DIKTAT

PERSAMAAN DIFERENSIAL ELEMENTER

(Untuk Mahasiswa Pendidikan Matematika)

Disusun Oleh:

Lisa Dwi Afri, M.Pd
NIP. 198905122018012003

PROGRAM STUDI PENDIDIKAN MATEMATIKA
FAKULTAS ILMU TARBIYAH DAN KEGURUAN
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI
SUMATERA UTARA MEDAN
2019

SURAT REKOMENDASI

Saya yang bertanda tangan di bawah ini

Nama	:	Fibri Rakhmawati, S.Si, M.Si
NIP.	:	19800211 200312 2 014
Pangkat/ Gol.	:	Penata Tk.I/ IIId
Unit Kerja	:	Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara

menyatakan bahwa diktat saudara

Nama	:	Lisa Dwi Afri, M.Pd
NIP.	:	198905122018012003
Pangkat/ Gol.	:	Asisten Ahli/ IIIb
Unit Kerja	:	Pendidikan Matematika
		Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara
Judul Diktat	:	Persamaan Diferensial Elementer

telah memenuhi syarat sebagai suatu karya ilmiah (Diktat) dalam mata kuliah Persamaan Diferensial Elementer pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Ilmu Tarbiyah dan Keguruan UIN Sumatera Utara.

Demikianlah rekomendasi ini diberikan untuk dapat dipergunakan seperlunya.

Medan, 27 Desember 2019

Yang Menyatakan,

Fibri Rakhmawati, S.Si, M.Si
NIP. 19800211 200312 2 014

KATA PENGANTAR

Bismillahirrahmanirrahim

Alhamdulilah, puji syukur kehadirat Allah SWT, dengan rahmat dan izinnya penulisan Diktat Persamaan Diferensial Elementer untuk menunjang kegiatan perkuliahan mata kuliah Persamaan Diferensial Elementer pada program studi Pendidikan Matematika (PMM) dapat terlaksana dengan baik. Diktat ini berisi tentang materi ringkas, padat dan jelas mengenai persamaan diferensial orde satu, persamaan diferensial orde dua dan transformasi laplace. Di samping itu, pada diktat ini dilengkapi dengan contoh soal dan pembahasan serta soal-soal latihan.

Tujuan pembuatan diktat ini adalah diperuntukan bagi mahasiswa program studi Pendidikan Matematika (PMM) sebagai penunjang dan referensi belajar Persamaan Diferensial Elementer. Akhirnya, semoga diktat persamaan diferensial elementer ini dapat bermanfaat bagi mahasiswa khususnya, pembaca pada umumnya. Penyempurnaan diktat akan dilakukan seiring dengan perkembangan dan respon dari para pemakai utama modu ini.

Penulis,

Lisa Dwi Afri, M.Pd

DAFTAR ISI

BAB IX
PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA KOEFISIEN KONSTAN

BAB X
PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA KOEFISIEN VARIABEL

BAB XI
APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE 2

BAB I
KONSEP DASAR
PERSAMAAN DIFERENSIAL

1. DEFINISI PERSAMAAN DIFERENSIAL

Persamaan diferensial merupakan persamaan yang memuat derivatif (turunan) satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu atau lebih variabel bebas suatu fungsi[1]. Persamaan diferensial adalah persamaan yang memuat derivatif dari f(x).[2]

Ingat kembali !!

Bentuk penulisan derivatif (turunan) suatu fungsi ditulis dalam bentuk $\frac{dy}{dx}$ atau y’. Dimana y disebut variabel tak bebas dan x disebut variabel bebas.

Contoh persamaan diferensial:

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3x = 0$
2. $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} + xy = 5$
3. $(y'')^3 - 2y' + y = -\sin(t) - 3e^t$
4. $xy''' - (x+1)y' + y = 0$

2. **Orde/peringkat persamaan diferensial** yaitu tingkat dari tingkat tertinggi derivatif yang terkandung dalam persamaan diferensial. Suatu persamaan differensial

[1] Sugiyarto, Persamaan Diferensial, (Yogyakarta: Binafsi Publisher, 2015),h.2

[2] Darmawijoyo, Persamaan Diferensial Biasa: Suatu pengantar, (Erlangga: Jakarta, 2011), h.1

dikatakan bertingkat n, bila tingkat yang tertinggi dari differensial koefisien dalam persamaan itu adalah n.[3]

Contoh

1. $\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3x = 0$

   Persamaan diferensial orde dua

2. $(y'''')^3 - 2y' + y = -\sin(t) - 3e^t$

   Persamaan diferensial orde empat

3. **Derajat suatu persamaan diferensial** yaitu pangkat tertinggi dari derivatif tingkat tertinggi yang terkandung dalam persamaan diferensial. Suatu persamaan differensial berderajat m, bila tingkat yang tertinggi dari differensial koefisien dalam persamaan itu berderajat m.

   Contoh:

   Pada contoh persamaan diferensial:

   (1) $\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3x = 0$

   Derajat satu karena turunan tertingginya berpangkat satu

   (2) $(y'''')^3 - 2y' + y = -\sin(t) - 3e^t$

   Derajat tiga karena turunan tertingginya berpangkat tiga.

[3] Riogilang, Persamaan Diferensial, (Bandung:Binacipta,1983), h.ix

4. KLASIFIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL

Berdasarkan banyak variabel bebasnya, persamaan diferensial terbagi menjadi:

1. **Persamaan diferensial biasa** yaitu suatu persamaan diferensial yang memuat turunan satu atau lebih variabel tak bebas terhadap satu variabel bebas suatu fungsi.[4]

   Contoh:

   $$4\frac{dy}{dx} - 5y = 1$$

   Terdapat satu variable bebas y dan satu variable tidak tak bebas x.

   $$(x + y)dx - 9ydy = 0$$

   Terdapat satu variable bebas y dan satu variable tidak tak bebas x.

   $$\frac{d^2z}{dx^2} - 3\frac{dz}{dx} + 5z = 0$$

   Terdapat satu variable bebas z dan satu variable tidak tak bebas x.

2. **Persamaan diferensial parsial** yaitu suatu persamaan diferensial yang memuat turunan parsial satu atau lebih variabel tak bebas terhadap lebih dari satu variabel bebas suatu fungsi.

[4] Dwi Lestari, Diktat Persamaan Diferensial, (Yogyakarta: UNY,2013), h.2

Contoh:

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial u}{\partial t} + 5u = 0$$

Untuk selanjutnya, kita akan membahas <u>persamaan diferensial biasa.</u>

Berdasarkan kelinearannya, persamaan diferensial terbagi menjadi:

1. **Persamaan diferensial linear** yaitu sutau bentuk persamaan diferensial yang dapat ditulis dalam bentuk:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) y = g(x)$$

dimana $a_0 \neq 0$

- jika koefisien $a_0(x), a_1(x), \ldots, a_n(x)$konstan, maka disebut persamaan linear dengan koefisien konstan, jika tidak maka disebut persamaan linear dengan koefisien variabel.
- Jika g(x)=0 maka disebut persamaan diferensial homogen, jika tidak disebut tidak homogen.[5]

Berikut ciri-ciri persamaan diferensial linear :

[5] Darmawijoyo, Persamaan Diferensial Biasa: Suatu Pengantar, (Jakarta: Erlangga,2011), h.5

a. Semua variable y adalah derajat pertama,
b. Semua turunan bagi y juga adalh dalam keadaan derajat pertama
c. Satu variable bebas yaitu x yang tetrlibat

2. **Persamaan diferensial non linear** yaitu suatu bentuk persamaan diferensial yang tidak linear

   Contoh:

   1. $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+4y=0$ (PD linear order dua)
   2. $\frac{d^4y}{dx^4}+x^2\frac{d^3y}{dx^3}+x^3\frac{dy}{dx}=xe^x$ (PD linear order empat)
   3. $\frac{d^2y}{dx^2}+3\frac{dy}{dx}+4y^3=0$ (PD non linear)
   4. $\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)^2+x^2\frac{d^3y}{dx^3}+x^3\frac{dy}{dx}=xe^x$ (PD non linear).

5. Solusi Persamaan Diferensial

Suatu fungsi dikatakan solusi dari suatu persamaan diferensial jika fungsi tersebut memenuhi persamaan diferensial. Solusi dari persamaan diferensial dalam fungsi y yang tidak diketahui dan variabel x pada interval f adalah fungsi y(x) yang memiliki persamaan diferensial secara identik untuk semua x dalam f.[6]

Contoh:

[6] Richard Bronson, Gabriel Costa, Persamaan Diferensial Edisi Ketiga, (Jakarta: Erlangga, 2007), h.1-2

Buktikan bahwa $y = x^2$ penyelesaian dari persamaan diferensial $xy' = 2y$

Bukti:

$y = x^2$

$y' = 2x$

Subsitusi ke persamaan diferensial!

$xy' = 2y$

$x.2x = 2.x^2$

$2x^2 = 2x^2$ (*berarti y*= x^2*solusi dari PD*)

Solusi persamaan diferensial dilihat dari bentuknya dibagi dua, yaitu:

1. **Solusi eksplisit** yaitu solusi persamaan diferensial yang mana variabel bebas dan variabel tak bebas dapat dibedakan secara jelas.

   Contoh:

   $y = x^2 + 5x + 4$ (y variabel tak bebas, x variabel bebas)

2. **Solusi implisit** yaitu solusi persamaan diferensial yang mana variabel bebas dengan variabel tak bebas tidak dapat dibedakan secara jelas.[7]

   Contoh:

   $x^3 + 2y^2 = 60$

[7] Darmawijoyo, Persamaan Diferensial Biasa: Suatu Pengantar, (Jakarta: Erlangga,2011), h.9

Berdasarkan jenisnya, solusi persamaan diferensial dibedakan menjadi dua yaitu:

1. **Solusi umum** yaitu solusi persamaan diferensial yang masih mengandung konstanta sebarang misalnya C. Solusi umum persamaan diferensial orde-n adalah solusi yang memuat semua solusi yang mungkin pada suatu interval. Pada umumnya solusi umum persamaan diferensial biasa orde-n memuat-n konstan. Suatu solusi persamaan diferensial disebut solusi khusus jika soluai terssebut bebas dan sebarang konstan.

   Contoh:

   Persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = \frac{3y}{x}$ memiliki penyelesaian $y = cx^3$

2. **Solusi khusus** yaitu solusi yang tidak mengandung konstanta variabel karena terdapat syarat awal pada persamaan diferensial.

   Contoh:

   Persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = 3x^2$ dengan syarat x(0) = 4, mempunyai penyelesaian khusus $y = x^3 + 4$

Contoh:

Dengan cara mengintegralkan, persamaan diferensial $y' = 2x + 3$ menghasilkan solus $y = x^2 + 3x + C$

Disini, konstan C adalah sebarang bilangan real. Fungsi $y = x^2 + 3x + C$ adalah solusi umum persamaan diferensial $y' = 2x + 3$. Setiap solusi khusus persamaan diferensial $y' = 2x + 3$ diperoleh dari $y = x^2 + 3x + C$ dengan mengganti nilai C denagn konstan tertentu. Misalnya untuk C =0, diperoleh solusi kusus $y = x^2 + 3x$ dan untuk C = 19 diperoleh $y = x^2 + 3x + 19$.[8]

Untuk lebih memahaminya, misal diketahui persamaan diferensial $y' - y = 0$ memiliki penyelesaian umum $y = ce^x$. Jika peubah x diberi nilai tertentu dan nilai fungsi penyelesaiannya ditetapkan, maka didapatkan nilai konstanta C. Selanjutnya nilai konstanta C tersebut disubstitusi ke penyelesaian umum, maka diperoleh penyelesaian khusus. Misal diberikan nilai x = 0 dan y(0) = 1, maka y(0) = ce^0, diperoleh c = 1. Sehingga penyelesaian khusus PD adalah y = e^x.

LATIHAN 1

A. Klasifikasikanlah persamaan diferensial berikut! Tentukan orde dan derajatnya!

1. $\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} + xy = 5$
2. $\frac{dy}{dx} + \frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 3x = 0$

3. $\frac{\partial^2 y}{\partial s^2} + \frac{\partial y}{\partial t} - y = 0$
4. $\frac{d^3 y}{dx^3} + (\frac{d^2 y}{dx^2})^3 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x = 2y$
5. $(\frac{dy}{dx})^5 + \frac{d^2 y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^2 = 7y$
6. $2x(y+1)dx - (x^2+1)dy = 0$
7. $y'' - 2y' + y = -\sin(t) - 3e^t$
8. $y'' + (y')^2 + 2y^2 = 0$

B. Nyatakanlah apakah persamaan diferensial berikut linear atau tak linear!

a. $t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 2y = \sin(t)$

b. $(1+y^2)\frac{d^2 y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + 2y = e^t$

c. $\frac{d^4 y}{dt^4} + \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1$

C. Buktikanlah bahwa satu atau beberapa fungsi yang diberikan adalah solusi persamaan diferensial!

a. $xy'' - (x+1)y' + y = 0;\ y_1(x) = e^x, y_2(x) = x + 1$

b. $ty' - y = t^2; y(t) = 3t + t^2; y(t) = 3t + t^2$

D. Cermati apakah fungsi solusi di bawah ini merupakan solusi terhadap masalah nilai awal yang bersesuaian

a. $y' = -y; y(0) = 2; y(x) = 2e^{-x}$

b. $y'' + 4y = 0; y(0) = 1; y'(0) = 0; y(x) = \cos{(2x)}$

BAB II
PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU DENGAN VARIABEL TERPISAH

1. Definisi

Bentuk umum:

P(x,y)dx+q(x,y)dy=0

Bentuk umum persamaan diferensial di atas, dikatakan persamaan diferensial dengan variabel terpisah jika dapat diubah menjadi bentuk:[9]

1. M(x)dx +N(y) dy=0, atau
2. M(x) . R(y) dx+ N(x) . S(y)dy=0
   sehingga dapat diubah menjadi
   $$\frac{M(x)}{N(x)}dx + \frac{S(y)}{R(y)}dy = 0$$

2. Tahap penyelesaian

Bentuk umum PD orde satu dengan variabel terpisah:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

- ✓ Ubahlah bentuk umum tersebut sehingga terpisah variabel x dan variabel y.

[9] Riogilang, Persamaan Diferensial, (Bandung:Binacipta,1983), h.4

- ✓ Kondisikan suku-suku bervariabel x bersama dengan dx, dan sebaliknya,sehingga diperoleh persamaan berikut!

  $M(x)dx + N(y)dy = 0$

- ✓ Integralkan kedua suku sehingga diperoleh solusi umum PD orde satu dengan variabel terpisah.

