DOSSIER DE CANDIDATURE À L'HABILITATION À DIRIGER DES RECHERCHES SYNTHÈSE DE L'ACTIVITÉ SCIENTIFIQUE ET PROGRAMME DE RECHERCHE

par

Emmanuel Peyre

Résumé. — Ce texte, réalisé pour mon habilitation, fait une synthèse de mes realisations et de mes projets de recherche en 1997.

Abstract. — This text, which was written for my "habilitation à diriger des recherches", is a survey of my results and projects in 1997.

Table des matières

1. Liste des publications et prépublications 1
2. Travaux de recherches 2
Références 35

1. Liste des publications et prépublications

[1] *Unramified cohomology and rationality problems*, Math. Ann. **296** (1993), 247–268.
[2] *Products of Severi-Brauer varieties and Galois cohomology*, in K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa-Barbara 1992), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58.2, AMS, Providence 1995, pp. 369–401.
[3] *Corps de fonctions de variétés homogènes et cohomologie galoisienne*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **321** (1995), 891–896.
[4] *Galois cohomology in degree three and homogeneous varieties*, Prépublication IRMA 1996/12 (1996), 1–35.

[5] *Hauteurs et mesures de Tamagawa sur les variétés de Fano*, Duke Math. J. **79** (1995), n° 1, 101–218.
[6] *Terme principal de la fonction zêta des hauteurs et torseurs universels*, Prépublication (1996), 1–36.

2. Travaux de recherches

L'ensemble de mes travaux et projets de recherches est axé sur deux thèmes principaux d'une part, le calcul de groupes liés à la cohomologie galoisienne et d'autre part l'étude asymptotique du nombre et de la répartition des points de hauteur bornée sur diverses variétés algébriques projectives.

Le but de ce texte est d'essayer de donner pour chacun des thèmes abordés une brève description des résultats obtenus, en les situant autant que possible dans leur contexte, ainsi que les perspectives de recherches envisagées.

2.1. Cohomologie galoisienne. — Mes recherches en cohomologie galoisienne sont centrées sur trois problèmes, que je décrirai en détail dans les paragraphes suivants la construction de nouveaux exemples de corps unirationnels non-rationnels, y compris dans le cadre du problème de Noether, l'étude du noyau de l'application de restriction lorsqu'on passe d'un corps de base au corps de fonctions d'une variété de drapeaux généralisés et l'étude de classes négligeables. Mais ces trois thèmes sont en fait intimement liés l'éventuelle construction de nouveaux exemples de réponses négatives au problème de Noether passe par l'étude des classes négligeables et des caractérisations de ces classes sont fournies par des corps de fonctions de drapeaux généralisés.

2.1.1. *Cohomologie non ramifiée.* —

2.1.1.1. *Introduction.* — Etant donné une variété algébrique dont un ouvert est paramétré par des fractions rationnelles, une question naturelle, étudiée depuis le XIX-ème siècle est de déterminer si cette paramétrisation peut être choisie de façon à être génériquement bijective. En termes du corps de fonctions de la variété cela revient à se demander si un corps contenu dans une extension transcendante pure du corps de base est lui-même transcendant sur ce dernier. Les groupes de cohomologie non ramifiée ont été construits par Colliot-Thélène et Ojanguren comme obstruction à une réponse positive à cette question. Avant de donner la définition de ces groupes je vais faire de brefs rappels sur ce problème.

Définitions 2.1.1. — On note k un corps de base fixé. Soient K et L deux corps de fonctions sur k, c'est-à-dire engendrés par un nombre fini d'éléments en tant que surcorps de k.

Le corps K est une *extension rationnelle* de k si et seulement si c'est une extension transcendante pure de k.

Les corps K et L sont dits *stablement isomorphes* si et seulement s'il existe de indéterminées $U_1, \ldots, U_m$ et $T_1, \ldots, T_n$ ainsi qu'un isomorphisme

$$K(U_1, \ldots, U_m) \xrightarrow{\sim} L(T_1, \ldots, T_n)$$

au-dessus de k.

On dit que K est *stablement rationnel* s'il est stablement isomorphe à k.

Enfin il est unirationnel s'il se plonge au-dessus de k dans une extension rationnelle de k.

Le problème est donc de déterminer si une extension unirationnelle donnée est rationnelle. Dans ce cadre, la méthode donnée par Lüroth en 1876 dans [**Lü**] permet de montrer que tout corps unirationnel de degré de transcendance 1 sur k est rationnel. En 1894, Castelnuovo montre dans [**Ca**] que si k est algébriquement clos et de caractéristique 0, cela est également vrai pour les extension de degré de transcendance deux sur k.

L'existence de contre-exemples a d'abord été démontrée au-dessus de corps non algébriquement clos ou de caractéristique finie. Ainsi Segre construit en 1951 des surfaces cubiques unirationnelles sur $\mathbf{R}$ dont le nombre de composantes connexes, qui est un invariant birationnel, n'est pas égal à un [**Seg**], et en 1958 Zariski donne des exemples de surfaces unirationnelles non rationnelles sur un corps algébriquement clos de caractéristique finie [**Za**].

Divers exemples de variétés unirationnelles non rationnelles de dimension trois sur $\mathbf{C}$ ont été construites presque simultanément en utilisant trois types d'invariants le sous-groupe de torsion de $H^3(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ où X est un modèle propre et lisse du corps dans l'exemple d'Artin et Mumford [**AM**], le groupe d'automorphismes birationnels pour celui d'Iskovskih et Manin [**?**] et la jacobienne intermédiaire dans Clemens et Griffiths [**CG**].

Les groupes de cohomologie non ramifiée ont été définis par Colliot-Thélène et Ojanguren dans [**CTO**] comme généralisation de l'interprétation algébrique de l'invariant utilisé par Artin et Mumford, c'est-à-dire le groupe de Brauer non ramifié. Il faut noter que c'est en fait un invariant pour la rationalité stable. La jacobienne intermédiaire, permet par contre de construire des exemples de corps stablement rationnels non rationnels comme cela a été fait par Beauville, Colliot-Thélène, Sansuc et Swinnerton-Dyer [**BCTSSD**].

Notations 2.1.1. — Soit K un corps de clôture séparable K^s. Pour tout $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-module discret M, le i-ème groupe de cohomologie galoisienne est défini par

$$H^i(K,M) = H^i(\mathrm{Gal}(K^s/K), M)$$

où le terme de droite est la limite inductive pour L extension galoisienne finie de K des groupes de cohomologie usuels

$$H^i(\mathrm{Gal}(L/K), M^{\mathrm{Gal}(L^s/L)}).$$

Soit p la caractéristique de K. Pour tout nombre entier n non divisible par p, μ_n désigne le groupe des racines n-ièmes de l'unité dans K^s. On note $\mu_n^{\otimes 0}$ le module $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et pour tout $j > 0$, $\mu_n^{\otimes j}$ le module $\mu_n^{\otimes j-1} \otimes_{\mathbf{Z}} \mu_n$ et $\mu_n^{\otimes -j}$ son dual. Si $i > 0$ et $j \in \mathbf{Z}$, on définit alors

$$H^i(L, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(j)) = \varinjlim_{n \in \mathbf{N}-(p)} H^i(L, \mu_n^{\otimes j})$$

et, pour $j = 0, 1$ ou 2,

$$H^i(L, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j)) = \varinjlim H^{i-j}(L, K_j(L^s)/p^r).$$

En effet, si n est une puissance de p, le rôle des racines n-ièmes de l'unité est joué, à un décalage près, par la partie logarithmique du complexe de De Rham-Witt $W_r\Omega^\bullet$ sur k qui, dans ces cas particuliers, coïncide avec $K_j(L^s)/p^r$ (cf [**?**]). En définitive, on convient que, pour $j = 0$, 1, ou 2,

$$H^i(L, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(j)) = H^i(L, (\mathbf{Q}/\mathbf{Z})'(j)) \oplus H^i(L, \mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p(j)).$$

Si K est un corps de fonctions sur k, on note $\mathscr{P}(K/k)$ l'ensemble des anneaux de valuation discrète de rang un tels que $k \subset A \subset K$ et dont le corps des fractions est K.

Pour tout élément A de $\mathscr{P}(K/k)$, on note K_A le complété de K en A, κ_A le corps résiduel et I_A le groupe d'inertie défini par la suite exacte

$$0 \to I_A \to \mathrm{Gal}(K_A^s/K_A) \to \mathrm{Gal}(\kappa_A^s/\kappa_A) \to 0.$$

Le suite spectrale de Hochschild-Serre correspondante

$$H^p(\kappa_A, H^q(I_A, C)) \Rightarrow H^{p+q}(K_A, C)$$

permet de définir pour tout $\mathrm{Gal}(K^s/K)$-module C de n-torsion, où n est inversible dans K un morphisme

$$H^p(K_A, C) \xrightarrow{d_2} H^{p-1}(\kappa_A, H^1(I_A, C)) \xrightarrow{\sim} H^{p-1}(\kappa_A, C(-1)) \tag{2.1.1.1}$$

avec $C(-1) = C \otimes_{\mathbf{Z}} \mu_n^{\otimes -1}$.

Définition 2.1.2. — Avec les notations qui précèdent, le *morphisme résidu* en A est l'application

$$\partial_A : H^p(K, C) \to H^{p-1}(\kappa_A, C(-1))$$

obtenu en composant le morphisme canonique de $H^p(K, C)$ vers $H^p(K_A, C)$ avec l'application (2.1.1.1).

Définition 2.1.3 **(Colliot-Thélène et Ojanguren, [CTO])**

Les *groupes de cohomologie non ramifiée* de K relativement à k sont définis par

$$H^i_{\mathrm{nr}/k}(K, \mu_n^{\otimes j}) = \bigcap_{A \in \mathscr{P}(K/k)} \operatorname{Ker} \partial_A.$$

Si $p = 0$ et $i = 2$, on obtient en passant à la limite inductive le groupe de Brauer non ramifié $\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}/k}(K)$, qui, pour un corps unirationnel au-dessus de $\mathbf{C}$, coïncide avec la partie de torsion de $H^3(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ où X est un modèle propre et lisse de K.

Par ailleurs Colliot-Thélène et Parimala ont montré dans [**CTP**], que, si X est une variété quasi-projective géométriquement connexe de dimension n sur $\mathbf{R}$, alors pour tout $i \geqslant n+1$, $H^n_{\mathrm{nr}/\mathbf{R}}(\mathbf{R}(X), \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^S$ où S est le nombre de composantes connexes de $X(\mathbf{R})$.

En outre, il résulte d'un théorème de pureté et de la théorie de Bloch-Ogus [**BO**] que si X est un modèle propre et lisse du corps K alors $H^i_{\mathrm{nr}/k}(K, \mu_n^{\otimes j})$ coïncide avec le groupe $H^0(X_{\mathrm{Zar}}, \mathscr{H}^i_{\text{ét}}(\mu_n^{\otimes j}))$ où $\mathscr{H}^i_{\text{ét}}(\mu_n^{\otimes j})$ désigne le faisceau pour la topologie de Zariski associé au préfaisceau qui associe à un ouvert U le groupe de cohomologie étale $H^i(U_{\text{ét}}, \mu_n^{\otimes j})$.

La propriété à l'origine de l'intérêt pour ces groupes est la suivante

Proposition 2.1.1 **(Colliot-Thélène et Ojanguren, [CTO**, Proposition 1.2])

Si K et L sont deux corps de fonctions stablement isomorphes sur k, alors pour tout i, $n > 0$ et tout $j \in \mathbf{Z}$, il existe un isomorphisme

$$H^i_{\mathrm{nr}/k}(K, \mu_n^{\otimes j}) \xrightarrow{\sim} H^i_{\mathrm{nr}/k}(L, \mu_n^{\otimes j}).$$

2.1.1.2. *Exemples de corps unirationnels non stablement rationnels.* — Dans [**CTO**], Colliot-Thélène et Ojanguren construisent un exemple de corps unirationnel non rationnel de degré de transcendance six sur $\mathbf{C}$ et dont le groupe de Brauer non ramifié est trivial.

