontramos que para un triángulo acutángulo se cumple que:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c \cos \alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c \cos \beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b \cos \gamma \end{aligned}$$

- **Triángulo obtusángulo:** Esta demostración es bastante similar a la anterior. Trazamos la altura h tomando al lado c como base podemos escribir que:



$$\text{sen }\alpha = \frac{h}{b} \implies h = b \text{ sen }\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{c_1}{b} \implies c_1 = b\cos\alpha$$
$$c_1 = c + c_2 \implies c_2 = c_1 - c = b\cos\alpha - c$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned} a^2 &= h^2 + c_2^2 \\ &= (b \text{ sen }\alpha)^2 + (b\cos\alpha - c)^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha \end{aligned}$$

Para el lado b hacemos lo mismo:

$$\text{sen}(\pi - \beta) = \text{sen }\beta = \frac{h}{a} \implies h = a \text{ sen }\beta$$
$$\cos(\pi - \beta) = -\cos\beta = \frac{c_2}{a} \implies c_2 = -a\cos\beta$$
$$c_1 = c + c_2 \implies c_1 = c - a\cos\beta$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + c_1^2 \\ &= (a \text{ sen }\beta)^2 + (c - a\cos\beta)^2 \\ &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta \end{aligned}$$

Y para el lado c trazamos la altura h'.

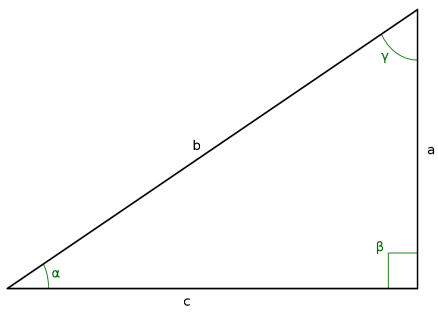
$$\text{sen }\gamma = \frac{h'}{a} \implies h' = a \text{ sen }\gamma$$
$$\cos\gamma = \frac{b_2}{a} \implies b_2 = a\cos\gamma$$
$$b = b_1 + b_2 \implies b_1 = b - a\cos\gamma$$

Por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$\begin{aligned} c^2 &= (h')^2 + b_1^2 \\ &= (a \text{ sen } \gamma)^2 + (b - a \cos \gamma)^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2\, b\, c \cos \gamma \end{aligned}$$

De este modo demostramos que el teorema del coseno vale para triángulos obtusángulos.

- **Triángulo rectángulo:** Esta demostración es más simple porque en este caso $\beta = \pi/2$ por lo que $\cos \beta = 0$.



Entonces, por el teorema de Pitágoras tenemos que:

$$b^2 = a^2 + c^2$$

Pero como $\cos \beta = 0$ resulta entonces que $-2\, a\, c \cos \beta = 0$. Por lo tanto,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a\, c \cos \beta$$

Ahora, para hallar la segunda igualdad, despejamos a^2 de la expresión $b^2 = a^2 + c^2$ y sumamos y restamos c^2 en el segundo miembro:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 - c^2 \\ &= b^2 - c^2 + c^2 - c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2\, c^2 \end{aligned}$$

De la figura tenemos que:

$$\cos\,\alpha\;=\;\frac{c}{b}\;\Longrightarrow\;c\;=\;b\,\cos\,\alpha$$

Luego podemos escribir que:

$$c^2\;=\;c\,.\,c=\;c\,b\,\cos\,\alpha$$

Reemplazamos esto en la expresión de a^2 y obtenemos que:

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,c^2 \\ &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,\cos\,\alpha \end{aligned}$$

Para hallar la última igualdad, hacemos el mismo procedimiento que hicimos para a^2, pero ahora teniendo en cuenta que $\cos\,\gamma\;=\;\frac{a}{b}\;\Longrightarrow\;a\;=\;b\,\cos\,\gamma$. Entonces,

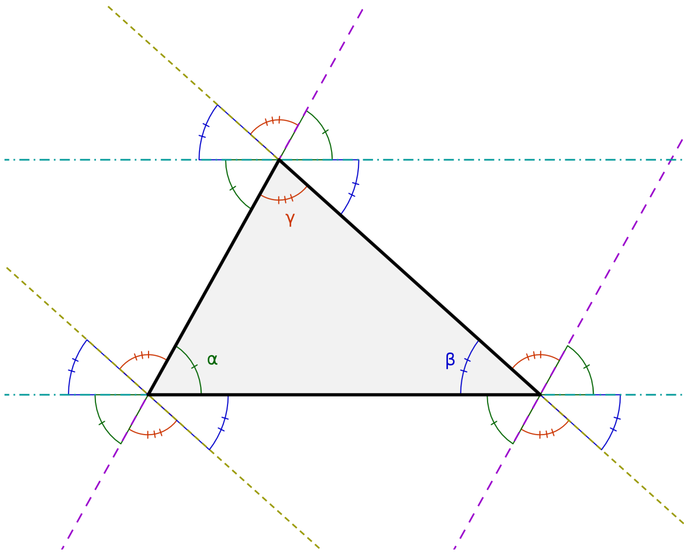
$$\begin{aligned} c^2 &= b^2 - a^2 \\ &= b^2 - a^2 + a^2 - a^2 \\ &= b^2 + a^2 - 2\,a^2 \\ &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,\cos\,\gamma \end{aligned}$$

Finalment,e demostramos que el teorema del coseno se cumple para cualquier ángulo. Ahora podemos pensar al teorema de Pitágoras como un caso particular del teorema del coseno.

