Dinâmica

Ricardo A. Marino

14 de fevereiro de 2008

Sumário

Introdução

Ninguém está interessado em saber com que velocidade uma pedra abandonada de uma altura de vinte metros chega ao solo. Nem eu, nem você, talvez a pedra; mas esta pergunta não desperta grande fascínio na vasta maioria das pessoas que já tiveram contato com física. Para estes, saber que esta velocidade é $20m/s$ é tão relevante quanto saber o número de fios de cabelo de uma pessoa, quantas letras possui "Os Sertões" ou o nome dos afluentes da margem esquerda do rio Amazonas. Não os culpo, aliás, concordo com eles.

Como físico, não me chama nem um pouco a atenção saber a velocidade de uma pedra que é abandonada. Talvez desperte um pouco minha curiosidade e me faça pensar por alguns milissegundos: "Hm... interessante...", nada além disso. É uma tragédia que a muitos a física seja reduzida a isso: o cálculo inútil de grandezas misturado com definições aparentemente arbitrárias de termos como "Trabalho" e "Momento". Essa física não interessa a ninguém, nem à pedra.

O objetivo dessa pequena coletânea de textos é tentar quebrar essa visão um tanto mitológica da física: grandezas definidas sem muito sentido com fórmulas ainda mais obscuras. Ele vem muito de minha experiência pessoal como professor de alunos colegiais, com suas perguntas espinhosas de serem respondidas. Eu poderia facilmente determinar o trabalho realizado pela força daquele exercício proposto pelo livro didático, que certamente cairia na prova de meu aluno, mas não conseguia definir o que é trabalho. Poderia destrinchar o teorema da energia cinética, mas não conseguia explicar o que é energia ou a razão de ser daquele estranho $\frac{mv^2}{2}$. Por que dividido por dois? Por que ao quadrado?

E estas perguntas não param no ensino médio. A graduação em fisica possui sua coletânea de perguntas sem respostas. Encontro na maior parte dos livros didáticos trechos como: "Define-se então a grandeza chamada trabalho, cuja fórmula é...". Por que é útil pensar dessa maneira e o que nos leva a seguir esta linha de raciocínio? Estes textos nunca tiveram a pretensão de cobrir qualquer carga didática ou de servirem como algo próximo de um livro texto, são apenas complementos. São uma visão diferente de enxergar a dinâmica. O mais importante no ensino de física básica não é, afinal das contas, encontrar a relação entre definições sem sentido, mas, talvez até com uma pedra, tentar sondar alguns dos mistérios do funcionamento do universo.

O Autor
14 de fevereiro de 2008

1

Momento e Forças

Matemática e Física não são a mesma coisa. Enquanto a primeira se preocupa com verdades fundamentadas e provadas a partir de axiomas iniciais de um dado sistema, a segunda tenta, desesperadamente, compreender como nosso mundo se comporta. Segundo a Profª.dra. Zara Issa Abud: "A matemática não tem o menor compromisso com a realidade". De fato, as verdades matemáticas, satisfeitos seus axiomas iniciais, são válidas em qualquer universo possível; o que, consequentemente, prova que ela não tem muito a ver com qualquer universo possível.

Mas é um fato maravilhoso podermos representar tantas verdades de nossa realidade usando a matemática como linguagem. A física presta seus serviços nesta área. Ela tenta observar, sintetizar e prever fenômenos usando a linguagem matemática. Para tal, precisamos acrescentar algo a nossas observações que não seja apenas a matemática, algumas observações empíricas, algo que distinga nossa realidade de outras possíveis (acredite, existem muitas possíveis). Disso fala a física.

Este breve texto tem por objetivo deduzir, a partir de princípios fundamentais, outros igualmente fundamentais, usando o bom senso e a matemática. Antes de iniciar, peço que o leitor esqueça tudo de física que sabe e fique apenas com a matemática (e com a cinemática, que é uma matemática disfarçada de física).

Uma das áreas mais fundamentais da física é a Dinâmica: como os objetos se comportam quanto ao movimento? Vamos imaginar todas as possíveis interações que os corpos podem ter entre si, para estudar sua influência em seu movimento. Claro, sequer sabemos como eles se comportam sozinhos (pois esquecemos tudo), mas entender como eles se influenciam pode nos ajudar a entender um corpo sozinho.

Em um raciocínio rápido, a interação mais óbvia que penso entre dois corpos é a colisão. Claro, existem outras, mas nos fixemos nesta por ser a mais próxima de nossa realidade e então veremos se nossas deduções são válidas para as demais interações. Imagine o seguinte aparato, ilustrado na figura 1.1.

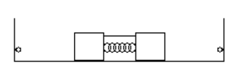

Figura 1.1:

Dois blocos absolutamente idênticos, presos por um fio, comprimem uma mola. Nos extremos do trajeto há uma singela mola com propriedades fantásticas, ela é capaz de "ricochetear" um móvel que nela colide a uma velocidade v de volta ao percurso, mas no sentido oposto, ou seja, com velocidade $-v$. Qual o comportamento esperado dos blocos ao romper-se o fio? Você pode até inferir, sabiamente, que cada bloco vai para um lado com a mesma velocidade, porque são iguais, mas finja que você não sabe isso, finja que você não sabe nada da realidade.

Para saber o que vai acontecer, teremos que recorrer a um teorema muito interessante. Sua universalidade só é tão abrangente quanto sua obviedade. O Princípio da Uniformidade do Espaço[1] (PUE) diz, em uma simplificação grosseira, que a física do lado esquerdo dos bloquinhos é a mesma que a do lado direito. Parece um pouco óbvio, mas é uma característica de nossa realidade. Eu consigo conceber um universo em que uma região do espaço tenha algumas leis físicas e outra, vizinha a esta, tenha uma física totalmente diferente. Não é o caso da nossa realidade que, por uma razão curiosa e desconhecida, é uniforme.

É possível demonstrar o PUE? Não consigo pensar em qualquer modo teórico de chegar-se a ele, pois ele próprio é a base da física. Essa introdução de um conceito experimentalmente verificado e coerente com nossa realidade é um dos grandes passos que distancia a matemática da física. A matemática interpreta afirmações ou como axiomas ou como conseqüências deste. O PUE parece ser um axioma característico de nossa realidade, sendo uma característica passível de demonstração. A física precisa desse princípio e o assume como verdadeiro. Para satisfazer aos rigoristas, dizemos que todas as conclusões que extrairmos neste texto são dependentes do PUE e são falsas se o PUE é falso.

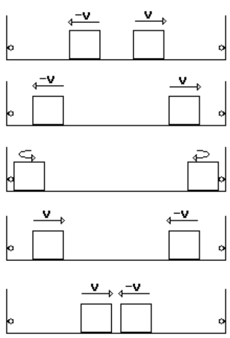

Figura 1.2:

Tendo o PUE como arma, o que acontecerá com os blocos ao romper-se o fio? Obviamente, eles serão expelidos em direções opostas (não é preciso nenhum teorema para perceber isso), mas com que velocidades? Como a física do bloco da direita é a mesma que a do bloco da esquerda, e sendo eles absolutamente iguais, não há razão para imaginar que eles sejam ejetados com velocidades diferentes, pois, de acordo com o PUE, todos são iguais perante a Física. A trajetória esperada será, portanto, como mostra a figura 1.2.

E o que acontecerá em seguida? Como os corpos se comportarão após a colisão, isto é, qual será o próximo quadro do esquema? Para simplificar a situação, vamos introduzir um elemento ao sistema: os corpos possuem uma "cola" em suas paredes, de forma a permanecerem juntos após a colisão. Essa condição permite apenas três possibilidades de próximo quadro: os corpos vão juntos para a esquerda, para a direita ou ficam parados unidos.

Como a velocidade deles é igual em módulo e os blocos são absolutamente iguais, não faz o menor sentido pensar que o sistema iria para a direita ou para esquerda. De acordo com o PUE, se dissermos que o sistema vai para a direita, ou partidários de esquerda podem, com toda razão, protestar: "Por que não para a esquerda?". Se dissermos para a esquerda, os de direita terão o mesmo direito de protesto. Como o universo é um lugar bem igualitário, de acordo com o PUE, só faz sentido a hipótese dos corpos ficarem parados juntos (figura 1.3).

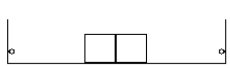

Figura 1.3:

[1]Este príncipio possui alguns nomes diferentes, como princípio da simetria do espaço.

E isso tudo é muito bonito. Entendemos agora, usando apenas o PUE, que dois corpos iguais com velocidades iguais em módulo mas diferentes em sentido ao colidirem, se ficarem juntos, ficam parados.

Como tudo nessa vida é uma questão de ponto de vista, podemos tentar observar esse mesmo fenômeno com outros olhos. Vamos usar os olhos do bloco da direita, chamado bloco D, enquanto o da esquerda chamaremos bloco E. Antes, o nosso referencial de velocidade, isto é, aquele segundo o qual dizíamos ter velocidade zero para então o bloco D ter velocidade v ou $-v$, era o solo. Desta vez, faremos de nosso referencial o bloco D. Ele será nosso "zero" de velocidade. Como fica a colisão do ponto de vista dele? Um diagrama que representa isto é o da figura 1.4.

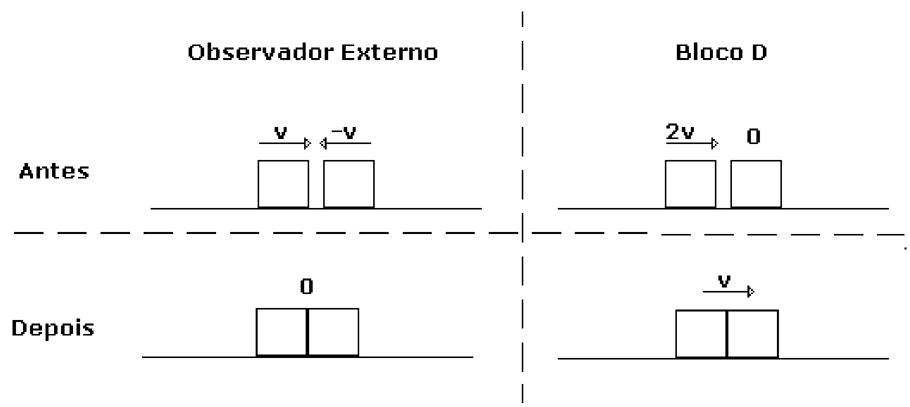

Figura 1.4:

O resultado é aparentemente diferente, mas a situação é a mesma. Parece absurdo que para um observador externo o sistema termine com uma velocidade e para o bloco D termine com outra. Mas o sistema referencial permite esse tipo de situação. Tente imaginar que o sistema do bloco D é o processo visto por um gnomo egocêntrico que vive dentro do bloco D. Quando ele olha para fora do bloco e vê o mundo se movendo, ele não acredita que esteja tudo em movimento, ele acredita que aquela situação seja o mundo andando. Isso mesmo, nosso gnomo problemático acredita que o mundo esteja andando e ele, parado.

Mas esse processo merece uma explicação extra. Quando se está em um trem estacionado ao lado de outro trem, há uma ilusão curiosa quando um dos trens começa a se movimentar. Quem está dentro, não sabe se seu trem está em movimento ou se é o vizinho, percebe apenas quando a aceleração de algum deles é muito grande. De igual modo, um passageiro em um carro a 80 km/h, ao olhar pela janela, sabe que as árvores da paisagem estão paradas e que ele está em movimento; mas o que seus olhos realmente vêem são as árvores correndo na direção oposta, a 80 km/h também. É tudo uma questão de referencial.

A lei geral dessa mudança de referencial é: se quero ser o referencial de meu sistema, basta subtrair minha velocidade de todos os objetos de meu sistema, inclusive de minha própria, tornando minha velocidade zero e descobrindo a velocidade dos outros em relação a mim. Parece confuso, realmente é um pouco, mas imagine o caso do passageiro do carro. Se ele deseja ser o referencial de suas observações, basta subtrair 80 Km/h de todos os objetos que vê. As árvores, que estão paradas no sistema "normal" de observação, passarão a ter -80 km/h, isto é, estarão voltando a 80 km/h, o que faz sentido, como observamos acima.

Ainda no exemplo acima, um carro que está no sistema "normal" de observação, também a 80 km/h, não variará sua posição em relação ao carro do passageiro. Isso faz sentido, porque no sistema de observação do passageiro a velocidade deste segundo carro é zero! Se o outro carro estivesse a 60 km/h, sua velocidade no novo sistema de referência seria -20 km/h, ele estaria voltando vinte quilômetros a cada hora, o que realmente se verifica quando medimos usando o passageiro do carro a 80 km/h como referência.

E para voltar do sistema de observação do passageiro para o sistema "normal", basta reverter o processo e somar a todos os objetos do sistema a velocidade do passageiro. Assim tudo volta a ser o que era antes.