Le but de [1], qui correspond à ma thèse, est de donner un mécanisme de construction de tels exemples. L'idée, inspirée de Saltman [**Sa1**] et Bogomolov [**Bo**] est de se donner un sous-groupe fini F de $K^\times/K^{\times l}$ où l est un nombre premier distinct de p et de remonter les morphismes résidus de l'algèbre $\bigoplus_{n\in\mathbf{N}} H^n(K,\mu_p^{\otimes n})$ à l'algèbre extérieure $\Lambda^* F$.

Plus précisément la théorie de Kummer donne un morphisme $K^\times/K^{\times l} \to H^1(K,\mu_l)$ qui envoie la classe de $a \in K^\times$ sur la classe (a) du cocycle donné par $\sigma \mapsto \sigma(a^{1/l})/a^{1/l}$ où $a^{1/l}$ est une racine l-ième de a dans K^s. Si K contient les racines $2l$-ièmes de l'unité, alors ce morphisme induit pour tout sous-groupe fini F de $K^\times/K^{\times l}$ un morphisme

$$\Phi^* : \Lambda^* F \to \bigoplus_{n\in\mathbf{N}} H^n(K,\mu_l^{\otimes n}).$$

On note K^i l'image inverse par Φ^i de

$$\mathrm{Im}\,(H^i(k,\mu_l^{\otimes i}) \to H^i(K,\mu_l^{\otimes i}))$$

et S^i l'orthogonal de K^i dans le dual $(\Lambda^i F)^\vee$ de $\Lambda^i F$. Mais $(\Lambda^i F)^\vee \xrightarrow{\sim} \Lambda^i(F^\vee)$ et on note S^idéc le sous-groupe de S^i engendré par les éléments de la forme $u \wedge v$ avec $u \in F^\vee$ et $v \in \Lambda^{i-1}F^\vee$.

Théorème 2.1.2 **([1, theorem 2]).** — *Avec les notations ci-dessus on a une injection*

$$(S^i/S^i\text{déc})^\vee \to \mathrm{Coker}\,(H^i(k,\mu_n^{\otimes i}) \to H^i_{\mathrm{nr}/k}(K,\mu_n^{\otimes i})).$$

Le principe pour construire des contre-exemples est alors de partir d'un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel F et d'un sous-groupe S de $\Lambda^i F^\vee$ qui n'est pas engendré par une famille d'éléments de la forme $u \wedge v$ avec $u \in F^\vee$ et $v \in \Lambda^{i-1}F^\vee$, puis de construire un corps unirationnel K et un morphisme $\Phi^1 : F \to K^\times/K^{\times p}$ de sorte que le groupe S coïncide avec le groupe S^i défini par Φ^1.

La première partie est la plus aisée, il suffit par exemple de prendre $F = \bigoplus_{i=1}^{2i} \mathbf{F}_p f_i$ et

$$S = \langle f_1^\vee \wedge \cdots \wedge f_i^\vee + f_{i+1}^\vee \wedge \cdots \wedge f_{2i}^\vee \rangle$$

où $f_1^\vee,\ldots,f_{2i}^\vee$ est une base duale de $f_1,\ldots,f_{2i}$.

Pour la seconde on utilise une construction générique si $(f_1,\ldots,f_n)$ est une base de F, on plonge F dans $k(X_1,\ldots,X_n)^\times/p$ en renvoyant f_i sur la classe de X_i.

Cela induit une injection

$$\Phi_0^i : \Lambda^* F \to H^*(k(X_1, \ldots, X_n), \mu_p^{\otimes *}).$$

On utilise, lorsqu'ils existent, des corps de scindage générique de $\Phi_0^i(S^\perp)$. Cela est possible dans les cas suivants

- Si $i = 2$, alors par le théorème d'Amitsur [**Am**], si L est un corps, tout α de $H^2(L, \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}\, L_{(p)}$, où $\mathrm{Br}\, L_{(p)}$ désigne la partie de p-torsion du groupe de Brauer, a un corps de scindage générique. De manière plus précise, si V est une variété de Severi-Brauer, c'est-à-dire une variété sur L telle que $V \times L^s$ soit isomorphe à un espace projectif, alors elle définit par descente galoisienne une classe dans

$$H^1(L, \mathrm{Aut}\, \mathbf{P}^n_{L^s}) = H^1(L, \mathrm{PGL}_n(L^s)) \to \mathrm{Br}\, L_{(n)}.$$

On note $[V]$ la classe ainsi obtenue dans le groupe de Brauer. Alors le corps de fonctions $L(V)$ est un corps de scindage générique pour $[V]$. En outre tout élément du groupe de Brauer est la classe d'une variété de Severi-Brauer. En procédant par récurrence on obtient à l'aide de produits de variétés de Severi-Brauer des corps de scindage générique pour tout sous-groupe fini du groupe de Brauer.

- Si $i = 3$, si p est un nombre premier et L est un corps contenant une racine primitive p-ième de l'unité ξ et si $\alpha \in H^3(L, \mu_p^{\otimes 3})$ est de la forme $\alpha = (a_1) \cup (a_2) \cup (a_3)$ avec $a_i \in L^\times$ pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, alors on considère l'algèbre $A = A_\xi(a_1, a_2)$ engendrée par deux éléments I et J avec les relations

$$I^p = a_1, J^p = a_2, IJ = \xi JI$$

et la variété Y d'équation $\mathrm{Nrd}_A(x) = a_3$. Alors Suslin a montré dans [**?**, theorem 7.7] que

$$\mathrm{Ker}\,(H^3(L, \mu_p^{\otimes 2}) \to H^3(L(Y), \mu_p^{\otimes 2})) = \langle (a_1) \cup (a_2) \cup (a_3) \rangle.$$

Ceci permet de construire pour tout premier p des extensions unirationnelles de $\mathbf{C}$ avec

$$\begin{cases} H^3_{\mathrm{nr}/\mathbf{C}}(L, \mu_p^{\otimes 3}) \neq 0 \\ \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}}(L) = \{0\}. \end{cases}$$

- Si $p = 2$ et $\alpha \in H^i(L, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ est de la forme $\alpha = (a_1) \cup \cdots \cup (a_i)$, alors un candidat naturel de corps L' tel que

$$\mathrm{Ker}\,(H^3(L, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \to H^3(L', \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})) = \langle \alpha \rangle$$

est le corps de fonctions de la quadrique projective associée à la forme de Pfister

$$\langle\langle a_1, \dots, a_i \rangle\rangle = \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_n \rangle.$$

Ce résultat a été montré par Arason [**Ara**] pour $i = 3$, par Jacob et Rost [**JR**] pour $i = 4$ et annoncé par Voevodsky pour $i \geqslant 5$. Cela permettrait de construire pour tout i des extensions unirationnelles K de $\mathbf{C}$ telles que $H^i_{\mathrm{nr}/\mathbf{C}}(K, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \neq 0$ et pour $i \leqslant 5$, telles qu'en outre $H^j_{\mathrm{nr}/\mathbf{C}}(K, \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}) = 0$ si $j < i$.

2.1.1.3. *Invariants sous l'action d'un groupe.* — Un cas particulier du problème précédent est le problème de Noether, à savoir l'étude de la rationalité d'un corps de la forme $k(W)^G$ où G est un groupe algébrique linéaire et W une représentation de G sur un corps k algébriquement clos et de caractéristique 0.

2.1.1.4. *Le cas des groupes finis.* — En ce qui concerne les groupes finis, Saltman et Bogomolov ([**Sa1**] et [**Bo**]) ont construit plusieurs exemples de groupe G tels que pour toute représentation fidèle W de G, on ait

$$\mathrm{Br}_{\mathrm{nr}/k} k(W)^G \neq 0.$$

Sous-jacents à ces exemples est la description due à Bogomolov du groupe de Brauer non ramifié en termes de la cohomologie de G

Théorème 2.1.3 **(Bogomolov, [Bo]).** — *Soit $\mathscr{B}_G$ l'ensemble des sous-groupes bicycliques de G, c'est à dire abéliens et engendrés par un sous-ensemble de cardinal inférieur ou égal à deux, alors pour toute représentation fidèle W de G sur k, corps algébriquement clos et de carctéristique 0, on a*

$$\bigcap_{H \in \mathscr{B}_G} \mathrm{Ker}\,(\mathrm{Res}^G_H : H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to H^2(H, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Br}_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G).$$

En degré supérieur, le problème est compliqué par la présence de classes négligeables sur lesquelles nous reviendrons et, à ma connaissance, on n'a construit aucun exemple avec $H^3_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G, \mu_n^{\otimes j})$ non nul.

Toutefois Saltman a démontré le résultat profond suivant

Théorème 2.1.4 **(Saltman, [Sa2]).** — *Si k est algébriquement clos et de caractéristique 0, et W une représentation fidèle de G sur k alors $H^i_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ provient de $H^i(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$.*

Dans l'autre direction j'ai pu montrer le résultat suivant

Proposition 2.1.5. — *Sous les hypothèses du théorème précédent, si γ est un élément de $H^i(G, \mu_n^{\otimes j})$ tel que pour tout sous-groupe H de G et tout sous-groupe cyclique I du centre de H on ait*

$$\mathrm{Res}_H^G(\gamma) \in \mathrm{Im}\,(H^i(H/I, \mu_n^{\otimes j}) \to H^i(H, \mu_n^{\otimes j}))$$

alors l'image γ' de γ dans $H^i(k(W)^G, \mu_n^{\otimes j})$ est non ramifiée.

Dans le cas particulier où G est extension centrale d'un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel U par un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel V, et si k contient les racines $2p$-ièmes de l'unité, alors on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^i(U, \mu_p^{\otimes i}) & \longrightarrow & \Lambda^i(U^\vee) \\ \downarrow & & \downarrow \Phi^i \\ H^i(G, \mu_p^{\otimes i}) & \longrightarrow & H^i(k(W)^G, \mu_p^{\otimes i}). \end{array} \tag{2.1.1.2}$$

Par le paragraphe 2.1.1.2, si on pose $S^i = (\mathrm{Ker}\,\Phi^i)^\perp \subset \Lambda^i U$ et si on note S^idéc le sous-groupe de S^i des éléments décomposables, alors on a une injection

$$(S^i/S^i\text{déc})^\vee \to \mathrm{Coker}\,(H^i(k, \mu_p^{\otimes i}) \to H^i_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G, \mu_p^{\otimes i})).$$

Toutefois, on ne connaît pas de méthode permettant de calculer ce noyau en général, nous reviendrons également sur ce problème dans le cadre des classes négligeables. Mais si on considère l'application

$$\theta : \Lambda^2 U \to V$$

définie par

$$\forall g_1, g_2 \in G,\ [g_1, g_2] = \theta(\pi(g_1) \wedge \pi(g_2))$$

où π désigne la projection de G sur U, alors on peut montrer que $\mathrm{Ker}\,\Phi^2 = \mathrm{Ker}\,\theta^\perp$ et par conséquent $\mathrm{Ker}\,\Phi^i \supset \mathrm{Ker}\,\theta^\perp \wedge \Lambda^{i-2} U^\vee$ pour $i \geqslant 2$ et

$$S^i \subset (\mathrm{Ker}\,\theta^\perp \wedge \Lambda^{i-2} U^\vee)^\perp.$$

Notons K^i ce dernier groupe. Alors S^idéc $\subset K^i$déc. Par conséquent, tout élément de $\Lambda^i U^\vee$ dont la restriction à K^idéc est triviale a une image non ramifiée dans $H^i(k(W)^G, \mu_p^{\otimes i})$. En outre, si $i = 3$, on peut même montrer que l'image inverse de $H^3_{\mathrm{nr}/k}(k(W)^G, \mu_p^{\otimes 3})$ dans $\Lambda^3 U^\vee$ coïncide avec K^3déc (cf. [4, proposition 9.4]).