Ángulos interiores de un triángulo

Geométricamente se puede demostrar, utilizando el teorema de Thales[3], que los ángulos interiores de un triángulo cualquiera suman 180°.

[3]El teorema de Thales dice que cuando dos rectas secantes son cortadas por varias rectas paralelas, los segmentos que se forman en una de las secantes son proporcionales a los que se forman en la otra. El grupo musical llamado Les Luthiers hizo una canción con el enunciado y la demostración del teorema, que lo pueden ver en aquí (http://www.youtube.com/watch?v=DsIh1m7B-xQ).
Una aplicación de este teorema la pueden encontrar en aquí (http://www.youtube.com/watch?v=w4rbEowQ7rY).



$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = 180°} \tag{23}$$

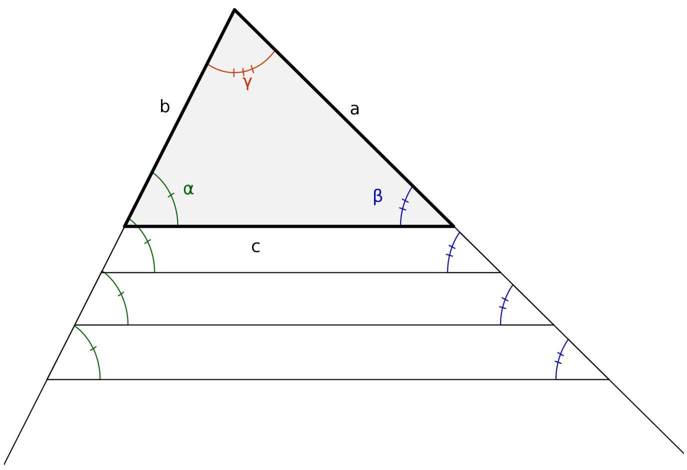
Resolución de triángulos

Como dijimos al comienzo de esta sección, la idea de resolver triángulos es poder determinar los lados y los ángulos interiores conociendo algunos datos del triángulo en cuestión.

Para poder resolver completamente un triángulo se necesitan conocer, al menos, tres de sus elementos. De modo que tendremos 5 casos diferentes, pero sólo existen 4 casos diferentes para los cuáles 1 lado siempre será conocido y por lo tanto podremos resolver el problema.

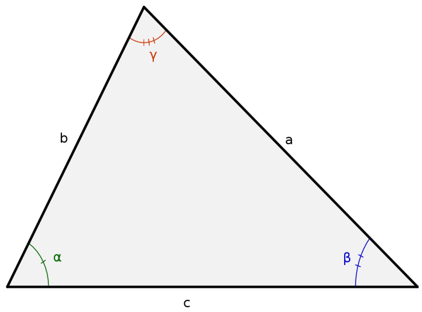
- Se conocen los tres ángulos:

  En el caso de que no se conozca ninguno de los lados, no se podrá resolver el problema debido a que existen infinitos triángulos semejantes.



- Se conocen los tres lados:

  Supongamos que conocemos las longitudes de los lados a, b y c de un triángulo y queremos hallar sus ángulos interiores. Para resolver el problema vamos a utilizar el teorema del coseno.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha \implies \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,a\,c\cos\beta \implies \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \implies \gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

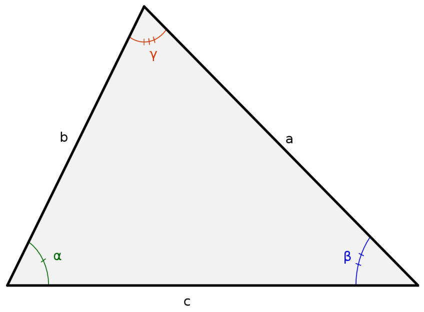
Así encontramos los tres ángulos que buscábamos:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}\right)$$
$$\beta = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\,a\,c}\right)$$
$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta$$

En este caso, como los ángulos interiores a un triángulo son menores que 180°, si el coseno es positivo pertenecen al primer cuadrante, mientras que si es negativo pertenecen al segundo. Si la suma de dos de los ángulos interiores es mayor a 180°, no existe el triángulo.

