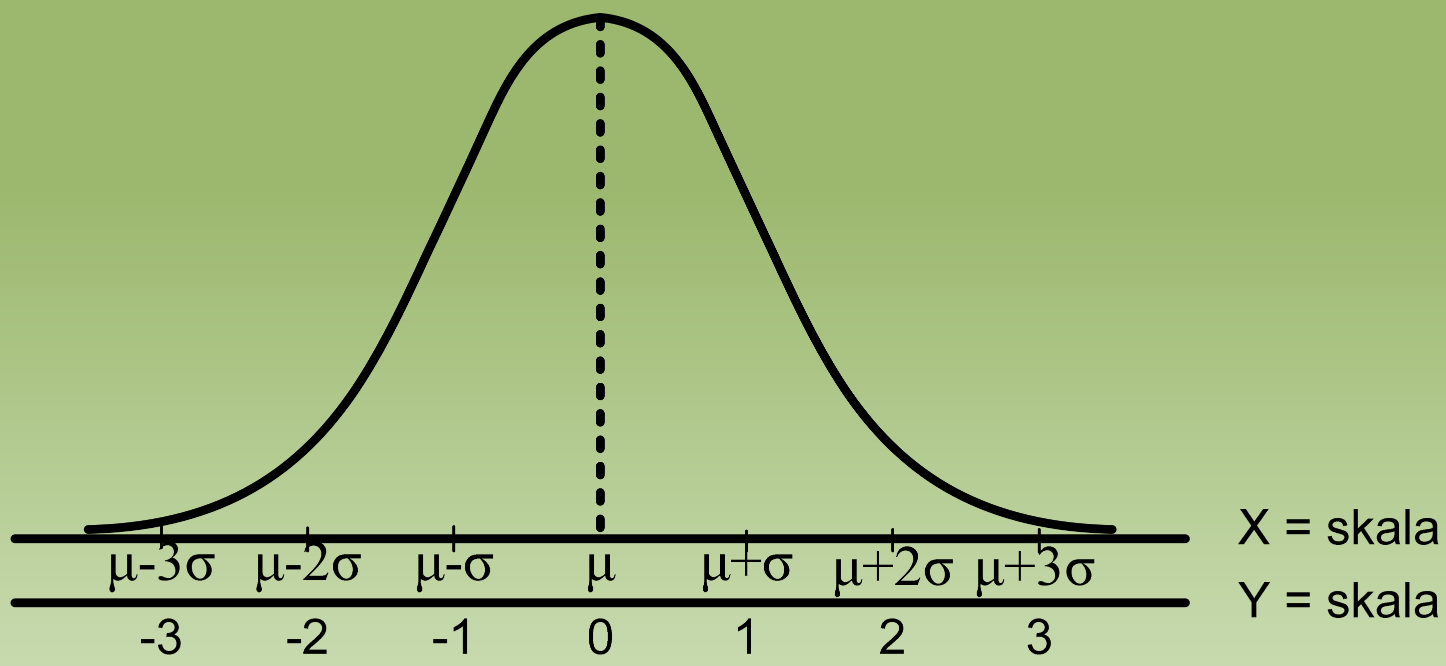
DISTRIBUSI NORMAL

Ratu Ilma Indra Putri

Distribusi normal menggunakan variabel acak kontinu. Distribusi normal sering disebut ***DISTRIBUSI GAUSS***. Distribusi ini merupakan salah satu yang paling penting dan banyak digunakan. Distribusi ini menyerupai **BENTUK LONCENG** **(BELL SHAPE)** dengan nilai rata-rata $\overline{X}$ sebagai sumbu simetrisnya.



