CURVAS PLANAS, ECUACIONES PARAMETRICAS Y COORDENADAS POLARES

2.1 CURVAS PLANAS Y ECUACIONES PARAMETRICAS

Hasta ahora conocemos la representación de una grafica mediante una ecuación con dos variables. En este tema estudiaremos las situaciones en las que se emplean tres variables para representar una curva en el plano.

Antes de resolver algunos ejemplos de curvas en el espacio, introducimos un nuevo tipo de funciones, que se denominan funciones vectoriales; las cuales se aplican en números reales y vectoriales.

DEFICINION DE FUNCIONE VECTORIAL

Se llama asi a cualquier funcion de la forma:

$$r(t) = f(t)_i + g(t)_j \rightarrow Plano$$

$$r(t) = f(t)_i + g(t)_j + h(t)_k \rightarrow Espacio$$

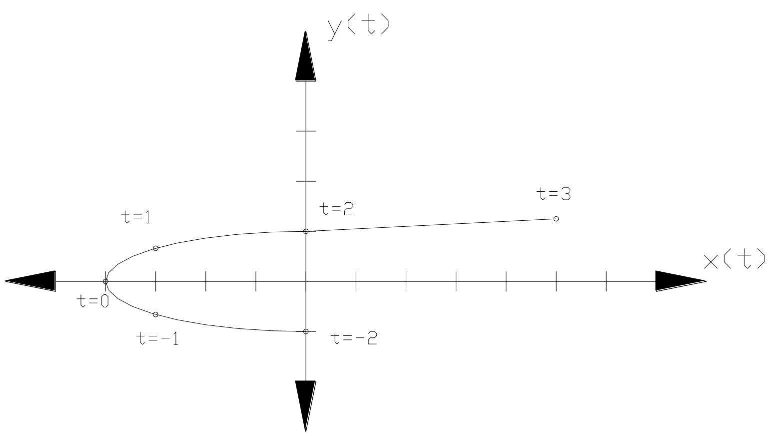
DEFINICION DE UNA CURVA PLANA

Si “f y g” son funciones continuas en “t” en un intervalo intervalo abierto I, entonces las ecuaciones x=f(t) y g(t) se les llama ecuaciones parámetros y a “t” se le llama parámetro. Al conjunto de puntos (x,y) que se obtienen cuando t varia sobre el intervalo I se le llama grafica de las ecuaciones paramétricas. A las ecuaciones paramétricas y a la grafica junta, es a lo que se llama curva plana, que se denota por C.

2.2 ECUACIONES PARAMETRICAS DE ALGUNAS CURVAS Y SE REPRESENTACION GRAFICA

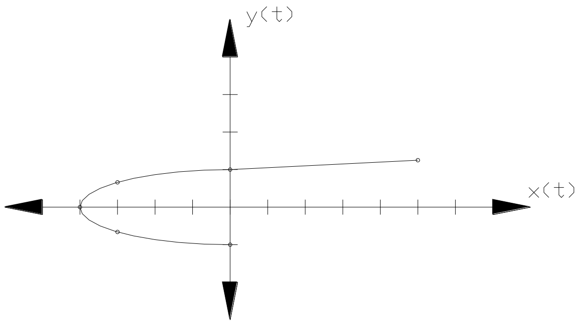
Ejemplo: Trazar la curva dada por las ecuaciones parametricas $x = t^2 - 4$ y $y = t/2$ en:

T	-2	-1	0	1	2	3
X	0	-3	-4	-3	0	5
Y	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2



Esbozar la curva dada por la ecuación paramétricas: $x = 4t^2 - 4$; $y = t$ desde $t \geq -1$, $t \leq 3/2$