2.1.1.5. *Le cas des groupes semi-simples.* — En ce qui concerne les groupe algébriques réductifs, les seuls résultats connus sont négatifs. En particulier, Saltman a démontré que si V est une représentation quasi-libre de PGL_n sur un corps k algébriquement clos et de caractéristique 0, c'est à dire qu'il existe un ouvert affine PGL_n-invariant U de V et un point x de U dont le stabilisateur est trivial et l'orbite fermée, alors

$$H^3_{\mathrm{nr}/k}(k(V)^{\mathrm{PGL}_n}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) = 0.$$

La méthode qu'il utilise est une réduction à l'étude de groupes de cohomologie de la forme $H^i(W, R)$ où $i = 2$ ou 3, où $W = \mathfrak{S}_n$ est le groupe de Weyl de PGL_n et où R est un W-réseau. Cette réduction fonctionne également pour tout groupe semi-simple et il serait intéressant de determiner quel type de majoration cela fournit pour des groupes de la forme

$$H^3_{\mathrm{nr}/k}(k(V)^G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

où G est un autre groupe adjoint classique.

2.1.1.6. *Variétés de drapeaux généralisés.* — Une autre classe de variétés pour lesquelles on a étudié les groupes de cohomologie non ramifiée est celle des variétés de drapeaux généralisés, c'est à dire des variétés projectives homogènes sous l'action d'un groupe algébrique linéaire de sorte que le stabilisateur d'un point géométrique soit lisse.

Comme dans ce cas le corps de fonctions de la variété V n'est pas unirationnel en général, il faut, pour décrire ces groupes de cohomologie, expliciter à la fois le noyau et le conoyau de l'application de restriction

$$H^i(k, C) \to H^0(V_{\mathrm{Zar}}, \mathscr{H}^i_{\text{ét}}(C)) \tag{2.1.1.3}$$

où C est un $\mathrm{Gal}(k^s/k)$-module.

En utilisant les complexes de Lichtenbaum, Kahn montre dans [**Kah1**] l'existence d'un isomorphisme naturel entre

$$\mathrm{Ker}\,(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$$

et

$$H^1(\mathrm{Gal}\,(k^s/k), K_2(k^s(V))/K_2k^s).$$

Ce dernier groupe s'insère, dans le cas des variétés de drapeaux généralisés, dans une suite exacte longue donnée par Colliot-Thélène et Raskind dans [**CTR**]. On

obtient de cette manière une suite exacte
(2.1.1.4)

$$(\operatorname{Pic} V^s \otimes k^{s\times})^{\operatorname{Gal}(k^s/k)} \xrightarrow{\phi} \operatorname{Ker}(H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)))$$
$$\xrightarrow{\theta} \operatorname{CH}^2(V)_{\text{tors}} \to 0.$$

Dans [2] et [3], nous montrons que le morphisme ϕ peut être décrit de la manière suivante les raies extrêmales du cône des classes de diviseurs effectifs dans $\operatorname{Pic} V^s$ définissent une base B de ce groupe qui est globalement invariante sous l'action du groupe de Galois. Pour toute $\operatorname{Gal}(k^s/k)$-orbite O de B, soit k_O l'extension séparable de k qui lui correspond. On a alors une suite exacte canonique

$$\operatorname{Pic} V \to \mathbf{Z}[B]^{\operatorname{Gal}(k^s/k_O)} \to \operatorname{Br} k_O \to \operatorname{Br} k_O(V).$$

On note α_O l'image de $\sum_{b\in O} b \in \mathbf{Z}[B]^{\operatorname{Gal}(k^s/k)}$ dans $\operatorname{Br}(k_O)$. Alors ϕ coïncide avec l'application

$$\sum_{O \text{ orbite}} k_O^\times \xrightarrow{\oplus N_{k_O/k}(.\cup\alpha_O)} H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

Dans [4], je donne également le lien entre les classes α_O et l'algèbre séparable A construite par Panin dans [**Pa**] pour décrire la K-théorie de la variété V.

La description du morphisme θ est plus difficile. Une méthode de calcul est donnée dans [4] dans le cas particulier où V est le produit d'une conique par une autre variété de drapeaux généralisés.

En utilisant la suite exacte (2.1.1.4) on obtient par exemple que l'homologie du complexe

$$\sum_O k_O^\times \xrightarrow{\oplus N_{k_O/k}(.\cup\alpha_O)} H^3(k, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(k(V), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$$

est triviale si la dimension de V est inférieure ou égale à deux et cyclique ou triviale si cette dimension est trois (cf. [4, corollaires 7.1 et 7.2]). Elle donne aussi un lien direct entre les résultats d'Arason sur le noyau de l'application de restriction [**Ara**] et celui de Karpenko sur le second groupe de Chow des quadriques [**Kar**]. Enfin elle nous permet de construire des exemples de produits de trois coniques ayant de la torsion dans le second groupe de Chow.

Dans [**Me**], Merkur′ev a étendu cette suite vers la gauche en montrant que le noyau de ϕ coïncide avec le groupe $H^1(V, \mathscr{K}^2)$. Dans [**Kah2**], Kahn montre comment cette suite exacte peut se déduire également de la suite spectrale d'Hochschild-Serre pour l'hypercohomologie relative de $k(V)$ au-dessus de k à

coefficients dans le complexe de Lichtenbaum $\Gamma(2)$ et qu'en outre cela permet de relier le conoyau du morphisme de restriction (2.1.1.3) à l'homologie du complexe

$$\mathrm{CH}^2(V) \to \mathrm{CH}^2(V^s) \to H^4(V^s_{\text{ét}}, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)).$$

Kahn a également montré comment en utilisant les résultats annoncés par Voevodsky, on pouvait obtenir des informations sur la partie de 2-torsion du conoyau de l'application de restriction en degré quatre, ce qui redonne en partie les résultats de [**KRS**].

Il serait intéressant de prolonger cette étude en degré supérieur, ne serait-ce que dans des cas particuliers comme celui des quadriques.

2.1.2. *Classes négligeables.* —

2.1.2.1. *Introduction.* — La notion de classe négligeable a été définie par Serre dans [**?**] si G est un groupe fini et A un G-module, un élément γ de $H^n(G, A)$ est *négligeable* si et seulement si pour tout corps k et tout morphisme continu ϕ du groupe $\mathrm{Gal}(k^s/k)$ vers G, $\phi^*(x)$ est trivial dans $H^n(k, A)$.

Entre autres résultats sur ces classes, Serre a notamment démontré les assertions suivantes

***Théorème 2.1.6* (Serre, [?, (7.1) et (7.2)]).** — *Si G est fini, il existe un entier $N(G)$ tel que pour tout $n > N(G)$, toute classe d'ordre impair de degré supérieur à $N(G)$ soit négligeable.*

Si G est un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel, alors les classes négligeables dans $H^*(G, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ forment un idéal engendré par les produits $a^2b - ab^2$ pour a et b dans $H^1(G, \mathbf{Z}/2\mathbf{Z})$ qui est isomorphe au dual de G.

Dans la suite on s'intéressera à une notion plus faible de classe négligeable si k est un corps, G un groupe fini et A un G-module, nous dirons qu'un élément γ de $H^n(G, A)$ est totalement k-négligeable si et seulement si pour toute extension K de k et tout morphisme continu $\phi : \mathrm{Gal}(K^s/K) \to G$, $\phi^*(x)$ est trivial dans $H^n(K, A)$.

En outre nous considérerons tout particulièrement le cas où $A = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$. Il est bien connu qu'en degré deux, si k est algébriquement clos et de caractéristique 0, alors on a une injection

$$H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z}) \to \mathrm{Br}(k(W)^G)$$

pour tout groupe G et toute représentation fidèle W de G au-dessus de k. Il en résulte qu'aucune classe de $H^2(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ n'est totalement k-négligeable.

Saltman a été le premier à construire des classes totalement k-négligeables de degré trois dans ce cadre. Le principe de leur construction donnée dans [**Sa2**] est le suivant soit W une représentation fidèle de G sur k, soit F le $\mathbf{Z}$-module libre sur l'ensemble des sous-variétés irréductibles de codimension deux de W qui sont invariantes sous l'action de G et soit $R \subset F$ le sous-module engendré par les diviseurs de fonctions rationnelles f sur une sous-variété irréductible G-invariante de codimension un de W telles que f^n soit G-invariante pour un entier n. Alors le quotient F/R est indépendant de la représentation fidèle choisie et est noté $N^3(G)$. Comme le note Saltman, ce groupe peut être considéré comme une sorte de groupe de Chow équivariant.

Théorème 2.1.7 **(Saltman** [**Sa2**, theorem 4. 14]**).** — *Avec les notations ci-dessus, il existe une surjection du groupe des classes totalement k-négligeables vers $N^3(G)$.*

Saltman montre ensuite que si G est un 2-groupe non commutatif possédant un sous-groupe cyclique d'indice 2, alors $N^3(G)$ est non nul.

2.1.2.2. *Lien avec les variétés de drapeaux.* — Si G est un groupe et k un corps, Serre a introduit la notion centrale de cas test, qui est la donnée d'une extension K de k et d'un morphisme continu $\phi : \mathrm{Gal}(K^s/K) \to G$ de sorte qu'une classe γ soit totalement k-négligeable si et seulement si $\phi^*(\gamma)$ est nul.

L'exemple le plus simple de tel cas test est justement donné par le corps des fonctions invariantes $k(W)^G$ où W est une représentation fidèle de G sur k. L'inconvénient toutefois de ce cas test est que ce corps d'invariants ne possède pas a priori de modèle géométrique lisse naturel auquel on puisse appliquer des techniques géométriques.

Toutefois, dans le cas particulier où G est une extension centrale d'un $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel U par un autre V, on dispose d'un modèle plus géométrique construit dans [4, §9] de la manière suivante. On considère la suite exacte

$$0 \to V \xrightarrow{j} G \xrightarrow{\pi} U \to 0. \tag{2.1.2.1}$$

Comme dans le paragraphe 2.1.1.3, cela induit un morphisme $\theta = \Lambda^2 U \to V$ défini par le commutateur. On suppose pour simplifier que l'application θ est surjective. On fixe un corps de base k de caractéristique 0 et contenant les racines de l'unité. Soit K_0 le corps $k(X_1, \ldots, X_n)$ où n est la dimension de U. On a alors un morphisme du dual $U^\vee$ de U vers $H^1(k(X_1, \ldots, X_n), \mu_p)$ envoyant une base duale d'une base $u_1, \ldots, u_n$ de U vers la famille $(X_1), \ldots, (X_n)$. Or le morphisme

θ induit une application $V^\vee \to \Lambda^2 U^\vee$ d'où un morphisme

$$\tilde{\theta} : V^\vee \to H^2(k(X_1,\dots,X_n),\mu_p^{\otimes 2}) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Br} k(X_1,\dots,X_n)_{(p)}.$$

La notion de corps de scindage générique amène à considérer les variétés de Severi-Brauer $Y_1,\dots,Y_n$ dont les classes dans le groupe de Brauer représentent les images d'une base $v_1^\vee,\dots,v_m^\vee$ de $V^\vee$. On note K le corps de fonctions $k(X_1,\dots,X_n)(Y_1\times\cdots\times Y_m)$. Alors le morphisme induit

$$\phi_U : \operatorname{Gal}(K^s/K) \twoheadrightarrow U$$

est tel que $\phi_U^*(\gamma) = 0$ où γ est la classe représentant l'extension (2.1.2.1). Par conséquent ϕ_U s'étend en un unique morphisme surjectif

$$\phi : \operatorname{Gal}(K^s/K) \twoheadrightarrow G.$$

Ce morphisme ϕ fournit un cas test [4, proposition 9.1].

En particulier, en considérant à nouveau le diagramme (2.1.1.2), on peut vouloir étudier les éléments de $\Lambda^3(U^\vee)$ dont les relevés dans $H^3(U,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$ donnent des clasees négligeables dans $H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ ce qui revient à étudier les éléments de $\Lambda^3 U^\vee$ dont l'image dans $H^3(K_0,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))$ appartient au noyau de l'application de restriction de K_0 à $K(Y_1\times\cdots\times Y_m)$. On peut alors utiliser les résultats du paragraphe 2.1.1.6 pour contrôler ce noyau.