- Se conocen un lado y dos ángulos:

  Supongamos que conocemos la longitud del lado b y la amplitud de los ángulos α y γ de un triángulo y queremos hallar sus elementos restantes. Para resolver el problema vamos a utilizar el teorema del seno.



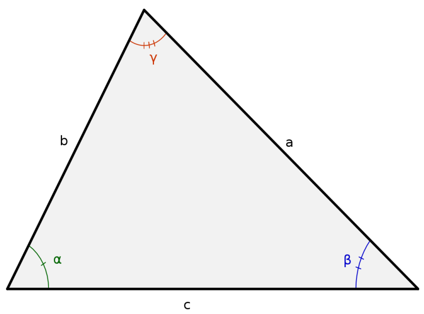
$$
\begin{aligned}
\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \quad &\Longrightarrow \quad \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma \\
\frac{\text{sen } \alpha}{a} = \frac{\text{sen } \beta}{b} \quad &\Longrightarrow \quad a = b\,\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} \\
\frac{\text{sen } \gamma}{c} = \frac{\text{sen } \beta}{b} \quad &\Longrightarrow \quad c = b\,\frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \beta}
\end{aligned}
$$

Así encontramos los dos lados y el ángulo que buscábamos:

$$
\begin{aligned}
\beta &= 180^\circ - \alpha - \gamma \\
a &= b\,\frac{\text{sen } \alpha}{\text{sen } \beta} \\
c &= b\,\frac{\text{sen } \gamma}{\text{sen } \beta}
\end{aligned}
$$

- Se conocen dos lados y el ángulo comprendido:

  Supongamos que conocemos las longitudes de los lados a y b, y la amplitud del ángulo γ de un triángulo y queremos hallar sus elementos restantes. Para resolver el problema vamos a utilizar el teorema del coseno.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma \implies c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma}$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha \implies \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}$$
$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \implies \beta = 180^\circ - \alpha - \gamma$$

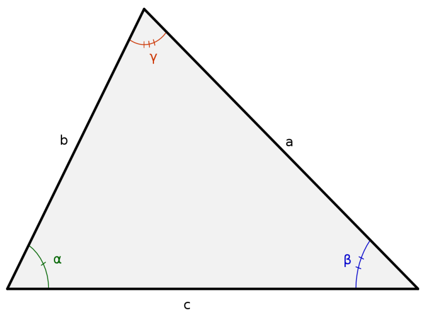
Así encontramos el lado y los ángulos que buscábamos:

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma} \\ \alpha &= \arccos\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c}\right) \\ \beta &= 180^\circ - \alpha - \gamma \end{aligned}$$

En este caso se omite el doble signo cuando despejamos c, porque como es una longitud está obligado a ser positivo.

- <u>Se conocen dos lados y un ángulo no comprendido:</u>

  Supongamos que conocemos las longitudes de los lados a y b, y la amplitud del ángulo α de un triángulo y queremos hallar sus elementos restantes. Para resolver el problema vamos a utilizar el teorema del seno y del coseno.



$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{b} \implies \operatorname{sen}\beta = \frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha$$

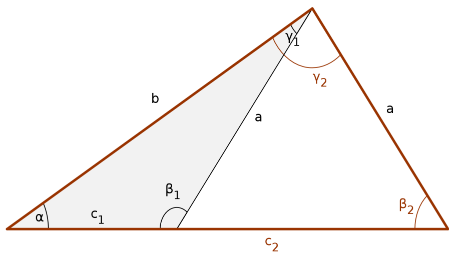
En este caso, como $\operatorname{sen}\beta > 0$ tenemos dos soluciones: $\beta_2 \in \mathrm{I}$ y $\beta_1 = \pi - \beta_2 \in \mathrm{II}$. Por lo tanto tendremos dos triángulos posibles, uno para cuando $\beta \in \mathrm{II}$:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta_1 + \gamma_1 = 180^\circ &\implies \gamma_1 = 180^\circ - \alpha - \beta_1 \\ c_1^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma_1 &\implies c_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma_1} \end{aligned}$$

Y otro para cuando $\beta \in \mathrm{I}$:

$$\begin{aligned} \alpha + \beta_2 + \gamma_2 = 180^\circ &\implies \gamma_2 = 180^\circ - \alpha - \beta_2 \\ c_2^2 = a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma_2 &\implies c_2 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma_2} \end{aligned}$$

Este es el único caso en el que tenemos dos soluciones.



$$\begin{aligned} \beta_1 &= \pi - \beta_2; \quad \beta_1 \in \mathrm{II} \\ \gamma_1 &= 180^\circ - \alpha - \beta_1 \\ c_1 &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{b}{a}\operatorname{sen}\alpha\right); \quad \beta_2 \in \mathrm{I} \\ \gamma_2 &= 180^\circ - \alpha - \beta_2 \\ c_2 &= \sqrt{a^2 + b^2 - 2\,a\,b\cos\gamma_2} \end{aligned}$$

Ejemplo: Problema de Eratóstenes

Eratóstenes nació en Cyrene (Actualmente Libia) en el año 276 a. C. Fue astrónomo, historiador, geógrafo, filósofo, poeta, crítico teatral, matemático y también gran amigo de Arquímedes. Estudió en Alejandría y Atenas. Alrededor del año 255 a. C fue el tercer director de la Biblioteca de Alejandría. Trabajó con problemas de matemáticas, como la duplicación del cubo y números primos. Escribió muchos libros de los cuales sólo se tienen noticias por referencias bibliográficas de otros autores.