  $\int M(x)dx + \int N(y)dy = 0$

  $f(x) + g(y) + C = 0$

Mari kita cobakan pada soal berikut!

1. Diketahui PD orde satu dengan variabel terpisah

$$(x^3 + 2x)dx + (3y^2 + y + 1)dy = 0$$

Tentukan solusi umum PD tersebut!

Solusi umum:

Pada PD tersebut, variabel x sudah terpisah dengan variabel y serta suku bervariabel x dengan dx, dan sebaliknya, sehingga:

$$\int (x^3 + 2x)dx + \int (3y^2 + y + 1)dy = 0$$

$$\frac{1}{4}x^4 + x^2 + C_1 + y^3 + \frac{1}{2}y^2 + y + C_2 = 0$$

$\frac{1}{4}x^4 + x^2 + y^3 + \frac{1}{2}y^2 + y + C = 0 \ldots\ldots\ldots C = C_1 + C_2$

(*solusi umum PD*)

2. Diketahui PD orde satu dengan variabel terpisah

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x + xy^2}{y - x^2y}$$

Tentukan solusi umum PD tersebut!

SOLUSI UMUM:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x(4+y^2)}{y(1-x^2)} \ (pisahkan\ var\ x\ dan\ var\ y)$$

$$\frac{y}{4+y^2}dy = \frac{x}{1-x^2}dx$$

$$(kondisikan\ suku\ var\ x\ dengan\ dx, sebaliknya)$$

$$\int \frac{y}{4+y^2}dy = \int \frac{x}{1-x^2}dx \ \ (integralkan\ kedua\ ruas)$$

$$\frac{1}{2}\ln(4+y^2) + C_1 = -\frac{1}{2}\ln(1-x^2) + C_2$$

$$\tfrac{1}{2}\ln(4+y^2)(1-x^2) = C\ dimana\ C = C_2 - C_1$$

(*solusi umum PD*)

3. Tentukan solusi umum dari persamaan diferensial berikut $\frac{dy}{dx} = x^2y^4$

   Penyelesaian : $\frac{1}{y^4}\ dy = x^2\ dx$

   $$\leftrightarrow \int \frac{1}{y^4}dy = \ x^2dx$$

   $$\leftrightarrow -\frac{1}{3}y^3 + c = \ \frac{1}{2}x^2 + c$$

4. Tentukan solusi umum dari persamaan diferensial berikut $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2y^2}{1+y}$

   Penyelesaian : $(1+y)dy = x^2y^2dx$

   $$\leftrightarrow \frac{(1+y)}{y^2}\ dy = x^2dx$$

   $$\leftrightarrow \int \frac{1}{y^2} + \frac{y}{y^2}dy = \int x^2\,dx$$

$$\leftrightarrow \int (y^{-2} + \ln y) dy = \int x^2 \, dx$$

$$\leftrightarrow (-y^{-1} + \ln y) + \; c_1 = \frac{1}{3} x^3 + c$$

$$\leftrightarrow (-y^{-1} + \ln y) + \; c_1 - \frac{1}{3} x^3 + c$$

Latihan 2.1

Tentukan solusi umum dari persamaan diferensial berikut!

1. $\frac{dy}{dx} = x^2 y^4$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 y^2}{1+y}$
3. $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$
4. $x \frac{dy}{dx} + 2y^2 = 2$
5. $ydx - x^3 dy = 0$
6. $x\sqrt{1-y}dx - \sqrt{1-x^2}dy = 0$
7. $(x^2 + 4) \frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + 4}\,(y + 2)$
8. $2y(x + 2)dy = xdx$
9. $xy^2 dx + (1 - x)dy = 0$

3. Persamaan Diferensial Orde Satu Variabel Terpisah Dengan Nilai Awal

Persamaan diferensial orde satu variabel terpisah dapat ditentukan penyelesaian khususnya jika diberikan suatu nilai awal. Seperti contoh berikut!

Tentukan penyelesaian khusus dari persamaan diferensial xy’+y=0 dimana y(1)=1

Penyelesaian:

xy’+y=0

$$x\frac{dy}{dx} = -y$$

$$\frac{1}{y}dy = -\frac{1}{x}dx$$

$$\int \frac{1}{y}dy = \int -\frac{1}{x}dx$$

$$ln|y| = -ln|x| + C$$

$$|y| = e^{-ln|x|+c}$$

Nilai awal y(1)=1

Sehingga $1 = e^{c}\ diperoleh\ nilai\ c = 0$

Jadi penyelesaian khususnya adalah

$$|y| = e^{-ln|x|}$$

LATIHAN 2.2

Tentukan solusi khusus dari persamaan diferensial berikut!

1. $xy' + y = 1 \quad , y(e) = 1$

2. $y' - \dfrac{x}{y} = 0 \quad , y(2) = 0$

3. $yy' - 2\sin^2 x = 0 \quad , y(0) = \sqrt{3}$

4. $y^3 y' = x^3 \quad , y(1) = 0$

5. $y' + x^2 y = 0 \quad , y(1) = 1$.

BAB III
PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU HOMOGEN

1. DEFINISI

Definisi 3.1.1

Jika $f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x, y)$ untuk suatu bilangan asli n, maka f(x,y) dikatakan fungsi homogen berderajat n[10]

Contoh:

$f(x, y) = 2x^3y - 4x^2y^2$

Fungsi tersebut homogen berderajat 4 karena

$f(\alpha x, \alpha y) = 2(\alpha x^{)3}(\alpha y) - 4(\alpha x)^2(\alpha y)^2$

$= \alpha^4(2x^3y - 4x^2y^2)$

$= \alpha^4 f(x, y)$

Fungsi $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}^{\boldsymbol{2}} - \boldsymbol{x}$ adalah tidak homogen karena

$f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda y)^2 - \lambda x$

$= \lambda^2 y^2 - \lambda x$

$\neq \lambda^2 f(x, y)$

[10] Boyce W.E and DiPrima, R.C., 1997, Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems, (New York: John Wiley & Sons.Inc)

Definisi 3.1.2

Suatu persamaan diferensial yang berbentuk

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

Adalah suatu persamaan homogen jika M(x,y) dan N(x,y) adalah homogen dengan masing-masing berderajat sama.[11]

Contoh:

Tentukan apakah persamaan berikut homogen!

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{xy} - y}{x}$$

Penyelesaian:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{xy} - y}{x} = \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

Periksa M(x,y) dan N(x,y) adalah homogen dengan derajat sama!!

M(αx,αy)=2$\sqrt{\alpha x \alpha y} - \alpha y = \alpha\left(2\sqrt{xy} - y\right) = \alpha M(x,y)$

N(αx,αy)= $\alpha y = \alpha N(x,y)$

Berarti persamaan diferensial yang diberikan homogen berderajat satu.

2. Tahap Penyelesaian

Menentukan penyelesaian Persamaan diferensial homogen adalah dengan mengubahnya menjadi persamaan diferensial variabel terpisah, dengan cara:

[11] Sugiyarto, Persamaan Diferensial, (Yogyakarta: Binafsi Publisher, 2015),h.2

Cara 1:

Ubah y=vx , sehingga diperoleh dy=v dx +x dv

Cara 2:

Ubah x=vy, sehingga diperoleh dx=v dy+y dv

Mari kita cobakan pada soal berikut!

1. Selesaikan $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{3xy}$

   Penyelesaian:

   Ubah persamaan menjadi

   $3xy\ dy = (x^2 + y^2)dx$

   Subsitusi y=vx dan dy=v dx +x dv, sehingga

   $3x(vx)(vdx + xdv) = (x^2 + (vx)^2)dx$

   $3vx^2(vdx + xdv) = x^2(1 + v^2)dx$

   $3v(vdx + xdv) = (1 + v^2)dx$

   $3v^2\ dx + \ 3vxdv = (1 + v^2)dx$

   $3vxdv = (1 - 2v^2)dx$

   $$\frac{3v}{(1 - 2v^2)}dv = \frac{1}{x}dx$$

Persamaan tersebut merupakan Persamaan diferensial orde satu dengan variabel terpisah

$$\int \frac{3v}{(1 - 2v^2)}dv = \int \frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{3}{4}\ln((1 - 2v^2) = lnx + C$$

$$C = -\frac{3}{4}\ln((1-2v^2) - lnx$$

$$C = -\left(\ln(x(1-2v^2)^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$C = -\left(\ln\left(x(1-2\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)^{\frac{3}{4}}\right)$$

$$C = -\left(\ln\left(x-2\frac{y^2}{x}\right)^{\frac{3}{4}}\right)$$

2. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut!

$$x^2y\frac{dy}{dx} = 2xy$$

Penyelesaian:

$$(x^2+y)\frac{dy}{dx} = 2xy$$

Kalikan dx pada kedua ruasnya,

$$(x^2+y)dy = 2xy\ dx$$

$$(x^2+y)dy - 2xy\ dx = 0$$

Perhatikan bahwa $2xy\ dx = ydx^2$, sehingga

$(x^2+y)dy - ydx^2$=0

Substitusikan $u = x^2$, diperoleh:

$$(u+y)dy - ydu = 0$$

Bagi kedua ruas dengan u,

$$\left(1+\frac{y}{u}\right)dy - \frac{y}{u}du = 0$$

Bentuk persamaan diferensial di atas menunjukkan bahwa persamaan homogen.

Sekarang, kita misalkan $v = \frac{y}{u} \leftrightarrow y = uv \rightarrow dy = u\,dv + v\,du$, sehingga persamaannya diperoleh:

$$(1 + v)(u\,dv + v\,du) - v\,du = 0$$

$$u\,dv + v\,du + vu\,dv + v^2\,dv - v\,dv = 0$$

$$(1 + v)u\,dv + v^2\,dv = 0$$

$$\frac{1 + v}{v^2}dv + \frac{du}{u} = 0$$

Integrasikan kedua ruas terhadap variabel yang bersesuaian,

$$\int \frac{1 + v}{v^2}dv + \int \frac{du}{u} = C$$

$$\int v^{-2}dv + \int \frac{dv}{v} + \int \frac{du}{u} = C$$

$$-\frac{1}{v} + \ln v + \ln u = C$$

$$\ln \frac{vu}{c} = \frac{1}{v} \leftrightarrow \frac{vu}{c} = e^{\frac{1}{v}}$$

Substitusikan kembali $y = uv\ dan\ u = x^2$, diperoleh:

$$\frac{y}{c} = e^{\frac{u}{y}} \leftrightarrow \frac{y}{c} = e^{\frac{x^2}{y}}$$

3. Tentukan solusi dari persamaan diferensial berikut!

$$(x^2 - 3y^2)dx - 2xy = 0$$

Penyelesaian:

$$(x^2 - 3y^2)dx - 2xy = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 - 3y^2}{2xy}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y} + \frac{3y}{2x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2y/_x} + \frac{3}{2}\frac{y}{x}$$

Bentuk Persamaan diferensial di atas menunjukkan bahwa Persamaan diferensial ini homogen.

Misalkan $v = \frac{y}{x} \leftrightarrow y = xv \rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx} + v$

Substitusikan ini ke persamaannya,

$$\frac{1}{2v} + \frac{3v}{2} = x\frac{dv}{dx} + v$$

Kurangi v pada kedua ruas untuk mendapatkan

$$\frac{1}{2v} + \frac{v}{2} = x\frac{dv}{dx}$$

Samakan oenyebutnya pada ruas kiri, kemudian sederhanakan menjadi

$$\frac{v^2 - 1}{2v} = x\frac{dv}{dx}$$

Kalikan kedua ruas dengan $\frac{2v}{x(v^2-1)}dx$, sehingga diperolehlah

$$\frac{2v}{(v^2 - 1)}dv = \frac{dx}{x}$$

Integrasikan kedua ruas terhadap varaiebl yang berpadanan:

$$\int \frac{2v}{v^2 - 1}dv = \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln(v^2 - 1) = \ln x + \ln C$$

$$v^2 - 1 = xC$$

Substitusikan kembali bahwa $v = \frac{y}{x}$, sehingga diperoleh

$$\frac{y^2}{x^2} - xC = 1$$

4. Tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut :

$$(y^2 - x^2)dx - 2xydy = 0$$

Penyelesaian :

1. $(y^2 - x^2)dx - 2xydy = 0$..............................(*)

Ini merupakan PD homogen berpangkat dua, karena jumlah pangkat masing-masing suku sama dengan dua.

Mencari penyelesaiannya dengan cara sebagai berikut :

$(y^2 - x^2)dx - 2xydy \ = 0, dibagi\ xy\ diperoleh$

$$\left[\frac{y}{x} - \frac{x}{y}\right] dx - 2dy \ \ = 0\ atau$$

$$\left[\frac{y}{x} - \frac{x}{y/x}\right] dx - 2dy = 0 \dots \dots \dots \dots \dots \dots . . (**)$$

Sibstitusikan $\frac{y}{x} = u \Rightarrow y = ux \Rightarrow dy = u\ dx + x\ du$

Masukkan ke persamaan (**) diperoleh

$$\left(u - \frac{1}{u}\right) dx - 2(u\ dx + x\ du) \ = 0$$

$$\left(u - \frac{1}{u} - 2u\right) dx - 2x\ du = 0$$

$$\left(-\frac{1}{u} - u\right) dx - 2x\ du \ \ = 0$$

$$\left(\frac{1 + u^2}{u}\right) dx + 2x\ du = 0$$

Ini PD dengan variabel mudah dipisah, dengan dibagi $\left(\frac{1+u^2}{u}\right)$ x diperoleh

$$\frac{1}{x}dx + \frac{2u}{1+u^2}du = 0, diintegralkan\ diperoleh$$

$$\int \frac{1}{x}dx + \int \frac{2u}{1+u^2}du = \ln C$$

$$lnx + \ln(l + u^2) \ \ = \ln C$$

$$x(l + u^2) \ \ = C, dengan\ u = \frac{y}{x}$$

Jadi penyelesaian umum PD tersebut adalah

$$\boldsymbol{x\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) = C\ atau\ x^2 + y^2 = Cx}$$

5. Tentukan solusi umum persamaan diferensial berikut.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - 2x^3}{xy^2}$$

Substitusikan $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$, maka

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{(ux)^3 - 2x^3}{x(ux)^2} = \frac{u^3 - 2}{u^2}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u^3 - 2}{u^2} \qquad = -\frac{2}{u^2}$$

$$-\frac{1}{2}u^2\ du \ = \frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{2}\int u^2\ du = \int \frac{1}{x}dx$$

$$-\frac{1}{6}u^3 = \ln x + C, dengan\ u = \frac{y}{x}$$

Jadi penyelesaian PD tersebut adalah

$$-\frac{1}{6}\frac{y^3}{x^3} = \ln x + C\ atau\ y^3 = -6x^3(\ln x + C)$$

LATIHAN 3

Buktikan bahwa persamaan diferensial berikut homogen dan Tentukan solusi dari persamaan diferensial berikut!

