Das Leitermodell als roter Faden in den Zahlenbereichserweiterungen

ANNIKA M. WILLE (ALPEN-ADRIA-UNIVERSITÄT KLAGENFURT)

Zahlenbereichserweiterungen in der Sekundarstufe sind für Schülerinnen und Schüler häufig mit Schwierigkeiten verbunden. Dabei können graphische oder gegenständliche Darstellungsmittel helfen, in einer inhaltlichen Phase Grundvorstellungen aufzubauen, auf die Lernende auch in späteren formalen Phasen zurückgreifen können. Eines dieser Darstellungsmittel ist das *Leitermodell*, das den Zahlenstrahl aufrecht stellt und mit Sprossen versieht. Ziel dieses Artikels ist es, zu veranschaulichen, wie das Leitermodell als roter Faden in den Zahlenbereichserweiterungen der Sekundarstufe verwendet werden kann.

1. Zahlbereichserweiterungen in der Sekundarstufe

1.1. Aufbau und Wandel von Grundvorstellungen

Bei Zahlenbereichserweiterungen von den natürlichen Zahlen, über rationale Zahlen zu den reellen Zahlen und in der Sekundarstufe 2 möglicherweise bis zu den komplexen Zahlen müssen Schülerinnen und Schüler passenden Zahlenvorstellungen aufbauen und teilweise Vorstellungen wandeln, die nicht mehr passen.

Der Aufbau von Grundvorstellungen (vgl. vom Hofe 1996; Malle 2004; Ulovec 2007) ist zentral, damit sich Lernende die Zahlenbereiche verständnisvoll erschließen können, anstatt Operationen ausschließlich schematisch zu trainieren. Malle (2004) schreibt dazu:

> „Der wahrscheinlich größte Fehler des traditionellen Unterrichts besteht darin, dass zu schnell auf eine formal-regelhafte Ebene aufgestiegen wird, bevor noch ausreichende intuitive und anschauliche Vorstellungen vom jeweiligen Stoff erworben wurden.“ (S. 4)

Einen Überrblick über die Veränderung von Zahlendarstellungen und Vorstellungen zu Zahlen, zur jewei-ligen Ordnungsrelation und zu den Operationen bei den Zahlenbereichserweiterungen von den natürli-chen zu den komplexen Zahlen gibt Ulovec (2007, S. 15). Daran wird ersichtlich, dass bei Zahlenbe-reichserweiterungen nicht nur etwas dazu gewonnen wird, sondern auch Darstellungen und Vorstellun-gen eingeschränkt werden.

So verliert man beispielsweise beim Übergang zu den rationalen Zahlen die Eindeutigkeit der Zahlen-darstellung, die für natürliche Zahlen im dezimalen Stellenwertsystem gegeben ist, und auch die Vor-stellung, dass eine Zahl das Ergebnis eines Zählvorgangs sein kann. Das heißt, manche Vorstellungen, die eine Schülerin oder ein Schüler beim Umgang mit einem bestimmten Zahlenbereich erworben hat, tragen nach einer Erweiterung des Zahlenbereichs nicht mehr.

Lernende wundern sich beispielsweise darüber, dass dieselbe Bruchzahl verschiedene Darstellungen haben kann, dass bei der Multiplikation von Brüchen das Produkt kleiner werden kann als einer der Faktoren, dass bei negativen Zahlen -5 kleiner sein soll als -1 oder dass $\sqrt{2}$ eine Zahl sein soll, obwohl sie doch eine Vorschrift zum Ausrechnen sei (vgl. Swan 2001, Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006)

Gerade die Wandlungen der Vorstellungen, die beim Lernenden erforderlich sind, stellen „eine bedeutende Fehlerquellen im Umgang mit neuen Zahlenbereichen“ dar (vgl. Hefendehl-Hebeker & Prediger 2006). Entscheidend ist also, den Aufbau und die Wandlung von Grundvorstellungen zu unterstützen, die für den jeweiligen Zahlenbereich, dessen Ordnung und Operationen tragend sind.

1.2. Gegenständliche und nicht-gegenständliche Darstellungsmittel

Grundvorstellungen können auf gegenständlichen Handlungserfahrungen beruhen oder auf nicht-gegenständlichen Darstellungsmittel, wie beispielsweise der Zahlengerade. Wenn Schülerinnen und Schüler in

Schriftenreihe zur Didaktik der Mathematik der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft (ÖMG), Heft 49, 2016, S. 119 - 130

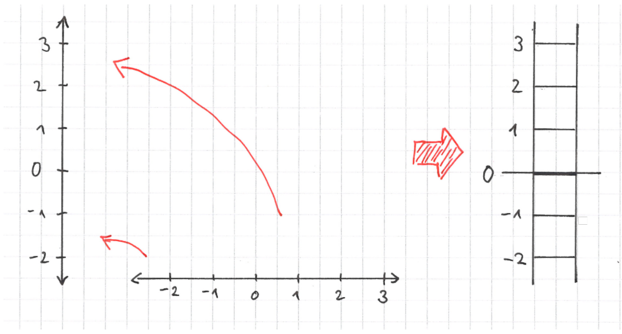

Abb. 1: Das Leitermodell: Der Zahlenstrahl wird aufrecht gestellt.

einer inhaltlichen Phase *enaktive* und *ikonische* Vorerfahrungen in einem Zahlenbereich machen, dann ist es möglich, dass sie in einer späteren formalen Phase bei der Verwendung von *symbolischer* Formelsprache auf diese zurückgreifen (vgl. EIS-Prinzip nach J. Bruner; auch Büchter & Haug 2013).

Verschiedene gegenständliche und nicht-gegenständliche Darstellungsmittel werden bei Zahlenbereichserweiterungen verwendet: zum Beispiel Kreise (oder Pizzen), Papierfaltungen, Rechtecke oder die Zahlengerade.