Variabel acak kontinu X mempunyai *fungsi densitas* pada X = x dinyatakan dengan persamaan :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

Dengan :

π = Nilai konstan yang ditulis hingga 4 desimal π = 3,1416

e = Bilangan konstan, bila ditulis hingga 4 desimal, *e* = 2,7183

μ = Parameter, merupakan rata-rata untuk distribusi

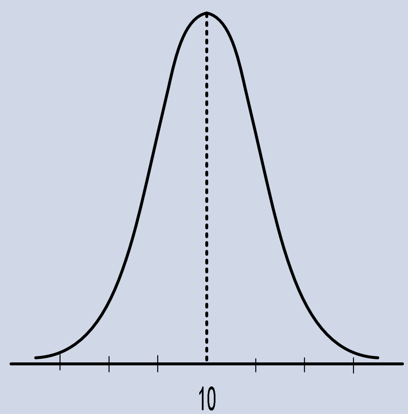
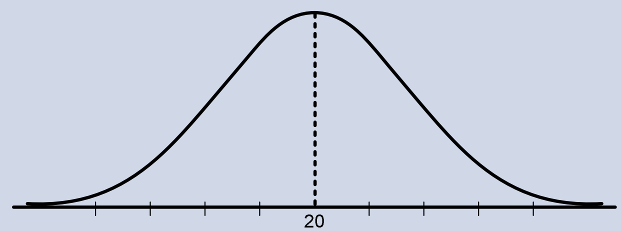
σ = Parameter, merupakan simpangan baku untuk distribusi

Jika Nilai x mempunyai batas nilai $-\infty < x < \infty$, maka dikatakan bahwa variabel acak X berdistribusi normal.

Sifat-sifat penting dari distribusi normal adalah :

1. Grafik selalu diatas sumbu-X (horisontal)
2. Bentuk simetris terhadap sumbu-Y pada $X = \mu$
3. Mempunyai modus pada $X = \mu$ sebesar $0{,}3989/\sigma$
4. Grafik mendekati sumbu-X pada $X = \mu - 3\mu$ dan $X = \mu + 3\mu$
5. Kurva normal digunakan sebagai acuan pengujian hipotesis jika ukuran sampel $n \geq 30$
6. Luas daerah yang dibatasi oleh sumbu-X dan kurva normal sama dengan satu satuan luas.

Untuk tiap pasang μ dan σ, sifat-sifat di atas selalu dipenuhi, hanya bentuk kurvanya saja yang berlainan. Jika σ makin besar, kurvanya makin rendah (platikurtik) dan untuk σ makin kecil, kurvanya makin tinggi (leptokurtik).

kurva normal dengan $\mu = 10$ dan $\sigma = 5$	**kurva normal dengan $\mu = 20$ dan $\sigma = 7$**
	

Untuk menentukan peluang harga X antara a dan b, yakni $P(a < X < b)$

$$P(a < X < b) = \int_a^b \left(\sigma\sqrt{2\pi}\right)^{-1} e^{-1/2\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

Untuk penggunaan praktis telah dibuat daftar distribusi normal baku (standar) yaitu dengan μ = 0 dan σ = 1 sehingga fungsi densitasnya berbentuk :

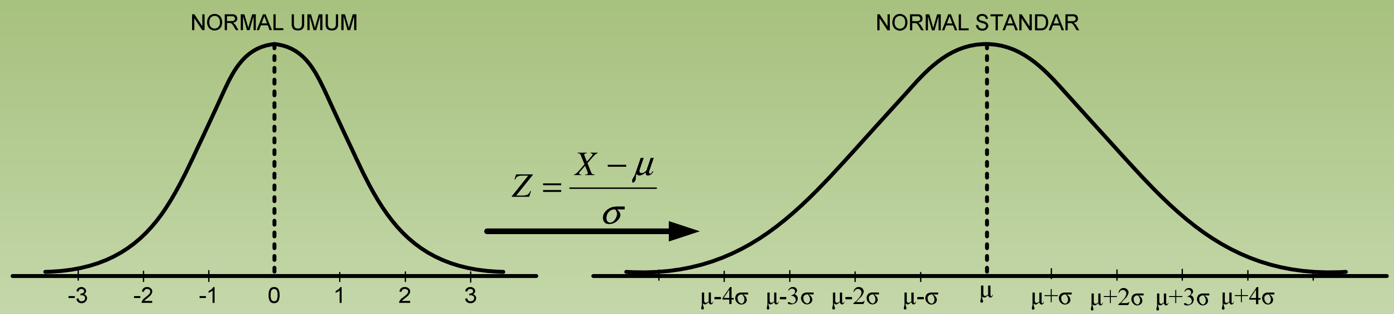
$$f(z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\pi^2}$$