Se considera que Eratóstenes fue el primero en medir, con un método científico, la longitud de circunferencia de la Tierra. Para ello utilizó la trigonometría.

Estudiando los papiros de la biblioteca, encontró un escrito que le llamó la atención: "en Siena (hoy Asuán, en Egipto) el día del solsticio de verano los objetos no proyectan sombra alguna y la luz del sol alumbra el fondo de los pozos". De aquí él dedujo que la ciudad estaba situada justamente sobre la línea del trópico (el trópico de Cáncer) y su latitud era igual a la de la eclíptica[4] *que ya conocía. Eratóstenes, suponiendo que Siena y Alejandría tenían la misma longitud (realmente distan* $3°$*) y que el sol se encontraba tan alejado de la Tierra que sus rayos podían suponerse paralelos, observó que en Alejandría el mismo día del solsticio de verano al mediodía los objetos sí proyectaban sombra. Este resultado fue muy importante para la época, ya que demostraba que la Tierra era esférica*[5]*. Midiendo la longitud de dicha sombra encontró que la ciudad distaba 1/50 parte de la circunferencia, es decir,* $7° \, 12'$ *de Alejandría.*

Posteriormente, midió la distancia entre ambas ciudades. Existen distintas versiones sobre cómo fue que midió esta distancia. Algunos dicen que contrató un regimiento de soldados que diera pasos de tamaño uniforme y los contara. Otros afirman que utilizó la distancia estimada por las caravanas que comerciaban entre ambas ciudades. También hay quienes creen que pudo obtener el dato en la propia Biblioteca de Alejandría.

Fijando la distancia entre las ciudades en 5.000 estadios, pudo calcular la circunferencia de la Tierra resultando de 250.000 estadios, de modo que a cada grado equivale, aproximadamente, a 700 estadios[6]*.*

Si suponemos que Eratóstenes usó el estadio equivalente a 185 m, resulta que la longitud de

[4] Se llama eclíptica al plano que contiene al sol y a la Tierra. El Ecuador tiene una inclinación de $23° \, 27'$ con respecto a la Eclíptica.

[5] Sólo dos personas que vivieron antes de Eratóstenes habían sugerido la idea de esfericidad de la Tierra. El primero fue Pitágoras, pero su idea se basaba en que la esfera era la figura geométrica perfecta y por lo tanto la Tierra, para ser perfecta, debía ser esférica. El segundo fue Aristóteles, su conclusión se basaba en dos cuestiones: la primera era que los viajeros que viajaban hacia el sur veían las constelaciones de ese hemisferio subir su posición en el horizonte. Eso sólo es posible si dicho horizonte se encuentra formando un ángulo con respecto al horizonte de alguien ubicado más al norte. Por lo tanto, la forma de la Tierra no podía ser plana. La segunda era que el borde de la sombra de la Tierra en la Luna durante la fase parcial de un eclipse lunar siempre es circular, sin importar cuan alta esté la Luna sobre el horizonte. La única figura geométrica cuya sombra proyectada en cualquier dirección es circular, es la esfera.

[6] Haciendo clic aquí podrás ver un video donde se cuenta esta historia.
(http://www.youtube.com/watch?v=H5kRZdsX7p4)

circunferencia de la Tierra es de 46250 km. Sin embargo, si suponemos utilizó el estadio egipcio (equivalente a 300 codos de 52,4 cm), la circunferencia calculada es de 39300 km.

El radio ecuatorial terrestre es de 6371 km, por lo tanto, la longitud de circunferencia sobre el Ecuador es igual a 40030 km. Esto significa que los cálculos de Eratóstenes fueron muy exactos considerando que los hizo hace más de 2200 años.

Resolución de problemas

Problema 1: Calcular:

$$\frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\operatorname{sen}(\pi-x)}\,\frac{\cos(3\pi-x)}{\cos(\pi+x)}+\sec^{-2}(-x)+\csc^{-2}(\pi-x)=$$

Para resolver este problema debemos utilizar las relaciones fundamentales y sus corolarios (funciones trigonométricas del ángulo opuesto, del ángulo doble y del ángulo mitad).

Analicemos factor por factor.