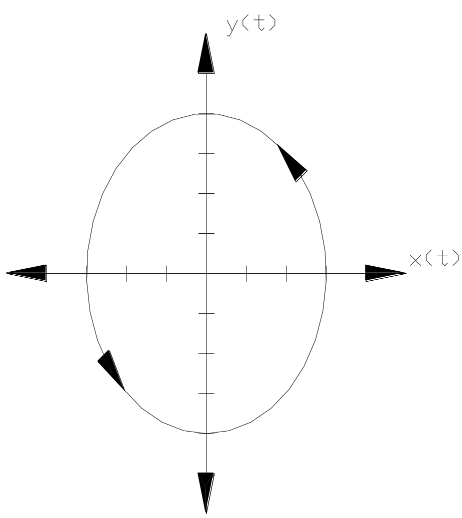
T	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2
X	0	-3	-4	-3	0	5
y	-1	-1/2	0	1/2	1	3/2


y(t)
x(t)

Trace la curva representada por $x = 3Cos\theta$ e $y = 4Sen\theta$ cuando $\theta \geq 0$ y $\theta \leq 2\pi$ encuentre también su ecuación paramétrica.

θ	0	π/2	π	3π/2	2π
X	3	0	-3	0	3
Y	0	4	0	-4	0

$$x = 3Cos\theta$$
$$y = 4Sen\theta$$
$$Cos\theta = x/3$$
$$Sen\theta = y/4$$
$$Cos^2\theta + Sen^2\theta = 1$$
$$\text{Re}\,escriviendo$$
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$



2.3 DERIVADA DE UNA FUNCION DADA PARAMETRICAMENTE

DEFINICIÓN DE LA DERIVADA DE UNA FUNCION VECTORIAL

La derivada de una función vectorial r se define como:

$$r'(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r(t+\Delta t) - r(t)}{\Delta t}$$

DEFINICION DE LA DERIVADA EN FORMA PARAMETRICA

Si una curva suave C viene dada por las ecuaciones $x = f(t)$, $y = g(t)$, la pendiente de C en (x,y) es:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \frac{dx}{dt} \neq 0$$

Partiendo de la función general de derivación (regla general) demuestre la definición de derivada en forma parametrica.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{g(t+\Delta t) - g(t)}{\Delta t}}{\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}} \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dg}{dt}}{\frac{df}{dt}} = \frac{dg}{df}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}$$

Hallar dy/dx para la curva dada por $x = Sent$ e $y = Cost$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{dCost}{dt}}{\frac{dSent}{dt}}=\frac{-Sent}{Cost}=-Tant$$

Dada: $x=\sqrt{t}$ e $y=\frac{1}{4}\left(t^2-4\right)$ con $t\geq 0$, encuentre el valor de su pendiente.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\frac{t}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{t}}}=t^{\frac{3}{2}}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left[\frac{dy}{dx}\right]=\frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{dy}{dx}\right]}{\frac{dx}{dt}}$$ Segunda Derivada

$$\frac{d^3y}{dx^3}=\frac{d}{dx}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]=\frac{\frac{d}{dt}\left[\frac{d^2y}{dx^2}\right]}{\frac{dx}{dt}}$$ Tercera Derivada

2.4.- LONGITUD DE ARCO EN FORMA PARAMETRICA.

LONGITUD DE ARCO EN FORMA PARAMÉTRICA.

Si una corva suave C dada por $x = f(t)$ y $y = g(t)$ no tiene auto intersecciones en el intervalo $a \leq t \leq b$, entonces la longitud de arco de C en el intervalo vine dada por:

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt$$

Ejemplos:

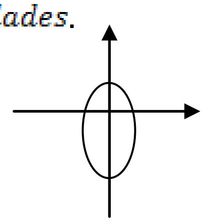
1.- Encuentre la circunferencia del elipse dada por las ecuaciones paramétricas; $x = 2\cos t;\ y = \sin t\ ;$ En $0 \leq t \leq 2\pi$

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left[\frac{d}{dt}(\cos t)\right]^2 + \left[\frac{d}{dt}(\sin t)\right]^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt$$

Se utiliza la identidad: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1,$ y tenemos que:

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{4(\sin t)^2 + (\cos t)^2}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4(1)}\ dt = 2\int_0^{2\pi} dt = (2t)\Big|_0^{2\pi}$$