1. $(y^2 - x^2)dx - 2xydy = 0$
2. $\frac{dy}{dx} = \frac{y^3 - 2x^3}{xy^2}$
3. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$
4. $(x - 2y)dx + (2x + y)dy = 0$
5. $xydx - (x^2 + 2y^2)dy = 0$
6. $(5v - u)du + (3v - 7u)dv = 0$

BAB IV
PERSAMAAN DIFERENSIAL NON HOMOGEN

1. Definisi

Definisi : Fungsi F(x,y) disebut fungsi homogen bila terdapat n ∈ R sehingga berlaku $F(kx,ky) = k^nF(x,y)$, dengan n disebut order dari fungsi homogen F(x,y). Jika syarat di atas tidak terpengaruhi, maka disebut dengan PD non Homogen yang mempunyai bentuk[12]:

$$(ax + by + c)dx + (ax + by + c)dy = 0$$

dengan a,b,c,p,q, dan r adalah konstan, dan c≠0,r≠0

Contoh:

1. (x+y+2) dx + (2x + 2y + 4) dy = 0
2. (x+y+1) dx + (2x+2y+3) dy = 0
3. (3y – 7x +7) dx + (7y – 3x + 3) dy = 0
4. (3x + 2y + 1) dx – (3x+2y-1) dy = 0

Berdasarkan contoh di atas, maka persamaan differensial tidak homogen dengan M(x,y) dan N(x,y) fungsi linear dapat dikelompokkan menjadi 3 jenis yaitu:

a. Bentuk $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \lambda$ (parameter), sehingga

---

[12] Sugiyarto, Persamaan Diferensial, (Yogyakarta: Binafsi Publisher, 2015),h.34

a = λp , b = λ q, dan c = λ r

Contoh

(x+y+2) dx + (2x + 2y + 4) dy = 0

b. Bentuk $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \lambda$ (parameter) $\neq \frac{c}{r}$

Sehingga a = λp , b = λ q

Contoh

(x+y+1) dx + (2x+2y+3) dy = 0

(3x+2y+1) dx + (3x+2y-4) dy = 0

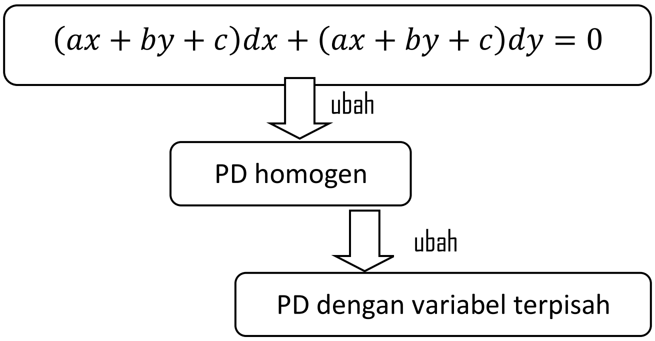
c. Bentuk selain di atas.

(3y – 7x +7) dx + (7y – 3x + 3) dy = 0

(3x - 2y + 1) dx – (3x+2y) dy = 0

2. Tahap Penyelesaian Persamaan Diferensial Dengan Koefisien-Koefisien Linear

Menentukan penyelesaian persamaan diferensial non homogen dengan koefisien linear melalui 2 tahap yaitu:



Karena bentuknya berbeda-beda, maka selesaian umum persamaan differensial linear tidak homogen harus menyesuaikan dengan bentuknya.

a. Bentuk $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \lambda$.

Karena $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = \lambda$, maka diperoleh

a = λp, b = λq, dan c = λr. Sehingga persamaan semula

(ax + by + c) dx + (px +qy + r) dy = 0

$\Leftrightarrow$ $(\lambda px + \lambda qy + \lambda r)$ dx + (px + qy + r) dy = 0

$\Leftrightarrow$ λ (px + qy + r) dx + (px + qy + r) dy = 0

$\Leftrightarrow$ λ dx + dy = 0

$\Leftrightarrow \int \lambda\, dx + \int dy = C$

$\Leftrightarrow$ λ x + y = C (persamaan linear)

b. Bentuk $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \lambda$.

Persamaan bentuk $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \lambda$ dapat diselesaikan dengan cara menggunakan transformasi **ax + by = u** atau **px + qy = v**. Berdasarkan transformasi tersebut, dengan mendifferensialkan masing variabel, sehingga diperoleh:

d(ax) + d(by) = d(u)

$\Leftrightarrow$ a dx + b dy = du

$\Leftrightarrow$ a dx = du – b dy

$$dx = \frac{du - bdy}{a}, \text{ atau}$$

$\Leftrightarrow$ a dx + b dy = du

$\Leftrightarrow$ b dy = du – a dx

$$dy = \frac{du - adx}{b}$$

Dengan cara yang sama jika yang digunakan transformasi px+qy=v, diperoleh bentuk

$$dx = \frac{dv - qdy}{p}, \text{ atau}$$

$$dy = \frac{dv - pdx}{q}$$

Pilih dx atau dy akan tetapi tidak keduanya, dan substitusikan ke persamaan differensial semula.

(ax + by + c) dx + (px + qy + r)dy = 0

$(u + c)\, dx + (\frac{1}{\lambda} u + r)\, dy = 0$

$\Leftrightarrow (u+c)\, (\frac{du - bdy}{a}) + (\frac{1}{\lambda} u + r)\, dy = 0$

Persamaan di atas adalah persamaan yang dapat direduksi ke persamaan differensial dengan variable terpisah (PD separable).

Contoh:

1. Tentukan penyelesaian dari (x+y+1) dx + (2x+2y+3) dy = 0 dengan y(0) = 0

Jawab

Dari persamaan (x+y+1) dx + (2x + 2y + 3) dy = 0, diperoleh

a = 1, b = 1, c = 1, p = 2, q = 2, dan r = 3. Sehingga $\lambda = \frac{1}{2}$.

Selanjutnya gunakan transformasi

x + y = u atau 2x + 2y = v.

Jika transformasi yang digunakan x + y = u. maka diperoleh

(u+1) dx + (2u + 3) dy = 0.

Selanjutnya bentuk transformasi x + y = u didefferensialkan

dx + dy = du dan diperoleh dx = du – dy atau dy = du – dx.

<u>Cara I</u>

(u+1) dx + (2u + 3) dy = 0.

$\Leftrightarrow$ (u+1) (du – dy) + (2u + 3) dy = 0

$\Leftrightarrow$ (u+1) du + (2u +3 – u – 1) dy = 0

$\Leftrightarrow$ (u+1) du + (u +2) dy = 0 (direduksi menjadi PD Separable)

$\Leftrightarrow$ dy + $\frac{u+1}{u+2}$ du = 0

$\Leftrightarrow$ $\int$ dy + $\int$ 1 du - $\int$ $\frac{1}{u+2}$ du = 0

$\Leftrightarrow$ y + u - Ln $|u + 2|$ = C

$\Leftrightarrow$ y + (x+y) - Ln $|x + y + 2|$ = C

$\Leftrightarrow$ x + 2y – C = Ln $|x + y + 2|$

$\Leftrightarrow$ $e^{(x+2y-c)}$ = (x+y+2)

Karena y(0) = 0, maka selesaian khusus persamaan $e^{(x+2y-\ln 2)}$ = (x+y+2)

Cara II

(u+1) dx + (2u + 3) (du – dx) = 0.

$\Leftrightarrow$ (u+1 – 2u -3) dx + (2u + 3) du = 0

$\Leftrightarrow$ (-u -2) dx + (2u + 3) du = 0

$\Leftrightarrow$ (u+1) du + (u +2) dy = 0

$\Leftrightarrow$ du + $\frac{u+2}{u+1}$ dy = 0

$\Leftrightarrow$ $\int$ du + $\int$ 1 dy + $\int \frac{1}{u+1}$ dy = 0

$\Leftrightarrow$ (x+y) + y + Ln $|x + y + 1|$ = C

$\Leftrightarrow$ x + 2y – C = Ln $|x + y + 1|$

$\Leftrightarrow$ (x+y+1) = e^{x+2y-C}

Karena y(0) = 0 maka didapat c = ln 2.

2. (3x+2y+1) dx - (3x+2y-1) dy = 0 (jenis 2)

Jawab

Transformasikan 3x + 2y = u, sehingga 3 dx + 2 dy = u dan diperoleh:

dx = $\frac{du-2dy}{3}$, atau dy = $\frac{du-3dx}{2}$

(u+1) dx – (u-1) dy = 0

Pilih dx atau dy, lalu substitusikan ke dalam persamaan dan diperoleh (u+1) ($\frac{du - 2dy}{3}$) – (u-1) dy = 0

⇔ (u+1) (du – 2dy) – 3(u-1) dy = 0 dstnya.

⇔ (u+1) du – (2u+2+3u-3) dy = 0

⇔ $\frac{(u+1)}{(5u-1)}$ du – dy = 0

⇔ $\int$ $\frac{1}{5}$ du + $\frac{6}{25}$ $\int \frac{5}{5u-1}du$ - $\int dy$ = C

⇔ 1/5 u + 6/25 Ln │5u -1│- y = C

⇔ 1/5 (3x+3y) + 6/25 Ln │5(3x+3y) -1 │ - y = C

c. ax + by + c = u **dan** px + qy + r = v.

Differensialkan kedua bentuk transformasi di atas sehingga diperoleh

d(ax) + d(by) + d(c) = d(u) **dan** d(px) + d(qy) + d(r) = d(v)

⇔ a dx + b dy = du **dan** p dx + q dy = dv. Eliminasikan dx dan dy pada hasil differesial yang diperoleh secara berurutan yaitu:

a dx + b dy = du x p

p dx + q dy = dv x a, sehingga

ap dx + bp dy = p du

ap dx + aq dy = a dv

--------------------------- -

(bp-aq) dy = p du – a dv

$$dy = \frac{pdu - adv}{bp - aq}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$dx = \frac{qdu - bdv}{aq - bp}$$

Substisusikan dx dan dy dalam persamaan semula, yaitu:

(ax + by + c) dx + (px +qy + r) dy = 0

$$\Leftrightarrow u \frac{qdu - bdv}{aq - bp} + v \frac{pdu - adv}{bp - aq} = 0$$

Persamaan di atas menjadi persamaan baru dengan tanda differensial du dan dv, dan termasuk dalam persamaan differensial homogen. Primitifnya dapat ditentukan dengan menggunakan metode PD homogen.

Contoh

1. Tentukan selesaian umum persamaan (3y–7x+7)dx+(7y–3x+3)dy=0

   Jawab

   Transformasikan

   (3y-7x+7) = u dan (7y-3x+3) = v

   Dengan mendifferensialkan masing-masing peubah, diperoleh:

   3 dy – 7 dx = du dan 7 dy – 3 dx = dv.

   Elimasikan dx dan dy berurutan

   3 dy – 7 dx = du   x 3

7 dy – 3 dx = dv   x 7, didapat

9 dy – 21 dx = 3 du

49 dy – 21 dx = 7 dv

---------------------- -

-40 dy = 3 du – 7 dv

$$dy = \frac{7dv - 3du}{40}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$dx = \frac{3dv - 7du}{40}$$

Substitusikan kepersaman semula, sehingga diperoleh

(3y – 7x +7) dx + (7y – 3x + 3) dy = 0

$$u\left(\frac{3dv - 7du}{40}\right) + v\left(\frac{7dv - 3du}{40}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow$ 40u(3dv-7du) + 40v(7dv-3du) = 0 (PD homogen)

$\Leftrightarrow$ (3u + 7v) dv – (7u + 3v) du = 0

Bagi persamaan dengan v, diperoleh

$$\left(3\frac{u}{v} + 7\right) dv - \left(7\frac{u}{v} + 3\right) du = 0$$

Transformasikan $\frac{u}{v} = t$ atau u = vt

Sehingga du = v dt + t dv

Persamaan di atas adalah PD yang dapat direduksi ke persamaan variable terpisah.

(3t +7) dv – (7t+3)(vdt + tdv) = 0

$\Leftrightarrow$ $(3t+7-7t^2-3t)$ dv –(7t+3)vdt = 0

$\Leftrightarrow \frac{dv}{v}$ - $\frac{(7t+3)}{(7-7t^2)}$ dt = 0

$\Leftrightarrow \int \frac{dv}{v}$ - $\int \frac{(7t+3)}{(7-7t^2)}$ dt = C

$\Leftrightarrow$ Ln $|v|$ + ½ Ln $|1-t^2|$ + 3/7 Ln $\left|\frac{1+t}{1-t}\right|$ = 0

Dengan mensubstitusi v = 7y – 3x + 3 dan t = $\frac{7y-3x+3}{3y+7x+7}$, diperoleh selesaian umum persamaan (3y – 7x +7) dx + (7y – 3x + 3) dy = 0

2. Tentukan selesaian umum persamaan (3x-2y+1)dx–(3x+2y) dy = 0

Jawab.

Transformasikan

3x – 2y + 1 = u dan 3x+2y = v

$\Leftrightarrow$ 3 dx – 2 dy = du dan 3 dx + 2 dy = dv diperoleh

$\Leftrightarrow$ 3 dx – 2 dy = du

3 dx +2 dy = dv

------------------- -

-4 dy = du – dv

dy = ¼ (dv-du) dan dx = dx = 1/6 (du+dv).

Substitusikan dy dan dx ke persamaan semula dan diperoleh

(3x - 2y + 1) dx – (3x+2y) dy = 0

$\Leftrightarrow$ u (1/6)(du+dv) – v(1/4)(dv-du) = 0

$\Leftrightarrow$ 4u(du+dv) – 6v(dv-du)

$\Leftrightarrow$ (4u + 6v) du + (4u -6v) dv = 0

$\Leftrightarrow (4 + 6\ \frac{v}{u})\ du + (4 - 6\ \frac{v}{u})\ dv = 0$

Transformasikan $\frac{v}{u} = p \rightarrow v = up$ sehingga dv = u dp + p du

Substitusikan kepersamaan di atas, diperoleh

(4+6p) du + (4-6p)(u dp + p du) = 0

$\Leftrightarrow (4+6p+4p-6p^2)\ du + (4-6p)u\ dp = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{du}{u} + \frac{(4-6p)dp}{(4+10p-6p^2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \int \frac{du}{u} + \int \frac{(4-6p)dp}{(4+10p-6p^2)} = C$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{Ln}\ |u| - \int \frac{4-6p}{(6p+2)(p-2)}\ dp = C$$

$\Leftrightarrow$ Ln $|3x - 2y + 1|$ + 18/5 Ln $|6p + 2|$ + 8/5 Ln $|p-2|$ + C

$$\Leftrightarrow \mathrm{Ln}|3x - 2y + 1 + 18/5\mathrm{Ln}|6(\frac{3x+2y}{3x-2y+1}) + 2| + 8/5\mathrm{Ln}|(\frac{3x+2y}{3x-2y+1})-2 + C$$

LATIHAN 4

Tentukan penyelesaian persamaan diferensial berikut!