- $\operatorname{sen}(x+\pi)$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(x+\pi) &= \operatorname{sen}(x)\cos(\pi)+\cos(x)\operatorname{sen}(\pi)\\ &= \operatorname{sen}(x)\,(-1)+\cos(x)\,0\\ &= -\operatorname{sen}(x)\end{aligned}$$

- $\operatorname{sen}(\pi - x)$

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(\pi - x) &= \operatorname{sen}(\pi)\cos(x) - \cos(\pi)\operatorname{sen}(x) \\
&= 0\cos(x) - (-1)\operatorname{sen}(x) \\
&= \operatorname{sen}(x)
\end{aligned}$$

- $\cos(3\pi - x)$

$$\begin{aligned}
\cos(3\pi - x) &= \cos(3\pi)\cos(x) + \operatorname{sen}(3\pi)\operatorname{sen}(x) \\
&= \cos(2\pi + \pi)\cos(x) + \operatorname{sen}(2\pi + \pi)\operatorname{sen}(x) \\
&= \cos(\pi)\cos(x) + \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(x) \\
&= (-1)\cos(x) + 0\operatorname{sen}(x) \\
&= -\cos(x)
\end{aligned}$$

- $\cos(\pi + x)$

$$\begin{aligned}
\cos(\pi + x) &= \cos(\pi)\cos(x) - \operatorname{sen}(\pi)\operatorname{sen}(x) \\
&= (-1)\cos(x) - 0\operatorname{sen}(x) \\
&= -\cos(x)
\end{aligned}$$

- $\sec^{-2}(-x)$

$$\begin{aligned}
\sec^{-2}(-x) &= [\sec(-x)]^{-2} \\
&= \left[\frac{1}{\cos(-x)}\right]^{-2} \\
&= [\cos(-x)]^{2} \\
&= [\cos(x)]^{2} \\
&= \cos^2(x)
\end{aligned}$$

- $\csc^{-2}(\pi - x)$

$$\begin{aligned}
\csc^{-2}(\pi - x) &= [\csc(\pi - x)]^{-2} \\
&= \left[\frac{1}{\operatorname{sen}(\pi - x)}\right]^{-2} \\
&= [\operatorname{sen}(\pi - x)]^{2} \\
&= [\operatorname{sen}(\pi)\cos(x) - \cos(\pi)\operatorname{sen}(x)]^{2} \\
&= [0\cos(x) - (-1)\operatorname{sen}(x)]^{2} \\
&= [\operatorname{sen}(x)]^{2} \\
&= \operatorname{sen}^2(x)
\end{aligned}$$

Ahora juntamos todos los resultados y resolvemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{\operatorname{sen}(x+\pi)}{\operatorname{sen}(\pi-x)}\,\frac{\cos(3\,\pi-x)}{\cos(\pi+x)}+\sec^{-2}(-x)+\csc^{-2}(\pi-x)=\\
&=\frac{-\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)}\,\frac{-\cos(x)}{-\cos(x)}+\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)=\\
&=\frac{-\cancel{\operatorname{sen}(x)}}{\cancel{\operatorname{sen}(x)}}\,\frac{\cancel{-\cos(x)}}{\cancel{-\cos(x)}}+\cos^2(x)+\operatorname{sen}^2(x)=\\
&=-1\,.\,1+1=\\
&=0
\end{aligned}$$

Problema 2: Claudio y Daniel están a 53 metros uno de otro. Claudio, desde su posición, ve un cofre pirata, e inmediatamente mide el ángulo que el mismo forma con la posición de Daniel, resultando de 37°. Daniel, al advertirlo, mide enseguida el ángulo que forma el cofre con Claudio, resultando de 44°. Calcular quién de los dos se halla más cerca del cofre.

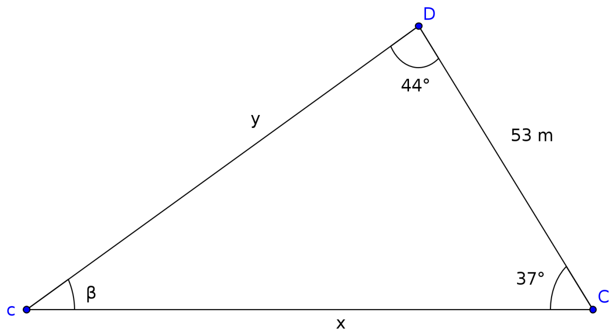
En estos problemas hay dos puntos importantes a tener en cuenta: uno es hacer el gráfico de la situación correctamente, y el otro es su resolución.

En el gráfico vamos a llamar C a la posición de Claudio, D a la posición de Daniel y c a la posición del cofre. Queda claro que éstos serán los vértices del triángulo.

Luego hay que reconocer los ángulos que corresponden a los datos del problema. Uno es el ángulo que mide Claudio, que es el ángulo que el cofre forma con Daniel. Esto quiere decir que el vértice del ángulo será Claudio.