$= 2(2\pi - 0) = 4\pi = 12.56\ unidades.$



2.- calcule la longitud de arco de un elicé circular descrito por:

$r(t) = 2\cos t_i + 2\sin t_j + t_k$ Desde $t = 0\ hasta\ t = 4\pi$

$$S = \int_0^{4\pi} \sqrt{\left(\frac{di}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dj}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dk}{dt}\right)^2}\, dt$$

$$S = \int_0^{4\pi} \sqrt{\frac{di}{dt}(2\cos t_i)^2 + \frac{dj}{dt}\left(2\sin t_j\right)^2 + \frac{dk}{dt}(t_k)^2}\, dt$$

$$S = \int_0^{4\pi} \sqrt{4\sin^2 t_i + 4\cos^2 t_j + 1}\ \ dt$$

$S = \int_0^{4\pi} \sqrt{4(\sin^2 t + \cos^2 t)}\ \ dt$ Se aplica la identidad $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$S = \int_0^{4\pi} \sqrt{4(1)+1}\ dt = \int_0^{4\pi} \sqrt{5}\ dt = \sqrt{5}\int_0^{4\pi} dt = \sqrt{5}t\,\Big|_0^{4\pi} = \sqrt{5}(4\pi - 0)$$

$S = 28.09\ unidades$

3.- calcule la longitud de arco descrito por un punto terminal de la representación de posición $r(t) = e^t \sin t_i + e^t \cos t_j$; conforme t incrementa de 1 a 4.

$r(t) = e^t \sin t_i + e^t \cos t_j\ ;\ \ donde\ t\ incrementa\ de\ 0\ a\ 4$

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \int_1^4 \sqrt{[e^t(\cos t) + e^t \sin t]^2 + [e^t(-\sin t) + e^t \cos t]^2}\, dt$$

$\frac{d}{dt}(e^t \sin t) = [e^t(\cos t) + e^t \sin t]^2$ $\qquad$ $\frac{d}{dt}(e^t \cos t) = [e^t(-\sin t) + e^t \cos t]^2$

$$S = \int_1^4 \sqrt{e^t}\sqrt{(\cos t + \sin t)^2 + (-\sin t + \cos t)^2}dt$$

$$S = \int_1^4 \sqrt{e^t}\sqrt{(\cos^2 t + 2\cos t \sin t + \sin^2 t) + [\sin^2 t + 2(-\sin t)(\cos t) + \cos^2 t]}dt$$

$$S = \int_1^4 \sqrt{e^t}\sqrt{2\cos^2 t + 2\sin^2 t}\, dt = \int_1^4 \sqrt{e^{2t}}\sqrt{2(\cos^2 t + \sin^2 t)}dt$$

$S = \int_1^4 \sqrt{e^{2t}}\sqrt{2(1)}\ dt\ = \int_1^4 \sqrt{e^{2t}}\cdot\sqrt{2}\ dt \quad \to\to\ \ \sqrt{e^{2t}} = (e^{2t})^{1/2} = \ e^t\cdot\sqrt{2}$

$$S = \sqrt{2}\int_1^4 \ e^t dt \ = \ \sqrt{2}\cdot e^t\,\Big|_1^4$$

$$S = \sqrt{2}\,(\ e^4 - \ e^1)$$

$S = 73.36\ unidades$

4.- calcule la longitud de arco descrito por un punto terminal de la representación de posición $r(t) = t_i + 3t_j; \quad en \;\; 0 \leq t \leq 4$.

$$S = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$$

$$S = \int_0^4 \sqrt{(1)^2 + (3)^2}\, dt \; = \int_0^4 \sqrt{10}\, dt \; = \sqrt{10} \int_0^4 dt \; = \sqrt{10}\, t \, \Big|_0^4$$

$$S = \sqrt{10}(4-0) \; = \; \sqrt{10}(4)$$

$$S = 12.6491\, ul$$

5.- Determine la longitud de arco de una curva cuyas ecuaciones paramétricas son: $x = t^3$ y $y = 2t^2$ en cada uno de los siguientes casos.