1. (x-2y-5)dx +(5x-y-7)dy=0
2. (x+y+1)dx+(2x+2y+1)dy=0
3. (x-2y-5)dx+(5x-y-7)dy=0
4. (x+y+1)dx+(2x+2y+1)dy=0
5. (x-2y+8)-(3x-6y+18)dy=0
6. (x+2y-1)dx+3(x+2y)dy=0
7. (x-y-1)dx+(x+4y-1)dy=0 dengan y(2)=0

BAB V
PERSAMAAN DIFERENSIAL EKSAK

1. Definisi Persamaan Diferensial Eksak

Persamaan differensial tingkat satu derajat satu M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 disebut persamaan differensial eksak jika dan hanya jika memenuhi syarat[13]:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Contoh

1. (x+y) dx + (x-y) dy = 0 adalah PD eksak karena

   M(x,y) = (x+y) $\rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ =1 dan N(x,y)=(x-y) $\rightarrow$

   $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ = 1

2. (x+y Cos x) dx + Sin x dy = 0, adalah PD eksak karena

   M(x,y) = x + y Cos x $\rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ = Cos x

   N(x,y) = Sin x $\rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ = Cos x

[13] Dwi Lestari, Diktat Persamaan Diferensial, (Yogyakarta: UNY,2013), h.34

3. y(x-2y) dx – x^2 dy = 0, bukan persamaan differensial eksak,

M(x,y) = xy – $2y^2 \rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ = x – 4y

N(x,yk) = $-x^2 \rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ = 2-2x

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Dengan cara yang sama, persamaan dibawah ini adalah persamaan tidak eksak karena $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

1. (x^2+y^2) dx + xy dy = 0 --→ PD Homogen
2. dx - $\sqrt{a^2 - x^2}$ dy = 0 ---→ PD yang dapat direduksi ke PD Separable
3. (x+y+1) dx - (x-y+3) dy = 0 ---> PD Tidak homogen

Sebagai dasar utama dalam bahasan dalil rantai dalam menentukan turunan suatu fungsi :

Misalkan $\emptyset(x,y)$ adalah fungsi dalam x dan y, sementara y adalah tak bebas atau fungsi dalam x. Jadi kita menulis $\emptyset(x,y) = \emptyset(x,y(x))$

sehingga ,

$$\frac{d}{dx}\emptyset\big(x,y(x)\big) = \frac{\partial\emptyset(x,y(x))}{\partial x} + \frac{\partial\emptyset(x,y(x))}{\partial y}.\frac{dy(x)}{dx}$$

TEOREMA 1

Pertimbangkan persamaan diferensial

$$\boldsymbol{M\ (x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0}$$

Misalkan fungsi-fungsi $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, dan\ \frac{\partial N}{\partial x}$ adalah kontinu dalam satu sisi empat eksak *R* bagi bidang koordinat XY. Maka persamaan diferensial adalah eksak dalam *R* jika dan hanya jika,

$$\boldsymbol{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

untuk semua titik (x,y) dalam *R.*[14]

Hendak diingat bahwa Teorema 1 adalah satu ujian untuk menguji apakah persamaan diferensial yang diberikan itu eksak atau tidak. Teorema 1 dapat membawa persamaan diferensial yang diberikan kepada satu keadaan yang dapat kita selesaikan dengan menggunakan **kaedah dalil rantai diperluas.**

Jika ada $\emptyset(x,y)$ yang memenuhi :

$$\frac{\partial \emptyset(x,y(x))}{\partial x} = \frac{\partial \emptyset}{\partial x} = M(x,y)$$

dan

$$\frac{\partial \emptyset(x,y(x))}{\partial y} = \frac{\partial \emptyset}{\partial y} = N(x,y)$$

[14] Ross, SL.1984. Differential Equations. (New York: John Wiley & Sons.Inc),h.30

Maka, persamaan diferensial.

$$M(x,y) + N(x,y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Disebut satu persamaan eksak. Jika kita boleh mengenal fungsi $\emptyset(x,y)$ tersebut, penyelessaiannya adalah

$$\emptyset(x,y) = C$$

Dengan demikian kita dapat mencari $\emptyset(x,y)$ dengan mengintegralkan $M(x,y)$t terhadap x dan y dianggap skalar, atau mengintegralkan $N(x,y)$ terhadap y dan x dianggap skalar. Hasilnya adalah :

$$\emptyset(x,y) = \int \frac{\partial\emptyset}{\partial x}dx = \int M(x,y)dx + h(y)$$

Dengan "h(y) adalah skalar terhadap x". Kita buat skalar h(y) sebagai fungsi dalam y sebab $\emptyset(x,y)$ adalah fungsi dalam x dan y. Walaupun begitu kita perlu mencari h(y). Jadi,

$$N(x,y) = \frac{\partial\emptyset}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx + h(y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + h'(y)$$

Sehingga memberikan

$$h'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Jelas ungkapan

$$N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$$

Adalah tidak tak bebas kepada x karena

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right)$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right)$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

2. Tahap Penyelesaian Persamaan Diferensial Eksak

Persamaan differensial eksak mempunyai selesaian umum F(x,y)=C. Menurut definisi differensial total untuk F(x,y)=C, diperoleh:

d(C) = dF(x,y)+ dF(x,y)

$0 = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ dx + $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ dy.

Berdasarkan bentuk M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 dan

$0 = \dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ dx + $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ dy

$\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ = M(x,y) dan $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ = N(x,y)

Berdasarkan kesamaan di atas, maka untuk menentukan selesaian persamaan differensial eksak yang berbentuk F(x,y) = C dapat dilakukan dengan dua cara.

<u>Cara I</u>

$\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ = M(x,y) dan $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ = N(x,y)

Dari kesamaan di atas diperoleh

$\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ = M(x,y) $\rightarrow$ F(x,y) = $\int$ M(x,y) dx

$$= \int^{x} M(x,y)\,dx + G(y)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)\,dx + G(y) = N(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)\,dx + G'(y) = N(x,y)$$

$$G'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)\,dx$$

$$G(y) = \int \left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)\right)$$

Substitusikan G(y) dalam F(x,y) = $\int^{x} M(x,y)\,dx + G(y)$ yang merupakan selesaian umum persamaan differensial

Cara II

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ = N(x,y) dan $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ = M(x,y)

Dari kesamaan di atas di peroleh

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \rightarrow F(x,y) = \int N(x,y)\,dy$$

$$= \int^{y} N(x,y)\,dy + F(x)$$

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\int^{y} N(x,y)\,dy + F(x) = M(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\int^{y} N(x,y)\,dy + F'(x) = M(x,y)$$

$$F'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int^{y} N(x,y)\,dy$$

$$F(x) = \int (\, M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int^{x} N(x,y)$$

Substitusikan F(x) ke dalam $F(x,y) = \int^{y} N(x,y)\,dy + F(x)$

yang merupakan selesaian umumnya.

Contoh

1. Tentukan selesaian persamaan differensial eksak berikut ini:

   (2x +3y+4) dx + (3x+4y+5) dy = 0.

   Jawab

   M(x,y) = (2x+3y+4) $\rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ = 3 dan

   N(x,y) = (3x+4y+5) $\rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ = 3

   Berarti persamaan di atas adalah eksak.

   Selesaian PD di atas adalah F(x,y) = C. Untuk mendapatkan F(x,y) = C dapat digunakan kesamaan

   $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ = N(x,y) dan $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ = M(x,y).

   $\Leftrightarrow \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ = (3x+4y+5)

   $\Leftrightarrow$ F(x,y) = $\int (3x+4y+5)dy$

$= 3xy + 2y^2 + 5y + F(x)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ = M(x,y).

$\Leftrightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}(3xy + 2y^2 + 5y + F(x)) = (2x +3y +4)$

$\Leftrightarrow$ 3y + F'(x) = 2x + 3y + 4

$\Leftrightarrow$ F'(x) = 2x + 4

$\Leftrightarrow$ F(x) = x^2 + 4x + C

Penyelesaian persamaan adalah F(x,y) = 3xy+ $2y^2$ + 5y + x^2 + 4x + C

2. (x + y Cos x) dx + sin x dy = 0

   Jawab

   M(x,y) = x + y Cos x $\rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ = Cos x dan

   N(x,y) = sin x $\rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ = Cos x

Berarti persamaan di atas adalah persamaan diferencial eksak. Sehingga selesaiannya dapat dinyatakan dalam bentuk F(x,y) = C. Untuk mendapatkan F(x,y) = C digunakan kesamaan

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ = M(x,y) dan $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ = N(x,y)

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$ = x + y Cos x $\rightarrow$ F(x,y) = $\int$ (x + y Cos x) dx

$= \frac{1}{2} x^2 + y\text{Sin } x + G(y)$

$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ = sin x

$\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{2}x^2 + y \text{ Sin } x + G(y)) = \sin x$

$\Leftrightarrow \sin x + G'(y) = \sin x$

$\Leftrightarrow g'(y) = 0$

$\Leftrightarrow g(y) = C$

Diperoleh selesaian umum persamaan

$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + y \text{ Sin } x + C$

$\Leftrightarrow x^2 + 2y \text{ Sin } x = C$

LATIHAN 5

Selidiki apakah persamaan di bawah ini eksak atau tidak. Jika eksak, tentukanlah solusi umum dari persamaan tersebut!

1. $(3x+2y)\,dx + (2x+y)\,dy = 0$
2. $(y^2 + 3)\,dx + (2xy-4)\,dy = 0$
3. $(6xy + 2y^2 - 5)\,dx + (3x^2+4xy-6)\,dy = 0$
4. $\frac{2x-1}{y}\,dx + \frac{x-x^2}{y^2}\,dy = 0$
5. $(\cos x \cos y + y)y' + \text{tgn } x = \sin x \sin y$
6. $(5xy + 4y^2 + 1)\,dx + (x^2+2xy)\,dy = 0$
7. $x\,dx + y\,dy = (x^2+y^2)\,dx$
8. $\left(y^2 - \frac{y}{x(x+y)} + 2\right) dx + \left(\frac{1}{x+y} + 2y(x+1)\right)dy = 0$
9. $2(x^2 + xy)\,dx + (x^2+y^2)\,dy = 0$
10. $\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}\right) dx + \left(\frac{4x+1}{y^3}\right) dy = 0$

BAB VI
PERSAMAAN DIFERENSIAL TIDAK EKSAK

1. Persamaan Diferensial Tidak Eksak

M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 adalah persamaan differensial orde satu derajat satu disebut persamaan differensial tidak eksak jika dan hanya jika:

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

2. Penyelesaian Persamaan Diferensial Tidak Eksak

Persamaan differenial tidak eksak dapat diselesaikan dan ditentukan penyelesainnya dengan cara mencari faktor integral dari persamaan tersebut. Setelah ditentukan faktor integralnya, maka persamaan differensial tidak eksak tersebut menjadi persamaan differensial eksak. Faktor integral persamaan differensial tidak eksak dinyatakan dengan ψ (x,y). Setelah diketahui faktor integralnya, maka persamaan tidak eksak ditulis dalam bentuk:

ψ (x,y)[M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0]

$\Leftrightarrow$ ψ (x,y)M(x,y) dx + ψ (x,y)N(x,y) dy = 0 (PD eksak)

$\Leftrightarrow$ M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 -→ PD orde satu derajat satu

Dengan *M*(x,y) = ψ (x,y)M(x,y) dan *N*(x,y) = ψ (x,y)N(x,y)

Sehingga diperoleh persamaan yang merupakan persamaan differensial orde satu berupa persamaan differensial eksak yang memenuhi sifat

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

dengan M(x,y) = ψ (x,y)M(x,y), dan N(x,y) = ψ (x,y)N(x,y)

Persamaan baru tersebut dinamakan persamaan differensial eksak, sehingga selesaiannya dapat ditentukan dengan menggunakan metode persamaan differensial eksak.

3. Menentukan Faktor Integral Persamaan Tidak Eksak

Karena ψ (x,y)[M(x,y) dx + N(x,y)dy=0] persamaan eksak, maka:

$$\frac{\partial(\psi M)}{\partial y} = \frac{\partial(\psi N)}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \psi \frac{\partial M}{\partial y} + M \frac{\partial \psi}{\partial y} = \psi \frac{\partial N}{\partial x} + N \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\Leftrightarrow \psi \frac{\partial M}{\partial y} - \psi \frac{\partial N}{\partial x} = (N\frac{\partial \psi}{\partial x} - M \frac{\partial \psi}{\partial y})$$

$$\Leftrightarrow (\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = \frac{1}{\psi} (N\frac{\partial \psi}{\partial x} - M \frac{\partial \psi}{\partial y})$$

Dalam hal ini dapat kita tinjau dari beberapa kasus[15]:

a. Misal ψ (x,y) = ψ (x) yaitu fungsi bervariabel x saja, maka $\frac{\partial \psi}{\partial y}$ = 0 dan $\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{du}{dx}$, sehingga

$$(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = \frac{1}{\psi} (N\frac{d\psi}{dx} - M.0)$$

$$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

Jika $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ suatu fungsi dari x atau f(x), maka dari

$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dx} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ didapat

$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dx}$ = f(x) atau $\frac{d\psi}{\psi}$ = f(x) dx

Ln ψ = $\int$ f(x) dx

---

[15] Riogilang, Persamaan Diferensial, (Bandung:Binacipta,1983), h.47

ψ = e $^{\int f(x)dx}$ ----→ faktor integral yang dicari

b. Misal ψ = ψ (y) yaitu fungsi bervariabel y saja maka

$\frac{\partial \psi}{\partial x}$ = 0 dan

$\frac{\partial \psi}{\partial y}$ = $\frac{d\psi}{dy}$, sehingga

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{\psi}\left(N\frac{\partial \psi}{\partial x} - M\frac{d\psi}{dy}\right)$$

$$\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{1}{\psi}\left(N.0 - M\frac{d\psi}{dy}\right)$$

$$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dy} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$$

Jika $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$ suatu fungsi dari y atau g(y), maka dari

$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dy} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{-M}$ didapat

$\frac{1}{\psi}\frac{d\psi}{dy}$ = -g(y) atau $\frac{d\psi}{\psi}$ = -g(y) dy

Ln ψ = $\int$ -g(y) dy

ψ = e $^{\int -g(y)dy}$

c. Jika M(x,y)dx +N(x,y) dy = 0 adalah persamaan differensial homogen dengan

xM(x,y)+yN(x,y) $\neq$ 0, maka faktor integral

ψ (x,y) = $\dfrac{1}{xM(x,y)+yN(x,y)}$

d. Jika M(x,y) dx + N(x,y) dy = 0 dapat ditulis y f(xy) dx + x g(xy)dy = 0 dengan

f(xy) $\neq$ g(xy) maka ψ (x,y) = $\dfrac{1}{xy[f(xy)-g(xy)]}$ =

$\dfrac{1}{xM(x,y)-yN(x,y)}$

e. Seringkali faktor integral ψ (x,y) dapat diperoleh dengan pemeriksaan, hal ini akan tampak setelah pengelompokkan kembali suku-suku persamaannya. Dengan mengenal kelompok suku-suku tertentu merupakan suatu bagian dalam persamaan differensial eksak.