Quando nosso ser imaginário vê o bloco E se aproximando, ele é coerente. Se seu bloco está se movendo com uma velocidade $-v$, mas ele acredita ser o referencial de todas as velocidades, então não é ele que está se movendo, mas o mundo que se move a v. Se o mundo inteiro está se movendo, o bloco E, que tem uma velocidade v em relação ao solo, está se aproximando com velocidade $2v$ no novo sistema de referência (o gnomo do bloco D).

Após a colisão, para um observador externo, o sistema pára. Para nosso gnomo, no entanto, o que era "parado" passa a se mover com uma velocidade v. Sabemos que o sistema está parado, mas, para o gnomo, ele só agora está se movendo. Podemos dizer que o gnomo pensa da seguinte forma: "Eu estava parado antes de bater, agora estou com a mesma velocidade que o mundo! Como o mundo estava com velocidade v, devo estar também com essa velocidade, já que, ainda que eu seja bem egocêntrico, eu não posso afirmar que minha colisão afetou o mundo".

O sistema de referencial permite um outro artifício, muito inteligente. Todas as situações vistas por um referencial são possíveis se vistas por outro, nas mesmas condições. Em outras palavras: se o gnomo viu um bloco a $2v$ atingir um bloco parado, resultando em um sistema com os dois blocos unidos a uma velocidade v, então se repetirmos essa experiência para um observador externo, os resultados devem ser os mesmos! Esse processo, interessantíssimo, é conhecido como "Transformação de Galileu" e será nosso segundo e último axioma. Não é difícil imaginar que ele é verdade, pois um processo depende apenas das velocidades relativas entre seus objetos, não da velocidade em que eles estão.

Agora que mencionei, preciso dar uma explicação para justificar minha crença nas transformações de Galileu. Uso um exemplo semelhante ao que este nobre físico dos séculos XVI e XVII usou para justificar suas transformações: Imagine-se em um grande transatlântico que se está navegando com velocidade constante. Você consegue imaginar um garçom tendo dificuldades em servir champanhe porque o barco está se movendo? Ou então uma pessoa tendo dificuldade em andar em um sentido do barco e facilidade em outro? Certamente não, pois o que importa é a velocidade relativa entre os objetos. Se a velocidade relativa é a mesma, supondo v_r , não importa se os corpos estão parados ou com qualquer velocidade v, as leis físicas para eles se comportam da mesma forma como se estivessem em qualquer outro conjunto de velocidades em que a relativa entre eles é v_r. O que realmente importa é a velocidade relativa e, conseqüentemente, a aceleração dos corpos. Fora isso, nada muda.

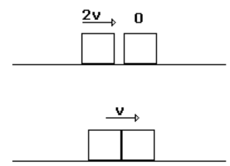

Figura 1.5:

A transformação de Galileu diz, grosso modo, que: as observações de um determinado referencial serão repetidas em qualquer outro referencial dadas as mesmas condições iniciais que o primeiro referencial observou. Com as transformações de Galileu, sem precisar fazer a experiência (se bem que é sempre bom), podemos prever que a segunda coluna da transformação de galileu (figura 1.5).

Assim sendo, quando um corpo de velocidade v atinge um corpo parado, se ficam unidos, resultam em um corpo de velocidade $\frac{v}{2}$. Essa frase é muito mais genérica do que a anterior, mas podemos melhorá-la, imaginando a situação da figura 1.6.

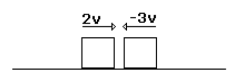

Figura 1.6:

Como os corpos se comportarão? Podemos usar o diagrama do gnomo egocêntrico e a frase anterior para descobrir:

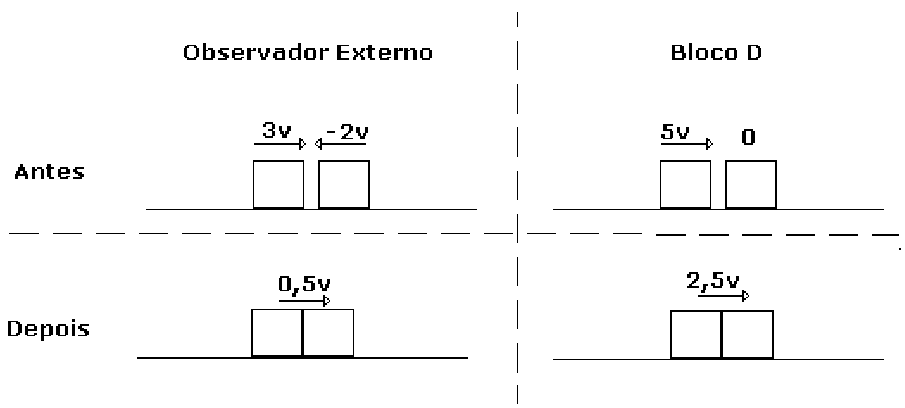

Figura 1.7:

Como entender este diagrama? Adotar como referencial o bloco D **é o mesmo que subtrair a velocidade do bloco D de todos os elementos do sistema.** Isso tornará o bloco D nosso "zero" e revelará como este enxerga todo o resto do mundo (ou como o gnomo dentro dele enxerga). Para retornarmos ao ponto de vista do observador externo, basta somarmos novamente a velocidade do bloco D a todos os elementos do sistema e então teremos o que desejamos. Esse diagrama consiste em converter uma situação desconhecida (colisão de blocos de velocidades diferentes) em uma conhecida (colisão de bloco com outro parado) para então aplicar os resultados da conhecida na desconhecida.

Tornemos isto tudo mais matemático. Sob o ponto de vista externo, as velocidades de E e D são, respectivamente, v_E e v_D. Quando passamos para o ponto de vista do bloco D, a velocidade de E passa a ser $v_E - v_D$, e a de

D passa a ser 0. Após a colisão, como nosso teorema disse, a velocidade dos blocos, no sistema de referência D, é $\frac{v_E - v_D}{2}$. Para retornarmos ao sistema de referência externa, precisamos somar v_D a todas as velocidades do sistema, ou seja, à única, que é a velocidade dos blocos juntos. No sistema externo, portanto, a velocidade dos blocos juntos torna-se: $\frac{v_E - v_D}{2} + v_D = \frac{v_E + v_D}{2}$. A figura 1.8 esquematiza o processo.

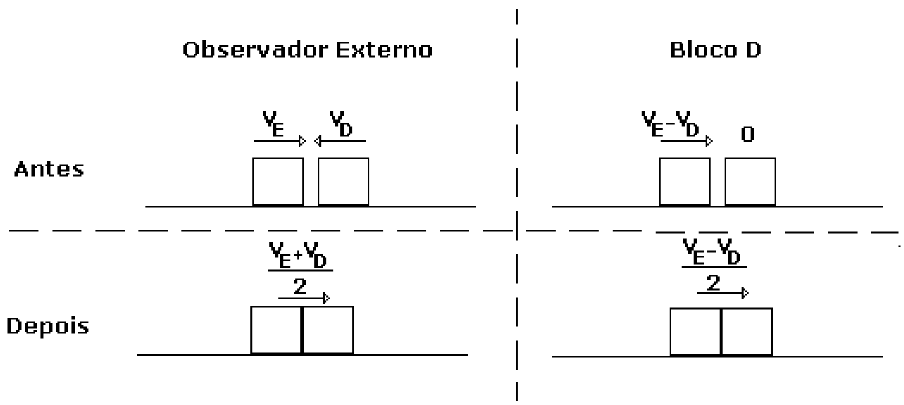

Figura 1.8:

Nossa nova teoria, muito mais abrangente e completa, é: dois corpos idênticos ao se colidirem, se permanecerem juntos, formam um novo corpo cuja velocidade é a média das velocidades iniciais dos corpos. É impressionante que esse resultado seja dependente apenas do PUE para ser verdade.

Mas eu desejo mais. Eu quero equacionar isso de alguma forma, ou seja, quero expressar em uma lei geral a relação entre as condições iniciais de velocidade e as condições finais. E como seria? Existem inúmeros jeitos de tentar expressar essa relação matematicamente. Todas são artifícios teóricos para me ajudar a entender o processo. Artifícios teóricos não são manobras supérfluas que faço ao Deus dará, são processos ou formas de expressão que devem ser mantidos na medida em que são úteis e rejeitados quando nada acrescentam ao modelo. Vamos começar tentando equacionar pela adição simples. Certamente a equação:

$$v_E + v_D = \frac{v_E + v_D}{2}$$

É absurda e sem qualquer sentido. Precisamos encontrar uma forma melhor de equacionar essa verdade em uma lei simples e sucinta, pois não basta dizer aquela verdade anterior sobre velocidades iniciais e finais, é preciso traduzi-la para uma forma matemática. Tenho dois termos diferentes em uma equação, quero torná-los iguais, como posso fazê-lo? Há um artifício matemático muito interessante e útil: se dois termos de uma equação variam linearmente um em relação ao outro, mas são diferentes, é possível igualá-los atribuindo constantes!

E é exatamente isto que farei, atribuirei constantes a todos os termos da equação:

$$\lambda v_E + \mu v_D = \xi \frac{v_E + v_D}{2}$$

Agora a equação está ajustada, mas me é inútil. Não sei as constantes, tenho variáveis demais para saber qualquer coisa ou prever qualquer fenômeno. Posso, no entanto, estudar as constantes e tentar entender parte de seu comportamento.

Existem três tipos de constantes físicas: as universais (que não variam por nada neste mundo), as que dependem do meio e as que dependem dos corpos. Em nosso caso, analisando as constantes μ e λ, percebemos um fato interessante. O meio em que os corpos estão é o mesmo, os corpos são idênticos e, coincidentemente, o universo dos corpos é o mesmo. Assim sendo, não há razão para atribuir constantes diferentes a eles, sendo, necessariamente, $\lambda = \mu$.[2] Assim sendo:

$$\lambda v_E + \lambda v_D = \xi \frac{v_E + v_D}{2}$$

Consequentemente, $\xi = 2\lambda$. A equação passa a ser:

$$\lambda v_E + \lambda v_D = \lambda \frac{v_E + v_D}{2}$$

Eu poderia cortar λ e eliminar este parâmetro? Certamente, mas a pergunta é: ele faz diferença? Nessa equação, em que os corpos E e D são idênticos, ele não parece ter tanta importância. Mas e se λ for uma constante que depende dos corpos? Cortá-la seria não somente perder informação, mas impedir que a equação se generalize para corpos diferentes!

Além do que, repare nos dois termos. Enquanto cada corpo do lado esquerdo da equação recebe a constante λ, o corpo resultante da união dos dois recebe 2λ. Esse fato curioso não pode passar despercebido. Como o meio e o universo em que os corpos estão é o mesmo, a única razão possível para que os corpos recebam constantes diferentes é que a constante λ depende dos corpos. E não é apenas isso, ela é uma constante aditiva! Se um corpo tem λ e um outro corpo, composto de dois do anterior, tem 2λ, essa constante parece ser uma propriedade aditiva da matéria, como comprimento, por exemplo.

E corpos de λ maior apresentam, de acordo com nossa equação, uma tendência menor a ganhar velocidade. Podemos então ligar λ à resistência que um corpo apresenta a ter sua velocidade mudada, já que é isso que a equação parece nos dizer. Após esta análise, podemos enumerar as características de λ:

1. É uma propriedade do corpo.
2. É aditiva.
3. Expressa a resistência que o corpo tem a ter sua velocidade mudada.

[2]Fizemos aqui uma suposição interessante: essa constante não depende do sentido da velocidade. Mais para frente, descobriremos que nossa suposição será a independência dessa constante da velocidade, o que minará toda a mecânica clássica aos efeitos relativísticos. É o poder de uma hipótese errada em conceitos básicos.

Essa propriedade parece ser muito importante e merece um nome. Ela já é chamada há bastante tempo de **massa** e não vejo porque devamos mudar este nome. Trataremos matematicamente massa pela letra m. vamos chamar também a velocidade do corpo resultado de v_f. Nossa equação fica, portanto:

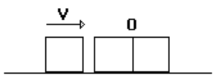

Figura 1.9:

$$mv_E + mv_D = 2mv_f$$

Para ser mais genérico, vamos chamar a massa do corpo final, $2m$ de m_f. A massa do sólido da esquerda será m_E e a massa do da direita, m_D. Sim, eu sei que são iguais, diferenciarei apenas na fórmula. A equação torna-se:

$$m_E v_E + m_D v_D = m_f v_f$$

Mas será que esta equação vale mesmo? Será que essa constante massa faz algum sentido, ou é apenas um resultado de um artifício teórico inútil (atribuir constantes) que pode ser eliminado? Vamos pensar no caso da figura 1.9

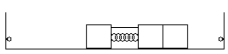

Figura 1.10:

No qual um corpo com velocidade v choca-se com um outro composto de dois blocos, iguais ao primeiro, colados em um sistema inseparável. Não sabemos o que vai acontecer, pois nossa frase: "Bate com velocidade v termina com $\frac{v}{2}$" só é válida para corpos idênticos. mas podemos imaginar, sim, imaginar não custa. Lembra-se de nosso primeiro exemplo: a mola com os corpos? Vamos imaginar os corpos nessa mesma situação (figura 1.10).