a) $t = 0$ a $t = 1$

b) t$= -2$ a $t = 0$

$$S = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\, dt \; = \int_0^1 \sqrt{(3t^2)^2 + (4t)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{9t^4 + 16t^2}\, dt$$

$$S = \int_0^1 \sqrt{t^2(9t^2 + 16)}\, dt \; = \int_0^1 \sqrt{t^2} \cdot \sqrt{(9t^2 + 16)}\, dt = \; \int_0^1 \sqrt{9t^2 + 16}\, dt$$

$$z = 9t^2 + 16 \; \rightarrow \; \frac{dz}{dt} = 18t \; \rightarrow \frac{dz}{18} = tdt$$

$$S = \int z^{1/2} \frac{dz}{18} = \frac{1}{18} \int z^{1/2} = \frac{1}{18}\left(\frac{z^{3/2}}{3/2}\right) = \frac{2}{54} z^{3/2} = \frac{1}{27}(9t^2 + 16)^{3/2} \; \Big|_0^1$$

$$S = \frac{1}{27}(9(1)^2 + 16)^{3/2} = \frac{1}{27}(25)^{3/2} = \frac{1}{27}\sqrt{(25)^3} = 4.6296ul.$$

$$S = 4.6296ul.$$

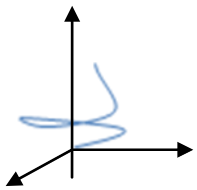
6.-Hallar la longitud de arco de una elicé circular con ecuación vectorial

$r(t) = \cos t_i + \sin t_j + \; t_k$ Desde el punto $(0{,}0{,}1)$ al punto $(2\pi, 0, \sqrt{16})$

$t = (1{,}4)$

$$S = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt \qquad = \int_1^4 \sqrt{(-\sin t)^2 + (\cos t)^2 + 1}\, dt$$

$$S = \int_1^4 \sqrt{1+1}\, dt = \sqrt{2}\int_1^4 dt = \sqrt{2}(t)\ \Big|_1^4 = \sqrt{2}(4-1) = \sqrt{2}(3) = 4.24ul$$



7.- encuentre la longitud de la curva $r(t) =< 2\sin t, 5t, 2\cos t >$,
cuando $-10 \leq t \leq 10$

$$S = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\, dt$$

$$S = \int_{-10}^{10} \sqrt{(4\cos t)^2 + (5t)^2 + (-\sin t)^2}\, dt$$

$$S = \int_{-10}^{10} \sqrt{4\cos^2 t + 25 + 4\sin^2 t}\, dt$$

$$S = \int_{-10}^{10} \sqrt{4(\cos^2 t + \sin^2 t) + 25}\, dt$$

$$S = \int_{-10}^{10} \sqrt{4(1)+25}\, dt = \int_{-10}^{10} \sqrt{29}\, dt = \sqrt{29}\int_{-10}^{10} dt$$

$$S = \sqrt{29}\,(t)\ \Big|_{-10}^{10}$$

$$S = \sqrt{29}\,(t)\ \Big|_{-10}^{10} = \sqrt{29}\,(20) = 107.703\ unidades\ lineal$$

Problemas para practicar: (Obtenidos de Larson vol. II sexta edición; problemas del 3 al 12. Sección 9.3. pág. 934)

Ecuaciones paramétricas	punto
$1.\ x = 2t,\ \ y = 3t - 1$	$t = 3$
$2.\ x = \sqrt{t},\qquad y = 3t - 1$	$t = 1$
$3.\ x = t + 1,\qquad y = t^2 + 3t$	$t = -1$
$4.\ x = t^2 + 3t,\qquad y = t + 1$	$t = 0$

$5. x = 2\cos\theta, \quad y = 2\sin\theta \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$

