DERET FOURIER

1. Pendahuluan

Teorema Fourier:

Suatu fungsi periodik terhadap waktu, $x_p(t)$, dengan perioda dasar T_0 , dapat dinyatakan sebagai jumlah tak hingga dari gelombang-gelombang sinusoidal.

Fungsi periodik: $x_p(t) = x_p(t + T_0)$ (1.1)

dapat dinyatakan dalam bentuk Deret Fourier sebagai berikut:

$$x_p(t) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \qquad (1.2)$$

Di mana, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

a_n, b_n : keffisien Fourier

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p\ (t)\, dt \qquad (1.3)$$

$$a_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p\ (t)\cos n\,\omega_0\, t\, dt \qquad n= 1,2,\ldots \qquad (1.4)$$

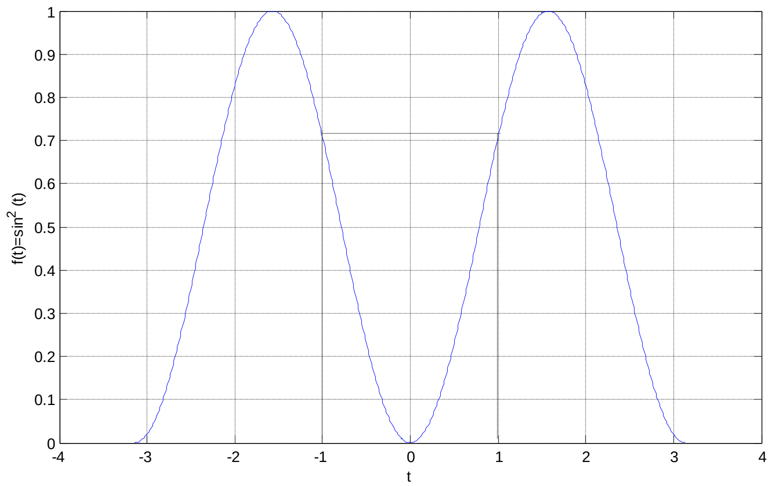
$$b_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p\ (t)\sin n\,\omega_0\, t\, dt \qquad n=1,2,\ldots \qquad (1.5)$$

2. Sifat-Sifat Simetri

2.1. Fungsi Genap

f(t) dikatakan suatu fungsi genap jika memenuhi:

$f(t) = f(-t)$ untuk setiap t (1.6)



Gambar 1 Fungsi Genap

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2 \int_{0}^{a} f(t)dt \qquad (1.7)$$

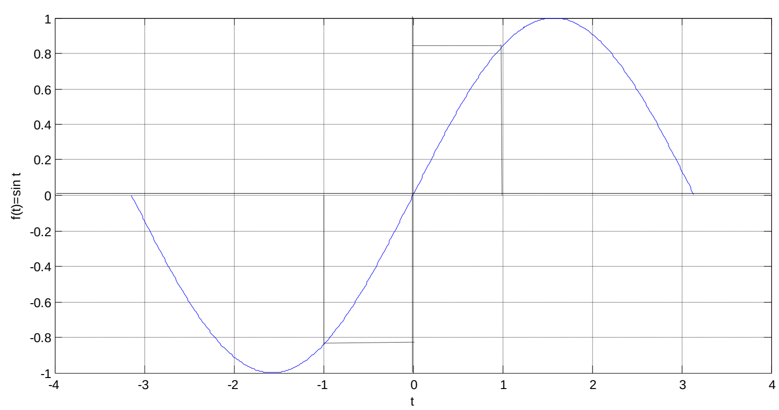
contoh: ~ f(t)= t^2

~ f(t)= cos(t)

2.2 Fungsi Ganjil

f(t) dikatakan suatu fungsi genap jika memenuhi:

f(t) = -f(-t) untuk setiap t (1.8)



Gambar 2. Fungsi Ganjil

$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$ (1.9)

contoh: ~ f(t) = t

~ f(t) = sin t

2.3 Perkalian Antar Fungsi

Fungsi genap x fungsi genap = fungsi genap

Fungsi ganjil x fungsi ganjil = fungsi genap

fungsi genap x fungsi ganjil = fungsi ganjil

2.4 Penerapan Sifat Simetri Pada Deret Fourier

Ambil: $f(t) = x_p(t) \cos n\omega_0 t$

$g(t) = x_p(t) \sin n\omega_0 t$

(i) Jika $x_p(t)$ adalah fungsi genap, maka:

f(t) = fungsi genap x fungsi genap

= fungsi genap

sehingga berlaku: $\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = 2 \int_{0}^{T/2} f(t)dt$

g(t) = fungsi genap x fungsi ganjil

= fungsi ganjil

sehingga berlaku: $\int_{-T/2}^{T/2} g(t)dt = 0$

Persamaan (1.4) dan (1.5) menjadi:

$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{0}^{T_0/2} x_p\ (t) \cos n\, \omega_0\, t\, dt$ n= 0,1,2,… (1.10)

$b_n = 0$ n=1,2,… (1.11)

(ii) Jika $x_p(t)$ adalah fungsi ganjil, maka:

f(t) = fungsi ganjil x fungsi genap

= fungsi ganjil

sehingga berlaku: $\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt = 0$

g(t) = fungsi ganjil x fungsi ganjil

= fungsi genap

sehingga berlaku: $\int_{-T/2}^{T/2} g(t)dt = 2\int_{0}^{T/2} g(t)dt$

Persamaan (1.4) dan (1.5) menjadi:

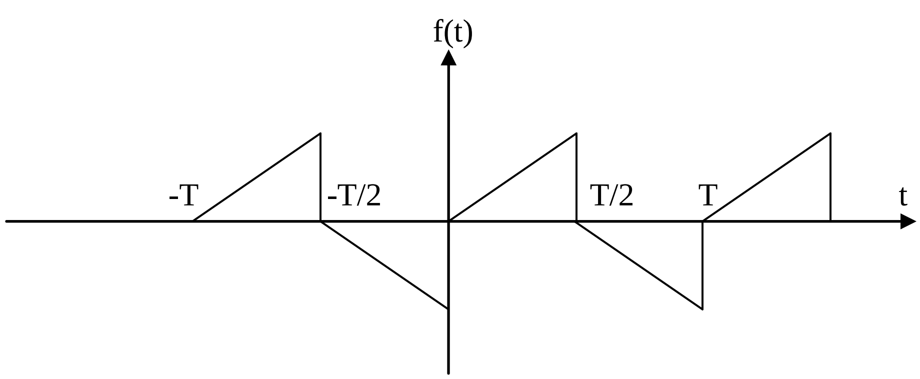
$a_n = 0$ n= 0,1,2,… (1.12)

$b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} x_p\ (t)\sin n\,\omega_0\,t\,dt$ n=1,2,… (1.13)

2.5 Simetri ½ Gelombang

Suatu fungsi dikatakan mempunyai simetri ½ gelombang jika memenuhi:

f(t+T/2) = -f(t) untuk setiap t (1.14)



Gambar 3. Fungsi Simetri ½ Gelombang

Pada kondisi ini, persamaan (1.4) dan (1.5) menjadi:

$a_n = 0$ untuk n genap

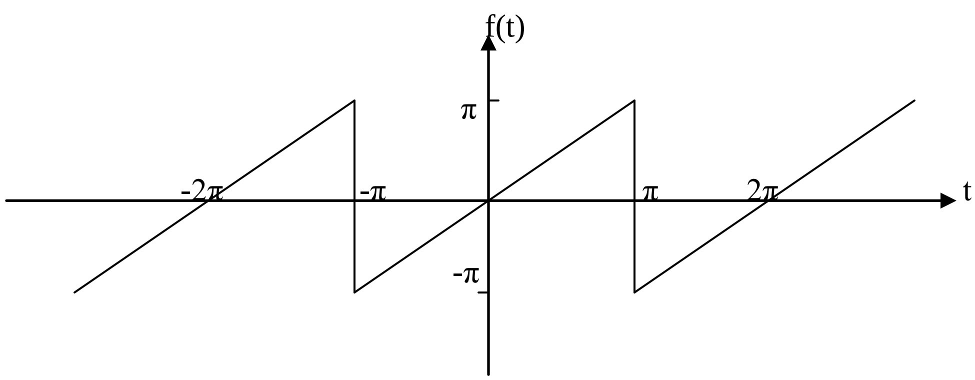
$$a_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} x_p\ (t)\cos n\,\omega_0\,t\,dt \qquad \text{untuk n ganjil} \qquad (1.15)$$

dan,

$b_n = 0$ untuk n genap

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} x_p\ (t)\sin n\,\omega_0\,t\,dt \qquad \text{untuk n ganjil} \qquad (1.16)$$

Contoh soal:



Gambar 4. Gelombang Gigi Gergaji

Gelombang gigi gergaji dengan persamaan:

f(t) = t untuk $-\pi < t < \pi$

f(t+2π) = f(t)

Tentukan deret Fouriernya!

