2ème partie – Apports pour maîtriser les concepts et notions en jeu

Calculer

« Mettre en œuvre des règles élémentaires sur les nombres »

Joël Briand

L'enjeu du calcul c'est dénombrer quand le comptage ne suffit pas car il n'est plus économique.

A partir de là le calcul c'est un travail sur la manipulation de quantité.

Alerte ce n'est pas que gérer des éléments symboliques (connaissance de la numération de position et de la règle d'échange…)

Le calcul est régi par :

le système **de base 10**

et par les propriétés.

Brissiaud dans j'apprends les maths.CE1

On connaît mieux aujourd'hui les problèmes arithmétiques que les enfants apprendraient à résoudre s'ils n'allaient pas à l'école (il le ferait à l'aide de leur connaissance quotidienne de ça signification des verbes AJOUTER, RETIRER, PARTAGER de leur connaissance de la signification du mot FOIS, de l'expression DE PLUS….

On connaît mieux également les problèmes qui, en l'absence de scolarisation resteraient massivement ECHOUEES : ce sont les problèmes qui nécessite l'usage des propriétés dites CONCEPTUELLES, comme la commutativité de la multiplication.

Quand on analyse les fichiers de Charnay de stella Baruc ils parlent tous de **mettre en lumière les propriétés**.

Les propriétés des opérations permettent

- d’expliquer et de justifier les étapes d’un calcul.
- sont le plus souvent **utilisées de manière implicite.**
- **Elles n’ont pas à être nommées à ce moment de la scolarité**.

Les propriétés peuvent cependant être mises en évidence sur des exemples, explicitées en utilisant le **langage verbal** ou en ayant recours à des formes schématiques.

L'accompagnement verbal de l'enseignant tente d'être explicite lors de la première séance,

mais **tend rapidement à se limiter à une technique de manipulation des symboles**

(rajoute 10, je mets 1 là et 1 là...)

OU ENCORE QUE LE SIGNE x a été inventé comme un raccourci de plusieurs signes d’addition.

alors que pour beaucoup d'élèves, les réalités mathématiques en jeu ne sont pas encore identifiées par les élèves.

L’équivalence

- L’égalité est, ce qu’on appelle une relation d’équivalence, c’est-à-dire qu ‘elle est :
  - réflexive, tout élément est égal à lui-même.
  - symétrique, a=b est équivalent à b=a.
  - transitive, si a=b et b=c alors a=c.

- **7 + 3 = 1O – 4 = 6**

Elle se joue entre deux situations

4+3 = 7

Je mets en œuvre une opération d’un côté avec un cardinal de l’autre .

C’est les deux plateaux d’une balance.

La transitivité : Le jeu du panier / Les décompositions

Le signe « = » attention à l’écriture des situations enchainées. Le signe égal est le passage au symbolique d’une situation analogique : le c’est pareil de la maternelle.

Le bus part avec 7 élèves, ramasse 3 élèves au premier arrêt. Au second, il en dépose 4 combien d’élèves …..?

7 + 3 = 1O – 4 = 6

Les opérations

- Quelles propriétés mettent elles en jeu?

Le fait que les enfants perçoivent et comprennent très précocement et facilement les effets de transformations affectant la quantité (ajout retrait partage..) laisse souvent à penser A TORT qu'ils maîtrisent ou au moins comprennent les opérations.
Cette surestimation est d'autant plus vraie lorsque les opérations ne font que simuler le déroulement d'un problème.

Si Paul a 3 billes et que je lui en donne 4 , le fait d'écrire 3+4 = 7 n'assure en rien que l'addition est acquise.

Il est nécessaire de s'éloigner de la situation « primitive » et de mettre en œuvre des situations où les propriétés de l'addition seront mise en œuvre.

Addition :