$6. x = \cos\theta, \quad y = 3\sin\theta \qquad \theta = 0$

$7. x = 2 + \sec\theta, \quad y = 1 + 2\tan\theta \qquad \theta = \frac{\pi}{6}$

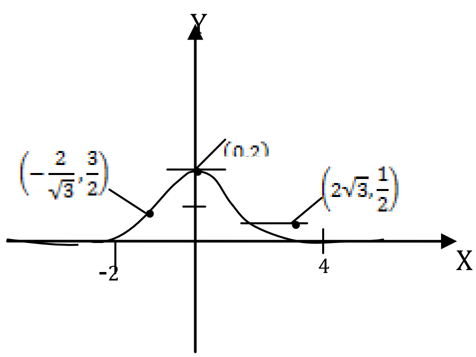
$8. x = \sqrt{t}, \quad y = \sqrt{t-1} \qquad t = 2$

$9. x = \cos^3\theta, \quad y = \sin^3\theta \qquad \theta = \frac{\pi}{4}$

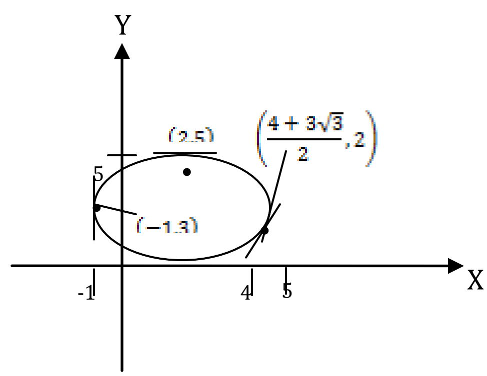
$10. x = \theta - \sin\theta, \quad y = 1 - \cos\theta \qquad \theta = \pi$

En los ejercicios 11 y12 encontrar una ecuación de la recta tangente en cada uno de los puntos indicados de la curva.

11.$x = 2\cot\theta;\ y = 2\sin^2\theta$



12.- $x = 2 - 3\cos\theta;\ y = 3 + \sin\theta$



(Obtenidos de Larson vol. ll sexta edición; problemas del 31 al 36. Sección 9.3. pág. 935)

Ecuaciones paramétricas punto

$31. x = e^{-t}\cos t, \quad y = e^{-t}\sin t \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$

$32. x = t^2, \quad y = 4t^3 - 1 \qquad -1 \le t \le 1$

$33. x = t^2, \quad y = 2t \qquad 0 \le t \le 2$

$34. x = arc\sin t, \quad y = \ln\sqrt{1-t^2} \qquad 0 \le t \le \frac{1}{2}$

$35. x = \sqrt{t}, \quad y = 3t - 1 \qquad 0 \le t \le 1$

36. $x = t, \qquad y = \frac{t^5}{10} + \frac{1}{6t^3} \qquad\qquad 0 \le t \le 2$

Ejercicios del de cálculo multivariable Stewart pág. 855 seccion13.3. Realizar 2 al 4.

2. $r(t) = \langle 2\sin t, 5t, 2\cos t\rangle, \qquad -10 \le t \le 100$

3. $r(t) = \sqrt{2}\, i + e^t j + e^t k, \qquad 0 \le t \le 1$

4. $r(t) = t^2 i + 2tj + \ln tk, \qquad 1 \le t \le e$

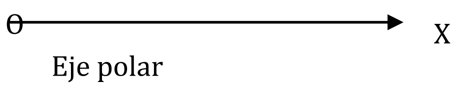
2.5.- COORDENADAS POLARES

Un sistema de coordenadas representa un punto en el plano por medio de un par ordenado de números, llamados coordenadas.

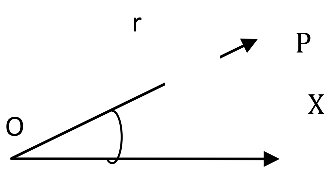
Hasta el momento en cursos anteriores hemos empleado el uso de coordenadas cartesianas, que son distancias dirigidas a partir de dos ejes perpendiculares.