On obtient ainsi que si U est un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel de base $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant 6}$ et si V est un $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel de base $(v_j)_{1\leqslant j\leqslant 4}$ et si γ est l'élément de $H^2(U,V) \xleftarrow{\sim} S^2(U^\vee)\otimes V$ donné par la formule

$$\gamma = u_2^\vee u_5^\vee \otimes v_1 + u_4^\vee u_1^\vee \otimes v_2 + u_6^\vee u_3^\vee \otimes v_3 + (u_1^\vee + u_3^\vee + u_5^\vee)(u_2^\vee + u_4^\vee + u_6^\vee)\otimes v_4$$

alors l'élément $u_1^\vee \wedge u_2^\vee \wedge u_3^\vee + u_4^\vee \wedge u_5^\vee \wedge u_6^\vee$ de $\Lambda^3 U^\vee$ fournit des classes non nulles mais totalement k-négligeables dans $H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ où G est l'extension de U par V définie par γ et k un corps de caractéristique 0 contenant les racines de l'unité.

2.1.2.3. *Perspectives.* — Notons tout d'abord que dans le cas considéré au paragraphe précédent la suite exacte (2.1.1.4) s'écrit

$$K_0^{\times m} \xrightarrow{\oplus . \cup \tilde{\theta}(v_i^\vee)} \operatorname{Ker}(H^3(K_0,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2)) \to H^3(K,\mathbf{Q}/\mathbf{Z}(2))) \to \mathrm{CH}^2(Y_1\times\cdots\times Y_m)_{\mathrm{tors}} \to 0.$$

Or l'image dans $\Lambda^3 U^\vee$ du noyau de l'application naturelle

$$H^3(U,\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}) \to H^3(G,\mathbf{Q}/\mathbf{Z})$$

coïncide avec le produit de $U^\vee$ par l'image de $V^\vee$ dans $\Lambda^2 U^\vee$. On en déduit que que les classes négligeables considérées dans $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ sont liées au sous-groupe de torsion de $\mathrm{CH}^2(Y_1 \times \cdots \times Y_m)$. Mais en fait ces variétés de Saveri-Brauer ont des modèles $\mathscr{Y}_i$ au-dessus du tore $T = \mathbf{G}_m^n$ et en prenant la variété produit $\mathscr{Y} = \times_T \mathscr{Y}_i$, on peut décrire ces classes négligeables en termes de $CH^2(\mathscr{Y})_{\mathrm{tors}}$. Or $\mathscr{Y}$ possède un G-revêtement galoisien naturel qui permet d'interpréter également ce groupe comme un groupe de Chow équivariant respectivement à une action du groupe G, comme dans la méthode utilisée par Saltman.

Il serait très intéressant de trouver un cadre commun à ces deux méthodes liant classes négligeables à coefficients $\mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et groupe de Chow équivariant.

D'autre part, les seuls exemples qui me sont connus de classes négligeables dans $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ sont de 2-torsion et dans les deux cas, le nombre premier 2 joue un rôle tout à fait particulier. Il n'est donc pas sans intérêt d'étudier le problème de l'existence de classes négligeables dans $H^3(G, \mathbf{Q}/\mathbf{Z})$ d'ordre premier à 2.

2.2. Points rationnels de hauteur bornée. —

2.2.1. *Introduction.* —

2.2.1.1. *Généralités.* — Un des problèmes à l'origine de la géométrie algébrique est l'étude de l'ensemble des solutions d'équations polynomiales et, plus précisément, en reprenant la question posée en introduction aux éléments de géométrie algébrique de Dieudonné et Grothendieck [**EGA**], « s'il est infini, peut-on donner des estimations asymptotiques du nombre de solutions satisfaisant à des inégalités supplémentaires où figurent des paramètres lorsque ces paramètres tendent vers certaines limites ? »

L'objectif est en fait de pouvoir interpréter ce comportement asymptotique en termes de la géométrie de la variété.

Parallèlement on est amené à étudier la répartition asymptotique des solutions, c'est à dire de quelle façon le comportement asymptotique du nombre de solutions dans un ouvert donné dépend de cet ouvert, que ce soit pour la topologie de Zariski ou la topologie adélique.

De nombreux progrès ont été réalisés récemment dans ce domaine notamment grâce à l'impulsion donnée par Manin.

Plus précisément, on fixe une variété V projective, lisse et géométriquement intègre sur un corps de nombres k. L'objet naturel pour compter les points rationnels de V est une hauteur d'Arakelov $\mathbf{h}$, dont on rappellera la définition au

paragraphe suivant. Pour tout sous-espace localement fermé de F de V on considère pour tout H de $\mathbf{R}_{>0}$

$$n_{F,\mathbf{h}}(H) = \#\{x \in F(k) \mid \mathbf{h}(x) \leqslant H\} \leqslant +\infty.$$

Dans tous les exemples qui me sont connus, on a que, si ce cardinal reste fini, alors son comportement asymptotique est de la forme

$$CH^a(\log H)^{b-1}$$

où $a \geqslant 0$, $b \geqslant 1$ et C est une constante réelle positive. A ces trois constantes correspond trois niveaux de précision dans l'interprétation, ainsi que trois notions de répartitions. Ainsi la variation de la constante a correspond à la notion de sous-variété strictement accumulatrice due à Manin, la constante b à la notion d'accumulation modérée tandis que la variation de C pour la topologie adélique fournira une notion d'équidistribution.

2.2.1.2. *Les hauteurs d'Arakelov.* —

Notations 2.2.1. — Dans la suite k désigne un corps de nombres et $\mathcal{O}_k$ son anneau des entiers. On notera M_k l'ensemble des places de k, c'est à dire des topologies sur k définies par des normes. On identifie l'ensemble des places non archimédiennes avec l'ensemble des idéaux premiers de $\mathcal{O}_k$ et on note M_∞ son complémentaire. Pour tout v de M_k, on note k_v le complété de k en v et on normalise la norme $|.|_v$ correspondante par

$$\forall v|p,\ \forall x \in k_v,\ |x|_v = \left|N_{k_v/\mathbf{Q}_p}(x)\right|_p.$$

Si v est une place finie, $\mathcal{O}_{k_v}$ désigne l'anneau local des entiers de k_v et $\mathbf{F}_v$ le corps résiduel. Si v appartient à M_∞ et $[k_v : \mathbf{R}] = 2$, on fixe un isomorphisme de k_v à $\mathbf{C}$.

La lettre d désigne le discriminant de k, défini comme le carré du déterminant de la matrice $(\sigma_i\omega_j)_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant j\leqslant N}}$ où N est le degré de l'extension $k/\mathbf{Q}$, $\{\sigma_i,\ 1 \leqslant i \leqslant N\}$ l'ensemble des plongements de k dans $\mathbf{C}$ et $(\omega_j)_{1\leqslant j\leqslant N}$ une base de O_k sur $\mathbf{Z}$.

Soit $\mathscr{X}$ un schéma sur un anneau A. Alors pour toute A-algèbre B, $\mathscr{X}(B)$ désigne l'ensemble $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}A}(\mathrm{Spec}B, \mathscr{X})$ et $\mathscr{X}_B$ le produit $\mathscr{X} \times_{\mathrm{Spec}A} \mathrm{Spec}B$. Si X est défini sur un corps E de clôture algébrique $\overline{E}$, on note $\overline{X}$ la variété $X_{\overline{E}}$. Le groupe de Picard de X est noté $\mathrm{Pic}X$,son groupe de Neron-Severi $\mathrm{NS}(X)$ et son faisceau canonique ω_X. On note $C_{\mathrm{eff}}(X)$ le cône des classes de diviseurs effectifs dans $\mathrm{NS}(X) \otimes \mathbf{R}$.

Si V est une variété sur un corps de nombres k, on se donne un modèle lisse $\mathscr{V}$ de V sur $\mathcal{O}_k$, c'est à dire un schéma lisse tel que $\mathscr{V}_k$ soit isomorphe à V. Pour toute place finie $\mathfrak{p}$ de k on dispose d'une application canonique $\mathscr{V}(\mathcal{O}_{k_\mathfrak{p}}) \to V(k_\mathfrak{p})$. L'espace adélique associé à V est alors défini comme la limite inductive

$$\varinjlim_S \prod_{v\in S} V(k_v) \times \prod_{v\notin S} \mathscr{V}(\mathcal{O}_{k_v})$$

où S décrit les ensembles finis de places contenant les places archimédiennes. Cet espace est muni de la limite des topologies produits.

Définitions 2.2.1. — Soit V une variété projective, lisse et géométriquement intègre sur k et L un fibré en droites au-dessus de V. Pour toute place v de k, une *métrique v-adique* sur L est une application

$$||.||_v : L(k_v) \to \mathbf{R}_{\geqslant 0}$$

ne s'annulant que sur la section nulle, telle que, pour tout ouvert W de V et toute section s de L sur W l'application qui envoie x sur $||\mathsf{s}(x)||_v$ soit continue pour la topologie v-adique, et telle que

$$\forall \lambda \in k_v,\ \forall x \in L(k_v),\ ||\lambda x||_v = |\lambda|_v\, ||x||_v.$$

Une *métrique adélique* sur L est une famille de métriques $(||.||_v)_{v\in M_k}$ de sorte qu'il existe un ensemble fini $S \subset M_f$, un modèle projectif et lisse $\mathscr{V}$ de V sur l'anneau des S-entiers $\mathcal{O}_S$ et un modèle $\mathscr{L}$ de L sur $\mathscr{V}$ de sorte que pour toute place $v \in M_f - S$, la métrique $||.||_v$ soit définie à l'aide de $\mathscr{L}$ de la manière suivante si x appartient à $V(k_v)$, son adhérence dans $\mathscr{V}_{\mathcal{O}_{k_v}}$ fournit un élément $\tilde{x}$ de $\mathscr{V}(\mathcal{O}_{k_v})$ et $\tilde{x}^*(\mathscr{L})$ définit un $\mathcal{O}_{k_v}$-sous-module de rang un de $L(x) = x^*(L)$ dont on note y_0 un générateur la norme $||.||_v$ sur $L(x)$ est alors donnée par la formule

$$\forall y \in L(x),\ ||y||_v = \left|\frac{y}{y_0}\right|_v.$$

Une *hauteur d'Arakelov* $\mathbf{h}$ sur V est la donnée d'une paire $(L, (||.||_v)_{v\in M_k})$ où L est un fibré en droites et $(||.||_v)_{v\in M_k}$ une métrique adélique sur L.

Si $\mathbf{h}$ est une hauteur d'Arakelov sur V et x un point rationnel de V, alors la *hauteur de x relativement à* $\mathbf{h}$ est définie par

$$\forall y \in L(x) - \{0\},\ \mathbf{h}(x) = \prod_{v\in M_k} ||y||_v^{-1}.$$

En effet par la formule du produit, le terme de droite est indépendant du choix de y.

Pour tout sous-ensemble localement fermé W de V et tout réel strictement positif H, on considère

$$n_{W,\mathbf{h}}(H) = \#\{x \in W(k) \mid \mathbf{h}(x) \leqslant H\} \leqslant +\infty.$$

L'ensemble $\mathscr{H}(V)$ des classes d'isomorphisme de hauteurs d'Arakelov muni du produit tensoriel est un groupe et on a un morphisme canonique

$$o : \mathscr{H}(V) \to N(V)$$

où $N(V)$ désigne le quotient $\mathrm{NS}(V)/\mathrm{NS}(V)_{\mathrm{tors}}$. On appelle *système de hauteurs* tout morphisme $\mathbf{H}$ de $N(V)$ dans $\mathscr{H}(V)$ qui est une section de o.

Tout système de hauteurs $\mathbf{H}$ définit un accouplement

$$\mathbf{H} : \mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{C} \times V(k) \to \mathbf{C}$$

qui est l'exponentielle d'une fonction linéaire en la première variable et tel que pour tout L de $N(V)$ et tout x de $V(k)$ on ait

$$\mathbf{H}(L \otimes 1, x) = \mathbf{H}(L)(x).$$

Comme dans [**Ar**] ou [**FMT**], on considère alors la *fontion zêta des hauteurs* définie pour tout ouvert de Zariski U par la série

$$\zeta_{U,\mathbf{H}}(s) = \sum_{x \in U(k)} \mathbf{H}(s,x)^{-1}$$

série qui converge sur un cône ouvert de $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{C}$.