El otro ángulo es el medido por Daniel, por lo tanto será el ángulo cuyo vértice es D.

Para poder saber quién está más cerca del cofre hay que calcular las longitudes de los segmentos $\overline{Cc}$ y $\overline{Dc}$. A estas distancias las llamaremos x e y respectivamente. Finalmente, nuestro esquema del problema es el siguiente:



Ahora para resolver el problema, primero vamos hallar la amplitud de ángulo restante, que llamaremos β. Esto lo hacemos utilizando el hecho de que los ángulos interiores suman 180°.

$$\begin{aligned} \beta + 37^\circ + 44^\circ &= 180^\circ \\ \beta &= 180^\circ - 37^\circ - 44^\circ \\ \beta &= 99^\circ \end{aligned}$$

Luego, para determinar los valores de x e y vamos a usar el teorema del seno. Primero busquemos x.

$$\begin{aligned}
\frac{\text{sen } \beta}{53\,\text{m}} &= \frac{\text{sen } 44^\circ}{x} \\
x &= 53\,\text{m}\,\frac{\text{sen } 44^\circ}{\text{sen } \beta} \\
x &= 53\,\text{m}\,\frac{\text{sen } 44^\circ}{\text{sen } 99^\circ} \\
x &\simeq 37{,}28\,\text{m}
\end{aligned}$$

Ahora hacemos el mismo procedimiento para halla el valor de y.

$$\begin{aligned}
\frac{\text{sen } \beta}{53\,\text{m}} &= \frac{\text{sen } 37^\circ}{y} \\
y &= 53\,\text{m}\,\frac{\text{sen } 37^\circ}{\text{sen } \beta} \\
y &= 53\,\text{m}\,\frac{\text{sen } 37^\circ}{\text{sen } 99^\circ} \\
y &\simeq 32{,}29\,\text{m}
\end{aligned}$$

Finalmente, encontramos que el que está más cerca del cofre es Daniel ya que se encuentra a una distancia de aproximadamente 32,29 m, mientras que Claudio se encuentra a una distancia de $\sim 37{,}28\,\text{m}$.

PRÁCTICA 5

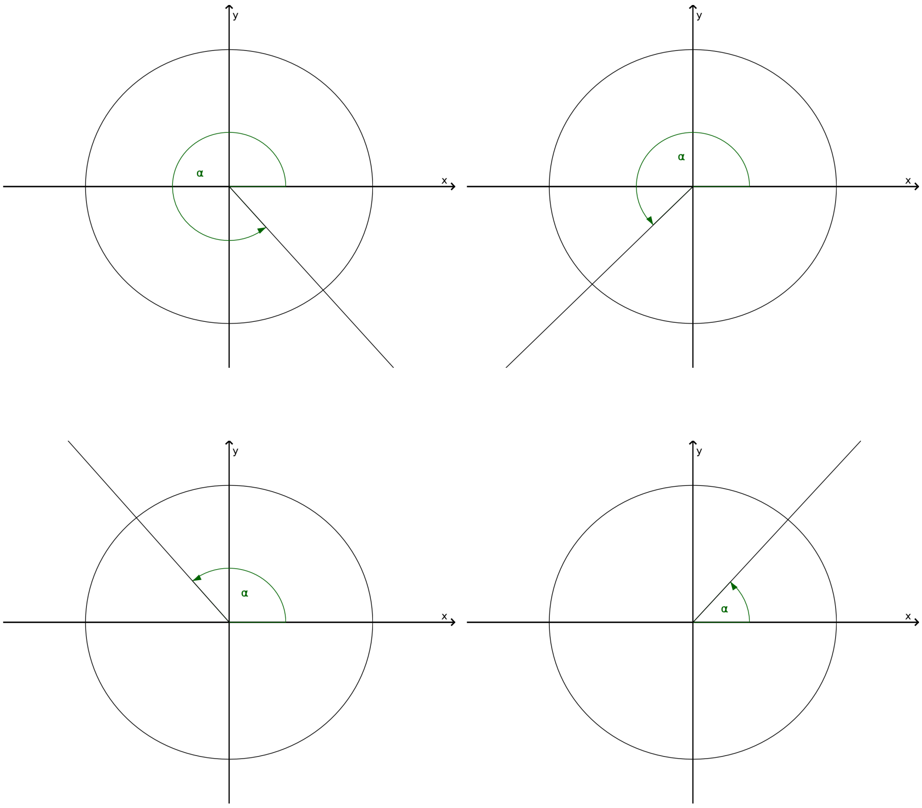
1. Calcula, en grados sexagesimales, el valor aproximado de cada uno de los siguientes ángulos: $\alpha = 1$ rad, $\beta = 8\pi$, $\gamma = \dfrac{\pi}{3}$ y $\delta = 3{,}5$.