En este tema describiremos un sistema de coordenadas introducido por newton llamado sistema de coordenadas polares.

Para ello elegimos un punto al que llamaremos polo u origen y luego lo identificamos con O.



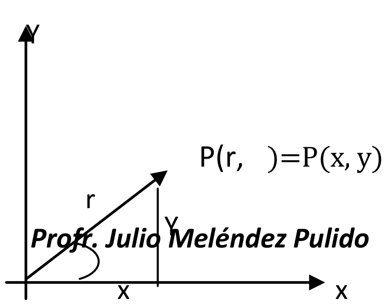
A continuacion trazamos un rayo que es una semirecta que comiensa en O y se denomina eje polar. Por lo general, este eje se traza con direccion orizontal hacia la derecha y corresponde al eje de las X positivas en las coordenadas cartesianos.



Si P es cualquier otro punto en el plano sea r la distancia d O a P y el ángulo (medio habitualmente medido en radianes) formado por el eje polar y la recta OP. Entonces el punto P esta representado por el par ordenado (r,) y r, se conocen como coordenadas polares de P.

En la siguiente figura se muestra la relación entre las coordenadas polares y las cartesianas, cuando el polo corresponde al origen y el eje polar coincide con el eje de las X positivas.

CARTESIANO POLAR



$$x = r\cos\theta; \qquad y = r\sin\theta \quad \rightarrow de\ polar\ a\ cartesiano$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{x}{y}$$

$\cos\theta = \frac{x}{r}$; $\sin\theta\,\frac{y}{r}$

Ejemplos:

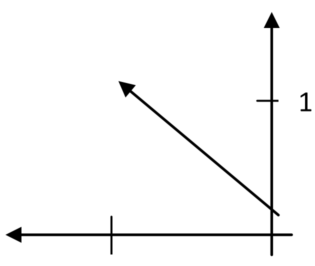
1.- Exprese el punto $(2, \pi/3)$ en coordenadas cartesianas.

$\pi = 180°$ $\qquad$ $x = 2\cos 180° = 1.7320$

$x = r\cos\theta$ $\qquad$ $x = 2\sin 180° = 1$

$y = r\sin\theta$ $\qquad$ $(x, y) = (1, \sqrt{3}) = (1{,}1.7320)$

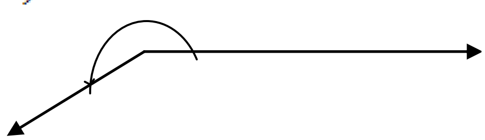
2.- Represente en coordenadas polares el punto $(1, -1)$



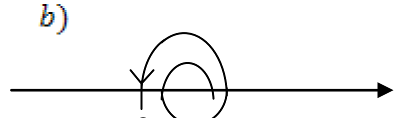
3.- grafique los puntos cuyas coordenadas polares se dan a continuación.

$a)\ \left(1, \frac{5}{4}\pi\right)$; $b)(2{,}3\,\pi)$; $c)\left(2, -\frac{2}{3}\pi\right)$ $d)\left(-3, \frac{3}{4}\pi\right)$

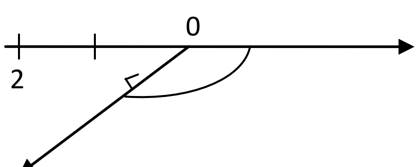
$a)$



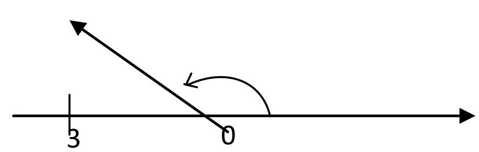
$b)$



$c)$



$d)$



4.- obtenga una ecuación cartesiana de la grafica que tiene la ecuación polar:

$r^2 = 4\sin 2\theta$

$r^2 = x^2 + y^2$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \rightarrow \quad r = valor$