Il faut noter que si la classe du fibré L dans $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{R}$ appartient à l'intérieur du cône des classes de diviseurs effectifs, alors il existe un ouvert U sur lequel pour tout H de $\mathbf{R}_{>0}$, on a

$$n_{U,\mathbf{h}}(H) < +\infty.$$

Notre but est donc d'étudier le comportement asymptotique de ce nombre lorsque H tend vers l'infini.

2.2.1.3. *Premier niveau : la puissance de H.* —

Définition 2.2.2. — Soient $\mathbf{h}$ une hauteur d'Arakelov sur une variété projective et lisse V et F un sous-ensemble localement fermé de V. Alors

$$a_F(L) = \varlimsup_{H \to +\infty} \log n_{F,\mathbf{h}}(H)/\log H \leqslant +\infty$$

ne dépend que du choix de la classe de L dans le groupe $N(V)$, [**BM**, proposition 1.4].

La constante $a_F(L)$ représente donc la puissance de H apparaissant dans le comportement asymptotique $n_{F,\mathbf{h}}(H)$.

Définition 2.2.3. — (cf. [**BM**, définition 2.1])

$$a^{\text{géo}}(L) = \inf\{\gamma \in \mathbf{R}_{>0} \mid \gamma[L] + [\omega_V^{-1}] \in C_{\text{eff}}(V)\} \leqslant +\infty.$$

Les deux constantes sont liées par la conjecture suivante

Conjecture 2.2.1 **(Batyrev et Manin** [**BM**, conjectures A et B]**)**
Si L est ample, pour tout réel ε strictement positif, il existe un ouvert de Zariski non vide U de V tel que

$$a_U(L) < a^{\text{géo}}(L) + \varepsilon.$$

Si en outre V est de Fano, c'est à dire si ω_V^{-1} est ample, alors il existe k_0 tel que pour toute extension finie k' de k contenant k_0 et tout ouvert de Zariski non vide U suffisamment petit de V, on ait

$$a_{U_{k'}}(L) = a^{\text{géo}}(L).$$

Remarques 2.2.2. — Remarquons quelques cas particulier de cette conjecture si V est de type général, c'est à dire si ω_V est quasi-ample, alors $a^{\text{géo}}(L) = 0$ pour tout L et on peut rapprocher cette conjecture de celles de Lang et Vojta qui prévoient que dans ce cas l'ensemble des points rationnels n'est pas Zariski dense dans V.

Si V est une surface avec $\omega_V = 0$, alors par [**BM**, théorème 3.5], elle implique que pour tout $\varepsilon > 0$ et toute hauteur $\mathbf{h}$ dont le fibré L est ample, si $V(\varepsilon, L)$ désigne la réunion des courbes k-rationnelles C telles que $(C, L) < 2\varepsilon^{-1}$, alors

$$n_{V,\mathbf{h}}(H) = n_{V(\varepsilon,L),\mathbf{h}}(H) + \mathcal{O}(H^{\varepsilon}).$$

De manière intuitive, la « plupart » des points de V sont dans l'union des courbes k-rationnelles de V.

Si V est une variété abélienne alors il résulte des travaux de Neron que pour tout L ample et toute hauteur $\mathbf{h}$ relative à L,

$$\begin{array}{rcl} n_{V,\mathbf{h}}(H) & \sim & C(\log H)^r \\ H & \to & +\infty \end{array}$$

et la conjecture est vérifiée.

La dépendance de $a_U(L)$ en U permet de définir la notion d'accumulation stricte

Définitions 2.2.2 **(Batyrev et Manin** [**BM**, §2]**).** — Un sous-espace fermé irréductible F de V est dit *L-accumulateur* si et seulement si pour tout ouvert non vide W de F, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$a_W(L) > a_U(L).$$

Si $\tilde{F}$ est une normalisation de F et $\tilde{F}_0$ l'ouvert des points lisses de $\tilde{F}$, on définit également

$$a_F^{\text{géo}}(L) = \inf\{p/q,\, p, q \in \mathbf{N} - \{0\} \mid h^0(\tilde{F}_0, \phi^*(L)^{\otimes p} \otimes \omega_{\tilde{F}_0}^{\otimes q}) > 0\}$$

où $\phi : \tilde{F}_0 \to V$ est l'application naturelle.

Le fermé F est alors dit géométriquement *L-accumulateur* si et seulement si

$$a_F^{\text{géo}}(L) > a_V^{\text{géo}}(L)$$

Une question naturelle est alors le lien entre sous-variétés accumulatrices et sous-variétés géométriquement accumulatrices.

Si les théorèmes taubériens peuvent être appliqués à la fonction envoyant un complexe s sur $\zeta_{\mathbf{H}}(sL)$, alors la constante $a_U(L)$ est donnée par

$$a_U(L) = \inf\{\sigma \mid \zeta_{U,\mathbf{H}}(sL) \text{ converge pour } \operatorname{Re} s > \sigma\}$$

ce qui conduit à la conjecture suivante

Conjecture 2.2.3 **(Batyrev, Manin, Tschinkel).** — *Si V est une variété de Fano et* $\mathbf{H}$ *un système de hauteurs sur V, alors pour tout ouvert U suffisamment petit la fonction $\zeta_{U,\mathbf{H}}$ converge sur le cône*

$$\omega_V^{-1} + \overset{\circ}{\widehat{C_{\text{eff}}(V)}} + i\,\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{R}.$$

2.2.1.4. *Deuxième niveau : la puissance de $\log H$.* —

Définitions 2.2.3. — Soit $\mathbf{h}$ une hauteur d'Arakelov sur V variété projective et lisse. On note L le fibré sous-jacent. Pour tout sous-ensemble constructible F de V, on pose

$$b_F(\mathbf{h}) = \varlimsup_{H \to +\infty} \log(n_{F,\mathbf{h}}(H)/H^{a_F(L)})/\log\log H + 1 \leqslant +\infty.$$

Avec les mêmes notations, si $0 < a^{\text{géo}}(L) < +\infty$, on note $b^{\text{géo}}(L)$ la codimension de la face du cône $[\omega_V^{-1}] + C_{\text{eff}}(V)$ contenant $a^{\text{géo}}(L)[L]$.

Ces deux constantes sont liées par la question suivante

Question 2.2.4. — *(cf.* [**BM**, conjecture C'])*Pour quelles variétés V parmi celles telles que ω_V^{-1} ne soit pas effectif, a-t-on que pour toute hauteur* $\mathbf{h}$ *dont le fibré L est à l'intérieur du cône des classes de diviseurs effectifs, pour tout corps k suffisamment grand et tout ouvert U assez petit*

$$b_U(\mathbf{h}) = b^{\text{géo}}(L).$$

En montrant que pour un choix judicieux du système de hauteurs sur les variétés de drapeaux généralisés, la fonction zêta est une série d'Eisenstein, Franke, Manin et Tschinkel ont déduit des travaux de Langlands le résultat suivant

Théorème 2.2.5 **(Franke, Manin et Tschinkel,** [**FMT**, §2]**)**
La réponse à la question 2.2.4 est positive si V est une variété de drapeaux généralisés possédant un point rationnel, c'est à dire un quotient $P\backslash G$ où G est un groupe algébrique linéaire semi-simple et P un sous-groupe parabolique lisse de G.

Remarques 2.2.6. — Il résulte également de leurs travaux qu'une réponse positive est compatible avec les résultats de la méthode du cercle pour les intersections complètes lisses de grande dimension dans l'espace pojectif ainsi qu'avec le produit de variétés.

Salberger a également démontré que si V est la surface obtenue en éclatant quatre points rationnels en position générale sur $\mathbf{P}^2_{\mathbf{Q}}$ et si U désigne le complémentaire dans V des diviseurs exceptionnels, alors il existe $\mathbf{h} = (\omega_V^{-1}, (||\cdot||_v)_{v\in M_k})$ et $C > 0$ telle que

$$n_{U,\mathbf{h}}(H) \leqslant CH\log^4 H.$$

Toutefois batyrev et Tschinkel ont construit dans [**BT2**] un exemple de variété de Fano fibrée en surfaces cubiques au-dessus de l'espace projectif pour laquelle la réponse à la question est négative.

On pourrait définir une notion d'accumulation en termes de la constante b, comme on l'a fait pour a, mais les exemples amènent a considérer plutôt la notion suivante

Définitions 2.2.4. — Soit $\mathbf{h}$ une hauteur dont le fibré est à l'intérieur de $C_{\text{eff}}(V)$. Un fermé irréductible strict F de V est dit *modérément accumulateur* pour $\mathbf{h}$ si et seulement si pour tout ouvert non vide W de F, il existe un ouvert non vide U de V tel que

$$\overline{\lim_{H\to+\infty}} \frac{n_{W,\mathbf{h}}(H)}{n_{U,\mathbf{h}}(H)} > 0$$

Si en outre F est lisse et $0 < a_F^{\text{géo}}(L) < +\infty$, alors on définit $b_F^{\text{géo}}(L)$ comme la codimension dans $\mathrm{NS}(F) \otimes \mathbf{R}$ de la face du cône $[\omega_F^{-1}] + C_{\text{eff}}(F)$ contenant $a_F^{\text{géo}}(L)[L_{|F}]$.

On peut alors se demander si les sous-variétés modérément accumulatrices minimales sont données soit par la relation $a_F^{\text{géo}}(L) > a_V^{\text{géo}}(L)$ auquel cas F est géométriquement accumulatrice ou bien par la relation $a_F^{\text{géo}}(L) = a_V^{\text{géo}}(L)$ et $b_F^{\text{géo}}(L) \geqslant b_V^{\text{géo}}(L)$.

Remarque 2.2.7. — Si $V = \mathbf{P}_k^1 \times \mathbf{P}_k^1$ et si $\mathbf{h}$ est une hauteur de fibré $\mathcal{O}(m, m')$ avec $m > m' > 0$, toutes les fibres de la projection sur le premier facteur sont modérément accumulatrices. Dans ce cas si

$$o(\mathbf{h}) \in \overset{\circ}{\overbrace{C_{\text{eff}}(V)}} - \mathbf{R}_{>0}[\omega_V^{-1}]$$

alors les sous-variétés modérément accumulatrices sont Zariski denses.

Par contre, si $o(\mathbf{h}) = [\omega_V^{-1}]$, à ma connaissance les seuls exemples étudiés où on ait des raisons de croire à leur densité sont ceux donnés par Batyrev et Tschinkel dans [**BT2**].

Comme dans le paragraphe précédent, la question 2.2.4 est liée à une question analogue en termes de la fonction zêta des hauteurs.

Définition 2.2.4. — (cf. Köcher [**Kö**]) Si C est un cône dans un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E muni d'un réseau L, la fonction caractéristique de C est définie par

$$\forall s \in E \otimes \mathbf{C},\ \chi_C(s) = \int_{C^\vee} \exp^{-\langle s, y\rangle}\, dy$$

où $C^\vee$ est le cône dual de C c'est à dire

$$C^\vee = \{\, x \in E^\vee \mid \forall y \in C,\ \langle x, y\rangle > 0 \,\}$$

et dy est la mesure de Haar normalisée par le réseau L.

En particulier, on note $\chi_{C_{\text{eff}}(V)}$ la fonction caractéristique du cône des classes de diviseurs effectifs dans $\mathrm{NS}(V) \otimes \mathbf{R}$.

Question 2.2.8. — *(cf. Batyrev et Tschinkel,* [**BT1**] *et* [**BT3**]*) Pour quelles variétés V dont la classe du faisceau anticanonique ω_V^{-1} appartient à l'intérieur du cône des classes de diviseurs effectifs et dont les points rationnels sont Zariski denses existe-t-il*

un ouvert U et un système de hauteurs $\mathbf{H}$ *de sorte que la fonction* $\zeta_{U,\mathbf{H}}(s)/\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})$ *s'étende en une fonction holomorphe sur un ouvert contenant*

$$\omega_V^{-1} + C_{\mathrm{eff}}(V) + i\operatorname{Pic} V \otimes \mathbf{R}$$

et prenne une valeur non nulle en ω_V^{-1} *?*

Théorème 2.2.9 **(Batyrev et Tschinkel, [BT1] et [BT3])**
La réponse à la question 2.2.8 est positive si V est une compactification équivariante lisse d'un tore sur k.