Dengan batas z yaitu $-\infty < z < \infty$

Untuk mengubah *distribusi normal umum* menjadi distribusi *normal baku* digunakan rumus :

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Perubahan grafiknya dapat dilihat dalam gambar berikut ini :



Setelah distribusi normal baku yang didapat dari distribusi normal umum maka daftar distribusi normal baku dapat digunakan. Bagian-bagian luas distribusi normal baku dapat dicari. Caranya adalah :

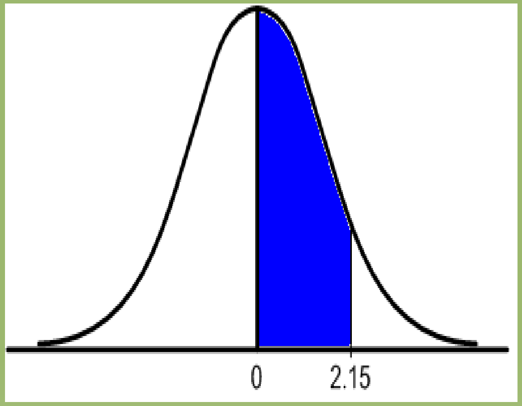
1. Hitung z sehingga dua desimal
2. Gambarkan kurvanya seperti gambar normal standar
3. Letakkan harga z pada sumbu datar, lalu tarik garis vertikal hingga memotong kurva.
4. Luas yang tertera dalam daftar adalah luas daerah antara garis ini dengan garis tegak di titik nol.
5. Dalam tabel normal cari tempat harga z pada kolom paling kiri hanya satu desimal dan desimal keduanya dicari pada baris paling atas.
6. Dari z di kolom kiri maju ke kanan dan dari z di baris atas turun ke bawah, maka didapat bilangan yang merupakan luas yang dicari. Bilangan yang didapat harus dituliskan dalam bentuk 0,xxxx (bentuk 4 desimal).

Beberapa contoh, penggunaan daftar normal baku yang akan dicari luas daerah yaitu :

1

Antara z = 0 dan z = 2.15
Gunakan tabel Distribusi Normal.
Di bawah z pada kolom kiri cari 2,1 dan di atas sekali cari angka 5. dari 2,1 maju ke kanan dan 5 menurun, didapat 0.4842.
Luas daerah yang dicari, dilihat daerah yang diarsir = 0,9842.

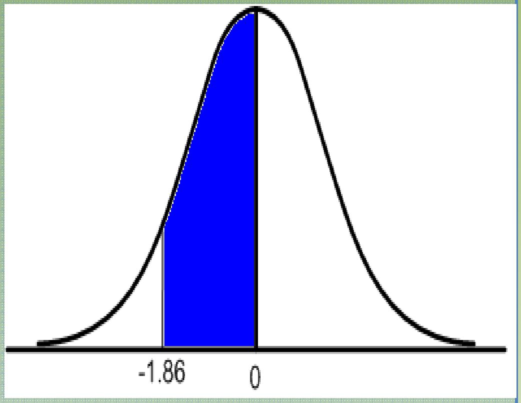
z	0,00	0,05
0.0	0.0000	0.0199
0.1	0.0398	0.0596
1.8	0.4641	0.4678
1.9	0.4713	0.4744
2.0	0.4772	0.4798
2.1	0.4821	0.4842
2.2	0.4861	0.4878