Contoh

Tentukan selesaian umum persamaan differensial berikut dengan terlebih dahulu menentukan faktor integrasinya.

1. (x^2 + y^2 + x) dx + xy dy = 0

Jawab

M(x,y) = $x^2 + y^2 + x \rightarrow \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ = 2y

N(x,y) = xy $\rightarrow \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ = y

Sehingga persamaan di atas tidak eksak karena $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$

Selanjutnya dicari ψ (x,y) sebagai faktor integrasi

Karena $\dfrac{\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}$ = f(x)

Maka ψ (x,y) = $e^{\int f(x)dx} = e^{\ln x}$ = x.

Diperoleh persamaan baru dan merupakan persamaan differensial eksak yaitu x{($x^2 + y^2 + x$) dx + xy dy = 0}

($x^3 + xy^2 + x^2$) dx + (x^2y) dy = 0

Dengan menggunakan metode persamaan eksak diperoleh selesaian umumnya $3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = C$

2. $(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)dy = 0$

Jawab

$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ = $(8xy^3e^y + 2xy^4) + 6xy^2 + 1$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 2xy^4e^y - 2xy^2 - 3$$

Sehingga persamaan di atas tidak eksak.

Selanjutnya dicari ψ (x,y) sebagai faktor integrasi

Karena $\dfrac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} - \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)} = \dfrac{2}{y} = -g(y)$

Maka ψ (x,y) = $e^{\int -g(y)dy} = \dfrac{1}{y^4}$

Diperoleh persamaan baru dan merupakan persamaan differensial eksak yaitu

$$\frac{1}{y^4}(2xy^4e^y + 2xy^3 + y)\, dx + (x^2y^4e^y - x^2y^2 - 3x)\, dy = 0$$

Dengan menggunakan metode persamaan eksak diperoleh selesaian umumnya

$$x^2e^y + \frac{x^2}{y} + \frac{x}{y^3} = C$$

Contoh:

Selesaikan persamaan diferensial berikut:

$$(4xy + 3y^2 - x)dx + x(x + 2y)dy = 0$$

Penyelesaian:

Misal M(x,y) = $(4xy + 3y^2 - x) \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4x + 6y$

N(x,y) = $x(x + 2y) \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y$

Jadi $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow$ PD tidak eksak, sehingga perlu dikalikan dengan faktor integral.

Lihat kembali rumus faktor integral u dalam fungsi x saja! Sekarang kita tentukan: $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{2(x+2y)}{x(x+2y)} = \frac{2}{x}$ (fungsi dari x saja) maka faktor integral adalah $e^{\int \frac{2}{x} dx} = e^{ln x^2} = x^2$ sehingga diperoleh PD eksak: $x^2(4xy + 3y^2 - x)dx + x^3(x + 2y)dy = 0$ (kali PD awal dengan faktor integrasi) selanjutnya selesaikan dengan prosedur penyelesaian PD Eksak!

Misal :

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^2(4xy + 3y^2 - x) = 4x^3y + 3x^2y^2 - x^3$$

Dan

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^3(x + 2y)$$

$$F(x, y) = \int x\,(\,4xy + 3y^2 - x)dx + g(y)$$

$$= x^4y + x^3y^2 - \frac{1}{4}x^4 + g(y)$$

Karena $\frac{\partial F}{\partial y} = x^3(x + 2y)$, sehingga:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^4y + x^3y^2 - \frac{1}{4}x^4 + g(y)\right) = x^3(x + 2y)$$

$$x^4 + 2x^3y + g'(y) = x^3(x + 2y)$$

$$x^4 + 2x^3y + g'(y) = x^4 + 2x^3y$$

$$g'(y) = 0$$

Jadi $g'(y) = 0$

Jadi solusi PD adalah F(x,y) = $x^4y + x^3y^2 - \frac{1}{4}x^4 + c$

Contoh:

Selesaikan persamaan diferensial berikut: $y(x + y + 1)dx + x(x + 3y + 2)dy = 0$

Penyelesaian:

Misal :

M(x,y) = $y(x + y + 1) = xy + y^2 + y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = x + 2y + 1$

N(x,y) = $x(x + 3y + 2) = x^2 + 3xy + 2x \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 3y + 2$

Jadi $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow$ PD tidak eksak, sehingga perlu dikalikan dengan faktor integral.

Lihat kembali rumus faktor integral u dalam fungsi x saja! Sekarang kita tentukan:

$\frac{1}{-M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = \frac{-x-y-1}{-(xy+y^2+y)} = \frac{-(x+y+1)}{-y(x+y+1)} = \frac{1}{y}$ (fungsi dari y saja) maka faktor integral adalah

$e^{\int \frac{1}{y}dx} = e^{lny} = y$ sehingga diperoleh PD eksak:

y.$y(x + y + 1)dx + y.x(x + 3y + 2)dy = 0$ (kali PD awal dengan faktor integrasi)

$$(xy^2 + y^3 + y^2)dx + (x^2y + 3xy^2 + 2xy)dy = 0$$

Selanjutnya selesaikan dengan prosedur penyelesaian PD Eksak!

Misal

$\frac{\partial F}{\partial x} = xy^2 + y^3 + y^2$ dan $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2y + 3xy^2 + 2xy$

$F(x,y) = \int x\,(xy^2 + y^3 + y^2)dx + g(y)$

$= \frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + xy^2 + g(y)$

Karena $\frac{\partial F}{\partial y} = x^2y + 3xy^2 + 2xy$, sehingga:

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + xy^2 + g(y)\right) = x^2y + 3xy^2 + 2xy$

$g'(y) = 0$

Jadi $g'(y) = c$

Jadi solusi PD adalah F(x,y) = $\frac{1}{2}x^2y^2 + xy^3 + xy^2 + c$

Contoh:

Persamaan diferensial $(2x^3 - y)dx + (2x^2y^2 - x)dy = 0$

Mempunyai faktor integral tersebut, kemudian selesaikan persamaan diferensial tersebut!

Penyelesaian:

Misal $M(x,y) = 2x^3y^2 - y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy^3 - 1$

$N(x,y) = 2x^3y^2 - x \rightarrow \frac{\partial M}{\partial x} = 4xy^3 - 1$

Jadi, $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} (PD\ tidak\ eksak)$

Faktor integral dari xy, berarti v=xy atau u=u(v) maka $\frac{\partial v}{\partial y} =$ $y\ dan\ \frac{\partial v}{\partial x} = x$

Faktor integral dari fungsi x dan y adalah

$$u(v) = e^{\int h(v)dv}\ dimana\ h(v) = \frac{-\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{M\frac{\partial v}{\partial y} - N\frac{\partial v}{\partial x}}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} = (4x^3y - 1) - (4xy^3 - 1) = 4xy(x^2 - y^2)$$

$$M\frac{\partial v}{\partial y} - N\frac{\partial v}{\partial x} = x(2x^3y^2 - 1) - y(2x^2y^3 - 1)$$

$$= (2x^4y^2 - xy) - y(2x^2y^4 - xy)$$

$$= 2x^2y^2(x^2 - y^2)$$

Sehingga $h(v) = \frac{-\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)}{M\frac{\partial v}{\partial y} - N\frac{\partial v}{\partial x}} = \frac{-4xy(x^2-y^2)}{2x^2y^2(x^2-y^2)} = \frac{1}{x^2y^2}$

Sehingga diperoleh PD eksak:

$$\frac{1}{x^2y^2}(2x^3y^2 - y)dx + \frac{1}{x^2y^2}(2x^2y^3 - x)dy = 0$$

Karena PD sudah eksak, maka solusinya digunakan penyelesaian PD eksak.

Misal

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1}{x^2y^2}(2x^3y^2 - y) = 2x - \frac{1}{x^2y}$$

dan

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x^2y^2}(2x^2y^3 - x)$$

$$F(x, y) = \int x\left(2x + \frac{1}{x^2y}\right)dx + g(y)$$

$$= x^2 + \frac{1}{xy} + g(y)$$

Karena $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{x^2y^2}(2x^2y^3 - x)$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + \frac{1}{xy} + g(y)\right) = \frac{1}{x^2y^2}(2x^2y^3 - x)$$

$$\frac{1}{xy^2} + g'^{(y)} = \frac{1}{x^2y^2}(2x^2y^3 - x)$$

$$-\frac{1}{xy^2} + g'^{(y)} = 2y - \frac{1}{xy^2}$$

$$Diperoleh\ g'(y) = 2y$$

$$g(y) = y^2$$

$$Jadi\ solusi\ PD\ adalah\ F(x,y) = x^2 + \frac{1}{xy} + y^2$$

LATIHAN 6

Tentukan faktor integral dan selesaiaan umum persamaan

1. $(x^4 + y^4)\, dx - xy^3\, dy = 0$
2. $y(x-2y)\, dx - x^2\, dy = 0$
3. $x\, dy - y\, dx = x^2e^x\, dx$
4. $y^2\, dy + y\, dx - x\, dy = 0$
5. $3x^2y^2\, dx + 4(x^3y-3)\, dy = 0$
6. $(x^2 + y^2)\, dx + 2xy\, dy = 0$
7. $(2x + e^y)\, dx + x\, e^y\, dy = 0$
8. $(x + y \cos x)\, dx + \sin x\, dy = 0$
9. $(x + y + 1)\, dx + (x - y + 3)\, dy = 0$
10. $(3y - 2x + 4)\, dx - (4x - 3y - 2)\, dy = 0$

BAB VII
PERSAMAAN DIFERENSIAL PERINGKAT PERTAMA LINEAR dan BERNOULLI

1. Persamaan Diferesial Peringkat Pertama Linear

Bentuk Umum:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\, y = Q(x)$$

Penyelesaian umum[16] :

$$\boxed{y = e^{-\int P(x)dx}\{\int Q(x).e^{\int P(x)dx} dx + C\}}$$

Contoh

1. Selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$\frac{dy}{dx} + x\, y = 3x.$$

Jawab :

$$y = e^{-\int P(x)dx}\{\int Q(x).e^{\int P(x)dx} dx + C\}$$

$$y = e^{-\int xdx}\int 3x.e^{\int x)dx} dx + C$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2}\{\int 3x.e^{\frac{1}{2}x^2} dx + C\}$$

[16] Sugiyarto, Persamaan Diferensial, (Yogyakarta:Binafsi Publisher,2014), h.64

Catatan Misal U = x^2

dU = 2x dx

dx = $\frac{dU}{2x}$

Jadi

$$\int_0^1 z.e^{z^2}\,dz = \int z.e^U \frac{dU}{2z}$$

$$= \int e^U \frac{dU}{2}$$

$$= \frac{1}{2}e^U = \frac{1}{2}e^{z^2}$$

$$y = e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(\frac{3}{2}e^{z^2} + C\right)$$

y = $\frac{3}{2} + C\ e^{-\frac{1}{2}x^2}$ ➔ penyelesaian pesamaan diferensial.

2. Selesaikan persamaan diferensial berikut :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}\, y = 3x.$$

Jawab :

Penyelesaian umum.

$$y = e^{-\int P(x)dx}\{\int Q(x).e^{\int P(x)dx}dx + C\}$$

$$y = e^{-\int 2/x dx}\{\int 3x.e^{\int 2/x dx}dx + C\}$$

$$y = e^{-2\ln x}\{\int 3x.e^{2lx2}dx + C\}$$

y = x^{-2} $(\int 3x(x^2)dx + C)$

$$y = x^{-2}\left(\frac{3}{4}x^4 + C\right) \Rightarrow y = \frac{3}{4}x^2 + Cx^{-2}$$

2. Persamaan Bernoulli

Persamaan differensial linear disebut persamaan Bernoulli jika bentuk umumnya[17]

$$\frac{dy}{dx} + P(x)\,y = y^n\,Q(x),$$

$$\Leftrightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)\,y^{1-n} = Q(x)$$

Untuk menentukan selesaian umumnya misalkan $y^{1-n} = v$. Dengan menurunkan terhadap variabel x, diperoleh

$$(1-n)\,y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$

$$\Leftrightarrow y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}$$

Substitusikan $y^{1-n} = v$ dan $y^{-n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx}$ ke persamaan

$y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)\,y^{1-n} = Q(x)$ diperoleh

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + P(x)v = Q(x)$$

$$\Leftrightarrow \frac{dv}{dx} + (1-n)P(x)\,v = (1-n)Q(x)$$

Bentuk terakhir adalah persamaan differensial linear yang selesaian umum dapat dicari dengan metode faktor

[17] Budi Waluya, 2006, Buku Ajar Persamaan Diferensial, (Semarang: Universitas Negeri Semarang),h.24

integral atau metode Lagrange atau metode Pengubahan persamaan differensial eksak.

Misal (1-n)P(x) = p(x) dan (1-n)Q(x) = q(x)

Maka selesaian umumnya adalah v = $e^{\int -p(x)dx}$ ($\int$ q(x) $e^{\int p(x)dx}$ dx).