2. Expresa los siguientes ángulos en radianes, dando las respuestas en función de π: $\rho = 150°$, $\epsilon = 210°$, $\lambda = 60°$ y $\mu = 315°$.

3. Completa el siguiente cuadro:

Sistema horario	Sistema sexagesimal	Sistema circular
	$270°$	
		$\frac{\pi}{6}$
12^{h}		
		$\frac{2}{3}\pi$
		$\frac{3}{4}\pi$
3^{h}		
	$20°$	
84^{h}		

4. Dibuja en cada una de las circunferencias trigonométricas los segmentos que representan al sen α, cos α y tan α.



5. Encuentra el valor de los ángulos, pertenecientes al intervalo $[0, 2\pi)$, que satisfacen las siguientes condiciones:

   a) $\operatorname{sen}(\delta) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   b) $\cos(\beta) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

   c) $\tan(\alpha) = 10^{10000}$

   d) $\operatorname{arc\,sen} 0 = x$

6. Calcula el valor de las restantes funciones trigonométricas, sin hallar el ángulo x, teniendo en cuenta los siguientes datos:

   a) $\operatorname{sen} x = \dfrac{1}{2}$ y $x \in \mathrm{I}$

   b) $\cos(2\,x) = \dfrac{1}{2}$ y $x \in \mathrm{III}$

   c) $\tan x = -\sqrt{3}$ y $x \in \mathrm{II}$

d) $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ y $x \in \text{IV}$

7. Marca con una cruz la opción correcta. Justifique.

a) Si $f(x) = \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, entonces $f(\pi/3)$ es igual a:

$$\square\ \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \square\ -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \square\ \frac{1}{4} \qquad \square\ \frac{1}{2}$$

b) Si $f(x) = -2\tan(-\pi - x)$, entonces $f(-\pi/6)$ es igual a:

$$\square\ -2\,\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \square\ 2\,\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \square\ \frac{-\sqrt{3}}{3} \qquad \square\ -\sqrt{3}$$

c) Si $f(x) = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$, entonces $f(-\pi/3)$ es igual a:

$$\square\ -\sqrt{3} \qquad \square\ \frac{\sqrt{3}}{3} \qquad \square\ \sqrt{3} \qquad \square\ -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

8. Resuelve.

a) $\cos(-x)\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \operatorname{sen}(\pi + x)\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) =$

b) $\dfrac{\operatorname{sen}(\pi + x) - 2\operatorname{sen}(-x)}{4\cos(\pi + x) + \cos(2\pi - x)} =$

c) $\dfrac{\cos(\pi - x)\cos(\pi + x)}{2\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)} =$

d) $\operatorname{sen}^3(\pi + x) - \cos^3\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) =$

e) $\tan(-x)\cos(\pi + x)(\csc x)^{-1} + \operatorname{sen}^2(\pi + x) + 2\cos^2(-x) =$

f) $\dfrac{\cos(\pi + y)}{\operatorname{sen}(\pi/2 - y)}\,\dfrac{\operatorname{sen}(2y)}{\operatorname{sen}(4\pi + y)}\,\tan(-y)\arccos(-1) + \operatorname{sen}(-y + \pi) =$

9. Utilizando las fórmulas del seno y el coseno para la adición y sustracción y la tabla dada en la reducción al primer cuadrante, calcula en forma exacta (sin hacer la cuenta en la calculadora):

a) $\operatorname{sen}(75^\circ)$

b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$

c) $\tan(15^\circ)$

d) $\csc\left(-\dfrac{5\,\pi}{12}\right)$

e) $\sec\left(\dfrac{7}{12}\,\pi\right)$

10. Simplifica la expresión mediante la aplicación de una fórmula de ángulo doble o semiángulo según corresponda:

a) $\operatorname{sen}(18^\circ)\,2\,\cos(18^\circ) =$

b) $\dfrac{1 - \cos(4\,\alpha)}{\operatorname{sen}(4\,\alpha)} =$

c) $-\operatorname{sen}^2(5\,\beta) + \cos^2(5\,\beta) =$

d) $\sqrt{\dfrac{1 - \cos(8\,\delta)}{2}} =$

11. Determina cuáles de las siguientes expresiones son identidades trigonométricas.

a) $\cos^2\alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\alpha$

b) $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = \tan\alpha$

c) $\tan\alpha\,.\,\cot\alpha = 1$

d) $\operatorname{sen}\alpha = 1 - \csc\alpha$

e) $\cos\alpha = (\sec\alpha)^{-1}$

f) $\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha = 1$

12. Verifica las siguientes identidades trigonométricas.

a) $\dfrac{1 + \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} + \tan\alpha = \dfrac{1 + \cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha\,.\,\cos\alpha}$

b) $\dfrac{1 + \tan\beta}{1 + \cot\beta} = \tan\beta$

c) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\beta}\,(1\,-\,\operatorname{sen}^2\beta)} + \tan^2\beta = \sec^2\beta$

d) $\dfrac{\operatorname{sen}(x\,+\,y)\,-\,\operatorname{sen}(x\,-\,y)}{\cos(x\,+\,y)\,+\,\cos(x\,-\,y)} = \tan y$