- Commutativité
- Associativité
- Elément neutre

Commutativité

4 +7 = 7 + 4

Associativité

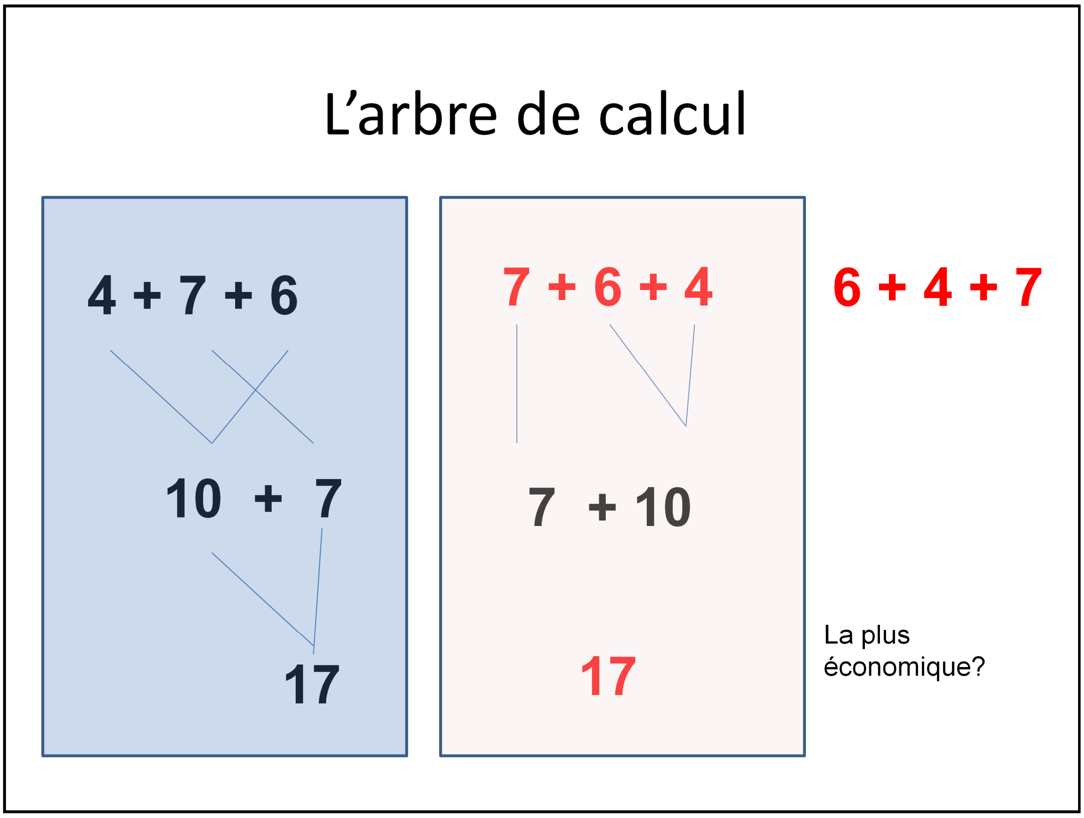
4+(7+6) = (4 + 7) + 6 arbres de calculs ERMEL Nécessité d'en confronter plusieurs représentations d'une même situations

Un arbre à calcul décliné en plusieurs représentations on montre le plus économique…(Diapo)

Elément neutre

5 + 0 = 5

Attention à le rendre explicite Pour nous il n'y a pas de conffusion entre élément neutre et absorbant mais les élèves le rencontrent **indifféremment** sur + et X



Les différentes représentations permettent de mettre en évidence les associations les plus économiques .

l’associativité est

483 + 534

$$
\begin{array}{r@{\quad}r@{\quad}r@{\quad}r}
 & 4 & 8 & 3 \\
+ & 5 & 3 & 4 \\
\hline
 & 10 & 11 & 7
\end{array}
$$

Manipuler pour mieux appréhender la technique et/ou la comprendre.

L’addition

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 1} & & \\ & 7 & 4 & 5 \\ + & 2 & 8 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 1} & & \\ & 7 & 4 & 5 \\ + & 2 & 8 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 9 \end{array}$$

Avec un code couleur…

$$\begin{array}{cccc} & {\scriptstyle 1} & & \\ & 7 & 4 & 5 \\ + & 2 & 8 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 9 \end{array}$$

Multiplication :

- **Commutativité**
- **Associativité**
- **Elément neutre**
- **Elément absorbant**

- **Distributivité de la multiplication sur l'addition**

La compréhension de la technique usuelle de la multiplication nécessite la coordination de plusieurs types de connaissances : *(doc calcul posé – Roland Charnay)*

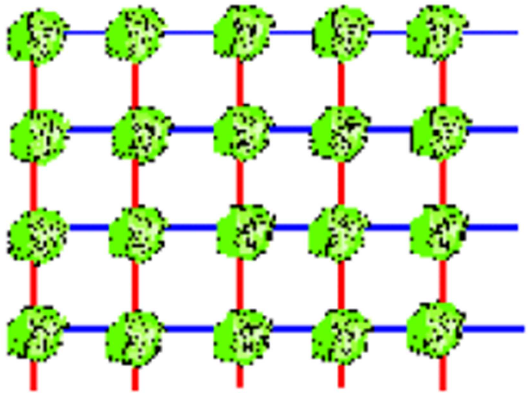
 tables de multiplication ;

 numération décimale pour la gestion des retenues, dans les multiplications intermédiaires puis dans l'addition finale ;