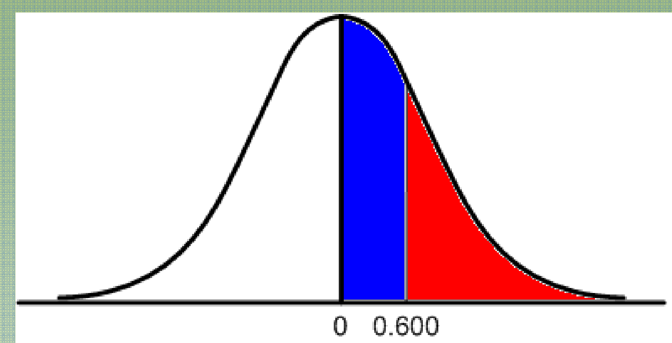


2

Antara z = 0 dan z = -1.86
karena z bertanda negatif, maka pada grafiknya diletakkan di sebelah kiri 0. Untuk daftar digunakan di bawah z kolom kiri didapat 1,8 dan di atas angka 6. Dari 1,8 ke kanan dan dari 6 ke bawah didapat 0.4686
Luas daerah=daerah diarsir = 0,4686.

z	0,00	0,06
0.0	0.0000	0.0239
0.1	0.0398	0.0636
0.2	0.0793	0.1026
1.7	0.4554	0.4608
1.8	0.4641	0.4686
1.9	0.4713	0.4750
2.0	0.4772	0.4803



3	antara z = -1.50 dan z = 1.82 dari grafik terlihat kita perlu mencari luas dua kali, lalu dijumlahkan. Mengikuti cara di 1 untuk z = 1.82 dan cara di 2 untuk z = -1.50, masing-masing didapat 0,4656 dan 0,4332. Jumlahnya = luas yang diarsir = 0,4332 + 0,4656=0,8988	**Coba Anda Gambar ……** -1,50 1,82
4	Indeks prestasi kumulatif (IPK) rata-rata masasiswa suatu perguruan tinggi adalah 2.76 dengan simpangan baku 0.40. jika diasumsikan IPK berdistribusi normal, berapa persenkah mahasiswa yang memperoleh IPK ≥ 3.00 ? Penyelesaian : Letak IPK = 3.00 pada kurav normal ditunjukkan oleh bilangan baku : $Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{3.00 - 2.76}{0.40} = 0.6$	Dari tabel normal proporsi luas antara z = 0 dan z = 0.60 adalah 0.2257 sehingga proporsi mahasiswa dengan IPK 3.00 (bagian yang diarsir) adalah 0.5000 – 0.2257 = 0.2743 atau 27.43% 

Untuk mencari kembali z apabila luasnya diketahui, maka dilakukan langkah sebaliknya.

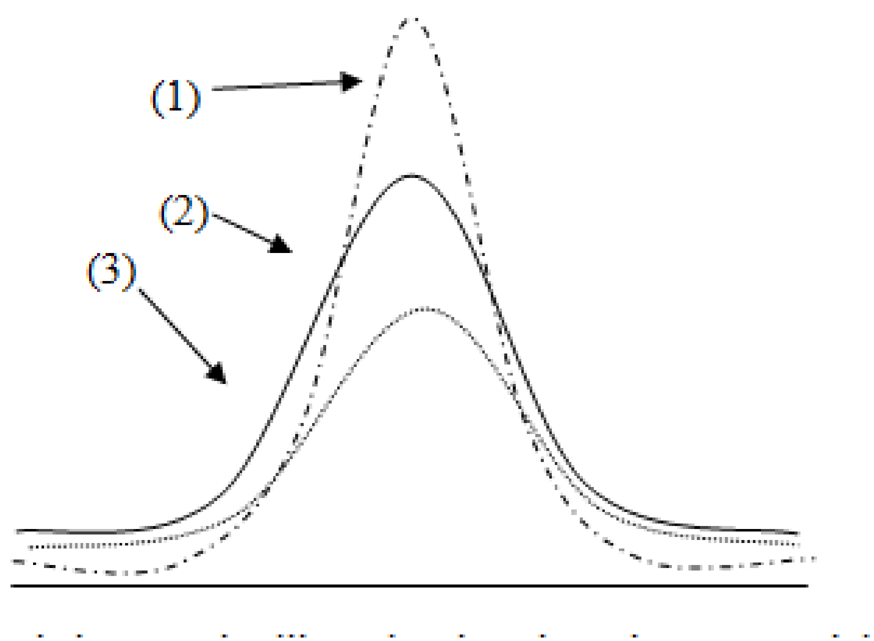
Fenomena distribusi data normal :

- Kira-kira 68,27% dari kasus ada dalam daerah satu simpangan baku sekitar rata-rata, yaitu antara $\mu - \sigma$ dan $\mu + \sigma$.
- Ada 95,45% dari kasus terletak dalam daerah dua simpangan baku sekitar rata-rata, yaitu antara $\mu - 2\sigma$ dan $\mu + 2\sigma$.
- Hampir 99,73% dari kasus ada dalam daerah tiga simpangan baku sekitar rata-rata, yaitu antara $\mu - 3\sigma$ dan $\mu + 3\sigma$.