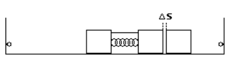

Figura 1.11:

Mas eu continuo não sabendo o comportamento dos corpos quando o fio se rompe, pois toda aquela história de velocidade igual depende dos corpos serem iguais. Eu sei, no entanto, qual a velocidade resultante da colisão de dois corpos iguais que permanecem juntos. Vou imaginar o seguinte então: ao invés daquele corpo maior ser um só, vou separá-lo em dois blocos e colocá-los a uma distância bem pequena, Δs, como na figura 1.11.

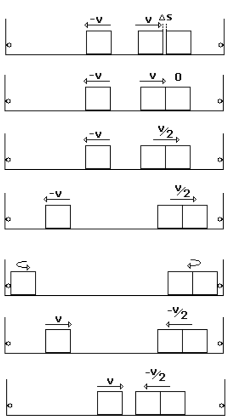

Figura 1.12:

O que acontece a seguir nós sabemos e está esquematizado na figura 1.12.

Podemos então reduzir a distância Δs até um espaço infinitesimalmente pequeno, até zero, e compreender que dois corpos, quando um é o dobro do outro, ao serem ejetados por uma mola, adquirem velocidades diferentes: o menor adquire o dobro da velocidade do maior.

Agora uma abstração não tão óbvia é necessária. A mola ejetou os corpos com velocidades diferentes, certamente por uma diferença entre os corpos. Podemos dizer que a mola usou um "critério" igualitário (PUE) para definir a velocidade com que os corpos seriam ejetados. Esse "critério" leva em conta alguma resistência que o corpo maior apresenta a ganhar velocidade. Ao encontro dos corpos, faz muito sentido pensar que esse mesmo critério será aplicado na colisão. Como podemos comprovar isso? Imagine que os corpos, ao se encontrarem, fiquem novamente presos a uma mola, sendo que há uma cola poderosa nos extremos da mola impedindo os corpos de se soltarem, qual a situação esperada? Certamente a esquematizada na figura 1.13.

Se a mola ejetou os corpos com essa velocidade, é razoável supor que, enviado os corpos nessa mesma velocidade em colisão com a mola, ela não dê preferência a nenhum deles. O sistema simplesmente volta a sua condição inicial.

Podemos, através deste raciocínio, imaginar uma mola cada vez menor, menor e menor. Em uma simplificação, podemos supor que, para nenhuma mola, o choque de dois móveis nestas condições resultará em um novo móvel de velocidade. Não é uma abstração óbvia, mas também não há razão para supor uma preferência do maior ou do menor nestas velocidades, já que não ouve preferência na ejeção. O sistema termina, protanto, como na figura 1.15.

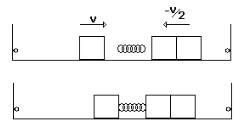

Figura 1.13:

Usando o diagrama do gnomo egocêntrico, podemos estudar esse tipo de movimento e entender o que acontece quando dois corpos, quando um é o dobro do outro, ao se colidirem, comportam-se:

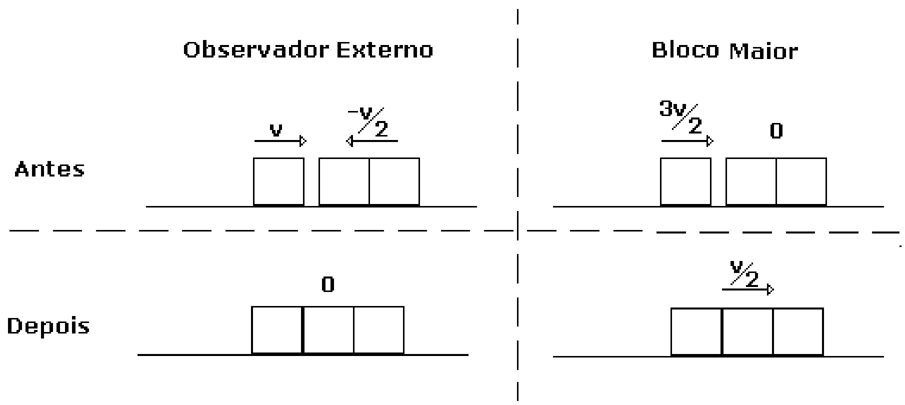

Figura 1.14:

Figura 1.15:

Pelo ponto de vista do bloco maior, extrapolando essa observação para a realidade, produzimos uma conclusão: um bloco com velocidade v ao atingir outro composto de dois blocos, se ficarem unidos, produzem um corpo composto de três blocos com velocidade $\frac{v}{3}$.

Podemos usar novamente o diagrama, com um sistema genérico de velocidades, para chegar a alguma conclusão:

A lei que chegamos, neste caso, é:

$$mv_E + 2mv_D = 3m\left(\frac{v_E + 2v_D}{3}\right)$$

Mas, ao invés de cortar a constante m, chamarmos cada m com seu coeficiente de **massa do bloco**, chegaremos a um resultado, se não maravilhoso, no mínimo interessante:

$$m_E v_E + m_D v_D = m_f v_f$$

Que é, quase por mágica, a mesma lei que encontramos estudando o caso dos blocos iguais. A constante massa agora parecer não apenas fazer sentido, mas descrever uma propriedade fundamental dos corpos. De fato, se repetirmos o processo para n corpos colidindo, essa lei continuará verdadeira, basta seguirmos os passos apresentados na solução dos blocos anteriores.

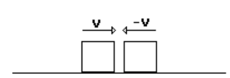

Figura 1.17:

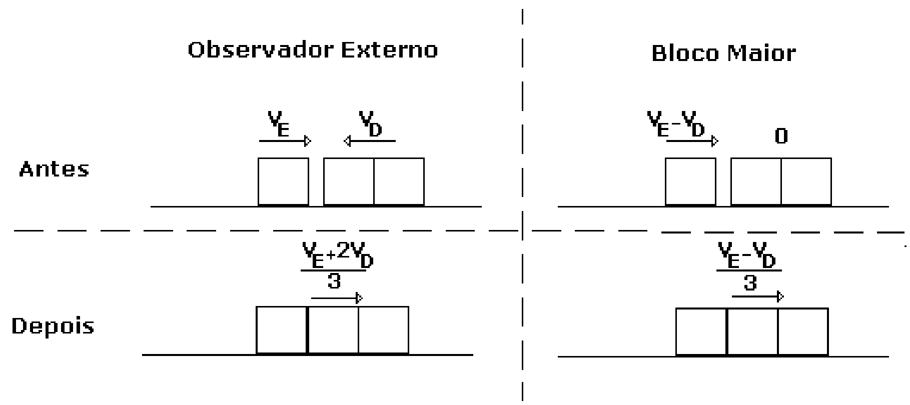

Figura 1.16:

E como seriam blocos que não permanecem juntos após a colisão? Como eles se comportam, não sei. Posso apenas inferir possibilidades. Os corpos, após a colisão, podem ter velocidade maior que antes, igual ou menor. Imaginando a situação da figura 1.17, podemos começar a cogitar seu destino.

Agora os blocos não ficam necessariamente parados, como estudamos nos casos anteriores. Os blocos poderão ejetar com qualquer velocidade dessa colisão, não sei como se comportarão. Mas de uma coisa tenho certeza: eles serão ejetados com velocidades iguais. Ora, se os blocos são iguais e as velocidades as mesmas, pelo PUE, não faz sentido pensar em outro caso, isto é, o universo favorecendo um dos blocos. Pelo sistema de mudança de referencial, temos que:

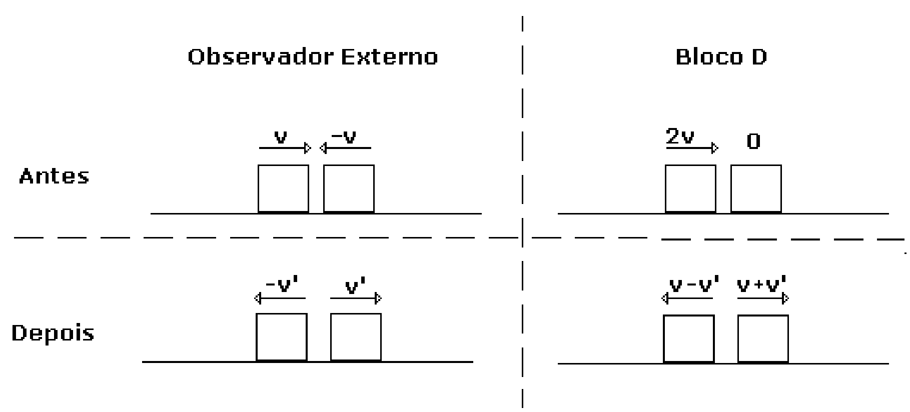

Figura 1.18:

O comportamento visto pelo bloco D, que também é válido se o experimento for repetido com as mesmas condições, mas visto por um observador externo, parece caótico e impossível de ser equacionado; pelo excesso de variáveis. De fato, é impossível prever v' no sistema, tanto no choque de dois blocos iguais como no choque de um bloco com um parado. Mas olhando bem, um fato curioso desponta. Chamando de v_i a velocidade inicial e v_f a velocidade final, temos que[3]:

$$m_E v_{Ei} + m_D v_{Di} = m_E v_{Ef} + m_D v_{Df}$$

Que é uma equação idêntica àquela encontrada nos exemplos anteriores, mas diferenciando o último termo, que era composto dos dois blocos juntos, pelos dois separados. Usando os processos anteriores para estimar os resultados com blocos maiores[4], podemos comprovar que a equação acima é válida na colisão de todos e quaisquer dois bloquinhos. É maravilhoso que essa lei bela seja conseqüência apenas da uniformidade do espaço. Essa uniformidade tem a necessidade de uma grandeza que chamamos de massa, que expressa a resistência de um corpo a ser acelerado.

Podemos, no entanto, tornar esta equação ainda mais bela. Escrever $m \cdot v$ tantas vezes na equação não é tão bonito. Já que essa equação expressa uma relação entre massa e velocidade que diz muito sobre o comportamento dos corpos, podemos perceber que existe uma propriedade dos corpos que envolve massa e velocidade. Essa propriedade tem a ver com o movimento delas. Pela equação acima, quando maior $m \cdot v$ o corpo tem, menos ele terá sua velocidade mudada, mais ele mudará a velocidade dos outros e mais rápido ele estará. Este corpo possui, em um abuso de linguagem, mais "movimento" que outro de menor $m \cdot v$.

Definimos então a "quantidade de movimento" de um corpo como a multiplicação entre massa e velocidade. A expressão "quantidade de movimento", por ser um pequeno abuso de linguagem, precisa ser trocada. Chamaremos a propriedade dos corpos descrita acima de momento, sendo ela tratada pela letra p.

$$p = m \cdot v$$

Uma conseqüência interessante desta nova definição é que o que chamamos de "momento" é uma propriedade vetorial dos corpos, pois é a multiplicação de um escalar (massa) por um vetor (velocidade). Ela expressa algo como: "A velocidade com que um corpo está e a resistência que este apresenta a ter sua velocidade mudada". É uma forma bonita de dizer o, como já tive o prazer de ouvir, "embalo" de um corpo. São palavras felizes para a descrição desta grandeza, mas a física não é partidária de termos populares, sendo a palavra "momento" ou "momentum" aquela que realmente descreve o que é esta propriedade.

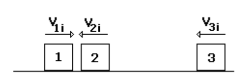

Figura 1.19:

A equação, com a inclusão dessa nova definição, torna-se:

$$p_{Ei} + p_{Di} = p_{Ef} + p_{Df}$$

Um sistema de partículas em movimento tem diversas colisões. Este sistema pode ser reduzido a uma série de equações como a de cima, sabendo que a soma

[3]Eu não demonstrei isso a partir de algo mais fundamental, apenas percebi, baseado em uma desconfiança proveniente dos casos anteriores.

[4]O que não será feito, por ser laborioso demais; sequer irei sugerir como exercicio, pois, sendo honesto comigo e com vocês, eu não o faria se estivesse lendo este texto.