 règle des 0 : passage du résultat de la multiplication d'un nombre par 3 à la multiplication de ce même nombre par 30, par 300… ;

 distributivité de la multiplication sur l'addition

Introduire la commutativité du signe X



4 fois 5

5 + 5 + 5 + 5

5 fois 4

4 + 4 + 4 + 4 + 4

Commutativité

La construction du sens de la multiplication et du produit de deux nombres doit s ‘appuyer sur la représentation première de l’opération, c’est-à-dire sur l’idée que, quand on multiplie, **on répète plusieurs fois le même nombre** et qu’on obtient ainsi un nombre plus grand.
Ainsi, 4 fois 3 est l’écriture qui exprime l’action d’additionner 4 fois le nombre 3 (on agit sur le nombre 3 en le répétant 4 fois) : 4 fois 3 = 3 + 3 + 3 + 3. De la même manière, 3 fois 4 exprime l’action d’additionner 3 fois le nombre 4 (on agit sur le nombre 4 en le répétant 3 fois) : 3 fois 4 = 4 + 4 + 4. Ces deux actions sont distinctes mais produisent le même résultat.
Sans la compréhension de la commutativité pas de possibilité de passer de la situation de quantifier le prix de 50 objets à 3 euros alors qu’il serait possible de trouver le prix de 3 objets à 50 euros.

Il faut proposer aux élèves de **produire différentes écritures additives répétées en relation avec le mot fois**, afin d’installer ce sens premier de la multiplication.
« 4 fois 5 » donne le même résultat que « 5 fois 4 » (20 salades).
Cela correspond à un nombre qu’on appelle le produit de 4 et de 5, qu’on note 4 x 5 ou 5 x 4 et qu’on énonce « 4 multiplié par 5 » ou « 5 multiplié par 4 ».
Le choix est de ne pas lier directement l’ordre de ce qui est dit avec l’ordre de ce qui est écrit et de permettre la lecture ou l’écriture dans les deux sens.
En effet, si l’on est intransigeant sur l’ordre d’écriture du produit, comment faire comprendre aux élèves, à qui l’on a dit que le prix de 120 barres de chocolat à 3 euros la barre doit s’écrire impérativement 3 x 120 (120 fois 3 ; le multiplicateur est 120), que lorsqu’ils posent la multiplication pour calculer le résultat, ils doivent écrire de préférence :

Commutativité

Exemple 2 : Dans le même ordre d'idée, il faut se poser la question de l'écriture d'un produit résultant de la traduction mathématique d'un problème. Par exemple :

« Un jardinier a cueilli 4 bouquets de 12 roses. Combien a-t-il cueilli de roses ? »

Comment

L'écrit-on?	Le prononce-t-on?
4 X ……12	«4 multiplié par 12
Ou	4 fois 12
12 ….. X 4	12 multiplié par 4 »

Tout comme R. Brissiaud nous dit aussi « il est essentiel que les élèves cherchent les résultats d'addition répétées élementaires bien avant la rencontre avec la multiplication… » Il ajoute sur le vocabulaire la nécessité d'avoir manipulé « le lexique FOIS GROUPES permettant de décrire les additions répétées »

Exemple 1 (évaluation CE2-2000): l'élève devait calculer mentalement le produit 13x2 et la consigne demandée à l'enseignant était de « dicter 13x2 » (sans aucune autre indication sur les mots à prononcer).
Une enquête auprès d'enseignants montre que ceux-ci ont dicté de trois manières différentes : « treize fois deux » ; « deux fois treize » et « treize multiplié par deux ». Selon le choix effectué (particulièrement « deux fois treize »), les réussites des élèves ne sont pas identiques…

Associativité

Un camion transporte 700 cartons de 5 paquets de 35 boîtes de 10 crayons.