Contoh

Tentukan selesaian umum persamaan

1. $\frac{dy}{dx}$ - y = xy^3

   Jawab

   $\frac{dy}{dx}$ - y = xy^3

   $\Leftrightarrow \frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}$ - y^{-2} = x

   Misal y^{-2} = v maka -2$y^{-3}\frac{dy}{dx}$ = $\frac{dv}{dx}$

   $\Leftrightarrow \frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx}$ = - $\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}$

   Substitusikan ke persamaan semula, didapat:

   -$\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}$ - v = x

   $\Leftrightarrow \frac{dv}{dx}$ + 2v = -2x

   dimana p(x) = 2 , q(x) = -2x dan

   faktor integral (I) = $e^{\int p(x)dx}$ = e^{2x}

selesaian umumnya

$ve^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}\, dx$

$ve^{2x} = \int (-2x)e^{2x}\, dx$

$\frac{e^{2x}}{y^2} = -xe^{2x} + ½\, e^{2x} + c$

2. $\frac{dy}{dx} + y = y^2$ (Cos x - Sin x)

Jawab

$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + y^{-1}$ = (cos x - sin x)

$\Leftrightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} + y^{-1}$ = (cos x - sin x)

Misal $y^{-1} = v$ maka $-y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx} = -\frac{dv}{dx}$

Substitusikan ke persamaan semula, didapat:

$-\frac{dv}{dx} + v$ = (cos x - sin x)

$\Leftrightarrow \frac{dv}{dx} - v$ = -(cos x - sin x)

dimana p(x) = -1 , q(x) = (sin x - cos x) dan faktor integral $e^{\int p(x)dx} = e^{-x}$.Penyelesaian umumnya

$ve^{\int p(x)dx} = \int q(x)e^{\int p(x)dx}\, dx$

$ve^{-x} = \int (\sin x - \cos x)e^{-x}\, dx$

$\frac{e^{-x}}{y}$ = -e $^{-x}$ sin x + C adalah selesaian umumnya.

LATIHAN 7

1. Tentukanlah penyelesaian umum dari persamaan linear berikut!

$$\cos x \frac{dy}{dx} + ysinx = 1$$

2. Tentukanlah penyelesaian umum dari persamaan bernoulli berikut!

$$\frac{dy}{dx} = y + e^x y^2$$

BAB VIII
APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE SATU

Persamaan diferensial digunakan untuk menguraikan fenomeka fisika seperti (a) proses penyejukan; (b) arus dalam sirkuit; (c) arah dan kecepatan benda jatuh; (d) peluruhan radioaktif; (e) pertambahan penduduk, dan sebagainya

1. <u>APLIKASI I : Temperatur</u>

Hukum pendingin Newton, yang juga berlaku untuk pemanasan, menyatakan bahwa laju perubahan temperatur suatu benda adalah proposional terhadap perbedaan temperatur antara benda tersebut dan medium sekitarnya[18]. Anggaplah T melambangkan temperatur benda, dan T_m melambangkan temperatur medium sekitar. Maka laju perubahan temperatur dari benda tersebut adalah *dT/dt* dan hukum pendingin Newton dapat dirumuskan sebagai $dT/dt = -k(T- T_m)$, atau

$$\frac{dN}{dt} + kT = kT_m$$

dimana *k* adalah konstanta proposional positif. Jika *k* telah ditentukan positif, tanda minus diperlukan salam hukum Newton untuk membuat *dT/dt* negatif dalam proses

[18] Sugiyarto, Persamaan Diferensial, (Yogyakarta:Binafsi Publisher,2014), h.69

pendinginan, dimana *T* lebih besar dari T_m , dan positif dalam proses pemanasan dimana *T* lebih kecil dari T_m.

Contoh Soal 1:

Sebuah batang metal dengan temperatur $100°\mathrm{F}$ diletakkan dalam sebuah ruangan yang memiliki temperatur konstan $0°\mathrm{F}$. Jika setelah 20 menit temperatur dari batang tersebut menjadi $50°\mathrm{F}$, carilah temperatur dari batang itu setelah 10 menit.

Penyelesaian:

Gunakan persamaan $\frac{dN}{dt} + kT = kT_m$ dengan $T_m = 0$; dan yang menjadi medium disini yaitu ruangan yang dijaga pada temperatur konstan, maka

$$\frac{dN}{dt} + kT = 0$$

dan solusinya adalah $T = ce^{-kt}$. Karena *T* = 100 pada *t* = 0 (temperatur awal batang adalah $100°\mathrm{F}$) maka $100 = ce^{-k(0)} \rightarrow 100 = ce^0 \rightarrow 100 = c$. dengan memasukkan nilai $100 = c$ ke persamaan solusi sehingga diperoleh :

$$T = 100e^{-kt}$$

Pada *t*=20, kita mengetahui bahwa *T*=50; maka $50 = 100e^{-20k}$, sehingga

$$k = \frac{-1}{20} ln \frac{50}{100} = \frac{-1}{20}(-0{,}693) = 0{,}035$$

Dengan memasukkan nilai *k*=0,035 maka dapat diperoleh temperatur batang pada setiap waktu *t* sebagai: $T = 100e^{-0,035t}$.

Untuk mencari temperatur dari batang itu setelah 10 menit, maka kita perlu memasukkan nilai *t*=10 ke persamaan diatas, sehingga diperoleh :

$T = 100e^{-0,035t}$

$T = 100e^{-0,035(10)}$

$T = 100(0,705)$

$T = 70,5°\mathrm{F}$

Harus diperhatikan bahwa karena hukum Newton berlaku hanya untuk perbedaan temperatur yang kecil, perhitungan di atas hanya merupakan perkiraan pertama dari situasi yang sebenarnya.

Contoh Soal 2:

Suatu tempat berisi susu mentega dengan temperatur awal 25° C didinginkan dengan pengaturan temperatur pada 0° C. Diandaikan bahwa temperatur susu mentega mengalami penurunan sampai 15° C setelah 20 menit. Kapan akan menjadi 5° C?

Penyelesaian:

Dicatat bahwa A = 0, T(0) = 25, T(20) = 15. Dinotasikan t_1 adalah waktu ketika $T(t_1) = 5$. Berdasarkan hukum pendinginan Newton

$$\frac{dT}{dt} = -kT$$

Penyelesaian umum untuk persamaan ini adalah T(t) = C.exp(-kt). Berdasarkan syarat awal T(0) = 25, dipunyai C = 25 dan T(t) = 25exp(-kt). Berikutnya dicari konstanta k. Karena T(20) = 15 = 25exp(-20k) maka dipunyai $k = \frac{ln\left(\frac{5}{3}\right)}{20}$.
Rumus untuk temperatur adalah

$$T(t) = 25exp\left(-\frac{ln\left(\frac{5}{3}\right)}{20}t\right)$$

Selanjutnya dapat dicari t_1:

$$T(t_1) = 5 = 25exp\left(-\frac{ln\left(\frac{5}{3}\right)}{20}t\right) \Rightarrow\ t_1 = \frac{20\ln\,(5)}{ln\left(\frac{5}{3}\right)} = 63.01$$

2. APLIKASI II: PENGENCERAN

Perhatikan sebuah tangki yaang pada awalnya menampung air asin sebanyak V_0 galon yang mengandung *a* lb garam. Suatu larutan air asin lainnya yang mengandung *b* lb garam per galon dituangkan ke dalam tangki tersebut dengan laju *e* gal/menit, sementara pada saat yang sama larutan yang sudah teraduk dengan baik meninggalkan tangki dengan laju *f* gal/menit. Soal yang ingin diselesaikan adalah menetukan jumlah garam di dalam tangki pada setiap waktu *t.*

Anggaplah *Q* melambangkan jumlah (dalam pon) garam dalam tangki setiap waktu *t*. Laju perubahan *Q, dQ/dt* , sama dengan laju masuknya garam ke tangki dikurangi dengan laju keluarnya garam dalam tangki.

Garam memasuki tangki dengan *be* lb/menit. Untuk menentukan laju keluarnya garam dari tangki, pertama-tama kita hitung volume air asin dalam tangki pada setiap waktu *t*, yang adalah volume awal V_0 ditambah dengan volume air asin yang ditambahkan dan dikurangi dengan volume air asin yang dikeluarkan *ft.* Jadi volume air asin pada setiap waktu adalah:

$$V_0 + et - ft$$

Konsentrasi garam dalam tangki padasetiap waktu adalah $Q/(V_0 + et - ft)$, sehingga dari sini diketahui garam keluar dari tangki dengan laju.

$$f\left(\frac{Q}{V_0 + et - ft}\right)\mathrm{lb/min}$$

Sehingga

$$\frac{dQ}{dt} = be - f\left(\frac{Q}{V_0 + et - ft}\right)$$

Atau

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{f}{V_0 + (e - f)t}Q = be$$

Contoh Soal:

Sebuah tangki dengan awalnya menampung 100 gal larutan air asin yang mengandung 20 lb garam. Pada *t*=0, air tawar dituangkan ke dalam tangki tersebut dengan laju 5 gal/menit, sedangkan campuran yang sudah teraduk dengan baik keluar dari tangki dengan laju yang sama. Carilah jumlah garam di dalam tangki pada setiap waktu *t.*

Penyelesaian:

Disini V_0=100, *a*=20, *b*=0, dan *e*=*f*=5. Maka:

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{f}{V_0 + (e - f)t} Q = be$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{5}{100 + (5 - 5)0} Q = 0.5$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{20} Q = 0$$

Solusi untuk persamaan linier ini adalah $Q = ce^{-t/20}$ Pada *t* = 0, kita mengetahui bahwa *Q* = *a* = 20. Dengan memasukkan nilai-nilai ke dalam solusi persamaan linier di atas kita menemukan bahwa *c* = 20, sehingga solusi dapat dituliskan menjadi $Q = 20e^{-t/20}$.

3. APLIKASI III: PERTUMBUHAN DAN PELURUHAN

Anggaplah *N(t)* melambangkan jumlah zat (populasi) yang bertumbuh atau luruh. Jika kita mengasumsikan bahwa *dN/dt* ,laju perubahan jumlah zat ini, proporsional terhadap jumlah zat yang ada, maka *dN/dt* = *kN*, atau

$$\frac{dN}{dt} - kN = 0$$

Dimana *k* adalah konstanta proporsionalitas[19].

Contoh Soal:

Diketahui model pertumbuhan sebagai berikut:

$$y' = ky, \qquad k > 0, \qquad y(0) = y_0$$

Dimana t_d adalah waktu

[19] Dwi Lestari, Diktat Persamaan Diferensial, (Yogyakarta: UNY,2013), h.49

Tentukan t_d dalam bentuk K jika permbuhannya mencapai dua kali!

Penyelesaian:

Diketahui $t_d =$ waktu untuk solusi y dari masalah pertumbuhan.

$$y(0) = y_0$$

$jika\ y' = ky$ maka dapat kita tuliskan, $\frac{dy}{dt} = ky$

Saat $t = 0 \quad y_0 = 0$ dan $t = t_d y = 2y_0$ (sebab pertumbuhannya dua kali lipat)

$$\int_{y_0}^{2y_0} \frac{dy}{y} = k \int_0^{t_d} dt$$

$$\ln y \left| \begin{matrix} 2y_0 \\ y_0 \end{matrix} \right. = kt \left| \begin{matrix} t_d \\ 0 \end{matrix} \right.$$

$$\ln 2\, y_0 - ln\, y_0 = k\, t_d$$

$$\ln \frac{2y_0}{y_0} = k\, t_d$$

$$\ln 2 = k\, t_d$$

$$t_d = \boldsymbol{\frac{ln\ 2}{k}}$$

4. **APLIKASI IV : BENDA JATUH**

Anggaplah suatu benda dengan massa *m* yang jatuh secara vertikal diengaruhi hanya oleh gravitasi dan suatu hambatan udara yang proporsional terhadap kecepatan benda tersebut.[20] Asumsikan bahwa gravitasi dan massa

[20] Sugiyarto, Persamaan Diferensial, (Yogyakarta:Binafsi Publisher,2014), h.73

tetap konstan dan untuk memudahkan, tentukan arah ke bawah sebagai arah positif.

Hukum gerak kedua Newton : *gaya netto yang bekerja pada benda sebanding dengan laju perubahan momentum benda tersebut atau untuk massa konstan,*

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

dimana *F* adalah gaya netto pada benda dan *v* adalah kecepatan benda.

Contoh Soal:

Sebuah benda dengan massa 5 slug dijatuhkan dariketinggian 100 ft dengan kecepatan nol. Mengasumsikan tidak ada hambatan udara, carilah *(a)* ekspresi matematis untuk kecepatan benda tersebut pada setiap waktu *t, (b)* ekspresi matematis untuk posisi dari benda tersebut pada waktu *t,* dan *(c)* waktu yang diperlukan untuk mencapai permukaan tanah.

Penyelesaian:

(a) Tentukan sistem koordinat. Maka, karena tidak ada hambatan udara, berlaku: $\frac{dv}{dt} = g$. Persamaan diferensial ini linear atau dalam bentuk diferensial, dapat dipisahkan. Solusinya adalah $v = gt + c$. Ketika $t = 0$, $v = 0$ (awalnya benda tersebut memiliki

kecepatan nol); maka $0 = g(0) + c,$ atau $c = 0$. Jadi, $v = gt$ atau dengan mengasumsikan $g = 32$ ft/det^2

(b) Kita ingat bahwa kecepatan adalah laju perubahan perpindahan, yang di sini dilambangkan dengan x. Jadi, $v = dx/dt$, dan (I) menjadi $\frac{dx}{dt} = 32t$. Persamaan diferensial ini juga linear dan dapat dipisahkan, solusinya adalah

$$x = 16t^2 + c_1$$

Tapi pada $t = 0, x = 0.$ Jadi , $0 = (16)(0)^2 + c_1$ atau $c_1 = 0$. dengan memasukkan nilai ini ke dalam maka diperoleh

$$x = 16t^2$$

(c) Kita memerlukan t ketika $x = 100$. Dari $(3)t = \sqrt{(100)/(16)} = 2.5$ detik

LATIHAN 8

1. Sebuah beli seberat 2 ib dijatuhkan dari ketinggian 3000ft tanpa kecepatan pada saat jatuh. Bola tersebut mengalami hambatan udara yang setara dengan v/8 (dalam ib), dimana v melambangkan kecepatan bola (dalam ft/detik). Carilah
   a. Limit kecepatan bola tersebut
   b. Waktu yang ditempuh bola tersebut untuk menyentuh tanah
2. Sebuah benda dengan temperatur yang tidak diketahui diletakan dalam sebuah ruangan yang di jaga pada temperatur konstan 30^o F. Jika setelah 10 menit temperatur benda tersebut menjadi 0^0F dan setelah 20 menit temperatur benda tersebut menjadi 15^o F. Carilah temperatur awal benda tersebut!
3. Sebuah benda dengan suhu 50^o F diletakan di luar ruangan dimana temperatur berada pada 100^o F. Jika setelah 5 menit bneda tersebut menjadi 60^o F carilah:
   a. Berapa lama yang dibutuhkan benda untuk mencapai temperatur 75^o F
   b. Tempertur benda tersebut setelah 20 menit
4. Suatu zat radio aktif diketahui mengalami peluruhan dengan laju sebanding dengan jumlah yang ada. Jika pada awalnya terdapat 50 mg zat dan setelah 2 jam diamati bahwa zat tersebut telah kehilangan 10% dari massa awalnya. Tentukan :
   a. Massa zat yang tersisa pada setiap waktu t
   b. Massa zatsetelah 4 jam
   c. Lamanya waktu yang dibutuhkan zat meluruh menjadi setengah massa awalnya
5. Populasi suatu negara diketahui meningkat dengan laju yang sebanding dengan jumlah penduduk yang sekarang hidup di negara itu. Jika setelah 2 tahun

populasi menjadi dua kali lipat dan setelah 3 tahun populasi menjadi 20.000. Perkirakan jumlah penduduk awal di negara itu!