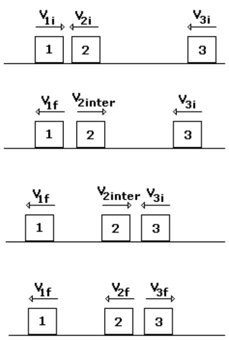

Figura 1.20:

dos momentos iniciais de duas partículas é igual à soma de seus momentos após a colisão. Imaginemos um sistema como o da figura 1.19. O comportamento deste sistema é previsível, representado na figura 1.20. 1 colide com 2. 2 adquire uma velocidade intermediária e colide com 3, até que todos atingem uma velocidade final. Tratando matematicamente, com a expressão acima desenvolvida, temos:

$$p_{1i} + p_{2i} = p_{1f} + p_{2inter}$$

$$p_{2inter} + p_{3i} = p_{2f} + p_{3f}$$

Somando as duas equações, obtemos a expressão:

$$p_{1i} + p_{2i} + p_{3i} = p_{1f} + p_{2f} + p_{3f}$$

E esse raciocínio pode ser estendido para um sistema de n partículas! A equação, em sua forma mais genérica possível, é:

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ji} = \sum_{j=1}^{n} p_{jf}$$

Como podemos definir arbitrariamente qual é o momento inicial e qual o final, essa relação é válida em qualquer instante do movimento. O teorema geral que encontramos, depois de todas essas conclusões, é: **a soma dos momentos das partículas de um sistema é uma constante**:

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = k = cte$$

Não podemos analisar quantitativamente os fenômenos com esta lei (exceto aqueles em que os corpos permanecem unidos após o choque), mas ela revela um comportamento fascinante da matéria.

Não podemos dizer, no entanto, que o momento de uma partícula se conserva sempre, ele não o faz. Vimos nos casos anteriores que o momento de uma partícula variava e muito, graças à interferência de uma outra partícula. Essa interferência é agora alvo de nossa atenção. Sozinha, uma partícula tem seu momento conservado e constante:

$$p_1 = k$$

O momento de uma partícula varia apenas quando ela sofre a interferência de outra partícula. Voltemos ao sistema básico de duas partículas interagindo entre si, já que todas as interações podem ser reduzidas a esse sistema:

$$p_1 + p_2 = k$$

É evidente que o que p_1 perde, p_2 ganha. Como estamos trabalhando no universo físico, queremos estudar essa taxa de variação. Mas taxa de variação em função de quê? Como estamos falando de colisões, seria interessante estudar o quando o momento de uma partícula varia em função do tempo. Com essa taxa, eu poderia prever o comportamento do sistema em qualquer instante que eu quisesse; uma habilidade muito útil.

Como o momento só varia pela interferência que uma partícula causa em outra, vamos dar um nome bem particular a essa taxa de variação. Quanto maior a interferência de uma partícula em outra, maior é essa taxa. Essa noção de interferência, de uma partícula "empurrando" outra, leva a taxa de variação do momento pelo tempo a ser chamada de **força**.

A noção de força é muito intuitiva e esta intuição está de acordo com a definição. O "empurrão" não é nada mais que variar o momento de uma partícula. Quantificar o empurrão é expressar o quanto o momento varia em função do tempo. Ou seja, é muito razoável dizer que essa taxa de variação é a quantificação do que conhecemos por forças, pois são idéias que unem a física à intuição. Matematicamente temos que:

$$\frac{dp}{dt} = F$$

Em nosso sistema de duas partículas, podemos compreender força como a interferência que uma partícula exerce em outra. Por uma questão de nomenclatura, definiremos a força que 1 sofre pela ação de 2 como $F_{1(2)}$. A variação do momento de 1 pelo tempo é a força que 1 sofre pela ação de 2, sendo:

$$\frac{dp_1}{dt} = F_{1(2)}$$

Em nossa equação para um sistema de duas partículas, podemos diferenciar ambos os membros e descobrir algo interessante:

$$p_1 + p_2 = k$$

$$\frac{d(p_1 + p_2)}{dt} = \frac{dk}{dt}$$

$$\frac{dp_1}{dt} + \frac{dp_2}{dt} = 0$$

$$F_{1(2)} + F_{2(1)} = 0$$

$$F_{1(2)} = -F_{2(1)}$$

Essa equação, ainda que simples, revela uma informação fascinante. A força que 1 sofre pela ação de 2 tem a mesma intensidade da força que 2 sofre pela reação de 1! A única distinção entre as duas forças é o sentido, representado na equação pelo sinal negativo. É uma conclusão interessantíssima, que descreve muito sobre o movimento dos corpos.

E todas estas conclusões continuam válidas tratando momento e força como devem ser tratados, isto é, como vetores. Pela álgebra vetorial, todas as relações acima podem ser repetidas e terem sua veracidade comprovada.

Terminando nossas breves observações sobre dinâmica de forças e momento, podemos sintetizar nossas conclusões em três leis simples:

1. Um corpo, livre da qualquer interferência externa, tende a manter sua velocidade constante.

2. A interferência que um corpo sofre é chamada força e pode ser expressa pela variação de seu momento pelo tempo:

$$\frac{dp}{dt} = F$$

3. A força que um corpo 1 sofre em virtude de 2 é igual em módulo à força que o corpo 2 sofre em virtude da reação do corpo 1, sendo de mesma direção e sentido oposto:

$$F_{1(2)} = -F_{2(1)}$$

Estas três afirmações são conhecidas como "As Três Leis de Newton" e são conseqüências de um teorema mais fundamental que elas: A Conservação de Momento. É fascinante como tudo isso se apresenta como conseqüência somente do Princípio da Uniformidade do Espaço e das Transformações de Galileu, sendo todo esse tratamento matemático-lógico não apenas muito interessante, mas intrinsecamente belo.

2

Trabalho e Energia

No capítulo anterior, verificamos, a partir do Princípio da Uniformidade do Espaço (PUE) e das transformações de Galileu, a lei da conservação de momento e as três leis de Newton. Essas leis são poderosas e são capazes de descrever e prever uma grande quantidade de fenômenos. Na realidade, toda interação[1] entre partículas pode ser descrita, se houver tempo e cuidado na análise, no formato das equações newtonianas de movimento. Mas eu não estou satisfeito. Eu quero entender o que a inclusão desse método poderoso de análise revela sobre minha realidade. Quero entender um pouco mais sobre como o universo funciona e, com isso, tentar prever seu funcionamento.

Conhecer e prever são o primeiro passo para o controle. Dominar um fenômeno proporciona a possibilidade de usá-lo para qualquer fim. Buscar conhecimento é buscar poder. Apesar de ser uma busca perigosa, pois poder é o elemento mais volátil que conheço, é também uma busca muito nobre. E a isto o físico está disposto: a observar e entender a realidade para inferir sobre seu próximo segundo, além de imaginar métodos de usar esse próximo segundo para um fim específico.

Há quem pergunte: "Mas com as equações de movimento da cinemática e com as leis deduzidas no último estudo eu não sou capaz de descrever qualquer fenômeno na dinâmica?". Talvez até consiga, mas poderá perder muito da beleza de certos comportamentos, assunto deste estudo. Reduzir todo o movimento a uma série de equações sem se esforçar para observar o grande sentido e beleza que ele possui é como escrever todas as notas de uma sinfonia de Beethoven como uma equação de onda. Você certamente descreverá com perfeição a música, mas perderá dela o mais importante. Além do mais, em algumas vezes seria necessário descrever o movimento de um sistema como a equação horária de cada uma de suas partículas, deixando maluco qualquer físico que trabalhe com um gás (que são compostos de partículas da ordem de 10^{23} em quantidade). Sem mais, iniciemos.

No último estudo, analisamos uma propriedade do corpo chamada massa,

[1] Consideramos aqui as interações triviais, como colisões.

percebemos e quantificamos o que chamamos de “momento” e com isso pudemos expressar matematicamente nossa noção intuitiva de força. Essa análise define muito bem o comportamento de um corpo levando em consideração o aspecto temporal do movimento, até pelo fato de força ser a variação do momento pelo tempo.

No entanto, precisamos enxergar o movimento sobre um outro ponto de vista: o das distâncias. Existem situações físicas (e não são poucas) em que uma força pode variar pela distância. Um exemplo típico é uma mola. Quanto mais você estica (i.e, altera a distância da extremidade em relação a um ponto fixo), mais força ela faz para tentar “retornar” à condição inicial. Esta força nada tem a ver com o tempo, não importa o quanto eu demore em puxá-la. Uma análise dessa relação “força-distância” parece ser bem necessária, pois pode nos dizer algo sobre o comportamento das forças que o momento é incapaz de dizer.

Figura 2.1:

Suponha a situação da figura 2.1. Um bloco com velocidade inicial v_0 desliza sem qualquer resistência do solo. Eu sei bem que, se aplicar uma força F durante um intervalo de tempo Δt o bloco terá seu momento variado em $F.\Delta t$. Mas o que irá variar se eu aplicar uma força F durante uma distância Δs? Certamente posso usar equações horárias com o que já conheço de dinâmica e descobrir o quanto de momento varia, mas não é isso que quero. Quero saber o que varia se eu aplicar uma força F no deslocamento durante uma distância Δs, sendo que esse “algo” que varia dependa apenas das forças e da distância.

Intuitivamente, a força causa uma “ajuda” ou “dificuldade” ao movimento do bloco. Pensando apenas no caso da força ajudar o deslocamento (i.e., ser na mesma direção e sentido), quanto maior é a força, maior é a ajuda da força. De igual modo, quanto maior a distância percorrida pelo corpo enquanto a força é feita, maior é a ajuda. Se eu quisesse quantificar isso que estou chamando de ajuda, seria bem razoável expressar:

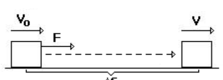

Figura 2.2:

$$ajuda = F \cdot \Delta s$$

O sistema fica, portanto, como na figura 2.2.

Escrever “ajuda” parece e é um grande abuso de linguagem, preciso dar um nome para isso. Bom, é necessário que uma força seja exercida em um corpo durante uma distância, então não parece nenhuma atitude gratuita à força essa ajuda. Vou chamá-la, portanto, de **trabalho** (W). Ele tem algo a ver com nosso conceito intuitivo de trabalho. Digamos que essa força aplicada seja um empurrão de meu dedo. Em um estranho nível, é um trabalho que eu faço. Nestes termos, trabalho, como quero definir, **é a “ajuda” ou “dificuldade” que uma força causa em um determinado deslocamento**.

Neste momento o leitor certamente olhará com ressalvas essa definição de algo estranho chamado “trabalho”. Por que eu definiria algo como essa ajuda? No que isto me facilita na compreensão do mundo? Muitas vezes, a definição de determinado conceito parece estranha até que seu potencial seja realizado, ou seja, até que todas as suas aplicações tenham sido explicadas. A utilidade de uma definição depende do quanto ela facilita minha compreensão do mundo. Se ela nada faz, é inútil e sequer precisava ser feita. Definir um número ξ como o número de cadeiras de uma sala multiplicado pelo número de janelas é algo interessante, mas inútil. No entanto, se algum dia algum arquiteto decidir usar essa relação estranha, para ele o número ξ será de grande utilidade.

Quanto à nossa ajuda, ou trabalho, temos um problema interessante. Força e distância são grandezas vetoriais, isto é, possuem direção e sentido. Se você deseja descrever seu movimento, não faz muito sentido dizer: “Andei dez quilômetros” sem contar para onde você foi. Esse trabalho, por sua vez, pode ser ou não algo vetorial. Acredito que não, explicarei por quê.

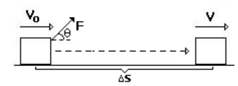

Figura 2.3:

Se entendo trabalho como “a ajuda que uma força faz durante um deslocamento”, qual destes dois casos, as figuras 2.2 e 2.3, a força parece ajudar mais?

Na segunda situação, com a força formando um ângulo θ com o deslocamento, posso fazer uma decomposição vetorial da força F (pela própria característica dos entes vetoriais) e pensar na parte de F que contribui na direção do deslocamento e na parte de F que não contribui. Antes de fazer qualquer conta, chego a uma conclusão estarrecedora. Se o trabalho é a ajuda (ou dificuldade) que uma força faz durante um deslocamento, qualquer força que não interfere no deslocamento não deve ser considerada. Isso faz sentido, porque uma força aplicada com $\theta = \frac{\pi}{2}$ não influencia em nada o deslocamento horizontal do corpo (desde que o bloquinho não comece a voar sob efeito da força). Como o único deslocamento que ele executa é horizontal, esta força não executa qualquer ajuda nele, ou seja, ela não realiza trabalho. Com isso, podemos ampliar a definição matemática de trabalho como:

$$W = F \cdot \Delta s \cdot \cos\theta$$

Onde θ é o ângulo entre a força e o deslocamento. Note que, para forças constantes na direção do deslocamento (caso mais comum), podemos dizer tranquilamente que $W = F \cdot \Delta s$. Com essa definição consigo perceber que se aplicar uma força F em um deslocamento de A até B realiza um trabalho W, então aplicar uma força F em um deslocamento de B até A realiza um trabalho $-W$. É uma conseqüência interessante que será útil.

Quanto ao trabalho ser vetorial ou não, acredito que a conclusão acima esclarece o problema. O deslocamento é como uma linha no espaço, possui apenas dois sentidos; isto é, “para frente” e “para trás”. Claro que é possível andar em mais que uma direção, mas andamos sempre em linha reta, de forma que nosso deslocamento é sempre uma “linha” que liga o ponto de onde saímos para onde chegamos. Dessa forma, o trabalho ou ajuda (é positivo), ou atrapalha (é negativo). Não faz sentido, neste contexto, pensar em “trabalho para a direita”, porque ou o trabalho é na direção do deslocamento ou é contra (afinal, ele só leva em conta a componente da força que atua no sentido do deslocamento).