Es kann dabei sinnvoll sein, innerhalb eines Zahlenbereiches ein solches Darstellungsmittel zu wählen, mit dem ein Vorstellungsaufbau bei unterschiedlichen Operationen möglich ist. Wählt man beispielsweise bei der Einführung der negativen Zahlen einen Kontext, der zwar bei der Addition und Subtraktion trägt, jedoch nicht mehr für die Multiplikation, so beschreiben vom Hofe und Hattermann (2014, S. 6), dass ein Lehrender sich hier leicht „verzetteln“ könne.

Im Folgenden soll nun das *Leitermodell* vorgestellt werden, ein Darstellungsmittel, das gegenständlich und nicht-gegenständlich verwendet werden kann und das sich als roter Faden durch die Zahlenbereichserweiterungen ziehen kann. Das Leitermodell soll andere Darstellungsmittel nicht ersetzen, kann aber als Grundmodell dienen, welches dann mit anderen in Beziehung gesetzt werden kann.

2. Das Leitermodell

2.1. Der Zahlenstrahl als Leiter

Das *Leitermodell* wurde vom Bremer Lehrer Klaus Lies für seinen Unterricht (2002 bis 2006) entwickelt und später ebenfalls von Halverscheid, Henseit & Lies (2006) eingesetzt und untersucht. Dabei wird der Zahlenstrahl aufrecht gestellt und mit Sprossen versehen (siehe Abb. 1).

Um *Vielfache* darzustellen, werden Sprossen weggelassen, bei *Bruchzahlen* werden weiteren Sprossen eingefügt und bei *ganzen Zahlen* geht die Leiter nach unten weiter (siehe Abb. 2).

Bei den *reellen Zahlen* stößt das Modell an seine Grenzen, da eine mit Sprossen lückenlos versehene Leiter schwer vorstellbar ist[1]. Verwendet man nun den Zahlenstrahl als Darstellungsmittel, so kann die Ähnlichkeit zwischen Leitermodell und Zahlenstrahl den Darstellungswechsel erleichtern.

Nachfolgend wird in unterschiedlichen Zahlenbereichen veranschaulicht, wie das Leitermodell verwendet werden kann. Die Auflistungen sind nicht im Sinne einer umfassenden Aufzählung zu verstehen, sondern sie sollen exemplarisch einen Einblick in die Möglichkeiten dieses Darstellungsmittels geben.

2.2. Das Leitermodell bei natürlichen Zahlen

[1] Das zeichnerische Problem, dass rationale Zahlen auf dem Zahlenstrahl dicht liegen, umgeht man, indem man nur für verschiedene Nenner verschiedene Leitern zeichnet, z.B. die „Halbe-Leiter“ und die „Drittel-Leiter“.

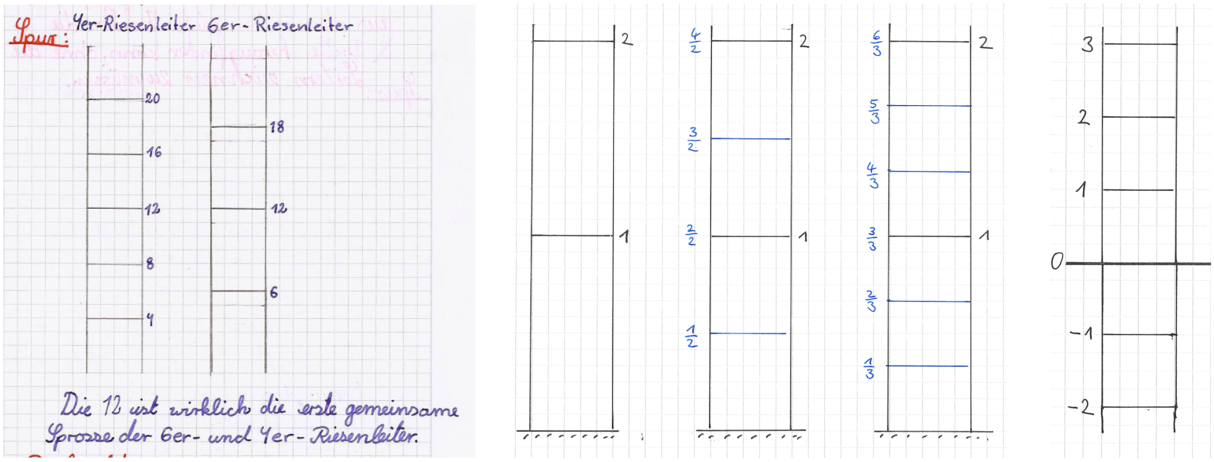

Abb. 2: Darstellung von Vielfachen, Bruchzahlen und ganzen Zahlen.

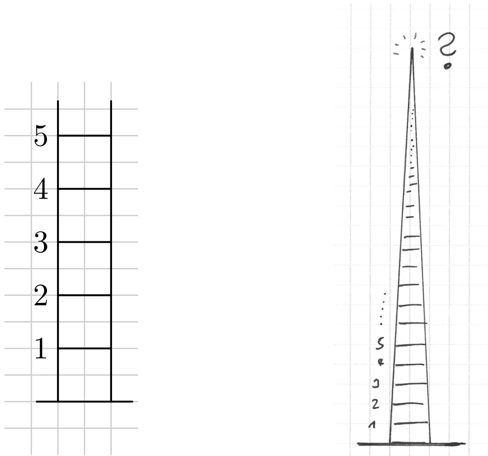

Abb. 3: Darstellung von natürlichen Zahlen und die Frage nach der größten Zahl.

Bei den natürlichen Zahlen steht jede Sprosse für die Anzahl der Sprossen bis zu dieser Höhe. Eine Möglichkeit der Verwendung ist, die *Unendlichkeit* in den Blick zu nehmen. So kann mit Hilfe von Leiterdarstellungen (siehe Abb. 3) die Frage angeregt werden, ob es eine höchste Sprosse gibt (Wille 2016).