BAB IX
PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA KOEFISIEN KONSTAN

PERSAMAAN DIFFERENSIAL ORDE-2

Bentuk umum

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

Dimana $p(x)$ dan $q(x)$ disebut koefisien

Klasifikasi persamaan differensial orde 2

a) Berdasarkan jenis koefisiennya, PD orde 2 dibagi menjadi dua yaitu :
   - PD dengan koefisien konstan (Dimana $p(x)$ dan $q(x)$berupa bilangan)
   - PD dengan koefisien variabel (Dimana $p(x)$ dan $q(x)$mengandung variabel x)

b) Berdasakan f(x) pada bentuk umum, PD orde 2 terbagi dua, yaitu :
   - PD Homogen ($f(x) = 0$)
   - PD non homogen ($f(x) \neq 0$)

1. **Persamaan Differensial Biasa linier orde dua homogen dengan koefisien konstan**

   Bentuk umum :

   y″+ ay′ + by = 0 dimana a, b merupakan konstanta sebarang.

Solusi persamaan homogen

Diketahui $y'' + ay' + by = 0$

Bentuk umum solusi : $y = c_1y_1 + c_2y_2$

Misalkan $y = e^{rx}$

Persamaannya berubah menjadi $\boldsymbol{r^2 + ar + b = 0}$, sebuah persamaan kuadrat.

Jadi kemungkinan akarnya ada 3 yaitu[21]:

1. Akar real berbeda (r_1 ,r_2 ; dimana $r_1 \neq r_2$)

   Memiliki solusi basis $y_1 = e^{r_1x}$ dan $y2 = e^{r_2x}$dan mempunyai solusi umum

   $$y = C_1\, e^{r_1x} + C_2 \text{ x } e^{r_2x}$$

2. Akar real kembar (r_1 ,r_2; dimana $r = r_1 = r_2$)

   Memiliki solusi basis $y_1= e^{rx}$ dan $y_2 = x\, e^{rx}$ dan mempunyai solusi umum

   $$y = C_1\, e^{rx} + C_2 \text{ x } e^{rx}$$

3. Akar kompleks kojugate

   ($r_1 = u + wi$, $r_2 = u – wi$)

   Memiliki solusi basis $y_1 = e^{ux}$ cos wx; dan $y_2 = e^{ux}$ sin wx dan mempunyai solusi umum

   $$y = e^{ux} (C_1\cos wx + C_2 \sin wx)$$

contoh:

1. Selesaikan persamaan berikut $y'' + 5y' - 14y = 0$

   Jawab: Ubahlah ke persamaan karakteristiknya; $r^2 + 5r - 14 = 0$

---

21 Boyce W.E and DiPrima, R.C., 1997, Elemntary Differential Equations and Boundary Value Problems. (New York: John Wiley & Sons.Inc). H.50

Carilah akar-akar nya dengan memfaktorkannya; $(r+7)(r-2)=0$

Sehingga diperoleh akar real yang berbeda; $r=-7$ dan $r=2$

Maka solusinya ialah $y=C_1e^{-7x}+C_2e^{2x}$

2. Selesaikan persamaan berikut $\frac{d^2y}{dx^2}+6\frac{dy}{dx}+9y=0$

   Jawab: $ar^2+br+c=0 \longrightarrow r^2+6r+9=0$

   $(r+3)(r+3)=0 \longrightarrow (r+3)^2=0$ (akar-akar kembar)

   Maka $y=(C_1+C_2)e^{-3x}$

3. y''+5y'+6y = 0

   persamaan karakteristiknya :

   (r+2) (r+3) = 0

   r_1=-2 atau r_2=-3

   maka solusinya adalah $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-3x}$

4. y''+6y'+9y = 0

   persamaan karakteristiknya adalah

   (r+3) (r+3) = 0

   r_1= r_2=-3

   maka solusinya adalah $y=C_1e^{-3x}+C_2xe^{-3x}$

5. y''-4y'+5y = 0

   persamaan karakteristiknya adalah $r^2-4r+5=0$

   r_{12}=2±i

   maka solusinya adalah $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$

2. Persamaan Differensial Biasa Linier orde dua non homogen dengan koefisien konstan

Bentuk umum:

$y'' + p(x)y' + g(x)y = r(x)$ dengan $r(x) \neq 0$

Solusi total : $y = y_h + y_p$

dimana y_h = solusi PD homogen dan y_p = solusi PD non homogen

Menentukan y_p terdiri dari dua cara, yaitu:

1. Metode koefisien tak tentu
2. Metode variasi parameter

Metode koefisien tak tentu

Awalnya metode ini diterapkan pada PD linier tak homogen orde-2 yang berbentuk $ay'' + by' + cy = r(x)$, a, b, c = konstanta. Selanjutnya metode ini juga berlaku untuk orde yang lebih tinggi. Kunci metode ini adalah y_p adalah suatu ekspresi yang mirip dengan r(x), yang terdapat koefisien-koefisien yang tidak diketahui yang dapat ditentukan dengan mensubstitusikan y_p pada persamaan.

a. Aturan untuk Metode Koefisien Tak Tentu[22]

1) *Aturan Dasar.* Jika r(x) adalah salah satu fungsi yang ada dalam Tabel, pilih fungsi y_p yang bersesuaian dan tentukan koefisien tak tentunya dengan mensubstitusikan y_p pada persamaan.

[22] Boyce, W.E. & R.C. DiPrima (1992). Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. 5th ed. New York: John Wiley & Sons. h.70

2) *Aturan Modifikasi***.** Jika r(x) sama dengan solusi PD homogen, kalikan y_p yang bersesuaian dalam tabel dengan x (atau x^2 jika r(x) sama dengan solusi akar ganda PD Homogen).

3) *Aturan Penjumlahan.* Jika r(x) adalah jumlah fungsi-fungsi yang terdapat dalam Tabel pada kolom pertama, y_p adalah jumlah fungsi pada baris yang bersesuaian.

Tabel Metode Koefisien Tak Tentu

Suku – suku dalam r(x)	**Pilihan untuk y_p**
ke^{yx}	Ce^{yx}
$K x^n$ (n = 0,1,...)	$K_nx^n + K_{n-1}x^{n-1} + ... + K_1x + K_0$
Kcos ώx ksin ώx	Kcos ώx + Msin ώx

Kesimpulan:

- Metode Koefisisen Taktentu digunakan penyelesaian khusus PD linier
  takhomogen dengan koefisien konstanta
- Untuk dapat menentukan pemisalan yang sesuai harus dicari terlebih
  dahulu solusi persamaan homogennya.
- Metode Koefisisen Taktentu hanya dapat digunakan jika fungsi f(x) di ruas kanan adalah berupa polinom, fungsi trigono, fungsi eksponen atau penjumlahan/perkalian dari ketiga fungsi kolom pertama dalam Tabel 1. Contoh: PD y” + y = tan x tidak

dapat diselesaikan dengan metode koefisien taktentu karena tan x bukan termasuk ketiga fungsi dalam Tabel

b. Contoh Penerapan Aturan Dasar

Selesaikan PD takhomogen berikut:

$y'' + 4y = 8x^2$

Penyelesaian:

Langkah 1:

Menentukan solusi PD homogen $y'' + 4y = 0$

persamaan karakteritik: $m^2 + 4 = 0$

akar-akar persamaan karakteristik: $m_1 = 2i$, $m_2 = -2i$

solusi umum $y_h = A\cos 2x + B\sin 2x$

Langkah 2:

Menentukan solusi PD Tak Homogen $y'' + 4y = 8x^2$

$f(x) = 8x^2$ sehingga dari Tabel 1, $y_p = K_2x^2 + K_1x + K_0$

$y'_p = 2K_2x + K_1$

$y''_p = 2K_2$

substitusi y_p, y'_p, y''_p ke persamaan didapatkan:

$2K_2 + 4(K_2x^2 + K_1x + K_0) = 8x^2$

dengan menyamakan koefisien-koefisien yang berpangkat sama diperoleh:

$4K_2 = 8$

$4K_1 = 0$

$2K_2 + 4K_0 = 0$

perolehan konstanta:

$K_2 = 2$, $K_0 = -1$, $K_1 = 0$

solusi umum PD takhomogen:

$y_p = 2x^2 - 1$

Langkah 3:

Menentukan solusi PD

$y = y_h(x) + y_p(x) = A\cos 2x + B\sin 2x + 2x^2 - 1$

c. Contoh penerapan Aturan Modifikasi

Tentukan solusi PD berikut:

$y'' - 3y' + 2y = e^x$

Penyelesaian:

Langkah 1:

Menentukan solusi PD homogen $y'' - 3y' + 2y = 0$

persamaan karakteritik: $m^2 - 3m + 2 = 0$

akar-akar persamaan karakteristik: $m_1 = 1$, $m_2 = 2$

solusi umum $y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}$

Langkah 2:

Menentukan solusi PD Tak Homogen $y'' - 3y' + 2y = e^x$

$f(x) = e^x$ sehingga dari Tabel 1, $y_p = e^x$

karena $f(x) = e^x$ adalah solusi PD homogen pada Langkah 1 maka sesuai Aturan B, $y_p = cxe^x$

sehingga $y'_p = ce^x + cxe^x$, $y''_p = 2ce^x + cxe^x$

substitusi y_p, y'_p, y''_p ke persamaan didapatkan:

$2ce^x + cxe^x - 3(ce^x + cxe^x) + 2(cxe^x) = e^x$

dengan menyamakan koefisien-koefisien yang berpangkat sama diperoleh konstanta c=-1 solusi umum PD takhomogen:

$$y_p = -xe^x$$

Langkah 3:

Menentukan solusi PD ; $y = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x$

d. Contoh Penerapan Aturan Penjumlahan

Tentukan penyelesaian umum PD berikut:

$y'' - 2y' + y = e^x + x$

Penyelesaian:

Langkah 1**:**

Menentukan solusi PD homogen $y'' - 2y' + y = 0$

persamaan karakteritik: $m^2 - 2m + 1 = 0$

akar-akar persamaan karakteristik: $m_1 = m_2 = 1$

solusi umum $c_1e^x + c_2e^{2x}$

Langkah 2**:**

Menentukan solusi PD Tak Homogen $y'' - 2y' + y = e^x + x$

$f(x) = e^x + x$ sesuai Tabel 1, $y_p = c_1e^x + c_2x + c_3$

suku pada $f(x)$ yaitu e^x adalah solusi ganda PD homogen

solusi umum PD homogen menjadi $y_p = c_1x^2e^x + c_2x + c_3$

sehingga $y'_p = 2c_1xe^x + c_1x^2e^x + c_2$

$y''_p = 2c_1e^x + 2c_1xe^x + 2c_1xe^x + c_1x^2e^x$

substitusi y_p, y'_p, y''_p ke persamaan didapatkan:

$2c_1e^x + 4c_1xe^x + c_1x^2e^x - 2(2c_1xe^x + c_1x^2e^x + c_2) + c_1x^2e^x + c_2x + c_3 = e^x + x \leftrightarrow 2c_1e^x + c_2x - 2c_2 + c_3 = e^x + x$

dengan menyamakan koefisien-koefisien yang berpangkat sama diperoleh konstanta :

$c_1 = 1/2$; $c_2 = 1$; $c_3 = 2$

solusi umum PD takhomogen:

$y_p = c_1x^2e^x + c_2x + c_3$

$\quad = \frac{1}{2}x^2e^x + x + 2$

***Langkah 3*:**

Menentukan solusi PD

$y = y_h(x) + y_p(x) = c_1e^x + c_2e^{2x} + \frac{1}{2}x^2e^x + x + 2$[23]

[23] Sugiyarto, *PersamaanDiferensial*, (Yogyakarta: Binafsi Publisher, 2018), hlm.

LATIHAN 9.1

Tentukan solusi dari persamaan diferensial berikut!

1. y''-3y'-4y=$3x^2 + 2$
2. y''-9y=x+2
3. y''-3y'-4y=e^{2x}
4. y''+4y=2 sinx
5. y''+9y=sin 3x +e^{2x}

Metode Variasi Parameter

Metode ini digunakan untuk memecahkan persamaan-persamaan yang tidak dapat diselesaikan dengan menggunakan metode koefisien tak tentu (bisa digunakan untuk sebarang persamaan dengan pengali variabel)

Langkah-Langkah[24]

1. Carikan dulu penyelesaian bagi persamaan homogen dan nyatakan dalam bentuk

$$y_h(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$$

2. Hitung W yang disebut Wronskian, diberikan oleh:

$$W = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$$

3. Selesaikan

$$u = -\int \frac{y_2 f(x)}{W} dx$$

Dan

$$v = \int \frac{y_1 f(x)}{W} dx$$

4. Penyelesaian khusus adalah

$$y_p(x) = uy_1(x) + vy_2(x)$$

5. Tuliskan penyelesaian umum

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

Contoh

Carilah penyelesaian umum bagi persamaan diferensial

$$y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{1 + x^2}$$

Penyelesaian:

[24] Sugiyarto, 2014, Persamaan Diferensial, (Yogyakarta: Binafsi Publisher), h. 91

- ✓ Solusi homogen (y_h)

Persamaan karakteristik adalah

$$m^2 - 2m + 1 = (m-1)(m-1) = 0$$

Memberikan m=1 dan m=1 sehingga

$y_h(x) = Ae^x + Bxe^x$

- ✓ Solusi non homogen (y_p)

Misalkan $y_1(x) = e^x\ dan\ y_2(x) = xe^x$

Maka $W = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^x(e^x + xe^x) - xe^x e^x = e^{2x}$

$u = -\int \frac{xe^x}{e^{2x}}\left(\frac{e^x}{1+x^2}\right)dx = -\frac{1}{2}\ln(1+x^2) + D$

$v = \int \frac{e^x}{e^{2x}}\left(\frac{e^x}{1+x^2}\right)dx = tan^{-1}x + E$

Oleh sebab itu

$$y_p(x) = \left(-\frac{1}{2}\ln\,(1+x^2) + D\right) + e^x + (tan^{-1}x + E)xe^x$$

- ✓ Penyelesaian umum adalah:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x)$$

$$y(x) = Ae^x + Bxe^x + \left(-\frac{1}{2}\ln\,(1+x^2) + D\right) + e^x + (tan^{-1}x + E)xe^x$$

$$= Ae^x + Bxe^x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\,e^x + xe^x tan^{-1}x$$

$$= \left[A - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]e^x + xe^x[tan^{-1}x]$$

LATIHAN 9.2

Tentukanlah solusi umum dari persamaan diferensial berikut dengan metode koefisien tak tentu!

