Deret Pangkat

Ayundyah Kesumawati

Prodi Statistika FMIPA-UII

June 23, 2015

Pendahuluan

Kalau sebelumnya, suku suku pada deret tak berujung berupa bilangan real maka kali ini kita kembangkan suku sukunya dalam variabel x. Suatu deret tak berujung yang berbentuk

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \ldots$$

Disebut deret pangkat (power series) dalam (x c). di sini c adalah suatu konstanta dan $a_1, a_2, a_3, \ldots$ disebut koefisien deret pangkat. Khusus c = 0, kita peroleh deret pangkat berikut

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2(x)^2 + a_3(x)^3 + \ldots$$

Jadi, jumlah parsial ke n deret pangkat berbentuk polinomial derajat n sebagai berikut

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 (x)^2 + a_3 (x)^3 + ... + a_n x^n$$

Kekonvergenan Deret Pangkat

Kekonvergenan deret pangkat (1) bergantung pada nilai x yang diberikan. Kali ini kita akan menentukan himpunan semua x sehingga deret pangkat (1) konvergen. Untuk sederhananya diambil kasus untuk $c = 0$. Sebelumnya diperhatikan tiga contoh berikut

Contoh Selidikilah kekonvergenan deret pangkat berikut

a. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
b. $\sum_{k=1}^{\infty} k!x^k$
c. $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$

Penyelesaian:

a. Akan digunakan uji rasio mutlak, dan diperoleh

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{x^k}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^{k+1}}{(k+1)k!}\cdot\frac{k!}{x^k}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\frac{|x|}{k+1} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Karena nilai L $= 0 < 1$ untuk setiap x maka deret ini konvergen untuk setiap bilangan real

b. Dengan cara yang sama seperti prosedur pada bagian a, maka diperoleh

$$\begin{aligned} L &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(k+1)k!x^k x}{k!x^k} \right| \\ &= \lim_{k\to\infty} (k+1)\,|x| \end{aligned}$$

Diperhatikan dengan seksama bahwa bila $x = 0$ maka limit ini bernilai 0, sedangkan untuk $x \neq 0$ limit ini bernilai ∞. Jadi deret ini hanya konvergen pada $x = 0$.

c. Ini adalah deret geometri dengan rasio x. Jadi, deret ini konvergen jika $-1 < x < 1$

Ketiga fakta ini didasarkan pada sifat kekonvergen deret pangkat seperti diungkapkan pada teorema berikut.

Teorema Setiap deret pangkat $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ pasti memenuhi salah satu sifat berikut

- Deret konvergen untuk setiap bilangan real x
- Deret hanya konvergen di x = 0
- Terdapat R > 0 sehingga deret konvergen pada $-R < x < R$ dan divergen pada $x < -R$ dan $x > R$.

Pada kasus terakhir, bilangan R ini biasa disebut radius kekonvergenan dan interval (-R,R) disebut interval konvergensi. Sedangkan, kekonvergenan di titik batas x = -R dan x = R harus diselidiki tersendiri. Kasus ketiga ini yang menjadi perhatian dalam pembahasan kekonvergenan deret pangkat.

Teorema Misalkan $\sum a_k x^k$ suatu deret pangkat dan

$$L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

maka berlaku kriteria berikut

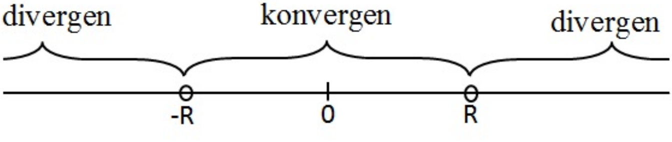

Figure: Daerah Konvergensi

i. Jika L $=\infty$ maka deret hanya konvergen pada x $=0$
ii. Jika L $=0$ maka deret konvergen pada setaip bilangan real x
iii. Jika $0 < L < \infty$ maka deret konvergen mutlak pada $-R < x < R$ (atau $|x| < R$) dan divergen pada $x < -R$ dan $x > R$, dimana R $= 1/$L.

Contoh Tentukan daerah konvergensi deret

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

Penyelesaian
Kita mempunyai $a_k = \frac{1}{k}$ Dengan menggunakan Teorema di atas diperoleh

$$L = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1} = 1$$

Jadi $R = \frac{1}{L} = 1$ dan deret pasti konvergen pada $-1 < x < 1$.