Eine weiteres Thema, das mit dem Leitermodell veranschaulicht werden kann, ist das Stellenwertsystem. So können beispielsweise zunächst die Viererzahlen der „Vieruaner“ (Zahlen zur Basis 4) erkundet werden (siehe Abb. 4). Mögliche Fragestellungen sind:

- Die „Vieruaner“ können nur die Ziffern 0,1,2,3 schreiben. Wie schreiben sie ihre Zahlen auf, wenn sie zählen? Schreibe sie an deine Leiter!
- Welche Zahl meinen die Vieruaner, wenn sie 10 schreiben?
- Welche Zahl meinen sie, wenn sie 100 schreiben?

Danach kann die Aufmerksamkeit zum Dezimalsystem gelenkt werden mit der Frage, was es bei „unseren“ Zahlen bedeutet, „eine Null dranzuhängen“.

Schülerinnen und Schüler können Vielfache einer Zahl betrachten mit sogenannten „Riesenleitern“, bei denen Sprossen weggelassen werden (siehe Abb. 5). Legen Schülerinnen und Schüler verschiedene Riesenleitern nebeneinander, so können jeweils kleinste gemeinsame Vielfache als erste gemeinsame Sprosse entdeckt werden. Ebenso kann Teilbarkeit veranschaulicht werden. So teilt beispielsweise die Zahl 3 die 12, weil 12 eine Sprosse auf der 3er-Riesenleiter ist. Eine Aufgabenstellung zum Weiterdenken kann

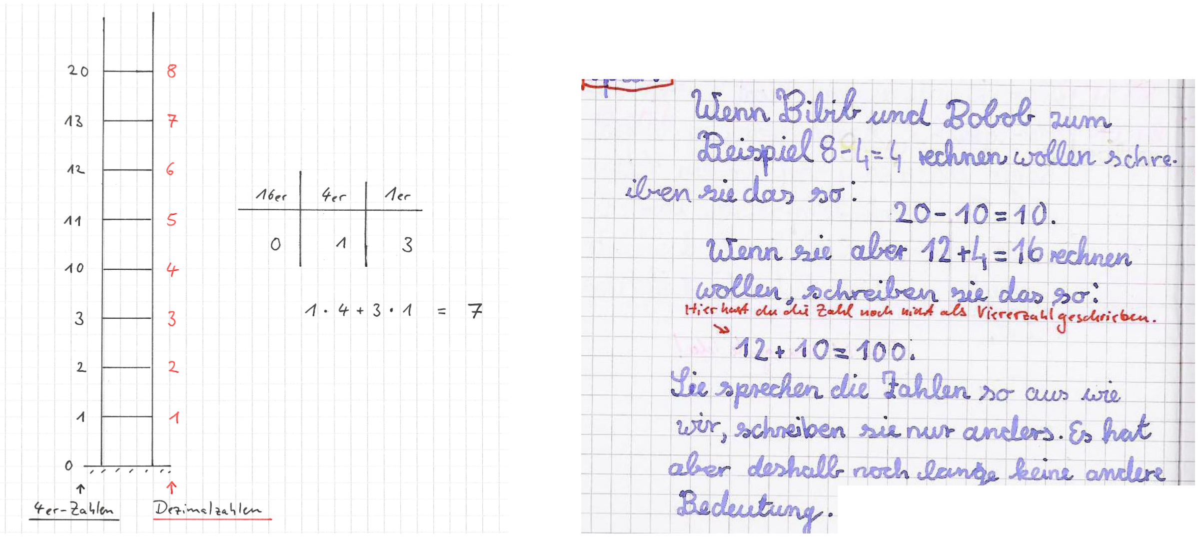

Abb. 4: Zahldarstellungen zur Basis 4 und wie eine 10 Jahre alte Schülerin die „Viererzahlen“ beschreibt.

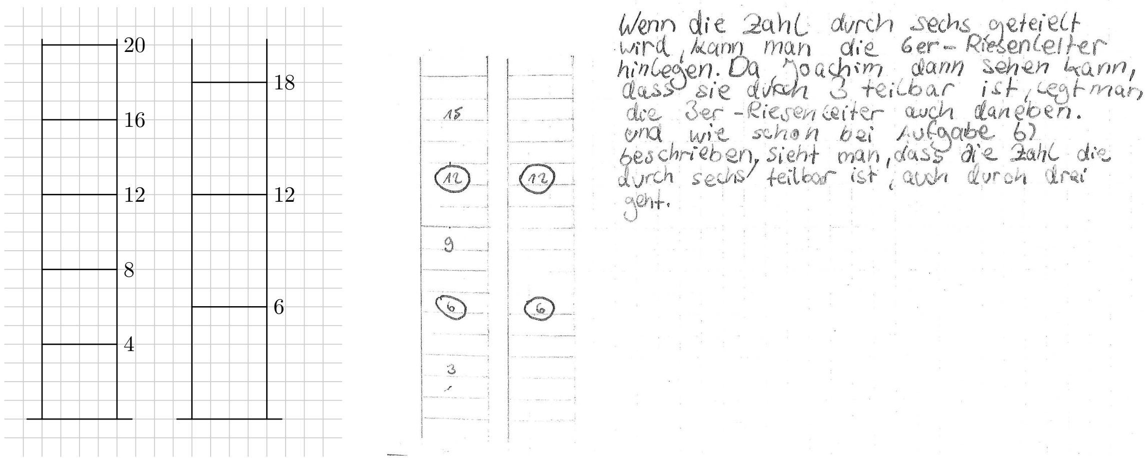

Abb. 5: Darstellung von Vielfachen durch „Riesenleitern“ und die Bearbeitung einer Teilbarkeitsaufgabe durch eine 10 Jahre alte Schülerin.