Jenis bentuk kurva yang diakibatkan oleh perbedaan rentangan nilai dan simpangan baku ada tiga macam:

1. Leptokurtik, merupakan bentuk kurva normal yang meruncing tinggi karena perbedaan frekuensi pada skor-skor yang mendekati rata-rata sangat kecil.
2. Platykurtic, merupakan kurva normal yang mendatar rendah karena perbedaan frekuensi pada skor-skor yang mendekati rata-rata sangat kecil.
3. Normal, merupakan bentuk kurva normal yang biasa, artinya bentuknya merupakan bentuk antara leptokurtic dan platykurtic, karena penyebaran skor biasa dan tidak terjadi kejutan-kejutan yang berarti.

Bentuk ketiga kurva normal itu dapat dilihat pada grafik, berikut ini :



DISTRIBUSI F

Distribusi F merupakan distribusi variabel acak kontinu. Fungsi densitasnya mempunyai persamaan :

$$f(F) = K.\frac{F^{\frac{1}{2}(v_1-2)}}{\left(1+\frac{v_1 F}{v_2}\right)^{\frac{1}{2}(v_1+v_2)}}$$

Dimana :

F = Variabel acak yang memenuhi F > 0

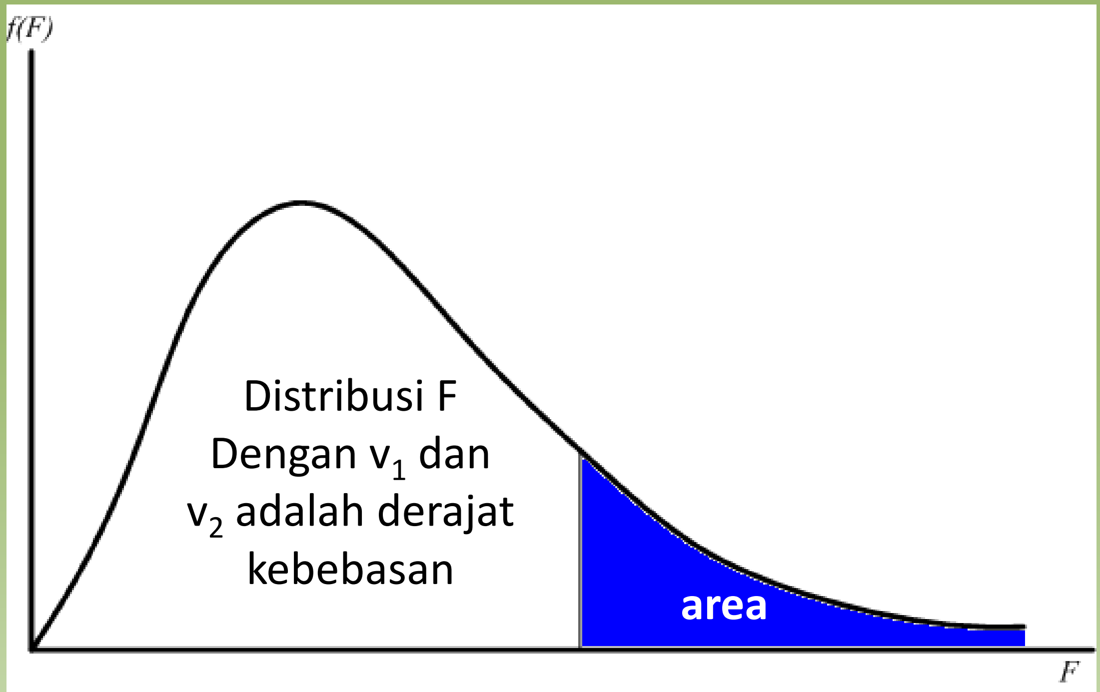
K = Bilangan tetap yang harganya bergantung pada derajat kebebasan v_1 dan v_2

v_1 = Derajat kebebasan antara varians rata-rata sampel (sebagai pembilang)

v_2 = Derajat kebebasan dalam keseluruhan sampel (sebagai penyebut)

Luas dibawah kurva sama dengan satu.