13. Plantea y resuelve cada uno de los siguientes problemas.

    a) ¿Cuál es el ángulo de elevación del sol cuando un mástil de 24 m proyecta una sombra de 16 m?

    b) ¿Cuál es la altura de una antena si una persona que se encuentra a 250 m de su base, observa la punta bajo un ángulo de 22°?

    c) ¿Cuál es el área de un pentágono regular de 40 cm. de perímetro?

    d) Un barrilete se encuentra a 40 m de altura y su cuerda tiene una longitud de 80 m. ¿Cuál es el ángulo que forma la cuerda con el piso?

    e) ¿Cuál es el área de un rombo de 4 cm. de lado y un ángulo interior de 67°?

    f) Un árbol está situado en la orilla de un río. El extremo superior del árbol, desde un cierto punto ubicado en la otra orilla del río, determina un ángulo de elevación de 17°. Si a 25 m de dicho punto y en dirección al árbol, el ángulo es de 35°, ¿cuál es la altura del mismo?

    g) Tres pueblos X, W y Z, están unidos por carreteras rectas. La distancia entre X y W es de 6 Km.; a los pueblos W y Z los separan 9 Km. El ángulo que forman las carreteras que unen X con W y W con Z es de 120°.¿Qué distancia hay entre X y Z?

    h) En una plazoleta de forma triangular, los lados miden 60 m, 75 m y 50 m ¿Qué ángulos se forman en las esquinas de las mismas?

    i) Un helicóptero viaja de una ciudad a otra, distantes entre si 40 Km. En un determinado momento, los ángulos que forman las visuales, desde el helicóptero, hacia las ciudades con la horizontal son de 14° y 26°, respectivamente. ¿Qué distancia hay en ese momento entre el helicóptero y las ciudades?

    j) María está mirando por la ventana cómo llega su hijo de la escuela. Cuando está parado en el cordón de la vereda de enfrente, lo ve con un ángulo de 40°, y cuando llega al cordón de la vereda de su casa, lo ve con un ángulo de 28°. Si el ancho de la calle es de 15 m, ¿a qué altura está la ventana?

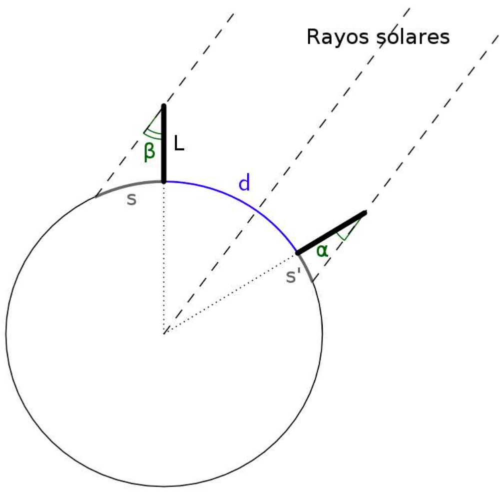
    k) Claudio observa un árbol desde la orilla opuesta de un río, mide el ángulo que forma su visual con el punto más alto del árbol y obtiene 43°; retrocede 10 m y mide un nuevo ángulo, obteniendo un resultado de 35°.¿Qué altura tiene el árbol?

l) Desde un acantilado se ve un barco. El ángulo que forman la visual y la vertical es de 37°. Cuando el barco se aleja 200 m más desde el acantilado, se ve con un ángulo de 52°.¿Cuál es la altura del acantilado y a qué distancia se encontraba el barco del acantilado originalmente?

14. **Problema de Eratóstenes**

Para poder realizar el cálculo de Eratóstenes tomando dos punto cualesquiera del mundo, lo que hay que tener en cuenta es que **ambos puntos deben tener la misma longitud.**

Entonces, vamos a suponer que tomamos dos postes de longitud L y los ubicamos en dos puntos diferentes, separados por una distancia d, sobre la superficie de la Tierra de modo que ambos estén sobre el mismo meridiano. Luego a la misma hora se miden las longitudes de sus sombras, siendo la sombra de uno de los postes de longitud s y la otra de longitud s'. Siguiendo el razonamiento de Eratóstenes calcule la longitud del radio terrestre (expresado en función de los datos del problema)[7].



[7]Sugerencia: Primero relea y comprenda bien el ejemplo dado anteriormente sobre el cálculo realizado por Eratóstenes. Luego, tenga en cuenta que los triángulos formados por el poste, su sombra y el rayo de sol son rectángulos.