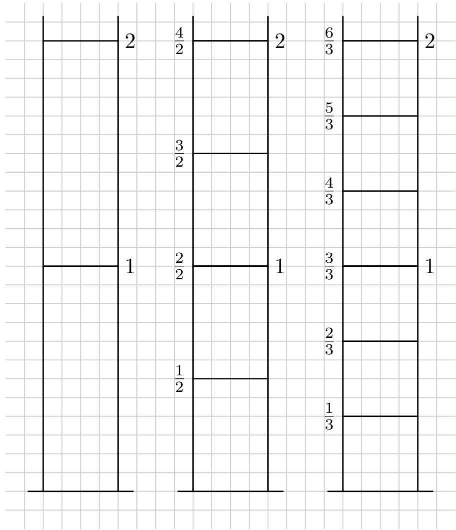

Abb. 6: Darstellung von Bruchzahlen mit normierten Leitern.

zum Beispiel so lauten:

> Joachim sagt: „Wenn ich weiß, dass eine Zahl durch 6 teilbar ist, dann weiß ich auch schon, dass sie durch 3 teilbar ist. Das kann ich ganz genau an den Leitern sehen.“ Was hat sich Joachim wohl gedacht?

Was eine Schülerin einer gymnasialen Klasse der Jahrgangsstufe 5 zu der Frage schrieb und zeichnete, ist ebenfalls in Abb. 5 zu sehen. Sie umkreiste dabei die Sprossen, die auf der 6er-Riesenleiter sind auch auf der 3er-Riesenleiter.

2.3. Das Leitermodell bei rationalen Zahlen

Bei Bruchzahlen ist es wie bei den Riesenleitern hilfreich sie auszuschneiden, um sie enaktiv zu nutzen. Beispielsweise können die Leitern so normiert sein, dass die 1 jeweils zwölf Kästchen hoch ist. Auf die Weise entstehen 1er-, $\frac{1}{2}$-, $\frac{1}{3}$-, $\frac{1}{4}$-, $\frac{1}{6}$- und $\frac{1}{12}$-Leitern (siehe Abb. 6 für die 1er-, $\frac{1}{2}$- und $\frac{1}{3}$-Leiter).

Zahlendarstellung, Erweitern und Kürzen

Die Bruchleitern können jetzt von den Schülerinnen und Schülern zur Hand genommen werden, um gleich hohe Sprossen zu finden oder um bei der Addition Leitern aneinander zu setzen. Eine mögliche Aufgabenstellung ist hier, zunächst Zahlen, die zu gleich hohen Sprossen gehören, herausschreiben zu lassen. Daraufhin kann man genau die Bruchzahlen betrachten, die auf gleicher Höhe liegen und sich fragen, was diese Zahlen ausmacht.

Die Schülerinnen Anna und Emma entdecken beispielsweise, was weitere Zahlendarstellungen der Sprossen sind, die den natürlichen Zahlen entsprechen (siehe Abb. 7 und 8).

Die Grundvorstellung des *Erweitern* und *Kürzens* als *Verfeinern* und *Vergröbern* zeigt sich nun durch mehr, bzw. weniger Sprossen auf der Leiter (siehe Abb. 9).

Schließlich kann man veranschaulichen, warum man bei der Erweiterung von $\frac{4}{3}$ zu $\frac{8}{6}$, sowohl der Nenner als auch Zähler mit 2 multipliziert: Da die Sechstel-Leiter zweimal so viele Sprossen hat, ist der Zähler doppelt so groß wie bei der Drittel-Leiter. Bei doppelt so vielen Sprossen, muss man aber auch doppelt so viele Sprossen nach oben steigen, um auf die gleiche Höhe zu kommen. Also wird auch der Zähler 4 mit 2 multipliziert.

Bei einer weiteren Fragestellung nach der Bedeutung des Gleichheitszeichen, wird noch einmal deutlich, wie Anna mit sich die Nicht-Eindeutigkeit der Darstellung von Bruchzahlen erklärt: $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{6}$ haben zwar

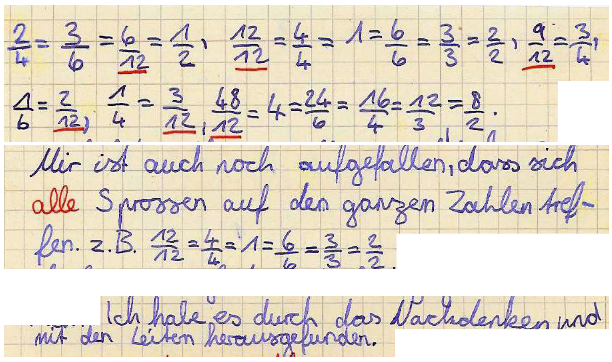

Abb. 7: Anna, 10 Jahre alt, entdeckt Zahlendarstellungen der ganzen Zahl 1.

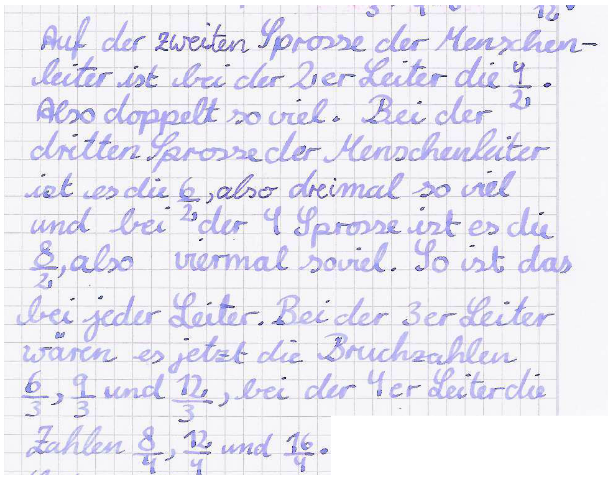

Abb. 8: Emma, 10 Jahre alt, entdeckt den Zusammenhang zwischen ganzen Zahlen und unterschiedlichen Bruchzahldarstellungen.