$identidad\ \#\ 6 \ = \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta$

$2\sin\theta\cos\theta = 2\sin\theta$

$x^2 + y^2 = (4)\ (2\sin\theta\cos\theta)$

$\sin\theta\frac{y}{r}; \quad \cos\theta\frac{x}{r}$

$x^2 + y^2 = 8 \cdot \left(\frac{y}{r}\right)\left(\frac{x}{r}\right)$

$x^2 + y^2 = \frac{8xy}{r^2} = \quad x^2 + y^2 = \frac{8xy}{x^2+y^2} = 8xy$

5.-Reduzca la ecuación polar$< (r\cos^2\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 - 2a(r\cos\theta) - 2b(r\sin\theta) >= 0$:

Considere $b = 0$

$< (r\cos^2\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 - 2a(r\cos\theta) - 2b(r\sin\theta) >= 0$

$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta - 2a(r\cos\theta) - 2b(r\sin\theta) = 0$

$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2a(r\cos\theta) - 2b(r\sin\theta) = 0$

$r^2 = 2a(r\cos\theta) + 2b(r\sin\theta) = 0$

$r^2 = 2r(a\cos\theta + b\sin\theta) = 0$

$\frac{r^2}{r} = 2(a\cos\theta + b\sin\theta) = 0$

$r = 2(a\cos\theta)$

2.6.- GRAFICAS DE ECUACIONES POLARES.

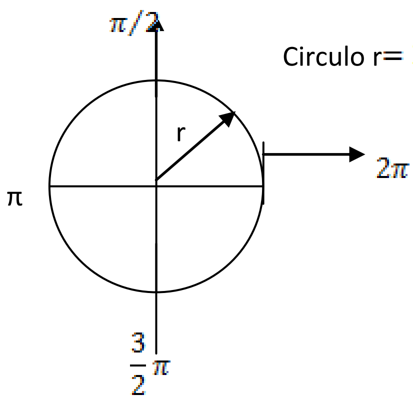
Una forma de representar la grafica de una ecuación en polares consiste en pasar a coordenadas rectangulares y después dibujar la grafica de la ecuación rectangular.

Ejemplos:

Describa la grafica de cada una de las siguientes ecuaciones en polares. Verifique cada descripción pasando a una ecuación rectangular.

$r = 2$ Representación polar: (r, θ)

Representación cartesiana: (x, y)

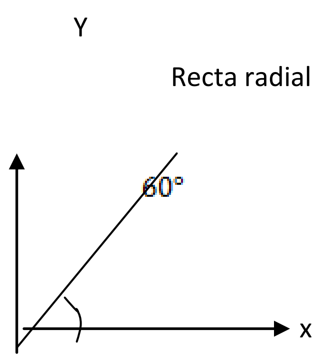


Circulo r$= 2$

$x = r\cos\theta\,;\quad y = r\sin\theta\,;\qquad r^2 = x^2 + y^2;\qquad \tan\theta\,\frac{y}{x}$

$r^2 = x^2 + y^2 \quad\rightarrow\quad x^2 + y^2 = r^2 \quad\rightarrow\quad x^2 + y^2 = (2)^2 \quad\rightarrow\quad x^2 + y^2 = 4$

2.- $\theta = \pi/3;$ $r = 0$



$\tan 60° = \frac{x}{y} \quad\rightarrow\quad \sqrt{3} = \frac{x}{y} \quad\rightarrow\quad y = \sqrt{3}x$