2.2.2. *Troisième niveau : la constante.* —

2.2.2.1. *Formule empirique.* — Dans [5], je me suis intéressé à la constante C dans le cas particulier où le fibré L est le faisceau anticanonique ω_V^{-1}. Le point de départ de ce travail est une remarque de Beukers qui m'a été transmise par Manin au sujet du produit eulérien

$$\prod_{p \text{ premier}} \left(1-\frac{1}{p}\right)^4 \left(1+\frac{4}{p}+\frac{1}{p^2}\right)$$

qui apparaît dans la constante que j'avais obtenue pour le plan projectif éclaté en trois points rationnels en position générale. Beukers avait effectivement noté que le facteur (p^2+4p+1) n'était autre que le nombre de points dans la variété sur le corps $\mathbf{F}_p$ et 4 le rang du groupe de Picard.

Cette remarque ainsi que diverses considérations sur les variations de la constante en fonction du choix de la métrique m'ont amené aux constructions qui suivent.

Hypothèses 1. — On supppose désormais que V est une variété projective, lisse et géométriquement intègre vérifiant les conditions suivantes

(i) les groupes de cohomologie $H^i(V,\mathcal{O}_V)$ sont nuls pour $i = 1$ ou 2,
(ii) le groupe de Picard géométrique $\operatorname{Pic}\overline{V}$ est sans torsion,
(iii) le faisceau anti-canonique ω_V^{-1} appartient à l'intérieur du cône $C_{\mathrm{eff}}(V)$,
(iv) $V(k)$ est dense dans V pour la topologie de Zariski.

Notations 2.2.5. — On fixe dans ce paragraphe une hauteur d'Arakelov $\mathbf{h}$ de la forme $(\omega_V^{-1}, (||.||_v)_{v\in M_k})$.

Pour toute place v de k, on normalise la mesure de Haar dx_v sur k_v de la manière suivante

- si $v \in M_f$ alors $\int_{\mathcal{O}_{k_v}} dx_v = 1$,

- si $k_v = \mathbf{R}$, alors dx_v est la mesure de Lebesgue usuelle,
- si $k_v = \mathbf{C}$, alors $dx_v = i dz\, d\bar{z} = 2 dx\, dy$.

Pour toute place v de k, $||.||_v$ correspond à une mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}$ sur $V(k_v)$ définie par la relation

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v} = \left\| \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n} \right\|_v dx_{1,v} \ldots dx_{n,v},$$

pour tout système de coordonnées locales analytiques sur $V(k_v)$, le produit $\frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$ étant vu comme section locale de ω_V^{-1}.

On se donne un ensemble fini S de mauvaises places pour V contenant l'ensemble des places archimédiennes et un modèle $\mathscr{V}$ de V sur $\mathcal{O}_S$.

Pour toute place $\mathfrak{p}$ de $M_f - S$, le terme local de la fonction L associée à $\operatorname{Pic}\overline{V}$ est défini par

$$L_{\mathfrak{p}}(s, \operatorname{Pic}\overline{V}) = \frac{1}{\operatorname{Det}(1 - (\#\mathbf{F}_{\mathfrak{p}})^{-s} \operatorname{Fr}_{\mathfrak{p}} \mid \operatorname{Pic}\mathscr{V}_{\overline{\mathbf{F}_{\mathfrak{p}}}} \otimes \mathbf{Q})}$$

où $\operatorname{Fr}_{\mathfrak{p}}$ désigne le morphisme de Frobenius géométrique en $\mathfrak{p}$, c'est à dire l'inverse du morphisme induit fonctoriellement par le morphisme de Frobenius $x \mapsto x^{N(\mathfrak{p})}$.

La fonction L globale est alors définie par le produit eulérien

$$L_S(s, \operatorname{Pic}\overline{V}) = \prod_{\mathfrak{p} \in M_f - S} L_{\mathfrak{p}}(s, \operatorname{Pic}\overline{V}).$$

Quitte à augmenter S ce produit converge absolument pour $\operatorname{Re} s > 1$ et s'étend en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ avec un pôle d'ordre $t = \operatorname{rg}\operatorname{Pic} V$ en 1 (cf. [5, lemme 2.2.5]).

On définit les facteurs de convergence $(\lambda_v)_{v \in M_k}$ par

$$\lambda_v = \begin{cases} L_v(1, \operatorname{Pic}\overline{V}) & \text{si } v \in M_f - S \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les conjectures de Weil démontrées par Deligne [**De**] impliquent que la mesure adélique $\prod_{v \in M_k} \lambda_v^{-1} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}$ converge et définit une mesure borélienne sur $V(\boldsymbol{A}_k)$ (cf. [5, proposition 2.2.2]).

Définition 2.2.6. — La *mesure de Tamagawa* associée à $\mathbf{h}$ est définie par

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}} = (\lim_{s\to 1}(s-1)^t L_S(s, \operatorname{Pic}\overline{V}))\frac{1}{\sqrt{d}^{\dim V}}\prod_{v\in M_k}\lambda_v^{-1}\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}$$

où t est le rang de $\operatorname{Pic} V$.

Remarque 2.2.10. — Elle est indépendante du choix de S.

Définition 2.2.7. — On pose

$$\tau_{\mathbf{h}}(V) = \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}(\overline{V(k)}),$$

$$\alpha(V) = \frac{\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(\omega_V^{-1})}{(t-1)!}$$

et

$$\beta(V) = \#H^1(k, \operatorname{Pic}\overline{V}).$$

Remarques 2.2.11. — Le choix de l'adhérence des points rationnels comme domaine d'intégration est inspiré par l'étude faite par Swinnerton-Dyer dans [**SD**].

La constante $\alpha(V)$ est rationnelle lorsque le cône des diviseurs effectifs est un cône polyédrique rationnel de $\operatorname{NS}(V)\otimes\mathbf{R}$, c'est-à-dire de la forme $\sum_{i\in I}\mathbf{R}_{\geqslant 0}e_i\otimes 1$ où $(e_i)_{i\in I}$ est une famille finie de $\operatorname{NS}(V)$.

L'introduction de la constante $\beta(V)$ est due à Batyrev et Tschinkel ([**BT1**] et [**BT3**]).

Question 2.2.12. — *Si V est une varitéé vérifiant les hypothèses 1, si* $\mathbf{h}$ *est une hauteur d'Arakelov sur V de fibré associé ω_V^{-1}, et si le complémentaire U dans V des sous-variétés modérément accumulatrices pour h est un ouvert de Zariski non vide de V, à quelle condition a-t-on*

$$\begin{array}{rcl} n_{U,\mathbf{h}}(H) & \sim & \alpha(V)\beta(V)\tau_{\mathbf{h}}(V)H(\log H)^{t-1} \\ H & \to & +\infty \end{array} \tag{2.2.2.1}$$

où t est le rang du groupe de Picard de V ?

2.2.2.2. *Résultats.* — Les résultats qui viennent appuyer cette formule empirique sont les suivants

(i) La formule asymptotique 2.2.2.1 est stable par produit de variétés [**FMT**, proposition 2] et [5, corollaire 4.3],

(ii) Elle est compatible avec les résultats de la méthode du cercle [5, corollaire 5.4.9],

(iii) Elle coïncide avec les résultats de Schanuel et de Langlands, Franke, Manin et Tschinkel pour les variétés de drapeaux généralisés possédant un point rationnel [5, théorèmes 6.1.1 et 6.2.2],
(iv) Batyrev et Tschinkel ont démontré qu'elle est valide pour les variétés toriques [**BT1**] et [**BT3**], résultat qui avait été démontré dans quelques cas particuliers dans [5, §8 à 11].

2.2.2.3. *Equirépartition.* — De même que les notions d'accumulation et d'accumulation modérée correspondaient aux variations des constantes $a_F(L)$ et $b_F(L)$, la notion d'équidistribution correspond aux variations de la constante C. Il faut noter que, lorsque $L = \omega_V^{-1}$ cette constante est en général indépendante de l'ouvert de Zariski choisi lorsque celui-ci est contenu dans le complémentaire des sous-variétés accumulatrices. On peut alors passer à l'analyse plus fine de sa dépendance du point de vue de la topologie adélique.

Définition 2.2.8. — Nous dirons qu'un ouvert W de $V(\boldsymbol{A}_k)$ est bon si et seulement s'il existe une hauteur $\mathbf{h}$ de fibré associé ω_V^{-1} telle que $\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}(\partial W) = 0$ où $\partial W = \overline{W} - W$. Cela est alors vrai pour toute telle hauteur.

On dit alors que les points rationnels de V sont *équidistribués* sur U ouvert de Zariski de V si et seulement s'il existe une hauteur $\mathbf{h}$ de fibré ω_V^{-1} telle que pour tout bon ouvert W de $V(\boldsymbol{A}_k)$ on ait

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\#\{x \in U(k) \cap W \mid \mathbf{h}(x) \leqslant H\}}{n_{U,\mathbf{h}}(H)} & \to & \dfrac{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}(W \cap \overline{V(k)})}{\boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h}}(\overline{V(k)})} \\ H & \to & +\infty. \end{array} \tag{2.2.2.2}$$

Remarques 2.2.13. — Si les points de V sont équidistribués sur U, alors celui-ci est nécessairement inclus dans le complémentaire des sous-variétés modérément accumulatrices de V.

Si la formule asymptotique 2.2.2.1 et les limites 2.2.2.2 sont valides pour une même hauteur $\mathbf{h}$, alors elles sont vraies pour toute hauteur d'Arakelov relative à ω_V^{-1} (cf. [5, proposition 3.3])

Par [5, proposition 6.2.15] et [5, proposition 5.5.3], les points de V sont équidistribués sur V si V est une variété de drapeaux généralisée ou si V est une intersection complète lisse de grande dimension.

2.2.2.4. *Expression en termes de la fonction zêta.* — On peut également affiner la question 2.2.12 de la manière suivante

Question 2.2.14. — *(cf.* [5], [**BT1**] *et* [**BT3**]*) Pour quelles variétés V vérifiant les hypothèses 1 existe-t-il* $\mathbf{H}$ *et U de sorte que la fonction*

$$\zeta_{U,\mathbf{H}}(s)/\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})$$

s'étende en une fonction holomorphe sur un ouvert contenant

$$\omega_V^{-1} + C_{\mathrm{eff}}(V) + i\,\mathrm{Pic}\,V \otimes \mathbf{R}$$

et prenne la valeur $\beta(V)\tau_{\mathbf{h}}(V)$ en ω_V^{-1} ?

2.2.3. *Montée aux torseurs universels.* — Dans [6], je montre comment ces diverses questions s'expriment de manière naturelle lorsqu'on les relève aux torseurs universels. La notion de torseur universel a été introduite par Colliot-Thélène et Sansuc dans [**CTS1**] et [**CTS2**] en liaison avec le principe de Hasse et l'approximation faible. Dans le cas des intersections complètes lisses dans l'espace projectif, ils sont donnés par le cône au-dessus de la variété et, dans le cas des variétés toriques, par le spectre de l'anneau des coordonnées homogènes (cf. [**Sal**, §8]).

Leur rôle dans le problème qui nous intéresse apparaît de manière implicite dans le cas des intersections complètes lisses et de manière plus explicite dans les démonstrations de la formule (2.2.2.1) pour les variétés toriques étudiées dans [5], dans le travail de Robbiani [**Ro**] et dans le travail de Salberger et de Skorobogatov sur les surfaces de Del Pezzo de degré 5. Plus récemment, Salberger a démontré dans [**Sal**] que la constante $\beta(V)\tau_{\mathbf{h}}(V)$ peut s'exprimer comme somme de nombres de Tamagawa pour les torseurs universels.

Mon but dans [6] a été en fait de généraliser les notions qui interviennent dans le cas des intersections complètes lisses dans l'espace projectif pour écrire les questions qui précèdent sous la forme de passage d'une somme sur les points rationnels des torseurs universels à l'intégrale sur l'espace adélique associé.