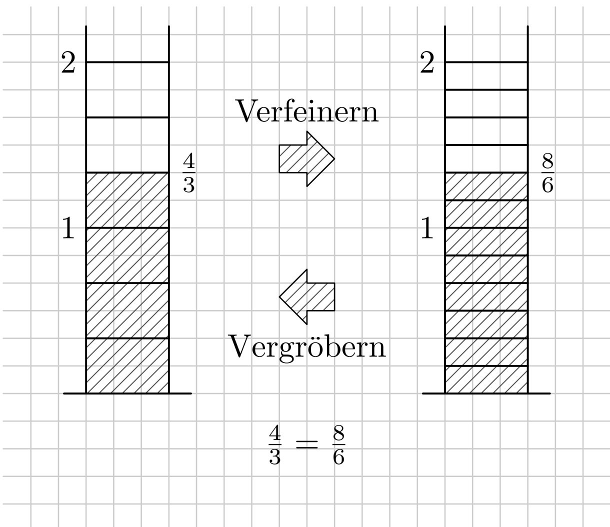

Abb. 9: Die Grundvorstellung des *Erweitern* und *Kürzens* als *Verfeinern* und *Vergröbern*.

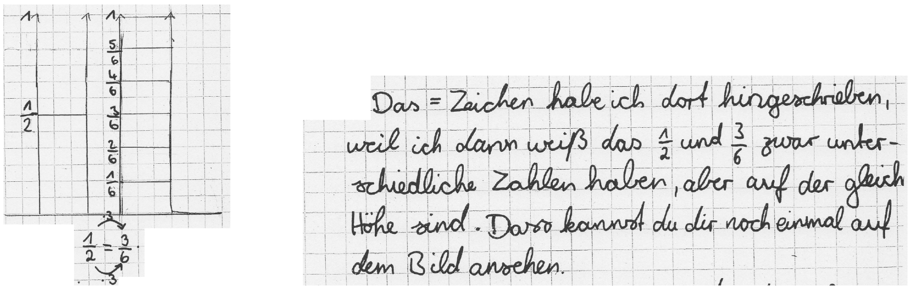

Abb. 10: Anna beschreibt die Gleichheit von verschieden dargestellten Bruchzahlen durch die gleiche Höhe im Leitermodell.

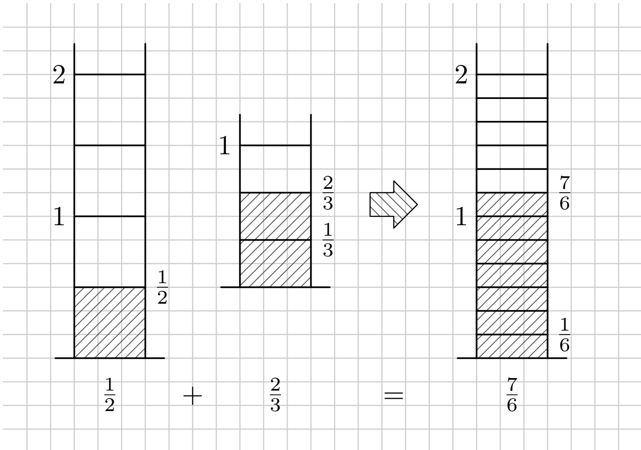

Abb. 11: *Addieren* als *Hinzufügen*: $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$

„unterschiedlichen Zahlen" (wobei sie vermutlich die unterschiedlichen Zähler und Nenner meint), sind aber „auf der gleichen Höhe" (siehe Abb. 10).

Bruchzahloperationen

Durch die Grundvorstellungen des *Addierens* und *Subtrahierens* als *Hinzufügen* und *Wegnehmen* kann durch das Anlegen verschiedener Leitern aufgebaut werden (siehe Abb. 11).

Die *von-Deutung* der *Multiplikation* von Bruchzahlen ist auf zwei verschiedene Weisen möglich. Bei der ersten Veranschaulichung kann die Höhe der Sprosse im Blick liegen. Bei beispielsweise $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ in der Bedeutung „$\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$", wird an die Drittel-Leiter eine Viertel-Leiter angelegt, die ihre 1 genau auf der Höhe von der $\frac{2}{3}$-Sprosse hat. $\frac{3}{4}$ von dieser Höhe ist nun niedriger als die $\frac{2}{3}$-Sprosse selbst, Multiplizieren vergrößert also nicht nur (siehe Abb. 12, linkes Bild).

Was bei dieser Darstellung weniger ersichtlich ist, ist wie man bei der Multiplikation operiert. Das wird bei der zweiten Veranschaulichung deutlicher, die die Fläche zwischen der Sprosse und dem Erdboden in den Blick nimmt. Im Beispiel $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$ (siehe Abb. 12, rechtes Bild) wird eine Viertelleiter gezeichnet und die Fünftel-Leiter horizontal darunter gelegt, so dass die Fläche zwischen der ersten Sprosse der Viertel-Leiter und dem Erdboden genau 4 mal 5 Kästchen beträgt. Die schraffierte Fläche, die der Multiplikation $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ entspricht kann nun auf einer Zwanzigstel-Leiter veranschaulicht werden, die genau ein Kästchen breit ist und bei der die 1 genau 20 Kästchen hoch ist.

Diese zweite Darstellung hat, ähnlich wie übliche Rechtecksdarstellungen bei der Multiplikation von Brüchen, den Vorteil, dass ersichtlich wird, woher die Zwanzigstel kommen, dagegen wird es schwierig, wenn der erste Faktor größer als 1 ist im Gegensatz zur ersten Veranschaulichung.