3.- $r = \sec\theta$

$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

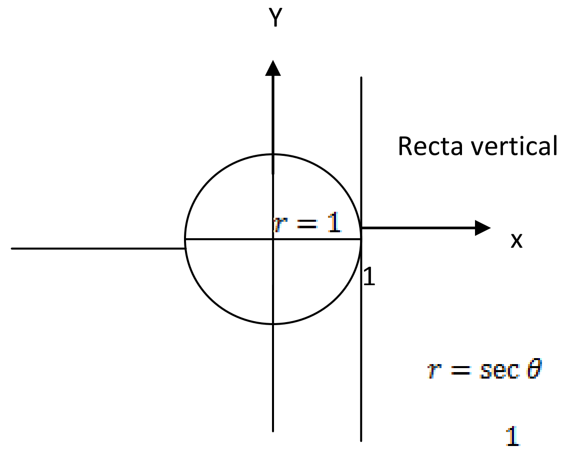
$r = \frac{1}{\cos 0°} = 1$

$r = \frac{1}{\cos 90°} = 0$

$r = \frac{1}{\cos 180°} = -1$

$$r = \frac{1}{\cos 270°} = 0$$

$$r = \frac{1}{\cos 360°} = 1$$



$r = \sec\theta$

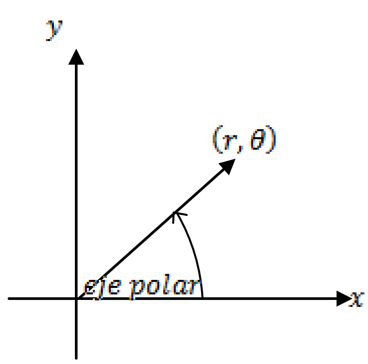
$$r = \frac{1}{\cos\theta}$$

$r\cos\theta = 1$

$r\left(\frac{x}{r}\right) = 1$

$r = 1$

4.- Trace la curva cuya ecuación es $\theta = 1$



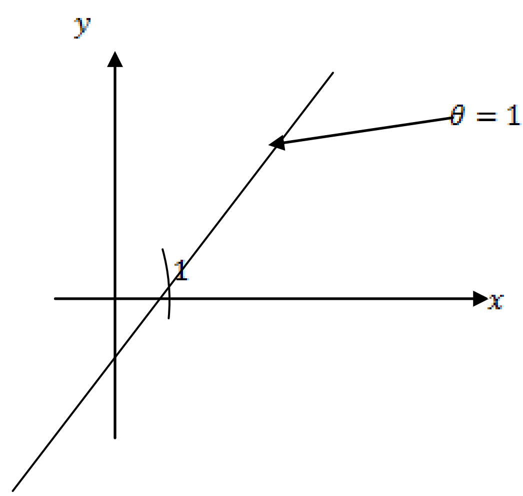
$1rad = 57.3°$

$\theta = rad$

$\pi = 180°$

$1 = x$

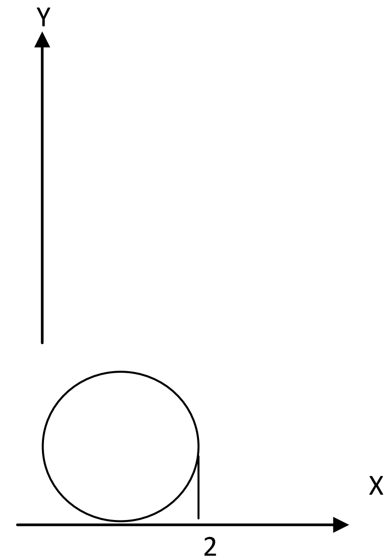
$$\frac{180°}{\pi} = 57.29 \sim 57.3°$$



5.- Trace la grafica de la ecuación polar: a) $r = 2\cos\theta$:, b) deduzca la ecuación cartesiana del comportamiento grafico obtenido en el inciso anterior.

a)

x	y
	r= $2\cos\theta$
0	2
$\pi/4$	$\sqrt{2}$
$\pi/2$	0
$3/4(\pi)$	$-\sqrt{2}$
π	-2



b)

$r = \cos\theta$

$x = \text{r}\cos\theta$

$r = \frac{x}{r}$

$r^2 = 2x \;\rightarrow\; como \;\; r^2 = x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = 2x$ ò $x^2 + y^2 - 2x =$

6.- Demuestre $r = c \;\; donde \; c = a$ cualquier constante dada: $r\cos\theta = 3$

$r = c$

$r \cos\theta = 3$

$r\left(\frac{x}{r}\right) = 3$

$x = 3$