E o trabalho interfere na velocidade. Interfere quanto? Eu posso calcular o trabalho em termos de velocidade? Posso tentar. Preciso de uma equação que use distância, força e velocidade, mas que não use tempo (não quero envolvê-lo nisso, ele já tem problemas demais no cálculo de momento). Posso partir da cinemática unidimensional, pensando na função horária do espaço e da velocidade:

$$S = S_0 + v_0 t + \frac{a}{2} t^2$$
$$v = v_0 + at$$

Isolando o tempo em ambas as equações e substituindo uma em outra, obtemos que a expressão que é chamada (você provavelmente já a conhecia, por isso omiti a demonstração completa) de equação de Torricelli.

$$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta s$$

Ela parece ser a equação que tanto quero, pois envolve os elementos que preciso e não envolve tempo. Mas quero saber a relação entre trabalho e velocidade. Devo, portanto, manipular a equação de forma que nela apareça o elemento "trabalho" e então ver como ele se modifica a velocidade. Farei o seguinte: deixarei de um lado apenas a aceleração e a variação do espaço, pois, dessa forma, basta que eu multiplique este termo pela massa para que ele se torne o trabalho. O que resultar do outro lado da equação dará o efeito do trabalho na velocidade, veja:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta s$$
$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} = a\Delta s$$
$$m\frac{v^2 - v_0^2}{2} = ma\Delta s$$

Como, para massa constante, $F = m \cdot a$ (2^{a} lei de Newton):

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = F\Delta s$$

Cheguei onde eu queria! O trabalho, quantificada como a força vezes a distância (note que, neste caso, como estas equações são para movimento unidimensional, a força tem necessariamente a mesma direção do deslocamento), tem uma influência na velocidade que segue essa fórmula estranha. Mas repare bem neste primeiro termo, ele parece ser a taxa de variação de alguma coisa... Do que exatamente? Não sei bem, mas essa expressão estranha, $\frac{1}{2}mv^2$, aparece duas vezes na equação e esse valor varia. Vale a pena definir uma função de v com essa cara. Chamarei esta função de $T(v)$:

$$T(v) = \frac{mv^2}{2}$$

Assim sendo:

$$T(v) - T(v_0) = W$$

Sendo T dependente apenas de v, sendo v a velocidade final e v_0 a velocidade final, é correto dizer que, se $v - v_0 = \Delta v$ é a variação de velocidade do sistema, então $T(v) - T(v_0) = \Delta T$ é a variação de T do sistema no mesmo percurso (vamos desconsiderar velocidade negativas aqui, só por um momento). É visível e até bonito que o trabalho efetuado por uma força não faça a velocidade variar diretamente, mas faça um valor "T" função da velocidade variar. Essa "ajuda" que definimos provoca, portanto, a variação de uma grandeza T calculada a partir da velocidade. Eu não sei o que é T, mas posso tentar descobrir. Uma fórmula que podemos tirar disso tudo é que:

$$T_0 + W = T$$

Onde T_0 é o T inicial e T é o T final. Essa é uma fórmula bem interessante para nos ajudar a interpretar a relação entre forças e distâncias.

Se chegamos a essas conclusão e definições, vamos aplicar ao que interessa: forças que dependem da distância. Falaremos de um tipo bem particular delas: as forças restauradoras.

Força restauradora é toda aquela que "puxa" um corpo a um ponto fixo no espaço, conhecido como "ponto de equilíbrio". O melhor exemplo em que consigo pensar é a mola, como na figura 2.4.

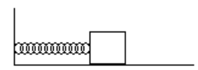

Figura 2.4:

Supondo que a mola esteja bonita e parada nessa posição, ao puxar o bloco a uma distância x deste ponto, a mola fará uma força no sentido contrário ao puxão, como se quisesse que o corpo voltasse a esse estado. Se ao invés de puxar eu empurrar o bloco, também uma distância x, a mola fará uma força no outro sentido, expandindo-se, como se quisesse voltar à posição original.

A mola possui uma propriedade interessante conhecida como Lei de Hooke: a força da mola é diretamente proporcional à distância x deslocada. Em termos simples: $F = k \cdot x$, onde k é uma constante de proporcionalidade que varia pela mola. Essa lei é uma aproximação descoberta de forma empírica e demonstrada muito depois, quando entenderam o comportamento dos átomos da mola e perceberam que a lei é uma aproximação linear de algo bem mais complicado. Não iremos atrás da demonstração dessa aproximação, mas esta existe e eu já vi. Se fosse uma lei nada intuitiva, sua prova seria necessária, mas acredito que vocês entendem e aceitam essa lei muito bem, ela parece ser bem evidente.

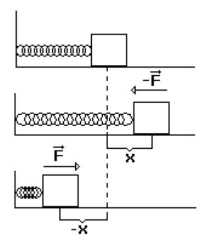

Figura 2.5:

No caso da figura 2.5, o trabalho que faço é o empurrão ou puxão no bloco. Mas nas três cenas do episódio a velocidade é nula. Eu sei que houve trabalho, equivalente a $F \cdot x$. Tenho um problema aqui, a força varia pela distância. Nestes casos, não posso multiplicar o valor máximo da força pelo valor máximo da distância, isso seria o equivalente a dizer que a força é constante, quando não é. Minha idéia é a seguinte. Vamos somar o trabalho dado ao bloco em cada intervalo bem pequeno Δx. Quando digo pequeno, digo muito pequeno mesmo, tendendo a zero. A idéia é fazer calcular essa parcela minúscula de trabalho efetuada em cada pequeno deslocamento Δx e depois somá-los para obter o trabalho total realizado. Resumindo, preciso fazer essa conta:

$$\sum \lim_{\Delta x \to 0} F(x) \Delta x$$

Essa estrutura é muito semelhante ao de uma integral. De fato, podemos definir trabalho, em sua forma mais genérica, como:

$$\int_{x_i}^{x_f} F(x)\, dx$$

Onde x_i e x_f são os extremos do deslocamento em que desejo que o trabalho seja calculado. Essa nova definição engloba nossa anterior, a $W = F \cdot \Delta s \cdot \cos\theta$ e a amplia, calculando o trabalho para forças que variam. Você também pode perceber que essa definição cobre apenas casos unidimensionais, para aqueles em que a força tem uma direção que muda conforme o deslocamento, são necessárias integrais de linha para a solução. Mas voltemos ao nosso caso da mola. Nele, o trabalho que faço é dado pela expressão acima. Como $F = k \cdot x$, podemos substituir e calcular o trabalho realizado pela força do "puxão" desde o ponto de equilíbrio, 0, até o ponto de distensão máximo da mola, x:

$$W_{0\to x} = \int_0^x F(x')\,dx' = \int_0^x kx'\,dx' = \frac{kx^2}{2}$$

É uma conclusão interessante, mas problemática! Aquela relação que eu tinha descoberto acima: $T_0 + W = T$, não é mais válida, porque, apesar de ter trabalho realizado, o corpo não ganhou velocidade e, com isso, não ganhou T! Como posso explicar isso?

Olhando o sistema na posição inicial de equilíbrio e na posição de estiramento máximo, após a aplicação da força, posso perceber algo. O trabalho realizado pela força de meu puxão não causou qualquer aumento de velocidade (claro que, enquanto a mola era esticada, ela ganhou velocidade, do contrário não teria se movido, mas estou considerando apenas o instante final e inicial). O que ele causou? Ele é responsável pelo estiramento da mola! Mas é responsável em quanto? Repare, vou considerar o processo descrito na figura 2.6.

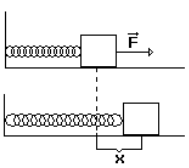

Figura 2.6:

Uma força F é aplicada suavemente sobre o corpo até que a força de resistência da mola se iguale a esta, causando no corpo um estado de equilíbrio estático. Considere dois valores de estiramento intermediários entre 0 e x. Chamemos de x_A e x_B estes valores. Qual o trabalho realizado para levar o corpo de x_A para x_B? A resposta é a soma de todos os trabalhos intermediários realizados entre esses dois valores. Podemos então calcular:

$$W_{x_A\to x_B} = \int_{x_A}^{x_B} F(x)\,dx = \int_{x_A}^{x_B} kx\,dx = \frac{kx_B^2}{2} - \frac{kx_A^2}{2}$$

Um fato curioso e interessante: o trabalho parece ser a taxa de variação de uma grandeza estranha que depende da distensão da mola. Vamos definir a seguinte função:

$$U(x) = \frac{k \cdot x^2}{2}$$

Com essa definição nova, podemos entender que, no trajeto considerado acima:

$$W_{x_A\to x_B} = U(x_B) - U(x_A)$$

É visível e até bonito que o trabalho efetuado por uma força não faça a distensão variar diretamente, mas faça um valor "U" função da distensão variar. Essa "ajuda" que definimos é, portanto, a variação de uma grandeza U calculada a partir da distensão da mola. Eu não sei o que é U, mas, pelo fato da frase anterior ser muito parecida àquela usada na grandeza T, percebo que U e T devem ter algo em comum, ou sofrerem de uma coincidência tenebrosa digna de desconfiança. E qual é a relação entre T e U?

Para entendê-la, preciso pensar no que acontece após puxar a mola e soltar assim que sua distensão atinge x, como na figura 2.7

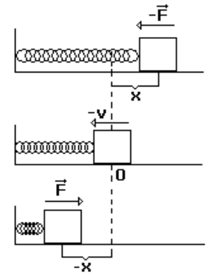

Figura 2.7:

Note que, quando a distensão é x, não há velocidade. Quando a distensão é 0, o corpo atinge sua velocidade de maior módulo (v). Isso é simples de observar pelo fato do corpo, ao cruzar o 0 da distensão, sofrer uma aceleração contrária ao sentido de sua velocidade e, com isso, ter o módulo de sua velocidade reduzido.

Mas repare em algo interessante. A partir do instante em que eu solto o corpo, a mola passa a efetuar um trabalho sobre o deslocamento do corpo! É um trabalho realizado pela mola, não mais exercido sobre ela (como era o caso do puxão). E esse trabalho influencia na velocidade, afinal, pela nossa definição inicial, a mola está "ajudando" o corpo a se mover. Esse trabalho pode ser calculado como a variação de T do estiramento máximo (x) à posição de equilíbrio (0):

$$W_{x\to 0} = T(v(0)) - T(v(x)) = \frac{mv^2}{2} - \frac{m0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

Sendo v a velocidade com que o corpo chega ao centro da mola, ou seja, quando $x = 0$. Eu não sei v, mas sei a relação de v com o trabalho efetuado pela mola enquanto o corpo chegava ao centro.

Por outro lado, sei calcular o trabalho em função não de v, mas de x. Oras, se trabalho é a integral de $F(x)dx$ e possui duas formas de cálculo, através em função da velocidade e da posição, essas formas devem coincidir. Mas de que forma elas coincidem? Note a igualdade:

$$W_{x\to 0} = T(v(0)) - T(v(x)) = \frac{mv^2}{2} - \frac{m0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}$$

$$W_{x\to 0} = U(0) - U(x) = \frac{k0^2}{2} - \frac{kx^2}{2} = -\frac{kx^2}{2}$$

Dessa forma, obviamente:

$$\frac{mv^2}{2} = -\frac{kx^2}{2}$$

Se ao invés do trajeto $x \to 0$ optarmos por um intervalo qualquer: $x_A \to x_B$, a relação se tornaria:

$$\frac{mv_B^2}{2} - \frac{mv_A^2}{2} = -\left(\frac{kx_B^2}{2} - \frac{kx_A^2}{2}\right)$$

O que, pelas nossas definições, seria:

$$T_B - T_A = -(U_B - U_A)$$

Que pode ser reescrito como:

$$\Delta T = -\Delta U$$

Como o intervalo entre x_A e x_B é tão pequeno quanto eu quiser, posso assumir que $x_B = \lim_{\Delta x \to 0}(x_A + \Delta x)$. Dessa forma, $\Delta T = dT$ e $\Delta U = dU$, ou seja, suas variações são diferenciais. Dessa forma:

$$dT = -dU$$

$$dT + dU = 0$$

Isso é interessante, pois, se integrarmos ambos os lados da equação:

$$\int dT + \int dU = \int 0$$

$$T(v(x)) + U(x) = K$$

Onde K é uma constante, e isso é realmente fascinante. Essa equação nos diz que, se, em qualquer momento do processo da mola, fizermos uma determinada conta com a posição: $\frac{1}{2}mv^2$ e somarmos com uma outra operação feita com a velocidade: $\frac{1}{2}mv^2$, teremos o exato mesmo número! E quanto maior esse número, mais longe a mola irá no deslocamento máximo (pois terá maior U quando $T = 0$ e, consequentemente, maior x) e mais rápido passará pelo centro (por motivos análogos).