Grundvorstellungen bei der *Division* von Bruchzahlen sind das *Teilen*, wenn der Divisor eine natürlich

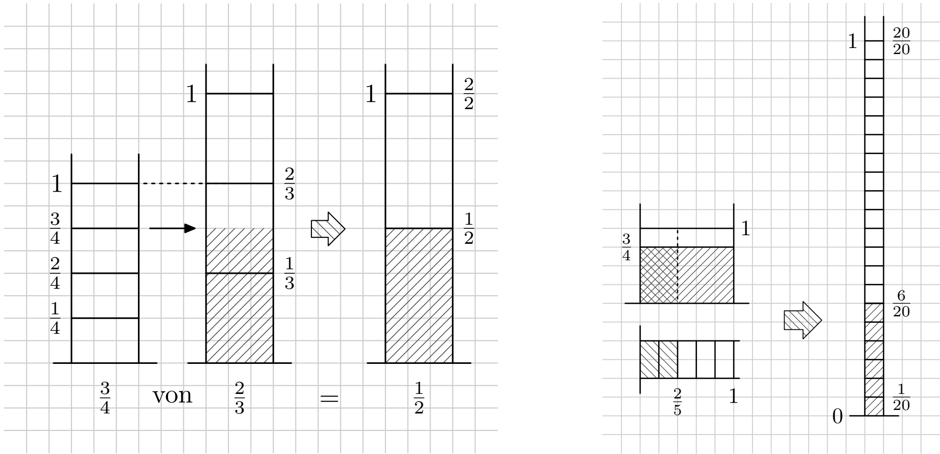

Abb. 12: *Multiplizieren*: $\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3}$ als „$\frac{3}{4}$ *von* $\frac{2}{3}$“ und $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$ als „$\frac{2}{5}$ *von* $\frac{3}{4}$“

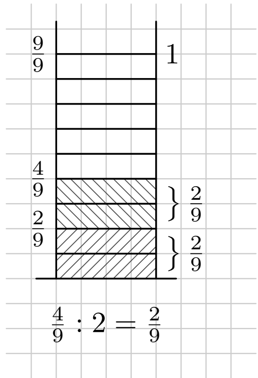

Abb. 13: *Dividieren* als *Teilen*, wenn der Divisor eine natürliche Zahl ist: $\frac{4}{9} : 2$

Zahl ist (siehe Abb. 13) und das *Aufteilen*, wenn der Quotient eine natürliche Zahl ist (siehe Abb. 14). Beides lässt sich mit dem Leitermodell veranschaulichen. Am Beispiel $3 : \frac{1}{2}$ kann beispielsweise verdeutlicht werden, warum die Division vergrößern kann, da hier die Frage ist, wie oft $\frac{1}{2}$ in die 3 hineinpasst.

Bei Divisionen, bei denen weder der Divisor noch der Quotient eine natürliche Zahl ist, wie zum Beispiel bei $\frac{4}{9} : \frac{3}{5}$, ist weder Teilen noch Aufteilen möglich. Malle (2004) schreibt hierzu:

> „Wir stoßen hier zum ersten Mal auf eine Rechnung, für die keine sinnvolle Grundvorstellung existiert. Diese Division kann daher nur als eine formale Rechnung betrachtet werden, die nach bestimmten Regeln ausgeführt wird.“

Anstatt mit Darstellungsmitteln zu argumentieren, kann man hier nach dem *Permanenzprinzip* dazu kommen, die Division als Umkehroperation der Multiplikation anzusehen (vgl. Padberg 2002, S. 165-166).

Das Leitermodell bei negativen Zahlen

Beim Übergang von den *natürlichen Zahlen* zu den *ganzen Zahlen* oder von den *positiven rationalen Zahlen* zu den *rationalen Zahlen*, hilft zunächst die Leiterdarstellung bei der Vorstellung, welche Zahl kleiner, im Sinne von weiter unten ist, und welche größer, im Sinne von weiter oben (siehe Abb. 15).

Mit Blick auf die späteren Operationen, vor allem das Multiplizieren, bietet sich hier das *Pfeilmodell* an. Von Fast und vom Hofe (2014) (vgl. auch vom Hofe & Hattermann 2014) beschrieben das Pfeilmodell am Zahlenstrahl. Es lässt jedoch sich ebenso mit Leitern umsetzen.

Eine Zahl a wird dabei durch einen Pfeil der Länge a veranschaulicht, der nach oben geht, falls $a > 0$

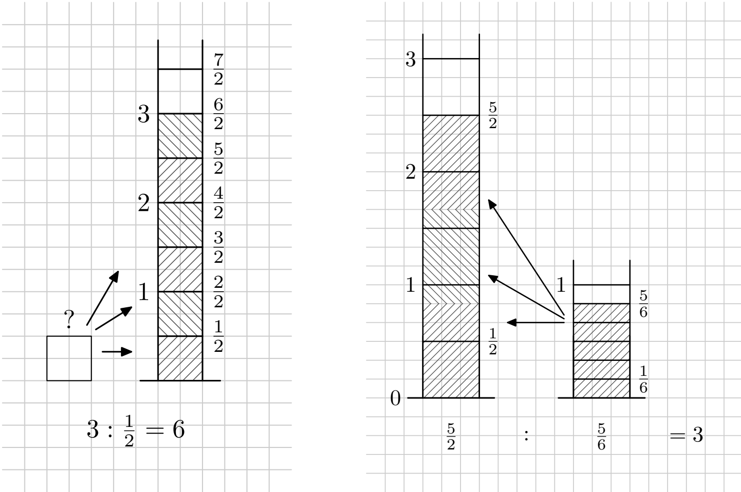

Abb. 14: *Dividieren* als *Aufteilen*, wenn der Quotient eine natürliche Zahl ist: $3 : \frac{1}{2}$ und $\frac{5}{2} : \frac{5}{6}$

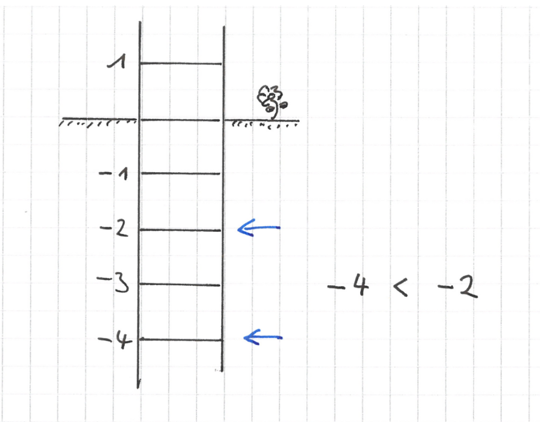

Abb. 15: Ganze Zahlen: Welche Zahl ist größer, welche ist kleiner?