Définitions 2.2.5. — Si G est un groupe algébrique linéaire sur un corps E et $\pi : X \to Y$ un morphisme fidèlement plat et $\mu : G \times X \to X$ une action de G sur X compatible avec π, alors X est un *G-torseur* ou *espace principal homogène sous G* au-dessus de Y si et seulement si l'application $(g,x) \mapsto (gx,x)$ est un isomorphisme de $G \times_E X$ sur $X \times_Y X$.

Si T est un tore sur E, c'est à dire une E-forme de $\mathbf{G}_m^n$, de groupe des caractères $X^*(T)$ sur E^s, alors à tout torseur $\mathcal{T}$ sous T au-dessus d'une variété propre, lisse et géométriquement intègre X, on associe

$$\rho(\mathcal{T}) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Gal}(E^s/E)}(X^*(T), \mathrm{Pic}\,X_{E^s})$$

qui envoie un caractère ξ de T sur la classe du $\mathbf{G}_m$-torseur $\xi_*(\mathcal{T})$ dans $\mathrm{Pic}\,X_{E^s}$.

Un *torseur universel* pour une variété propre, lisse et géométriquement intègre X dont le groupe de Picard géométrique $\mathrm{Pic}X_{E_s}$, est discret et sans torsion est un torseur $\mathcal{T}$ sous le tore T_{NS}, caractérisé par $X^*(T_{\mathrm{NS}}) = \mathrm{Pic}X_{E^s}$, tel que $\rho(\mathcal{T})$ soit le morphisme identité.

Notation 2.2.9. — On note $\mathscr{D}(C_{\mathrm{eff}}(V)) \subset C_{\mathrm{eff}}(V)$ le cône défini par

$$\mathscr{D}(C_{\mathrm{eff}}(V)) = \{x \in \mathrm{Pic}\,V \otimes \mathbf{R} \mid \forall y \in C_{\mathrm{eff}}(V)^\vee,\ \langle x, y\rangle > 1\}.$$

Hypothèses 2. — Dans la suite on supposera en outre que

(i) le faisceau anticanonique ω_V^{-1} appartient à l'ouvert $\mathscr{D}(C_{\mathrm{eff}}(V))$,

(ii) le cône $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ est un cône polyédrique rationnel de $\mathrm{Pic}\,\overline{V} \otimes \mathbf{R}$,

(iii) le complémentaire dans V des sous-variétés modérément accumulatrices pour toute hauteur de fibré ω_V^{-1} est un ouvert de Zariski non vide U de V,

(iv) les torseurs universels au-dessus de V vérifient le principe de Hasse et l'approximation faible, c'est-à-dire que si $\mathcal{T}$ est un tel torseur alors

$$\prod_{v \in M_k} \mathcal{T}(k_v) \neq \varnothing \Rightarrow \mathcal{T}(k) \neq \varnothing$$

et, pour tout ensemble fini S de places, $\mathcal{T}(k)$ est dense dans $\prod_{v \in S} \mathcal{T}(k_v)$.

Notations 2.2.10. — Soit K une extension finie de k telle que $\mathrm{Pic}\,V_K$ soit isomorphe à $\mathrm{Pic}\,\overline{V}$. On fixe un système de hauteurs $\mathbf{H}_K$ sur V_K. Si L est un fibré en droites et $(L, (||.||_v)_{v \in M_k})$ un représentant de $\mathbf{H}_K([L])$, on a une métrique adélique définie par

$$\forall \mathfrak{p} \in M_k,\ \forall x \in V(k_\mathfrak{p}),\ \forall y \in L(x),\ ||y||_\mathfrak{p} = (\prod_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} ||y||_\mathfrak{P})^{1/[K:k]}.$$

On obtient un système de hauteurs pour V appelé *système induit*.

Si $\mathcal{T}$ est un torseur universel au-dessus de V ayant un point rationnel y_0, alors pour tout fibré en droites L, sa classe définit un morphisme $\mathbf{Z} \to \mathrm{Pic}\,\overline{V}$ envoyant 1 sur $[L]$, ce qui induit une surjection $\phi_L : T_{\mathrm{NS}} \to \mathbf{G}_m$ et le $\mathbf{G}_m$-torseur $\phi_{L*}(\mathcal{T})$ est isomorphe au $\mathbf{G}_m$-torseur obtenu en ôtant à L la section nulle, d'où un morphisme $\psi_L : \mathcal{T} \to L^\times$ compatible avec ϕ_L. On fixe une place $\mathfrak{P}_0$ de K. On définit alors $||.||_\mathfrak{P}^L : \mathcal{T}(K_\mathfrak{P}) \to \mathbf{R}_{>0}$ par

$$\forall y \in \mathcal{T}(K_\mathfrak{P}),\ ||y||_\mathfrak{P}^L = \begin{cases} ||\psi_L(y)||_\mathfrak{P} / ||\psi_L(y_0)||_\mathfrak{P} & \text{si } \mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}_0 \\ ||\psi_L(y)||_\mathfrak{P} / ||\psi_L(y_0)||_\mathfrak{P}\, \mathbf{H}_K(L, \pi(y_0))^{-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

où $(L, (||.||_{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P}\in M_K})$ représente $H_K([L])$.

Pour toute place $\mathfrak{P}$ de K on pose alors

$$\mathcal{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{P}}}) = \{y \in \mathcal{T}(K_{\mathfrak{P}}) \mid \forall L \in C_{\mathrm{eff}}(V_{K_{\mathfrak{P}}}),\ ||y||_{\mathfrak{P}}^{L} \geqslant 1\}$$

et si $\mathfrak{p}$ est une place de k

$$\mathcal{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}) = \mathcal{T}(k_{\mathfrak{p}}) \cap \bigcap_{\mathfrak{P}|\mathfrak{p}} \mathcal{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{K_{\mathfrak{P}}}).$$

Définition 2.2.11. — Le produit restreint de $\mathcal{T}(k_{\mathfrak{p}})$ relativement aux $\mathcal{T}_{\mathbf{H}}(\mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}})$ est indépendant des choix effectués (cf. [6, corollaire 4.2.3]), on l'appelle *espace adélique associé à* $\mathcal{T}$ *et à* $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ et on le note $\mathcal{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$.

Nous allons maintenant munir cet espace de type adélique d'une mesure canonique.

Notations 2.2.12. — Soient T un tore, de groupe des caractères $X^*(T)$ et $(\xi_i)_{1\leqslant i\leqslant \dim T}$ un base de $X^*(T)$. Alors la forme différentielle

$$\omega_T = \bigwedge_{i=1}^{\dim T} \xi_i^{-1} d\xi_i$$

est indépendante, au signe près, du choix de la base et est définie sur le corps de base.

Comme dans [**We**], ω_T définit pour toute place v de k une mesure $\boldsymbol{\omega}_{T,v}$ sur $T(k_v)$.

Si $\mathcal{T}$ est un torseur universel au-dessus de V et x un point de $V(k_v)$ au-dessus duquel $\mathcal{T}$ a un point rationnel y_0 sur k_v, on définit la mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x,v}$ par la relation

$$\int_{\mathcal{T}_x(k_v)} f(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x,v}(y) = \int_{T_{\mathrm{NS}}(k_v)} f(r.y_0)||r.y_0||_v^{\omega_V}\boldsymbol{\omega}_{T_{\mathrm{NS}},v}(r).$$

La mesure $\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}$ sur $\mathcal{T}(k_v)$ est alors définie par

$$\int_{\mathcal{T}(k_v)} f(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}(y) = \int_{V(k_v)} \boldsymbol{\omega}_{\mathbf{h},v}(x) \int_{\mathcal{T}_x(k_v)} f(y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_x,v}(y)$$

où $\mathbf{h}$ est un représentant de $\mathbf{H}([\omega_V^{-1}])$.

Proposition 2.2.15 **([6, proposition 4.4.2 et lemme 4.4.3])**

Le produit des mesures $\prod_{v\in M_k} \boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T},v}$ *converge sur* $\mathcal{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$ *et définit une mesure canonique sur cet espace adélique.*

Nous aurons également besoin des fonctions L associées par Draxl à un cône de caractères d'un tore [**Dr**].

Définitions 2.2.6. — Si T est un tore sur k et C un cône polyédrique rationnel de $X^*(T)$, k' une extension finie de k déployant T et $\mathfrak{P}$ une place de k', alors

$$T(C, \mathcal{O}_{K_{\mathfrak{P}}}) = \{ r \in T(K_{\mathfrak{P}}) \mid \forall \xi \in C \cap X^*(T),\ \xi(r) \in \mathcal{O}_{K_{\mathfrak{P}}} \}$$

et si $\mathfrak{p}|\mathfrak{P}$,

$$T(C, \mathcal{O}_{k_{\mathfrak{p}}}) = T(C, \mathcal{O}_{K_{\mathfrak{P}}}) \cap T(k_{\mathfrak{p}}).$$

Pour toute place v de k, on note $\mathscr{G}_v$ le stabilisateur de v dans $\mathrm{Gal}(k^s/k)$ et $X^*(T)_v$ le groupe $X^*(T)^{\mathscr{G}_v}$. On dispose alors d'un morphisme

$$\log_v : T(k_v) \to X^*(T)_v^\vee \otimes \mathbf{R}$$

qui à $r \in T(k_v)$ associe $\chi \mapsto \log|\chi(r)|_v / \log q_v$ où q_v vaut $\#\mathbf{F}_v$ si v est finie, e si $k_v = \mathbf{R}$ et e^2 sinon.

Le terme local de la fonction L associée à C est alors défini pour tout s appartenant à $C + iX^*(T) \otimes \mathbf{R}$ par

$$L_v(s, T, C) = \frac{1}{\boldsymbol{\omega}_{T,v}(T(\mathcal{O}_{k_v}))} \int_{T(C, \mathcal{O}_{k_v})} \exp(\langle s, \log_v r \rangle) \boldsymbol{\omega}_{T,v}(r)$$

et pour tout ensemble fini de places S la fonction globale correspondante est donnée par

$$L_S(s, T, C) = \prod_{v \in M_k - S} L_v(s, T, C).$$

Draxl a montré dans [**Dr**, proposition 3] que ce produit eulérien converge sur

$$\mathscr{D}(C) = \{ x \in C \mid \forall y \in C^\vee,\ \langle x, y \rangle > 1 \}.$$

Notation 2.2.13. — Soit $(\mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille de représentants des classes d'isomorphisme de torseurs universels au-dessus de V ayant un point rationnel sur k. Par [**CTS1**, proposition 2], cette famille est finie.

Théorème 2.2.16. — *Avec les notations précédentes et sous les hypothèses 1 et 2, il existe des fonctions*

$$\phi_{\mathcal{T}_i}^{\mathbf{H}} : \mathrm{Pic}\, V \otimes \mathbf{C} \times \mathcal{T}_i(k_v) \to \mathbf{C}$$

telles que

$$\zeta_{U,\mathbf{H}}(s) L_S(s, T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})) = \sum_{i \in I} \sum_{y \in \mathcal{T}_i(k)} \phi_{\mathcal{T}_i}^{\mathbf{H}}(s, y)$$

et

$$\beta(V)\tau_{\mathbf{H}}(V)\chi_{C_{\mathrm{eff}}(V)}(s-\omega_V^{-1})L_S(\omega_V^{-1}, T_{\mathrm{NS}}, C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})) = \sum_{i\in I}\int_{\mathcal{T}_{i\,C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i}(s,y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}_i}(y)$$

La question 2.2.14 se ramène donc a l'étude de différences de la forme

$$\sum_{y\in\mathcal{T}(k)} \phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}}(s,y) - \int_{\mathcal{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}}(s,y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}}(y)$$

pour chaque torseur universel $\mathcal{T}$ au-dessus de V. Il est également possible de remonter la question 2.2.12 aux torseurs universels pour la ramener à l'étude de différences analogues.