Eis quando todas as definições anteriores começam a fazer mais sentido. A utilidade da conclusão acima é assustadora, pois tenho um método incrivelmente simples de, sabendo a posição, descobrir a velocidade de um sistema complicado que é a mola. Essa relação, na realidade, pode ser exemplificada com uma metáfora agradável.

Imagine duas pilhas de moedas, com alturas diferentes. Uma delas você chamará, digamos... de T. A outra você chamará de U. Você pode arranjar as colunas com quantas moedas quiser, mas lembre-se, você tem apenas as moedas das duas pilhas. A única operação possível é, portanto, transferir moedas de uma pilha para outra. E eu posso tirar uma lei genial desse processo: a quantidade de moedas que uma pilha ganha é o mesmo que a outra perde. Mas suponha que eu não admita que perdas existem, sou muito otimista. Para mim, uma perda é apenas um ganho negativo. Minha nova lei será que a quantidade de moedas que uma pilha ganha que o negativo do que a outra ganha, sempre. ' Mas eu não sei o que são as moedas de minha metáfora, isto é, o que exatamente é T e U em minhas deduções. Esse é o menor dos males, pois meu problema, dessa vez, é o contrário daquele que tive ao definir força. Quando queria definir o que era força, eu sabia o que era e não sabia quantificar. Desta vez a quantificação é precisa e útil, eu apenas não sei o que é. Mas "saber o que é" é algo muito relativo, como sabemos o que "algo é"? Alguns podem falar que sabemos o que "algo é" quando somos capazes de dar um nome a esse algo que o caracterize, gosto desse pensamento e vou usá-lo. Que nomes eu poderia dar a T e U?

Em um raciocínio rápido, quanto maior a massa e a velocidade, maior o T. Então objetos grandes e rápidos possuem muito T, isto indica que o movimento deles poderia ser considerado "maior" (intuitivamente falando) que o de um objeto mais leve e devagar. Quanto maior o U, mais T ele pode vir a ter. Ou seja, se um objeto tem muito U, ele tem potencial para ter muito T e, consequentemente, ficar muito rápido.

Para evitar pegar casos como quando a mola está esticada ao máximo e o corpo está parado, vou pensar logo na soma de T e U para pensar em corpos com "mais" ou "menos" movimento. Se $T + U$ de um corpo é maior que o de outro, supondo massas iguais, ou ele está mais rápido ou possui potencial para vir a ser. Como na pilha de moedas, acredito que T e U sejam a manifestação de uma mesma coisa que muda de forma, as moedas, pois eles se comportam matematicamente como se fossem (são grandezas físicas possíveis de serem somadas, algo apenas permitido a grandezas que representam a mesma coisa; afinal, só é possível somar metro com metro e segundo com segundo, jamais metro com segundo).

A essa moeda a física dá o nome de energia. T é chamada energia de movimento de um corpo, ou energia cinética. U é chamada energia potencial do corpo. A mola é um sistema fascinante que troca constantemente a energia cinética do corpo por potencial e vice e versa. Mas por que o nome energia? Ele se encaixa perfeitamente, pois, no grego, energia quer dizer "operação", "efeito" ou "ação", o que condiz com nossa intuição. Quem não possui energia não faz nada, isto é, não se move ($T = 0$) nem pode se mover ($U = 0$).

E é claro que essa definição não é algo artificial, como o número ξ, que representa o produto das cadeiras pelas mesas de uma sala, inventado no capítulo anterior. Ao olhar para uma mola oscilando, é irresistível o pensamento de que algo nesse processo está se conservando, algo se mantém, pois não importa quantas vezes ela oscile. Com essas idéias em mente, é possível, acredito, com certa abstração, enxergar essa propriedade física que ora aparece na velocidade do corpo, ora no esticamento. Ela não é tão latente quanto o comprimento ou a massa, mas está lá.

Se a energia é a pilha de moedas, o trabalho é a transferência de uma para outra. A energia muda de faces constantemente e sua "moeda de troca" é o trabalho. Um trabalho realizado não é nada mais que converter a energia em outro aspecto, outro formato. Em alguns casos, essa transformação não é reversível e a energia não é recuperável, são as chamadas "forças não-conservativas". Este estudo já ocupou linhas demais, de forma que a demonstração do segundo tipo de energia potencial mecânica, a gravitacional, igualmente conservativa, não poderá ser mostrada com detalhes matemáticos, apenas comentada.

Digo apenas que, nas proximidades da terra, pode-se considerar U também como a expressão: $m \cdot g \cdot h$, onde m é a massa do corpo, g a aceleração da gravidade e h a altura do corpo (isto decorre diretamente do Torricelli). Como uma mola, uma bolinha de borracha pingando no chão evidencia essa conservação bela da soma $T + U$. No alto, a bolinha tem U máximo e, claro, T mínimo. Na iminência do choque, seu T está em seu valor máximo e o U assume seu mínimo.

Se todo trabalho é a conversão de energia de um tipo em outra, então toda força acontece por isso. E isso é um fenômeno muito belo: há apenas força atuando quando há energia trocando de forma. Se pudéssemos obter todas as fórmulas para todos os tipos de energia (como o T e o U para a elástica), sua soma seria uma constante universal. E o trabalho, essa ajuda estranha, não passa de energia sendo convertida para ser dada ao sistema, ou energia retirada deste, quando o trabalho é uma dificuldade.

Uma analogia que aprecio muito é a de Richard Feynman, retirada e adaptada de *The Feynman Lectures on Physics Vol I* (páginas 4-1;4-2), livro cuja leitura recomendo fortemente:

"Imagine uma criança, digamos Denis, o pimentinha, que tem blocos absolutamente indestrutíveis e que não podem ser divididos em partes menores. Todos os blocos são iguais. Vamos supor que ele tenha 28 blocos. Sua mãe o coloca com seus 28 blocos em seu quarto no início do dia. Ao final do dia, curiosa, ela conta os blocos cuidadosamente e descobre uma lei extraordinária: não importa o que ele faça com os blocos, há sempre 28! Isso continua por vários dias, até que em um deles ela conta apenas 27 blocos. Mas um pouco de investigação revela que há um embaixo do tapete – ela precisa olhar em todos os lugares para ter certeza de que o número de blocos continua o mesmo. Um dia, no entanto, o número parece mudar – há apenas 26 blocos. Uma investigação cuidadosa revela que a janela estava aberta e, olhando para fora, os dois blocos são encontrados. Em outro dia, uma contagem cuidadosa revela 30 blocos! Isso causa um desconforto considerável, até que ela percebe que Bruce veio visitar seu filho e, trazendo seus blocos com ele, deixou alguns no quarto de Denis.

Após ela ter retirado os blocos extras, fechado as janelas e impedido a entrada de Bruce, tudo estava indo bem, até que um dia ela encontra apenas 25 blocos. No entanto, há uma caixa no quarto. A mãe chega perto dela para abri-la e o garoto diz: "Não, não abra minha caixa de brinquedos!", grita e chora. A mãe não pode abrir a caixa. Sendo extremamente curiosa, e um tanto ingênua, ela cria um plano. Ela sabe que o bloco pesa três quilos, então ela pesa a caixa quando vê os 28 blocos e descobre que é de 16 quilos. Então da próxima vez que ela quiser checar, ela pesa a caixa novamente, subtrai 16 quilos e divide por três. Ela descobre o seguinte:

$$\binom{\text{Número de}}{\text{blocos vistos}} + \frac{(\text{Peso da Caixa}) - 16}{3} = constante$$

Então aparecem novas variações, mas um estudo cuidadoso indica que a altura da água suja da banheira está mudando. A criança está jogando blocos na água, mas a mãe não pode ver porque ela está muito suja. Mas ela pode descobrir quantos blocos tem na água adicionando um novo termo em sua fórmula. Já que a altura original da água é meio metro e que cada bloco faz a água subir cinco centímetros, a nova fórmula será:

$$\binom{\text{Número de}}{\text{blocos vistos}} + \frac{(\text{Peso da Caixa}) - 16}{3} + \frac{(\text{Altura da Água}) - 50}{5} = constante$$

Conforme seu mundo cresce em complexidade, a mãe encontrará uma série de termos para representar meios de calcular quantos blocos estão em lugares em que ela não pode olhar. Como resultado, ela encontrará uma fórmula complexa, uma quantidade que deve ser computada e que se mantém.

Qual é a analogia com conservação de energia? O aspecto mais marcante que deve ser abstraído da metáfora é que *não há blocos*. Tire o primeiro termo das duas equações acima e você se encontrará calculando coisas mais ou menos abstratas. A analogia tem os seguintes pontos: Primeiro, quando estamos calculando energia, algumas vezes um pouco dela sai do sistema e vai-se embora, outras vezes ela entra no sistema vinda de fora. Para verificar a conservação de energia, devemos ser cuidadosos para não esquecer de computar nenhuma. Segundo, a energia tem um grande número de formas diferentes, e há uma fórmula para cada tipo. Essas são: energia gravitacional, energia cinética, energia térmica, energia elástica, energia elétrica, energia química, energia radiante, energia nuclear e energia de massa. Se somarmos todas as fórmulas e computarmos a contribuição de cada uma, o resultado não mudaria exceto se energia entrasse ou saísse.

O importante é perceber que na física atual não temos conhecimento do que é energia. Não temos uma imagem de que energia vem em pequenas massas amorfas, como "glóbulos" de energia. Não é desse modo. No entanto, há fórmulas para se calcular uma quantidade numérica, e quando adicionamos todas elas, o resutado é "28" — sempre o mesmo número. É algo abstrato que não nos diz os mecanismos ou as razões para as varias fórmulas [...]"

A analogia de Feynman é sublime e completa a imagem que queria passar sobre energia. Não precisamos ver algo para calcular, tampouco saber sua forma, se é que tem alguma. A idéia fundamental é entender por que é interessante pensar dessa maneira, por que chamar isso de energia e por que as energias estudadas aqui têm essas fórmulas curiosas. As demais energias têm fórmulas diferentes, algumas sequer são bem definidas. A energia vibratória produzida pela batida de uma baqueta em um tambor é na verdade uma conversão da energia cinética da baqueta. Esta última possui fórmula, mas a energia vribratória não é igualmente simples. É muito complicado estabelecer uma função para ela, tanto como para outras em muitas outras situações.

Essas conclusões ampliam ainda mais nossa visão de mundo. Fico triste em resumir tantos assuntos interessantes nestes últimos parágrafos, mas você certamente os verá com detalhes. Na realidade, a grande maior parte deste texto você provavelmente já sabia. A idéia dele não era apresentar algo novo, nunca foi. Mas apresentar uma maneira nova de ver um assunto velho, como um vestido novo e diferente para uma mesma senhora. Minha intenção foi, além de sintetizar minhas idéias sobre o assunto de forma coerente, esclarecer a origem das expressões físicas tão utilizadas e seus nomes.

Espero, com isso, que aquela idéia de "Trabalho é a integral da força pela distância" ou "Força é a derivada do momento pelo tempo" tenha deixado esse ar dogmático e assumido um caráter mais humano. Não gosto destas definições puramente matemáticas, pois não acredito verdadeiramente que força SEJA aquela derivada. Acredito que os números carecem de poder de definição de coisas físicas, ninguém pode definir algo real como um número. O espaço interior de uma caixa retangular pode ser quantificado pelo produto de suas arestas:

seu volume; mas não se pode dizer que esse espaço SEJA este produto. Ainda porque, não deve ser fácil guardar sapatos no produto de três arestas.

3

Dinâmica das Rotações

Nos capítulos anteriores, estudamos os aspectos mais importantes do movimento dos corpos: as noções de força, momento, trabalho e energia. Discutimos levemente sobre aspectos vetoriais dessas grandezas, mas não é objetivo deste breve estudo uma discussão profunda sobre o aspecto matemático de vetores. Dessa forma, irei supor que você sabe as operações fundamentais com vetores: soma, produto escalar e vetorial.

Como a força é uma grandeza vetorial, ela possui propriedades como as de um vetor. Entre elas está a que diz que quando duas forças iguais em módulo e em sentidos opostos são aplicadas em um corpo, este não se move. E isso é verdade com os bloquinhos que estudamos. Quem teve na infância o privilégio de brincar de cabo-de-guerra aceita tranquilamente esta lei. No entanto, ela é realmente verdadeira? De acordo com nossos estudos anteriores, ela não apenas é verdadeira como uma exigência fundamental do PUE. Façamos então o seguinte exercício mental: imagine uma barra presa em um eixo, como é vista de cima na figura 3.1.

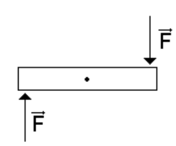

Figura 3.1:

Nela estão sendo aplicadas duas forças de igual módulo e em sentidos opostos. Nossa lei diz que ela não se moverá, mas ela se move. Ela gira cada vez mais rápido caso as forças continuem a ser aplicadas nas pontas e em sentidos opostos. Nossa lei parece estar furada, já que ela não cobre um caso tão simples quanto uma barra que gira. Eis um conceito que omitimos no estudo com bloquinhos: a capacidade de girar. Não consideramos em nenhum momento a possibilidade do bloquinho capotar enquanto uma força era aplicada, foi exatamente por isso que os escolhemos quadrado. Se trabalhássemos com uma esfera, as coisas não seriam tão simples.