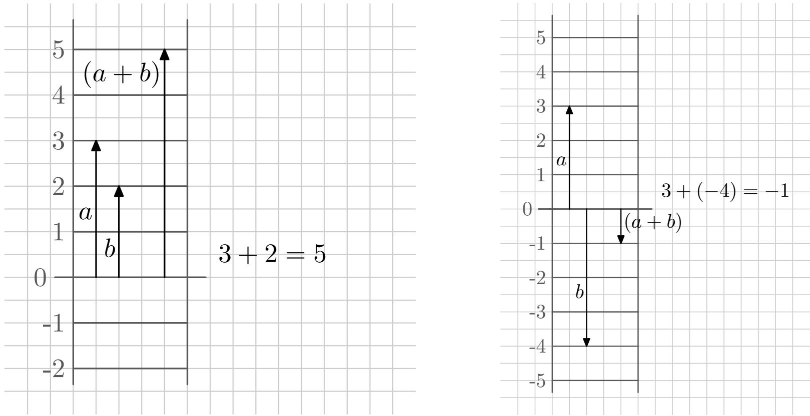

Abb. 16: Das Pfeilmodell im Leitermodell: Addition von rationalen Zahlen: $a+b$

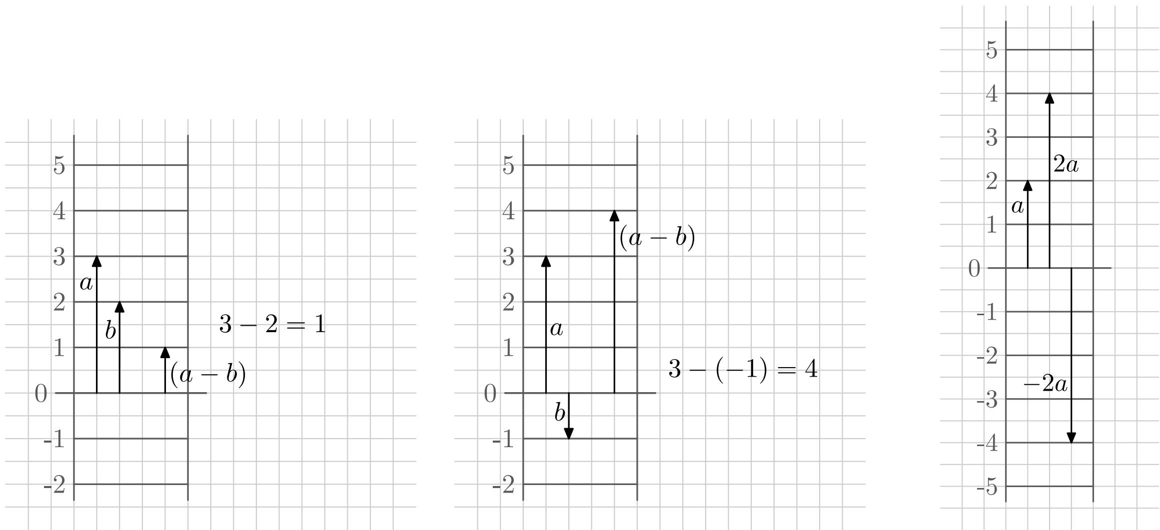

Abb. 17: Das Pfeilmodell im Leitermodell: Subtraktion von rationalen Zahlen: $a-b$ und Mulitplikation von rationalen Zahlen: $a \cdot b$

und nach unten, falls $a < 0$. Der 0-Pfeil bleibt im Modell unsichtbar[2].

Bei der *Addition* $a+b$ werden die Pfeile aneinander gehängt (siehe Abb. 16). Die *Subtraktion* wird als *Addition der Gegenzahl* interpretiert (siehe Abb. 17, linkes und mittleres Bild).

Die große Stärke der Verwendung von Pfeilen ist, dass auch die *Multiplikation* veranschaulicht werden kann. Die Multiplikation mit einer positiven Zahlen entspricht der Streckung oder Stauchung eines Pfeils. Die Multiplikation mit (-1) entspricht der Spiegelung am „Erdboden". Genauso entspricht die Multiplikation mit beispielsweise (-3), weil $(-3) = (-1) \cdot 3$, der Streckung mit dem Faktor 3 bei gleichzeitiger Spiegelung (vgl. Abb. 17, rechtes Bild).

Die *Division* kann schließlich als *Multiplikation mit dem Kehrwert* angesehen werden.

3. Unterschiede zwischen dem Leitermodell und anderen Darstellungsmitteln

Das Leitermodell ist ein Darstellungsmittel, das die Zahlenbereiche der natürlichen Zahlen bis zu den rationalen Zahlen veranschaulichen kann. Durch die Ähnlichkeit zwischen dem Leitermodell und dem Zahlenstrahl ist die Betrachtung vom Koordinatensystem oder vom Zahlenstrahl bei reellen Zahlen nicht etwas wesentlich Unterschiedliches. Diese Ähnlichkeit ist bei Kreisen und Rechtecken weniger gegeben.

2 Auf einem Zahlenstrahl zeigen die Pfeile entsprechend nach rechts oder nach links.

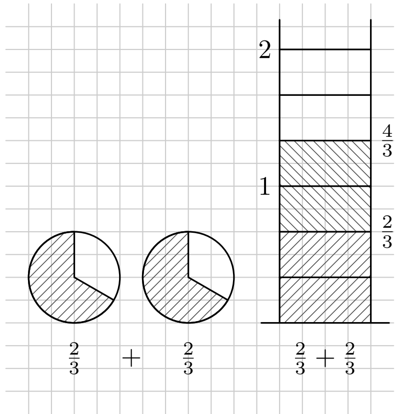

Abb. 18: $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ mit Kreisen und im Leitermodell.