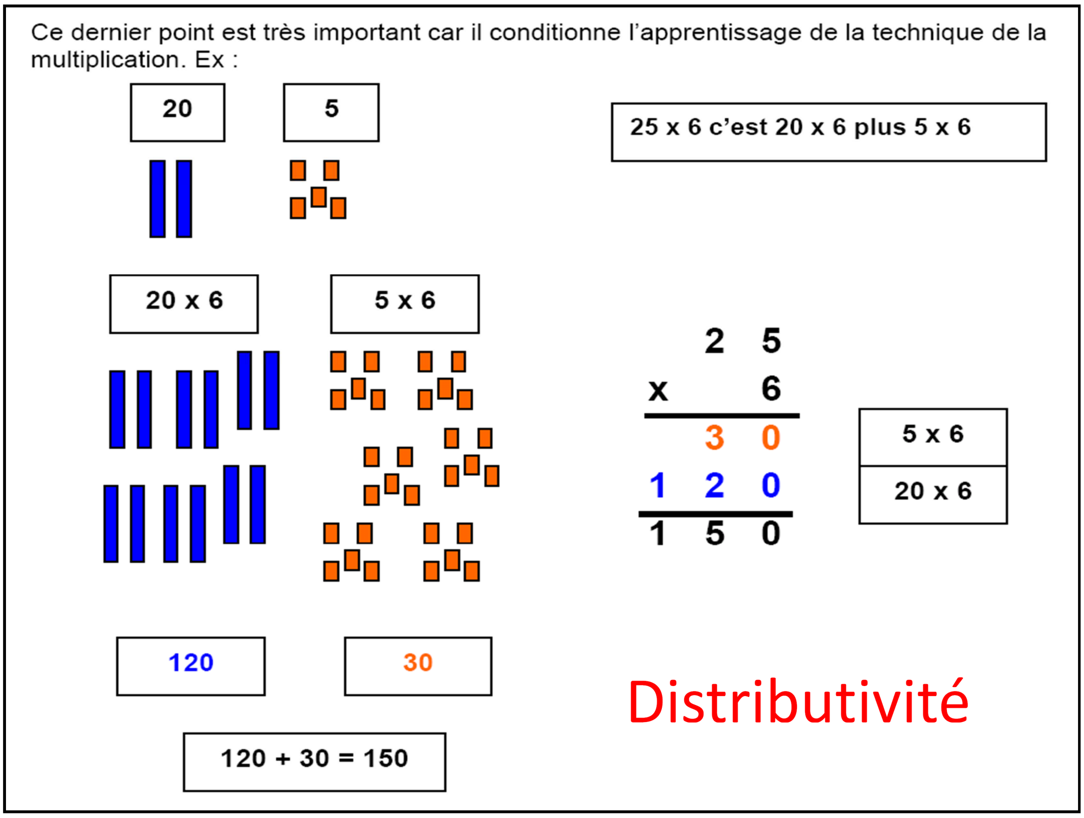
700 X 5 X 35 X 10

7 X 100 X 5 X 35 X 10

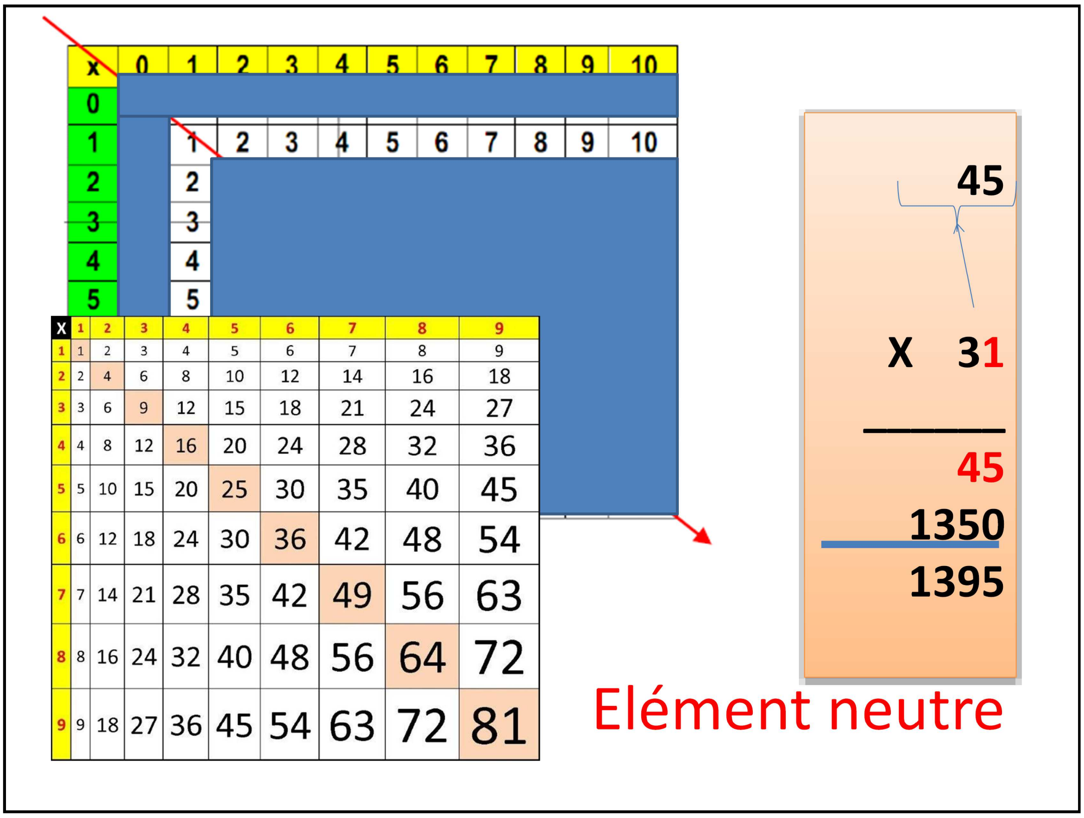
35 X 35 X 1 000

1 225 000

35 au carré est une identité remarquable 30 + 5 au carré
Soit 30 au carré + 2 fois 30 X 5 + 5 au carré
Soit 30 au carré + 10 X 30 + 25
Soit 3O fois 30 + 10 +25
SOIT> **3**0 X **4**0 + 25
cette « astuce » ne fonctionne que pour les nombres se terminant par 5 conséquence du double produit qui fait un produit par 10.



L'importance d'exposer la propriété



Element neutre n'EST PAS LA TETE A TOTO

Dans la présentation de la table de Pythagore.

Soustraction

- Contrairement à l’addition, la soustraction n’est ni associative ni commutative ; 0 n’est élément neutre qu’à droite
- Propriété de l’ajout simultané
- Soustraire une somme

dans le domaine de la soustraction, cette opération est effectivement considérée comme compliqué à enseigner pour les raisons évoquées dans le doc ressource.
Cependant, dans le diapo proposé par Pierre, tu parles d'ajout simultané qui est l'explication mathématique de la technique à la française.
Cependant, cette explication est difficile à appréhender pour de nombreux élèves de C2. En effet, la compensation par dix des termes pour conserver l'équivalence (conservation des écarts en réalité) reste désarmante pour élève dans une situation où il doit soustraire deux quantités (j'ajoute 10 au 2, alors que je dois soustraire l'un à l'autre !! pas gagné).

Charnay privilégie la technique **par emprunt**. Plus facile à expliciter mathématiquement, car elle ne demande un travail que sur un terme.
Cette technique présente l'inconvénient de multiplier les emprunts dès que l'on entre sur les grands nombres. C'est donc au cours du CE2/CM1 que l'on pourra basculer sur la technique, **dite par compensation**, qui utilise les ajouts simultanés.