1. $y'' - 3y' - 4y = 3x^2 + 2$
2. $y'' - 3y' - 4y = e^{2x}$
3. $y'' + 4y = 2\sin x$
4. $y'' - 3y' - 4y = e^{-x}$
5. $y'' + 2y' = 3x^2 + 2$
6. $y'' + 9y = \sin 3x + e^{2x}$

Tentukan solusi umum persamaan diferensial berikut dengan metode variasi parameter

1. $y'' - 2y' + 2y = \frac{e^x}{sinx}$
2. $y'' + 4y = 3\csc t$
3. $4y'' - 4y' + y = e^{x/2}\ln 2x$

BAB X
PERSAMAAN DIFERENSIAL ORDE DUA KOEFISIEN VARIABEL

Persamaan diferensial orde dua koefisien variabel yang akan dibahas pada diktat ini adalah persamaan diferensial Euler Cauchy homogen

Persamaan Diferensial Euler Cauchy Homogen

Bentuk umum persamaan Cauchy-Euler orde2 adalah :

$$\mathbf{(ax + b)^2\, y'' + a_1(ax + b)y' + a_0 y = 0}$$

$$a \neq 0, b, a_1, a_0 = \textit{konstanta khusus}$$

Penyelesaian Persamaan Cauchy euler orde 2

misal solusi PD y = e^{rt} dengan t = *ln* (ax + b), maka y',y" adalah :

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = re^{rt} . \frac{a}{ax+b}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt} . \frac{d^2t}{dx^2} = \frac{a^2r^2e^{rt}}{(ax+b)^2}$$

substitusi y,y',y" pada PD didapatkan :

$$(ax+b)^2y'' + a_1(ax+b)y' + a_0y = 0$$

$$(ax+b)^2\left[\frac{a^2r^2e^{rt}}{(\mathrm{ax}\ +\ b)^2} - \frac{a^2re^{rt}}{(\mathrm{ax}\ +\ b)^2}\right] + a_1(ax+b)\left[re^{rt} . \frac{a}{(ax+b)}\right] + a_0e^{rt} = 0$$

$$[a^2r^2e^{rt} - a^2re^{rt}] + a_1are^{rt} + a_0e^{rt} = 0$$

$$[a^2r^2 - a^2r + a_1ar + a_0]e^{rt} = 0$$

$$[a^2 + (a_1a + a^2)r + a_0]e^{rt} = 0$$

Sehingga persamaan karakteristiknya :

$$[a^2 + (a_1a + a^2)r + a_0]e^{rt} = 0$$

Akar-akar persamaan karakteristiknya adalah :

$$r_{1,2} = \frac{-(a_1a - a^2) \mp \sqrt{(a_1a - a^2)^2 - 4a^2a_0}}{2a^2}$$

Terdapat tiga kemungkinan akar-akar nilai pada persamaan ciri:

1. Jika $\sqrt{(a_1a - a^2)^2 - 4a^2a_0} > 0$, maka $r_{1,2}$ adalah dua akar real yang berbeda maka solusi umumnya :

   Y = $\boldsymbol{c_1(ax + b)^{r_1} + c_2(ax + b)^{r_2}}$

2. Jika $\sqrt{(a_1a - a^2)^2 - 4a^2a_0} > 0 = 0$, maka $r_1 = r_2$ maka solusi umumnya :

   $$\boldsymbol{y = c_1(ax + b)^{r_1}[c_1\cos\left(\beta\ln(ax + b)\right) + c_2\sin\left(\beta\ln(ax + b)\right)]}$$

Contoh

1. $2x^2y'' - 5xy' + 3y = 0$

   Berdasarkan persamaan yang diketahui, diperoleh nilai: Persamaan karakteristik, diperoleh persamaan karakteristiknya:

   $$2m^2 + (-5 - 2)m + 3 = 0$$

   $$2m^2 - 7m + 3 = 0$$

   $$(2m - 1)(m - 3) = 0$$

Diperoleh $m_1 = \frac{1}{2}$ dan $m_2 = 3$

Karena $m_1 \neq m_2$ maka solusi umum PD tersebut adalah

$$y = C_1 x^{m_1} + C_1 x^{m_2} \Leftrightarrow y = C_1 x^{\frac{1}{2}} + C_2 x^{-1}$$

2. Coba kamu selesaikan persamaan diferensial berikut:

$$4x^2 y'' - 8xy' + 9y = 0$$

Bentuk umum 2

$$(\boldsymbol{ax + b})^2 \boldsymbol{y''} + \boldsymbol{a_1}(\boldsymbol{ax + b})\boldsymbol{y'} + \boldsymbol{a_0 y} = \mathbf{0}$$

Dengan $\boldsymbol{a \neq 0, b, a_1, a_2 = konstanta\ khusus}$

PENYELESAIAN

- Misal solusi PD $y = e^{rt}\ dengan\ t = \ln(ax + b)\ , maka\ y', y''adalah$:

  $y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = re^{rt}\frac{a}{ax+b}$

  $y'' = \frac{d^2y}{dt^2}\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{a^2r^2e^{rt}}{(ax+b)^2} - \frac{a^2re^{rt}}{(ax+b)^2}$

- Substitusi y, y’, y’’ pada PD didapatkan:

$$(ax+b)^2y''+a_1(ax+b)y'+a_0y=0$$

$$(ax+b)^2\left[\frac{a^2r^2e^{rt}}{(ax+b)^2}-\frac{a^2re^{rt}}{(ax+b)^2}\right]+a_1(ax+b)\left[re^{rt}.\frac{a}{ax+b}\right]+a_0e^{rt}=0$$

$$[a^2r^2e^{rt}-a^2re^{rt}]+a_1are^{rt}+a_0e^{rt}=0$$

$$\left[a^2r^2-a^2r \quad +a_1ar+a_0\right]e^{rt}=0$$

$$[a^2r^2+(a_1a-a^2)r+a_0]e^{rt}=0$$

- Sehingga persamaan karakteristiknya:

$$a^2r^2+(a_1a-a^2)r+a_0=0$$

- Solusi umum persamaan diferensial euler Cauchy sesuai dengan jenis akar-akar karakteriistiknya:
  a. Berbeda, $m_1 \neq m_2$ maka $y = C_1(ax+b)^{m_1} + C_1(ax+b)^{m_2}$
  b. Sama, $m_1 = m_2 = m$ maka $y = C_1(ax+b)^m + C_2(ax+b)^m \ln(ax+b)$
  c. Kompleks, $m_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ maka $y = C_1(ax+b)^\alpha \cos(\beta \ln(ax+b)) + C_2(ax+b)^\alpha \sin(\beta \ln\ (ax+b))$

CONTOH

1. $3(2x-5)^2\, y'' - (2x-5)y' + 2y = 0$

   Penyelesaian:

   Bentuk PD:

   $3(2x-5)^2\, y'' - (2x-5)y' + 2y = 0 \Leftrightarrow (2x-5)^2\, y'' - \frac{1}{3}(2x-5)y' + \frac{2}{3}y = 0$

Sehingga a = 1; b = -1/3; a_1 = ….; dan a_0 = ….

Misal solusi umum PD $y = e^{rt}\ dengan\ t = \ln(2x - 5)$

Berdasarkan formula persamaa karakteristik,

diperoleh Persamaan karakteristik dari PD:

$$a^2r^2 + (a_1a - a^2)r + a_0 = 0$$
$$6r^2 - 7r + 1 = 0$$

Diperoleh r_1=1 dan r_2=1/6

Penyelesaian umum PD adalah

$$y = c_1(2x - 5) + c_2(2x - 5)^{1/6}$$

2. Coba kamu selesaikan persamaan diferensial berikut!

$$(2x - 3)^2y'' + 7(2x - 3)y' + 4y = 0$$

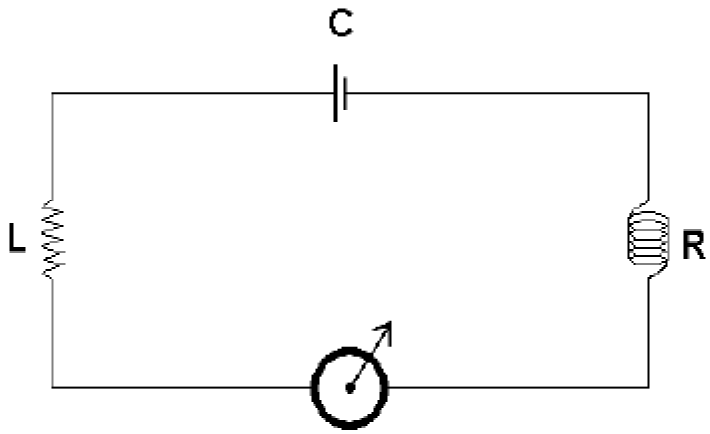
LATIHAN 10

Tentukanlah solusi umum dari persamaan diferensial berikut!!

1. $x^2y'' - 5xy' + 13y = 0$
2. $x^2y'' - 3xy' + 13y = 0$
3. $9y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{13}{x^2}y = 0$
4. $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
5. $y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$
6. $(2x-3)^2y'' + 7(2x-3)y' + 4y = 0$
7. $(x+1)^2y'' + 5(x+1)y' + 3y = 0$
8. $(1-x)^2y'' - (1-x)y' + y = 0$

BAB XI
Aplikasi Persamaan Diferensial Orde 2: Rangkaian Arus Searah (RLC)

Berikut penjelasan terkait menentukan muatan Q dan I pada RLC!



Gambar Rangkaian Listrik Arus Searah

Sebuah tahanan (R ohm) dan sebuah kumparan (L henry) dan sebuah kapasitor (C farad) dalam rangkaian seri dengan sumber daya elektromagnetik yang menyediakan suatu voltase E(t) volt pada saat t.

Hukum Kirchoff untuk kasus ini, ***muatan Q pada kapasitor***, diukur dalam Coulomb, memenuhi:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{c}Q = E(t)$$

Arus $I = \frac{dQ}{dt}$ diukur dalam ampere, memenuhi persamaan yang diperoleh dengan pendiferensialan persamaan di atas terhadap t, yaitu:

$$\boldsymbol{L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{c}I = E'(t)}$$

CONTOH

Tentukan muatan Q dan arus I sebagai fungsi dari waktu t dari suatu rangan RLC dengan R = 16 ohm, L = 0,02 henry, C = 2x10^{-4} farad, dan E = 12 volt dengan diasumsikan saat awal arus dan muatannya adalah nol (pada wasktu saklar tertutup)

Penyelesaian:

Dari Hukum Kirchoff tentang rangkaian RLC diperoleh:

0,02 Q" + 16 Q' +5000 Q= 12

⇔Q" + 800 Q' +25000 Q = 600 (*disederhanakan*)

Persamaan di atas adalah persamaan diferensial orde dua non homogen.

- ✓ Solusi homogen

  Persamaan karakteristiknya:

  $$r^2 + 800r + 25000 = 0$$

  Diperoleh $r_{12} = -400 \pm 300i$

  Sehingga solusi homogennya adalah

  $$Q_h = \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots ..$$

- ✓ Solusi non homogen

  Dengan metode koefisien tak tentu, dengan mengambil Q_p=A, didapat $Q_p = 2{,}4x10^{-3}$

- ✓ Jadi solusi umumnya adalah

  Q = $Q_h + Q_p$

  Q = $e^{-400t}(c_1 \cos 300t + c_2 \sin 300t) + 2{,}4x10^{-3}$

Dengan menggunakan syarat awal Q(0) = 0 dan I(0)=0 maka diperoleh:

$c_1 = -2{,}4x10^{-3}$ dan $c_2 = -3{,}2x10^{-3}$

Jadi solusi khususnya adalah

Q = $10^{-3}[2{,}4 - e^{-400t}(2{,}4\ \cos 300t + 3{,}2 \sin 300t)$

Dengan pendiferensialan, diperoleh :

$I(t) = Q'(t) = 2e^{-400t}$sin 300t

LATIHAN 11

1. Hitunglah kuat arus yang mengalir dalam suatu rangkaian RLC dengan nilai $R = 100$ ohm, $L = 0{,}1$ henry, $C = 10^{-3}$ farad yang dihubungkan dengan sumber tegangan $E(t)= 155 \sin 377t$ dengan diasumsikan pada saat awal arus dan muatannya adalah nol.
2. Tentukan muatan Q sebagai fungsi dari waktu t yang mengalir dalam suatu rangkaian RC dengan $R = 10^{6}$ ohm, $C =10^{-6}$ farad dan sumber tegangannya konstan dengan $E= 1$ volt dan diasumsikan saat awal muatannya adalah nol.
3. Hitunglah muatan dan kuat arus I yang mengalir dalam suatu rangkaian RLC dengan nilai $R=1000$ ohm, $L=3{,}5$ henry, $C= 2 \times 10^{-6}$ farad yang dihubungkan dengan sumber tegangan $E(t)$ $120 \sin 377t$ dengan diasumsikan pada saat awal arus dan muatannya adalah nol.
4. Tentukan kuat arus I sebagai fungsi dari waktu t yang mengalir dalam suatu rangkaian LC dengan $L= 10^{-2}$ henry, $C =10^{-7}$ farad dan sumber tegangannya konstan dengan $E=20$ volt dan diasumsikan pada saat awal arus dan muatannya adalah nol.

DAFTAR PUSTAKA

Boyce, W.E. & R.C. DiPrima. 1992. *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems.* 5th ed. New York: John Wiley & Sons.

Bronson, Richard. 2007. *Persamaan Differensial.* Jakarta: Erlangga.

Darmawijoyo. 2011. Persamaan Diferensial Biasa: Suatu Pengantar. Jakarta :Erlangga.

Lestari, Dwi. 2013. Diktat Persamaan Diferensial. Yogyakarta: UNY.

Riogilang. 1983. *Persamaan Diferensial*. Bandung: Binacipta.

Ross, SL.1984. Differential Equations. New York: John Wiley & Sons.Inc.

Waluya, Budi. 2006. *Buku Ajar Persamaan Diferensial*. Semarang: Universitas Negeri Semarang.

Sugiyarto. (2018) *Persamaan Diferensial*. Yogyakarta: Binafsi Publisher.