Trotzdem unterscheidet sich das Leitermodell vom Zahlenstrahl: zum einen durch die Ausrichtung nach oben, aber vor allem durch die Verwendung von zwei Leiterstangen. Auf die Weise ist es möglich, sowohl Höhen von Sprossen zu betrachten als auch eingeschlossene Flächen (vgl. rechtes Bild in Abbildung 12 und Schraffuren (bzw. mögliche Einfärbungen) von Flächen in den Abbildungen 13 und 14).

Zahlenleitern haben die zentrale Eigenschaft, dass sie nicht bei der 1 aufhören müssen. Das heißt, der Übergang vom Ganzen zu mehreren Ganzen ist schon im Modell immanent. Im Gegensatz dazu muss man im Kreisdiagramm bei einer Rechnung wie $\frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ zwei Kreise statt vorher nur ein Kreis zeichnen. Im Leitermodell wird nur die eine Leiter weiter gezeichnet (siehe Abb. 18).

Bei der von-Deutung der Multiplikation kann es im Kreismodell zu Missverständnissen kommen, wenn beispielsweise die Rechnung $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ durch drei Kreisdiagramme „veranschaulicht" wird (vgl. Prediger 2006). Im Leitermodell ist dieses Missverständnis ebenso möglich. Jedoch wird es abgeschwächt, da man für die Multiplikation nach wie vor drei Leitern zeichnen kann, wenn man darauf achtet, wie hoch beim ersten Faktor die erste Sprosse sein muss (vgl. Abb. 12).

Das Leitermodell deckt jedoch nicht sämtliche Grundvorstellungen ab. So können beispielsweise bei der Grundvorstellung einer Bruchzahl als *Verhältnis* oder als *Quasiordinalzahl* (vgl. Malle 2004) andere Darstellungen, wie Streckenlängen oder unterschiedlich gefärbte Perlen, sinnvoll sein.

4. Zusammenfassung

Um den Schwierigkeiten zu begegnen, die Schülerinnen und Schüler bei den Zahlenbereichserweiterungen haben können, ist eine lange inhaltliche Phase zentral, in der Grundvorstellungen aufgebaut werden können, auf die die Lernenden in späteren formalen Phasen immer wieder zurückgreifen können, um beispielsweise die richtigen Operationen auszuwählen und sie auch korrekt auszuführen.

Eines der Darstellungsmittel, das beim Aufbau und beim Wandel von Grundvorstellungen helfen kann, ist das Leitermodell, das den Zahlenstrahl aufrecht stellt und mit Sprossen versieht. Es kann enaktiv und ikonisch verwendet werden, beinhaltet aber auch schon Symbolik, da die „Sprossennamen" Bruchzahlen sind. Der Fokus kann im Leitermodell auf der *Höhe* der Leitersprossen liegen, auf dem *Flächeninhalt* vom Boden bis zu Sprosse oder auf *Pfeilen*, die auf der Leiter liegen.

Das Leitermodell kann bei den Zahlenbereichserweiterungen von den natürlichen bis zu den rationalen Zahlen den *Vorstellungsaufbau der Zahlenbereiche und deren Ordnung und Operationen* unterstützen. Außerdem liegt die Überleitung zum Zahlenstrahl bei reellen Zahlen und dem Koordinatensystem nahe. Daher kann das Leitermodell die Zahlenbereichserweiterungen wie ein roter Faden durchziehen.

Dabei muss das Leitermodell nicht allein stehen, sondern kann mit anderen ebenfalls üblichen Darstellungsmitteln in Beziehung gesetzt werden, damit die Schülerinnen und Schüler Darstellungswechsel flexibel vollziehen lernen.

Literatur

Büchter, A. & Haug, R. (2013). Lernen mit Material. Anker setzen beim Aufbau mathematischer Grundvorstellungen. *mathematik lehren* (176), Friedrich Verlag, Seelze, S. 2–7.

Fast, V. & vom Hofe, R. (2014). Geometrisch wird's anschaulich. Das Pfeilmodell als Vorstellungsbasis für negative Zahlen. *mathematik lehren* (183), Friedrich Verlag, Seelze, 20–24.

Halverscheid S., Henseleit M. & Lies, K. (2006). Rational numbers after elementary school: realizing models for fractions on the real line. In Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. & Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (2), pp. 225–232. Prague: PME.

Hefendehl-Hebeker, L. & Prediger, S. (2006). Unzählig viele Zahlen: Zahlbereiche erweitern – Zahlvorstellungen wandeln. *Praxis der Mathematik in der Schule* 48 (11), 1–7.

Malle, G. (2004). Grundvorstellungen zu Bruchzahlen. *mathematik lehren* (123), S. 4–8.

Padberg, F. (2002). *Didaktik der Bruchrechnung*, Heidelberg/Berlin: Spektrum akademischer Verlag.

Prediger, S. (2006). Vorstellungen zum Operieren mit Brüchen entwickeln und erheben. Vorschläge für vorstellungsorientierte Zugänge und diagnostische Aufgaben. *Praxis der Mathematik in der Schule* 48 (11).

vom Hofe, R. & Hattermann, M. (2014). Zugänge zu negativen Zahlen. *mathematik lehren* (183), 2–7.

Ulovec, A. (2007). Wenn sich Vorstellungen wandeln. Ebenen der Zahlbereichserweiterungen. *mathematik lehren* 147, 14–16.

Wille, A. M. (2009). Selbst erdachte Dialoge, *mathematik lehren*, Heft 156, Oktober 2009, S. 22–26.

Wille, A. M. (2009). Von Schülerinnen und Schülern erdachte Dialoge im Kontext der Zahlbereichserweiterungen in Klasse 5, *Beiträge zum Mathematikunterricht*, WTM-Verlag.

Wille, A. M. (2016). *Ein kleines Phi sucht die größte Zahl*, erscheint im Rittel Verlag, Hamburg.