Daftar distribusi normal berisikan nilai-nilai F untuk peluang 0,01 dan 0,05 dengan derajat kekebasan v_1 dan v_2. Peluang ini sama dengan luas daerah ujung kanan yang diarsir, sedangkan derajat kekebasan pembilang (v_1) ada pada baris paling atas dan derajat kebebasan penyebut (v_2) pada kolom paling kiri.



Notasi lengkap untuk nilai-nilai F dari daftar distribusi F dengan peluang *p* dan dk = (v_1, v_2) adalah $F_p(v_1, v_2)$. Demikianlah untuk contoh kita didapat :

$F_{0.05}(24,8) = 3.12$ dan $F_{0.01}(24,8) = 5.28$

Meskipun daftar yang diberikan hanya untuk peluang *p = 0.05* dan *p = 0.01*, tetapi sebenarnya masih bisa didapat nilai-nilai F dengan peluang 0,99 dan 0,95. Untuk ini digunakan hubungan :

$$F_{(1-p)(v_1,v_2)} = \frac{1}{F_{p(v_1,v_2)}}$$

Dalam rumus diatas perhatikan antara *p* dan (1- *p*) dan pertukaran antara derajat kebebasan $(v_{1,} v_2)$ menjadi $(v_{2,} v_1)$.

DISTRIBUSI STUDENT (t)

Distribusi dengan variabel acak kontinu lainnya selain dari distribusi normal ialah *DISTRIBUSI STUDENT ATAU DISTRIBUSI - t*. Fungsi densitasnya adalah :

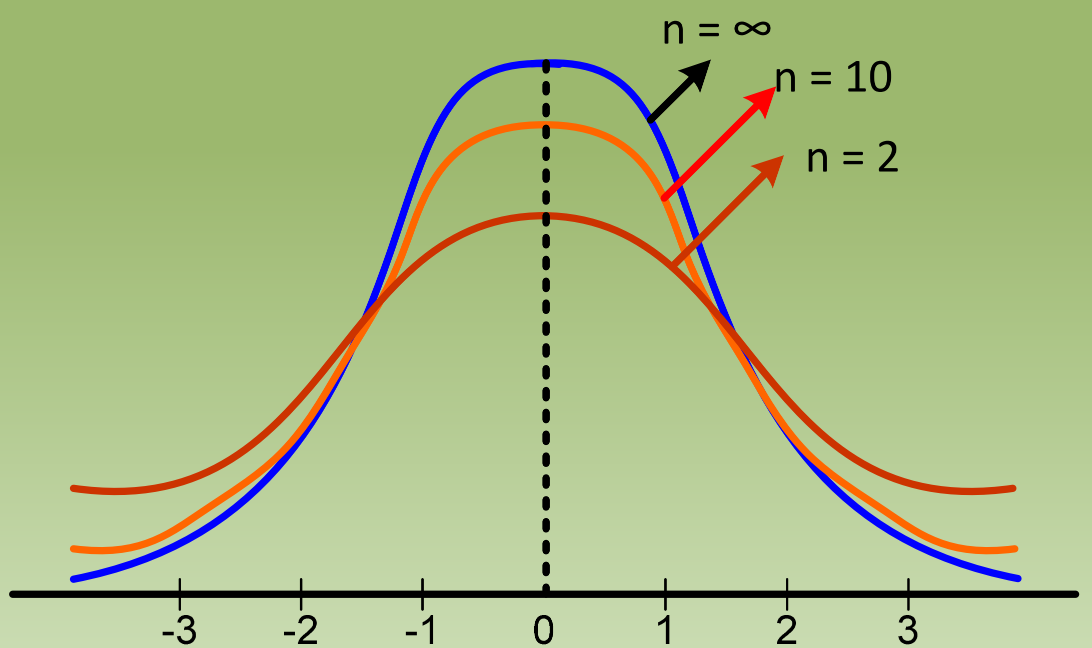
$$f(t) = \frac{K}{\left(1 + \frac{t^2}{n-1}\right)^{\frac{1}{2}n}}$$