Vous me direz : deux techniques à enseigner !!! certes, mais leur maîtrise du nombre en CM1 doivent leur permettre de rentrer plus facilement : d'où le travail avec les nombres sur des droites graduées dès les CE1 (plutôt que de rester sur des frises numériques avec des cases !!) pour mettre en évidence cette notion d'écart, que l'on poursuit en CE2 pour montrer la conservation des écarts (et au passage sera bien utile pour les fractions)

745 - 284

$$\begin{array}{cccc} & \overset{6}{\cancel{7}} & {}^{1}4 & 5 \\ - & 2 & 8 & 4 \\ \hline & 4 & 6 & 1 \end{array}$$

Des remarques éventuelles ?!

La soustraction

$$\begin{array}{rcccc} & 6 & 7 & {}^{1}4 & 5 \\ - & 1 & {}_{1}2 & 8 & 4 \\ \hline & 5 & 4 & 6 & 1 \end{array}$$

Par compensation

$$\begin{array}{rcccc} & & 6 & & \\ & 6 & \cancel{7} & {}^{1}4 & 5 \\ - & 1 & 2 & 8 & 4 \\ \hline & 5 & 4 & 6 & 1 \end{array}$$

Par emprunt

Et s'il y a des 0…

$$\begin{array}{rcccc} & 7 & 9 & 9 & \\ & \cancel{8} & \cancel{0} & \cancel{0} & {}^{1}0 \\ - & 1 & 2 & 8 & 4 \\ \hline & 6 & 7 & 1 & 6 \end{array}$$

Cela pourrait être aussi…

```
  1
  6 7 4 5
- 1 2 8 4
---------
5 5 6 1
  4
```

Cette technique est toute aussi valable, mais non conventionnelle (d'ailleurs, elle vient de nous).

Son défaut est de présenter un résultat peu lisible.

Elle permet d'avoir une rapide estimation et validation (au sens de « Est-elle possible ? ») du résultat.

Ces propriétés permettent différentes techniques opératoires :
Parce que tu as l'associativité

A illustrer par 2 additions posées différemment I diapo

Pour la soustraction

Soit l'ajout d'une dizaine supplémentaire au deux termes technique de compensation par conservation des écarts

Soit la technique de l'emprunt qui est une décomposition d'une puissance de 10 supérieure.