E como funciona a dinâmica das rotações? Precisamos primeiro pensar em rotações de nosso cotidiano para pensar em quais definições podem nos guiar em resultados que sejam uma boa representação da realidade. Uma rotação muito cotidiana é a da porta. Portas giram, por isso abrem e fecham. Seu eixo é fixo na parede, de forma que cada lasca de madeira que está mais distante do eixo gira um raio maior. Um fenômeno interessante é que é muito mais difícil abrir a porta se empurramos perto do eixo. Empurrar a porta na ponta suaviza

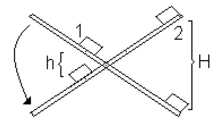

Figura 3.2:

consideravelmente sua abertura. Esse fenômeno não é anômalo, na verdade ele é uma consequência da conservação de energia. Para ilustrar isso, imagine uma gangorra que desce com dois pesos, como na figura 3.2.

O bloco 1, mais perto do eixo, desce uma altura h, enquanto o bloco 2 desce uma altura maior, H. A pergunta é: qual deve ser a massa do bloco 1 para que ele possa erguer o bloco 2? Se eu disser que eles devem ter a mesma massa, estarei cometendo um erro. Já provei, com a barra que gira, que não posso confiar em forças para falar de rotações. Isso acontece porque forças são vetoriais e vetores perdem um pouco o sentido quando as coisas começam a rodar. Preciso de algo confiável, vou usar a energia. Ela não é vetorial, então não depende se o sistema está rodando, saltitando ou parado. Eu sei que a energia do sistema deve se conservar. Como comentei no capítulo anterior, ainda que brevemente, a energia potencial gravitacional nas proximidades da terra é dada por $U = m \cdot g \cdot h$. Ela deve se conservar nesse sistema. Visivelmente, o bloco 1 perde energia potencial e o bloco 2 ganha. Pela conservação de energia, o que 1 perde é exatamente a mesma quantia que 2 deve ganhar, assim:

$$m_1 \cdot g \cdot h = m_2 \cdot g \cdot H$$

Supondo que essa gangorra não seja alta o suficiente para alterar o valor de g, podemos cancelá-lo e obter a relação:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{H}{h}$$

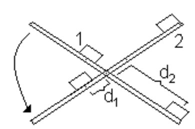

Figura 3.3:

Dessa forma, a massa de 1 deve ser tão maior que a massa de 2 quanto H é maior que h. No entanto, ao invés de pensar na altura (pois um sistema pode não girar verticalmente, mas horizontalmente), farei uma relação com a distância do bloco ao eixo. Por semelhança de triângulos, podemos ver que essa relação, ilustrada na figura 3.3:

$$m_1 \cdot d_1 = m_2 \cdot d_2$$

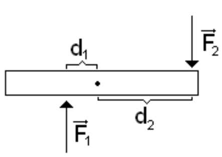

Figura 3.4:

E esse raciocínio pode ser estendido. Não pensarei apenas na massa, mas na força aplicada. Como demonstrado, a força peso que 1 faz deve ser maior que a força peso de 2 para que a gangorra desça. Dessa forma, em qualquer rotação, a força aplicada perto do eixo deve ser maior que uma força aplicada mais longe para que o sistema permaneça em equilíbrio, como ilustra a figura 3.4. Inspirada na relação das massas da gangorra, surge a relação, mais geral:

$$F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2$$

Isso é muito interessante. Força, como eu havia definido, é a interferência de um corpo em outro. Agora isso ganha um outro significado. para que eu possa medir a interferência sofrida pela barra, não basta apenas considerar a força, o local onde ela é aplicada também influencia. Isso sugere uma nova definição, uma espécie de "força de rotação" ou "giroforça"[1]. Essa grandeza é proporcional

[1]Créditos deste nome ao professor A. Piza, que o cunhou em uma de suas inesqueciveis aulas de Física I

à força e à distância do eixo em que ela é aplicada. Ela também precisa de um nome melhor que giroforça. Não que este seja ruim, eu inclusive o prefiro, mas não é este o adotado. Essa força de rotação é chamada **torque**(τ). Alguns estudantes a aprendem no ensino médio com o nome "momento de uma força", que não é bom, pois pode confundir com momento, estudado no capítulo 1. Dessa forma, o modo de calcular torque é dado por:

$$\tau = F \cdot d$$

Algumas considerações devem ser feitas sobre essa definição. A primeira é a letra usada. A física usa muitas vezes a letra t para designar suas grandezas: tempo, torque, energia cinética, temperatura, entre outras. Meu conselho é: arranje modos diferentes de escrever a letra t. Use minúscula, maiúscula, de mão, de forma, rebuscada, com uma pequena "moldura" no traço, enfim, seja criativo.

A segunda é a dimensão do torque. Em uma análise dimensional, ele é exatamente igual a uma energia, isto é, $\frac{Kg \cdot m^2}{s^2}$ no S.I. No entanto, ele **não** é uma energia e não pode ser somado com uma. A distância d da fórmula do torque e da do trabalho são grandezas totalmente diferentes. Uma delas é distância do eixo, outra é distância percorrida. Esse esclarecimento parece pedante, mas já vi muitos professores enrascados em explicar porque um não é outro e outro não é um.

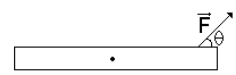

Figura 3.5:

No entanto, há um questionamento interessante que deve ser feito. E se a força não for exatamente na direção da rotação? E se, como na figura 3.5, a força for aplicada formando um ângulo θ com a barra? Dessa forma, é natural considerar apenas a componente da força que atua na direção da rotação, considerando, claro, que a outra componente é "disperdiçada" tentando mover a barra de seu centro, algo impossível em nossa barra ideal. Dessa forma, uma definição de torque mais abrangente seria:

$$\tau = F \cdot d \cdot sen\theta$$

Mas há uma outra pergunta a ser feita: o torque é uma grandeza vetorial? Faz sentido definir uma direção, um vetor, para essa grandeza? Para que uma grandeza se torne vetorial, basta que faça sentido a noção de "para onde" para ela. O torque satisfaz essa propriedade, pois uma rotação pode ser efetuada tanto no sentido horário como no anti-horário. Isso não é suficiente para defini-lo como vetorial, pois bastaria dizer que ele é positivo em uma direção e negativo em outra. No entanto, o torque, por razões mais complexas, exige um tratamento vetorial.

Imagine uma pequena esfera solta. Ao aplicarmos um torque horizontalmente, ela iniciará uma rotação muito parecida com a da terra. Se, durante essa rotação, for aplicado um novo torque, vertical, o movimento será outro. Uma nova rotação tomará forma, uma rotação **resultante**. Esse conceito sugere a possibilidade da soma de torques e de torques em sentidos diferentes, não somente um positivo e um negativo, mas efetivamente torques "apontando" para direções distintas. Com isso, é muito razoável definir torque como um vetor.

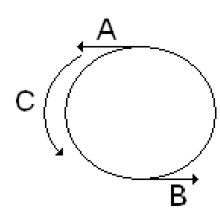

Figura 3.6:

E este vetor deve apontar para onde? A figura 3.6 ilustra minha indecisão em definir a direção e sentido do vetor torque. Não posso escolher a flecha C pois, ainda que ela seja a que melhor descreva a rotação, não é um vetor. Vetores, como nós conhecemos, são retos. O vetor A pode almejar ser o vetor que representa o torque, mas caso eu escolha ele, não poderia B reclamar justamente da preferência por A? Afinal, tanto A quanto B, ainda que apontados para sentidos diferentes, representam a rotação. Não posso escolher vetores diferentes para a mesma grandeza, preciso definir um único que deixa claro e inequívoco o sentido de rotação.

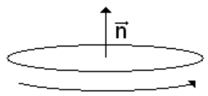

Figura 3.7:

Escolho, portanto, um vetor inesperado, mas que preencherá exatamente as condições que quero. Definirei a direção do vetor torque como perpendicular ao plano de rotação, exatamente como um vetor normal do plano de rotação (figura 3.7). Dessa forma, não haverá privilégios como havia entre A e B. Preciso apenas definir o sentido, se "para dentro" ou "para fora" do plano como eu vejo. Há uma operação matemática ideal para essa definição. Uma operação entre dois vetores que resulta em um outro vetor com a direção perpendicular ao plano formato por estes e cujo módulo é o produto dos módulos dos vetores que o formam pelo seno do ângulo entre eles, **exatamente** o valor que quero! Como produto vetorial envolve dois vetores, basta falar que a distância d do corpo até o eixo é o vetor $\vec{r}$, como ilustra a figura 3.8. Dessa forma, unindo as duas definições:

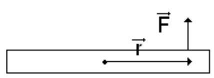

Figura 3.8:

$$||\vec{\tau}|| = ||\vec{F}|| \cdot ||\vec{r}|| \cdot sen\theta$$

$$\vec{\tau} // \vec{n}$$

Chegamos em:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Que é uma definição muito mais abrangente que a anterior e define totalmente o módulo, direção e sentido do torque. O produto vetorial é uma operação muito útil pois ele, além de sintetizar informação, define para mim a orientação do torque. Meu dilema de "para cima" ou "para baixo" fica resolvido com ele, já que a "regra da mão direita" (ou seja lá como você tenha aprendido isso) define para mim o sentido deste vetor.

A partir daqui, buscaremos inspiração na dinâmica dos bloquinhos estudada anteriormente para concluir mais verdades sobre a dinâmica das rotações. Na anterior, uma força gerava uma aceleração em uma relação que envolvia a massa, uma grandeza que expressa a dificuldade que um corpo apresenta de ter sua velocidade mudada. Há uma relação análoga para rotações? Se há, precisamos primeiro entender o que, nessa dinâmica nova, significam "aceleração" e "massa".

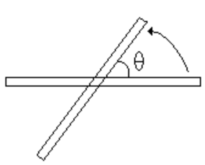

Figura 3.9:

Quando uma barra gira, nem todos os seus pontos giram com a mesma velocidade. As partes mais perto do eixo giram mais lentamente que as mais afastadas, o que dificulta uma boa definição de "aceleração" do sistema. mas há uma coisa em comum entre todos os pontos: eles giraram o mesmo ângulo. A figura 3.9 ilustra esse movimento.

A velocidade dos pontos pode ser diferente, mas a velocidade angular deles é a mesma. Dessa forma, a aceleração angular também é a mesma. Se desejo uma aceleração adequada para este movimento, a linear não é a melhor escolha, pois até seu aspecto vetorial pode atrapalhar-me. Mas afinal, a velocidade angular é vetorial? E o torque, também não seria? Um aspecto omitido no ensino médio, e muito interessante, é este: as grandezas angulares possuem características vetoriais. Estes vetores possuem a mesma direção do vetor normal ao plano de rotação, pelos mesmos motivos apresentados pelo torque para ser assim. Sendo ω a velocidade angular de rotação e α a aceleração angular, não é difícil demontrar que:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{\alpha} \times \vec{r}$$

Essas relações são facilmente extraidas através do mesmo modo pelo qual a relação do torque foi extraida: perceber que o módulo dos componentes angulares depende do produto dos módulos pelo cosseno e definir a direção como paralela à normal. Dessa forma, definimos completamente o que entendemos como "aceleração" em um sistema de rotações.

Possuímos um análogo para força e para aceleração no sistema de rotação. A pergunta é: há algum análogo para massa? Não faço idéia de como iniciar um raciocínio para obtê-lo, se é que existe. Partirei então do seguinte princípio: vou impor a existência de uma lei. A segunda lei de Newton, o princípio fundamental da dinâmica $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$, é uma lei fantástica que descreve muitos fenômenos no sistema linear. Vou então escrevê-la com seus análogos angulares e tentar, com isso, deduzir **quem teria que fazer papel de "massa angular" para que essa lei seja verdade**? Parece artificial essa técnica? Sim, de fato ela é um pouco. Mas todo artificio teórico possui a seguinte propriedade: é útil na medida em que funciona. Vou contar um caso que ilustra bem esse pensamento.

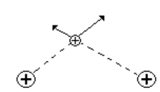

Figura 3.10:

Quando eu estava no ensino médio, aprendi as leis da eletroestática. Um dos problemas que me fascinou muito foi o de duas cargas puntiformes fixas e uma carga móvel, como na figura 3.10. Sempre muito curioso, pensei: "É possível criar o conceito de 'carga resultante'?". Se uma carga móvel sofre a influência de duas cargas fixas, é possível somar essas influências como uma soma de vetores. É possível escrever essa força eletrostática resultante como a influência de uma carga única, ao invés de duas, a uma dada distância?