Berlaku untuk harga-harga t yang memenuhi $-\infty < t < \infty$

K merupakan bilangan tetap yang besarnya bergantung pada n sedemikian sehingga luas daerah di bawah kurva sama dengan satu unit.

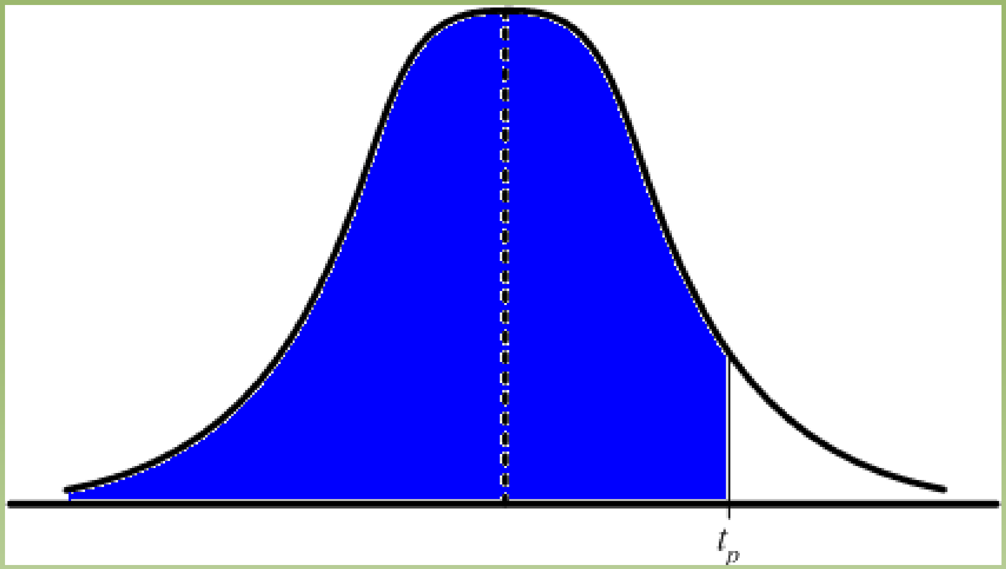
Pada distribusi t ini terdapat bilangan (n-1) yang dinamakan *derajat kebebasan*, akan disingkat dengan dk.

Bentuk kurva-t identik dengan bentuk kurva normal, tetapi kurtosisnya ditentukan oleh besar kecilnya derajat kebebasan df. Untuk *n* ≥ 30 pola distribusi t mendekati pola distribusi normal.



Dalam tabel distribusi-t kolom paling kiri berisikan derajat kebebasan (dk), baris teratas berisikan nilai peluang.

Gambar dibawah ini merupakan grafik distribusi-t dengan dk = (n – 1). Luas bagian yang diarsir = p dan dibatasi paling kanan oleh t_p. Harga t_p inilah yang dicari dari daftar untuk pasangan *dk* dan *p* yang diberikan.



Beberapa contoh penggunaan daftar distribusi-t

1. Untuk n = 13, jadi dk = (n-1) = 13 - 1 = 12, dan p = 0,95 maka t = 1,782

   ini didapat (lihat tabel distruibusi-t) dengan jalan maju ke kanan dari 12 dan menurun 0,95.

2. Tentukan t sehingga luas dari t ke kiri = 0,05 dengan dk = 9. Untuk ini p yang digunakan = 0,95. Dengan dk = 9 didapat t = 1,83. karena yang diminta kurang dari 0,5, maka t harus bertanda negatif. Jadi t = - 1,83