Solusi:

f(t) merupakan fungsi ganjil, sehingga berlaku:

$a_n = 0$ n= 0,1,2,…

$$b_n = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0/2} x_p\ (t)\sin n\,\omega_0\,t\,dt \qquad \text{n=1,2,…}$$

T= 2π → $\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi/2\pi = 1$

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^{2\pi/2} t \sin n\,t\;dt$$

===

$$\int t \sin bt\;dt = \frac{1}{b^2}\sin bt - \frac{t}{b}\cos bt + c$$

$$\cos(-bt) = \cos(bt)$$

$$\sin(-bt) = -\sin(bt)$$

===

didapat:

$$b_n = \frac{\cos n\pi}{n}$$

~ untuk n genap:

cos nπ = 1 → $b_n = -1/n$

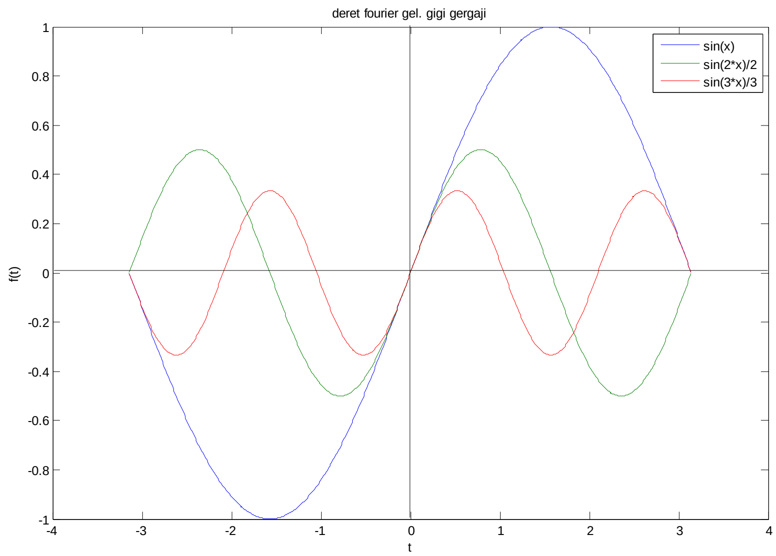
~ untuk n ganjil:

cos nπ = -1 → $b_n = 1/n$

sehingga,

$$f(t) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega_0\, t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

$$= 2\left(\frac{\sin t}{1} - \frac{\sin 2t}{2} + \frac{\sin 3t}{3} - \ \dots\right)$$



Gambar 5. Deret Fourier dari Gelombang Gigi Gergaji

3. Deret Fourier Eksponensial Kompleks

Deret Fourier eksponensial kompleks menggambarkan respon frekuensi dan mengandung seluruh komponen frekuensi (harmonisa dari frekuensi dasar) dari sinyal.

Tinjau rumus Euleur berikut:

$$\cos n\omega_0\, t = \frac{1}{2}\left(e^{jn\omega_0 t} + e^{-jn\omega_0 t}\right)$$

$$\sin n\omega_0\, t = \frac{1}{2j}\left(e^{jn\omega_0 t} - e^{-jn\omega_0 t}\right) \qquad (1.17)$$

Sustitusi rumus Euleur ke persamaan (1.2) menjadi:

$$x_p(t) = a_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos \mathrm{n}\omega_0\, t + b_n \sin \mathrm{n}\omega_0 \mathrm{t})$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(a_n - \mathrm{j}b_n\right)e^{jn\omega_0 t} + \left(a_n + jb_n\right)e^{-jn\omega_0 t}\right] \qquad (1.18)$$

pasangan konjugasi kompleks

di mana,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + jb_n)e^{-jn\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(a_n - jb_n)e^{jn\omega_0 t} \quad (1.19)$$

Ambil, c_n, suatu koefisien kompleks dengan hubungan:

$$c_n = \begin{cases} a_n - jb_n & \text{untuk } n > 0 \\ a_0 & \text{untuk } n = 0 \\ a_n + jb_n & \text{untuk } n < 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

Persamaan (1.18) menjadi Deret Fourier Eksponensial Kompleks,

$$x_p(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{c_n}\, e^{jn\omega_0 t} \quad (1.21)$$

di mana,

$$c_n = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x_p(t)\, e^{-jn\omega_0 t}\, dt \quad ;\ \text{n}= 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad (1.22)$$

Fungsi dasar nilai kompleks $e^{jn\omega_0 t}$ dan komponen frekuensi negative tidak mempunyai arti fisis, penampakannya hanya untuk memberikan gambaran matematis secara utuh dari sinyal periodik.

Karena c_n merupakan bilangan kompleks, maka secara umum dapat dituliskan sebagai,

$$c_n = |c_n|e^{j(arg c_n)} \quad (1.23)$$

di mana,

(i) $|c_n|$: amplituda komponen harmonic ke n dari sinyal $x_p(t)$. Plot $|c_n|$ terhadap frekuensi menghasilkan spectrum amplitude diskrit.

(ii) arg(c_n) : sududt fasa dari c_n. Plot c_n terhadap frekuensi menghasilkan spectrum fasa diskrit.

Jika $x_p(t)$ merupakan fungsi periodik dengan nilai riil, maka dari persamaan (1.22) didapat:

$c_{-n} = c^*$ (konjugasi kompleks dari c_n, sehingga,

$|c_{-n}| = |c_n|$ → simetri: fungsi genap dari n (1.24)

arg(c_{-n}) = - arg(c_n) → asimetri: fungsi ganjil dari n (1.25)