A resposta é sim, adotadas algumas convenções. Decidi adotar a posição da carga resultante em um local que chamei "centro de carga", algo como uma média ponderada entre as cargas fixas. No entanto, a expressão que denotaria minha "carga resultante" revelou-se tão monstruosa que percebi que meu conceito não me ajudava em nada. Não me lembro exatamente como era a equação, mas sei que eram frações hediondas em um radical. Não que fórmulas físicas não possam ter esse formato, até podem, mas eu esperava que meu conceito facilitasse alguma coisa, o que não parecia estar acontecendo.

Todas essas reflexões não chegaram a lugar nenhum e não facilitaram em nada minha compreensão da realidade, abandonei minha bela idéia de carga resultante. Um conceito teórico, artificial e totalmente inútil, mas valeu a tentativa. Sempre somos apresentados a conceitos teóricos ou artifícios que facilitam e manobram nossas equações de forma bela e elegante. Dessa forma, um exemplo do oposto disso é, ainda que inútil para a física, uma das minhas favoritas abstrações que não deram em nada. É até possível que algum ramo da física use meu conceito de carga resultante, nem vou cobrar patente. Quem estiver interessado já terá problemas demais com aquela raiz.

Então a ideia é essa, buscarei uma "massa angular" tal que essa grandeza permita uma 2ª Lei de Newton para rotações. E como ficaria essa lei? Como temos o análogo da força e da aceleração, basta escrever:

$$\vec{\tau} = (\text{Massa Angular}) \cdot \vec{\alpha}$$

Como sei que $\vec{\alpha}$ e $\vec{\tau}$ devem possuir o mesmo sentido, nada mais razoável que concluir que a "massa angular" será um escalar. Se é um escalar, sua determinação é mais fácil que de um vetor, pois a parte de direção e sentido são irrelevantes. Usando essa "2ª Lei das Rotações", posso fazer um processo trivial para obter a "massa angular", vou passar $\vec{\alpha}$ divindindo e assumir o valor que quero como o quociente entre $\vec{\tau}$ e $\vec{\alpha}$.

Mas sendo eles vetores, como é possível haver um quociente entre eles? Entre as operações que conheço entre vetores, divisão não é uma delas. Mas não preciso me preocupar, pois essa "massa angular" é uma constante de proporcionalidade entre vetores. Ela é também, portanto, a constante de proporcionalidade entre seus módulos. Dessa forma, posso dizer que:

$$\text{Massa Angular} = \frac{||\vec{\tau}||}{||\vec{\alpha}||} = \frac{||\vec{F}|| \cdot ||\vec{r}|| \cdot sen\theta}{\frac{||\vec{a}||}{||\vec{r}||} \cdot sen\theta} = m \cdot ||\vec{r}||^2$$

Repare que essa minha "massa angular" possui uma explicação física! Ela depende tanto da massa do corpo (corpos com mais massa são mais difíceis de girar) como da distância da massa ao eixo de rotação! O nome que damos a essa "massa angular" é **Momento de Inércia** (I), ou seja, a dificuldade que um corpo tem a ter sua velocidade angular mudada. Esse conceito, no entanto, está confuso. Para chegar nesta fórmula, fiz uma suposição: "O $\vec{r}$ do torque é o mesmo $\vec{r}$ da aceleração angular". Em outras palavras, eu supus que toda o sistema que gira está concentrado no ponto onde a força $\vec{F}$ age, como uma bola presa em um barbante rodando sobre a mesa. Isso, obviamente, não é necessariamente verdade. Para entender o conceito exatamente, é preciso desenvolver a fórmula do momento de inércia até o fim.

Para isso, irei supor uma aceleração aplicada em um pedaço muito pequeno da barra, tão pequeno quanto eu quiser. Vou fazer por um simples motivo: se os pequenos pedaços da barra possuem um $\vec{r}$ diferente, possuirão momentos de inércia diferentes. Minha idéia é a seguinte: eu calculo o I de cada pequeno pedaço e depois somo todos, para entender como a barra funciona. A vantagem disso é que não posso tratar a barra com a fórmula deduzida acima para achar seu I, mas posso tratar cada pequeno pedaço seu dessa forma. Uma barra, em uma abstração estranha, é um grande conjunto de pequenas bolas presas por barbantes no eixo de rotação. Dessa forma, vamos chamar a massa desse pequeno pedaço de Δm_i. A distância do pequeno pedaço até o centro é $\vec{r_i}$. Assim, o momento de inércia de cada pequeno pedaço será chamado ΔI_i, cuja fórmula é dada por:

$$\Delta I_i = \Delta m_i \cdot ||\vec{r_i}||^2$$

Para compreender o momento de inércia de toda a barra, devo somar os ΔI_i de cada pequena parte sua. Confesso que isso exige uma suposição: o momento de inércia é aditivo. Ela é uma suposição razoável, pois a dificuldade de se girar um corpo aumenta quando eu agrego mais corpos a ele. Lógico que pensar se o momento de inércia resultante é exatamente a soma dos momentos de inércia de cada parte é uma dúvida muito razoável. A idéia do I ser aditivo fica mais clara quando se tem em mente que mover a barra é mover cada uma de suas partes. Não faria sentido dizer que a dificuldade de girar um grupo de partículas muda quando eu as considero individualmente ou coletivamente. A barra não é nada mais que um agregado de suas partículas, faz sentido somar a dificuldade em girar cada uma de suas partes para formar a dificuldade em girar o corpo todo.

Dessa forma, o I total da barra, ou de qualquer corpo, é dado por:

$$\sum \lim_{\Delta m \to 0} \Delta m \cdot ||\vec{r}||^2$$

Que se assemelha à estrutura de uma integral:

$$\int ||\vec{r}||^2 \, dm$$

Essa integral, no entanto, é muito estranha. Quais são seus limites de integração? É razoável acreditar que $\vec{r}$ seja uma função de m? Não está no alcance desse breve estudo a resolução de integrais de momento de inércia, que são verdadeiros desafios do cálculo integral. Vou, entretando, dar uma dica de como sua resolução é possível. Ao invés de dm, a solução do problema fica mais clara quando o substituímos por $\rho \cdot dV$, onde ρ é a função densidade do material e dV um diferencial de volume.

O diferencial de volume dV pode ser entendido como o volume de um pequeno paralelepipedo. Sendo o volume desse sólido o produto de suas arestas e sendo cada paralela a um eixo, podemos dizer que $dV = dx \cdot dy \cdot dz$. Como colocamos o volume em coordenadas cartesianas, coloquemos o $||\vec{r}||$ também, sendo $||\vec{r}||^2 = (x^2 + y^2 + z^2)$. Isso tudo foi feito para que a integral fique... digamos... resolvível. Parece uma complicação estranha, mas é necessária. Eu não espero que você saiba resolver esta integral sem a disciplina Cálculo Integral, geralmente dada em seu terceiro semestre de cálculo. Estou apenas mostrando como é a cara da solução e como ela faz sentido.

Dessa forma, a integral é substituída por outra, do seguinte formato:

$$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \cdot \rho(x, y, z) \, dxdydz$$

Eu paro aqui na discussão sobre cálculo de momento de inércia. Acredito até já ter ido um pouco longe para um texto sem pretensões calculistas. Mostrei essa forma da solução apenas para apontar um fator curioso: o único dado que você precisa saber para encontrar o momento de inércia de um corpo é a sua distribuição de massa, isto é, sua densidade ponto a ponto. Sabendo isso, o resto é somente resolver a integral. Claro que, quando digo "somente", não digo que será fácil ou trivial. Na verdade, para concluir o serviço você deverá engalfinhar-se com essa integral durante uns bons minutos. Boa sorte aos que tentam, parabéns aos que conseguem.

Para obtermos a expressão do momento de inércia, buscávamos um representante angular da massa. Precisamos agora ver se esse representante faz sentido, ou se é uma abstração teórica que força articialmente a 2ª Lei de Newton a valer para rotações e não me diz nada sobre a realidade. O momento de inércia, se expressa a dificuldade que um corpo apresenta a ser gerado, deve demonstrar isso em sua fórmula. E isso acontece de fato. Corpos cujas massas estão mais concentradas longe do eixo de rotação são mais difíceis de terem a rotação acelerada, mas também são mais difíceis de serem desacelerados.

Isso explica muita coisa, como, por exemplo, o fato das espadas medievais possuírem a lâmina mais pesada que o cabo. Isso tira um pouco sua agilidade, mas torna seu golpe devastador, pois a pobre vítima deverá desacelerar a lâmina com o próprio corpo. Um taco de beisebol tem a extremidade mais pesada para que sua rotação seja mais "intensa" que a de um taco com a base mais pesada. Quando digo intensa, digo que ela requer mais força para ser parada. Dessa forma, a bola que o atinge recebe um impacto muito maior do que receberia se o taco fosse usado ao contrário.

O conceito de momento de inércia não apenas faz sentido fisicamente, mas ele se encaixa como uma luva nas equações e me permite associar muitas conclusões lineares ao sistema angular. Como já encontramos análogos para força e massa, por que parar por aí? Vamos tentar achar mais grandezas associadas com as rotações que possam me ajudar a descrever o movimento.

Uma das grandezas lineares deduzidas anteriormente que ficou sem correspondente angular é o momento. Existe algo como um "momento angular"? Usar a analogia do blocos do capítulo 1 para deduzi-lo não teria muito sucesso, pois uma "colisão angular" não é algo tão simples. Mas nós sabemos algumas leis sobre o momento linear. Da mesma forma que forçamos a 2ª Lei de Newton a ser verdadeira, e isso deu certo, tentaremos forçar algumas deduções anteriores a valerem e então descobriremos quem o momento angular (que será denotado pela letra $\vec{L}$) deve ser para que isso tudo seja realmente verdade.

Vamos usar, novamente, a segunda lei de Newton, que diz: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. A diferença é que agora explicitei a lei em sua forma mais geral. Como quero um análogo do momento linear, é de bom tom que ele apareça. Se essa lei também vale para os sistemas angulares, a lei deve ser:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

E que grandeza é essa que, se derivada, fornece o torque? Precisamos de uma grandeza que, ao derivada, forneça um produto vetorial. Em um primeiro pensamento, é bem razoável achar que essa grandeza é também um produto vetorial. As regras de derivação para produto vetorial são iguais às de um produto simples. Dessa forma, basta integrar o torque em relação ao tempo e ver no que dá. Como ele é um produto, vai ser interessante usar a técnica de integração por partes:

$$\int f \cdot \frac{dg}{dx}\,dx = f \cdot g - \int g \cdot \frac{df}{dx}\,dx$$

Em nosso caso, queremos $\int \vec{r} \times \vec{F} dt$. Para resolver por partes, chamaremos $\vec{r}$ de "f" e $\vec{F} dt$ de "$\frac{dg}{dx}\,dx$". Dessa forma, a integração resultaria em:

$$\int \vec{r} \times \vec{F}\,dt = \vec{r} \times \vec{p} - \int \vec{v} \times \vec{p}\,dt$$

O resultado parece uma grandeza bem estranha, mas repare nesta última parcela dela, a integral do produto vetorial entre a velocidade e o momento. Nós sabemos a fórmula do momento, é $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$. Como m é um escalar, acontece que o momento tem sempre a mesma direção da velocidade. Isso faz com que aquele produto vetorial, bem como toda a integral, seja zero. Podemos derivar ambos os lados e obter a tão esperada relação:

$$\vec{\tau} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt}$$

Dessa forma, se quereremos um representante angular do momento, podemos defini-lo como:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

Essa grandeza, o momento angular, tem uma interpretação física muito semelhante ao momento linear. Ele representa o "embalo" da rotação do corpo, isto é, é uma combinação da velocidade angular do corpo com a dificuldade de pará-lo. Todas as analogias usadas para explicar o momento linear se adequam muito bem para explicar o angular.

Como conseguimos adequar a 2ª Lei de Newton para rotações, vale explicitá-la. Para um momento de inércia constante, temos que

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I \cdot \vec{\alpha}$$

E assim podemos enunciar:

1. Um corpo, livre da qualquer interferência externa, tende a manter sua velocidade angular constante.

2. A interferência que um corpo sofre em sua rotação é chamada torque e pode ser expressa pela variação de seu momento angular pelo tempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

3. O torque que um corpo 1 sofre em virtude de 2 é igual em módulo ao torque que o corpo 2 sofre em virtude da reação do corpo 1, sendo de mesma direção e sentido oposto:

$$\vec{\tau}_{1(2)} = -\vec{\tau}_{2(1)}$$

Que sintetizam nosso conhecimento sobre a dinâmica das rotações. As três grandezas definidas neste breve texto são a ponte das deduções lineares para as angulares e vão além, elas permitem que os corpos girem. Mas a verdadeira união entre os fenômenos lineares e angulares não está completa. É necessário entender o que acontece com corpos que podem girar e se movimentar, quando forças são aplicadas sobre eles. Estamos falando de corpos rígidos, ou seja, corpos que não podem ser aproximados por uma partícula, como nossos bloquinhos. Este é o assunto do próximo capítulo: a dinâmica dos corpos rígidos.