Untuk x = -1 dan x = 1 diselidiki sebagai berikut

- Untuk x = -1 deret menjadi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

  yang merupakan deret alternating yang konvergen

- Untuk x = 1 deret menjadi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

  yang merupakan deret alternating yang divergen

Contoh Tentukan untuk x mana saja, deret $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2} x^k$ konvergen

Penyelesaian

Kita mempunyai $a_k = \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}$ dan didapatkan

$$L = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{k+1}{k}\right)^{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)^{k} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k} = e$$

Karena $0 < L < \infty$ maka disimpulkan deret ini konvergen pada $-e^{-1} < x < e^{-1}$ dan divergen pada $x < -e^{-1}, x > e^{-1}$. Untuk $x = e^{-1}$ perlu diselidiki tersendiri. Uji akar memberikan hasil L = 1 sehingga diperlukan uji lainnya. Namun berdasarkan hasil observasi menggunakan MATLAB maka deret ini terindikasi divergen di titik $x = e^{-1}$ sebaliknya, di titik $x = -e^{-1}$ deret tersebut konvergen.

Contoh Untuk nilai x berapakah deret di bawah ini konvergen

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k(3k-1)}(x-1)^k$$

Penyelesaian Ini adalah deret pangkat dalam $(x-c)$, dengan c $=$ 1. Kita mempunyai $a_k = \dfrac{k}{2^k(3k-1)}$ diperoleh

$$\begin{aligned} l &= \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{2^{k+1}(3k+2)} . \frac{2^k(3k-1)}{k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k+1}{k}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3k-1}{3k+2}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Jadi deret konvergen pada $2 < x1 < 2$ atau $1 < x < 3$. Untuk deret x = -1 deret menjadi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k(3k-1)}(-2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(3k-1)}(-1)^k$$

yang merupakan deret alternating divergen. Untuk x = 3, deret pangkat menjadi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3k-1}$$

yang juga divergen.

Diferensiasi dan Integrasi Deret Pangkat

Kita dapat mendiferensialkan dan mengintegralkan suku demi suku deret pangkat pada suatu daerah dimana deret tersebut konvergen. Jelasnya diungkap secara formal pada teorema berikut

Teorema Misalkan deret pangkat $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ konvergen pada $-R < x < R$. Jika diambil fungsi f yang didefinisikan sebagai

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, x \in (-R, R)$$

maka

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$$

$$\int f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

Teorema ini mengatakan bahwa suatu fungsi yang didefinisikan dengan deret pangkat berkelakuan mirip polinomial, ia kontinu bahkan terdiferensial pada daerah interval konvergennya. Integral dan diferensialnya dapat diambil suku demi suku.

Contoh Misalkan fungsi f(x) didefinisikan sebagai

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} untuksetiapx \in R$$

Buktikan $f(x) = e^x$

Penyelesaian Diperhatikan bahwa deret pangkat $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ konvergen pada setiap bilangan real x.

Jadi kita dapat melakukan diferensial suku demi suku sebagai berikut

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k!} x^{k-1} \\ &= 1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3x^2}{3!} + \frac{4x^3}{4!} + \ldots \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = f(x) \end{aligned}$$

Jadi diperoleh $f'(x) = f(x)$. Fungsi dengan derivatif sama dengan aslinya tidak lain adalah $f(x) = Ce^x$ dengan C suatu konstanta. Dengan mengambil x=0 maka diperoleh $f(0) = 1$, dan di lain pihak berlaku $f(0) = Ce^0 = C$, jadi diperoleh C = 1. Jadi disimpulkan $f(x) = e^x$.

Contoh Dengan melakukan integral suku demi suku, buktikan

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -ln(1-x) untuk -1 < x < 1$$

Penyelesaian Disini kita mempunyai

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + ...$$

Diperhatikan untuk $-1 < x < 1$, deret geometri berikut konvergen

$$1 + x + x^2 + x^3 + ... = \frac{1}{1-x}$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas kesamaan ini diperoleh

$$\int (1 + x + x^2 + x^3 + ...)dx = \int \frac{1}{1-x} dx$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + ... + C_1 = -ln(1-x) + C_2$$

Dengan mengambil $C_1 = C_2 = 0$, diperoleh bukti

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = -ln(1-x)$$

Untuk soal-soal berikut tentukan semua nilai x sehingga deret pangkat konvergen di x.

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} x^k$
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{5^k} (x-1)^k$
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{k^k} x^k$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{ln(k+2)} x^k$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k(k+1)}{k+2} x^k$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{(k+1)^2} (3x-4)^k$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{k}{(k+1)^2} (3x-4)^k$