2.2.4. *Passage à l'espace affine.* — Les familles de variétés pour lesquelles on a pu répondre à la question 2.2.12 peuvent être essentiellement regroupées en deux groupes distincts d'une part les intersections complètes lisses dans l'espace projectif pour lesquelles on dispose de la méthode du cercle et d'autre part les variétés munies d'une action d'un groupe algébrique avec une orbite ouverte auxquelles on applique des techniques d'analyse harmonique fine. En dehors de ces deux cas, on ne dispose pas de méthode générale. Toutefois Salberger a obteu en utilisant les torseurs universels une majoration de la forme souhaitée pour la surface de Del Pezzo obtenue en éclatant quatre points rationnels en position générale sur le plan projectif, surface qui ne rentre dans aucun des deux grands groupes précédents.

On peut alors se demander si d'autres aspects de la méthode du cercle, en dehors de ceux évoqués au paragraphe précédent, se généralisent également. Dans cette dernière section nous allons donner quelques éléments de réponse à cette question.

2.2.4.1. *Plongement des torseurs universels dans un espace affine.* — Si V est une compactification équivariante lisse d'un tore T sur k, alors les torseurs universels sont isomorphes en tant que variété au spectre de l'anneau des coordonnées homogènes (cf. [**Del**], [**Oda**] et [**Sal**]) qui est un ouvert de l'espace affine.

Plus généralement, si V est une intersection complète lisse dans une telle compactification $\mathbf{P}_\Sigma$ d'un tore T sur k telle que $\mathrm{Pic}\,\overline{\mathbf{P}_\Sigma}$ soit isomorphe à $\mathrm{Pic}\,\overline{V}$ et ω_V^{-1} soit à l'intérieur du cône des classes de diviseurs effectifs, alors les torseurs universels sont donnés comme image inverse de la variété dans la spectre $\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}$ de l'anneau des coordonnées homogènes.

Dans le cas général, on peut construire un plongement de $\mathcal{T}$ dans un espace affine ayant des propriétés similaires à celui de l'exemple précédent. Pour cela

on fixe une famille génératrice $([L_j])_{j\in J}$ de $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ donnée par des éléments de $\mathrm{Pic}\,\overline{V}$ et qui soit invariante sous l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ et on note $\mathscr{M}(\overline{V})$ le $\mathbf{Z}$-module libre de base J. C'est, par définition, un module de permutation et on a un épimorphisme naturel

$$p : \mathscr{M}(\overline{V}) \twoheadrightarrow \mathrm{Pic}\,\overline{V}.$$

Le fibré vectoriel $\overline{E} = \sum_{j\in J} L_j^\vee$ provient d'un unique fibré E sur V et le produit $\times_{V\, j\in J} L_j^\times$ provient de l'unique torseur R sous le tore $T(\mathscr{M}(\overline{V}))$ au-dessus de V dont l'invariant $\rho(\mathrm{R})$ est p.

Le morphisme p induit en outre une injection

$$j : T_{\mathrm{NS}} \to T(\mathscr{M}(\overline{V}))$$

et on obtient un morphisme

$$\widetilde{j} : \mathcal{T} \to \mathrm{R} \subset E$$

tel que

$$\mathcal{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k) = \prod_{v\in M_k} \mathcal{T}(k_v) \cap E(\boldsymbol{A}_k).$$

Considérons alors l'espace vectoriel

$$A = \left(\sum_{j\in J} \Gamma(\overline{V}, L_j)^\vee\right)^{\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)}.$$

On a un morphisme naturel d'évaluation

$$\mathrm{ev} : E \to A.$$

Quitte à augmenter la famille $([L_j])_{j\in J}$, on peut supposer que cela définit un plongement de $\mathcal{T}$ dans A. En outre l'action de T_{NS} sur $\mathcal{T}$ s'étend en une action sur A.

Toutefois, il y a une différence entre $\mathcal{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$ et

$$\prod_{v\in M_k} \mathcal{T}(k_v) \cap A(\boldsymbol{A}_k).$$

Cependant pour tout point x de $V(k_v)$, il existe une famille finie $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant M}$ d'éléments de $T_{\mathrm{NS}}(k_v)$ telle que

$$A(\mathcal{O}_{k_v}) \cap \mathcal{T}_x(k_v) = \bigcup_{1\leqslant i\leqslant M} b_i.\mathcal{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{k_v}) \cap \mathcal{T}_x(k_v).$$

D'autre part, la différence entre $A(\mathcal{O}_{k_v}) \cap \mathcal{T}_x(k_v)$ et $\mathcal{T}_{\mathbf{H}_K}(\mathcal{O}_{k_v}) \cap \mathcal{T}_x(k_v)$ est d'autant plus grande que le point x est proche des points bases des diviseurs L_i, qui dans divers exemples coïncident avec les sous-variétés accumulatrices. Il serait intéressant d'étudier ce lien de manière plus systématique.

Notons que ce plongement de $\mathcal{T}$ dans A est associé à un plongement de V dans une variété torique, à savoir le quotient de l'ouvert des points semi-simples de A sous l'action de T_{NS} par ce tore.

2.2.4.2. *Intersections complètes dans une variété torique.* — Plaçons-nous dans le cas particulier ci-dessus, à savoir une intersection complète lisse dans une variété torique $\mathbf{P}_\Sigma$ avec $\mathrm{Pic}\,\overline{\mathbf{P}_\Sigma} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}\,\overline{V}$. Soit $\mathcal{T}$ un torseur universel au-dessus de V contenant un point rationnel. Comme précédemment, on note $\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}$ le spectre de l'anneau des coordonnées homogènes qui est un ouvert d'un espace affine A sur lequel T_{NS} agit et on a un plongement j de $\mathcal{T}$ dans A qui est compatible avec l'action de T_{NS}.

Si, en outre, $C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})$ coïncide par l'isomorphisme ci-dessus avec $C_{\mathrm{eff}}(\overline{\mathbf{P}_\Sigma})$ on a également la relation

$$\mathcal{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k) = \prod_{v \in M_k} \mathcal{T}(k_v) \cap \widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k).$$

L'idée est donc de se ramener à $\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)$, qui jouera le rôle de l'espace affine du cas des intersections dans l'espace projectif.

Soient $f_1, \ldots, f_m$ des polynômes sur A tels qu'il existe des caractères $\xi_1, \ldots, \xi_m$ de T_{NS} de sorte que

$$\forall x \in A \otimes \overline{k},\ \forall t \in T_{\mathrm{NS}}(\overline{k}), f_i(tx) = \xi_i(t) f_i(x)$$

et tels que $\mathcal{T}$ soit l'intersection complète dans $\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}$ des hypersurfaces définies par les équations $f_1, \ldots, f_m$.

Par hypothèse, $\mathrm{Pic}\,\overline{V} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}\,\overline{\mathbf{P}_\Sigma}$ et on suppose que le système de hauteurs $\mathbf{H}_K$ s'étend à $\mathbf{P}_\Sigma$, c'est à dire qu'on a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}\,\overline{\mathbf{P}_\Sigma} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Pic}\,\overline{V} \\ \downarrow{\scriptstyle \tilde{\mathbf{H}}_K} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbf{H}_K} \\ \mathscr{H}((\mathbf{P}_\Sigma)_K) & \xrightarrow{\mathrm{Res}} & \mathscr{H}(V_K). \end{array}$$

Si, comme cela est vraisemblable, l'application Res est surjective, on peut toujours étendre $\mathbf{H}_K$. On dispose alors des fonctions $\phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}_i}(s,y)$ et $\phi^{\check{\mathbf{H}}}_{\widetilde{P_\Sigma}}(s,y)$ dont on vérifie qu'il étend la précedente.

On fixe un caractère non-trivial $\chi : \boldsymbol{A}_k/k \to \mathbf{S}^1$. On a alors des dualités

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{A}_k/k \times k & \to & \mathbf{S}^1 \\ (x,y) & \mapsto & e(\langle x,y\rangle) := \chi(xy) \end{array} \qquad \text{et } (\boldsymbol{A}_k/k)^m \times k^m \to \mathbf{S}^1$$

On note $d\xi$ la mesure auto-duale sur ${\boldsymbol{A}_k}^m$.

De manière formelle une double transformation de Fourier donne la formule

$$\sum_{y\in\mathcal{T}(k)} \phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}}(s,y) = \int_{{\boldsymbol{A}_k}^m/k^m} \sum_{x\in\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}(k)} \phi^{\check{\mathbf{H}}}_{\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}}(s,x) e(\langle \xi, \boldsymbol{f}(x)\rangle) d\xi \tag{2.2.4.1}$$

Toutefois la série intérieure ne converge pas absolument au voisinage de ω_V^{-1}. Une solution pourrait être d'utiliser des fonctions du type

$$\lambda(s,y,\xi,\varepsilon) = \phi^{\check{\mathbf{H}}}_{\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}}(s,x) e(\langle \xi, \boldsymbol{f}(x)\rangle) \prod_{v\in S} e(-\langle \varepsilon_v, (|f_i(x)|_v)_{1\leqslant i\leqslant m}\rangle)$$

où pour tout $v \in S$, $\varepsilon_v \in \mathbf{R}^m_{>0}$.

Quant à l'analogue intégral, en s'inspirant du travail d'Igusa, on peut espérer une formule du type suivant (cf. [**Pat**, page 5])

$$\int_{\mathcal{T}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \phi^{\mathbf{H}}_{\mathcal{T}}(s,y)\boldsymbol{\omega}_{\mathcal{T}}(y) = \int_{{\boldsymbol{A}_k}^m} \int_{\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \lambda(s,y,\xi,\varepsilon)\boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}}(y) d\xi. \tag{2.2.4.2}$$

Dans un premier temps, mon intention est d'étudier le domaine de validité des formules (2.2.4.1) et (2.2.4.2). Dans un deuxième temps il faudrait comparer

$$\int_{{\boldsymbol{A}_k}^m/k^m} \sum_{x\in\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}(k)} \lambda(s,y,\xi,\varepsilon) d\xi$$

à

$$\int_{{\boldsymbol{A}_k}^m} \int_{\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \lambda(s,y,\xi,\varepsilon)\boldsymbol{\omega}_{\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}}(y) d\xi.$$

Pour cela il faut se donner $M(\varepsilon,s) \subset {\boldsymbol{A}_k}^m$, analogue des arcs majeurs et $m(\varepsilon,s)$ son complémentaire, analogue des arcs mineurs, de sorte que $M(\varepsilon,s) \to {\boldsymbol{A}_k}^m/k^m$, puis majorer sur $m(\varepsilon,s)$ à la fois la somme et l'intégrale et sur $M(\varepsilon,s)$ la différence

$$\sum_{y\in\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}(k)} \lambda(s,y,\xi,\varepsilon) - \int_{\widetilde{\mathbf{P}_\Sigma}_{C_{\mathrm{eff}}(\overline{V})}(\boldsymbol{A}_k)} \lambda(s,y,\xi,\varepsilon). \tag{2.2.4.3}$$

De telles majorations, qui constituent dans le cas des intersections complètes dans l'espace projectif, le cœur même de la méthode du cercle, devront tout d'abord être recherchées dans des cas simples, comme celui des hypersurfaces dans $\mathbf{P}^n \times \mathbf{P}^m$, cas sur lequel travaillent déjà Salberger et Robbiani, les éclatés de points dans des hypersurfaces de $\mathbf{P}^n$, etc...

Notons enfin que l'étude de majorations de différences du style de (2.2.4.3) apparaissent déjà dans le cas des variétés toriques. Il est donc envisageable que les techniques introduites par Batyrev et Tschinkel puissent aussi jouer un rôle dans ce cadre plus général.

Références

[Am] S. A. Amitsur, *Generic splitting fields of central simple algebras*, Ann. of Math. **62** (1955), 8–43.

[Ar] S. J. Arakelov, *Theory of intersections on the arithmetic surface*, Proceedings of the international congress of mathematicians, Vol. 1 (Vancouver, 1974), Canad. Math. Congress, Montréal, 1975, pp. 405–408.

[Ara] J. K. Arason, *Cohomologische Invarianten quadratischer Formen*, J. Algebra **36** (1975), 448–491.

[AM] M. Artin and D. Mumford, *Some elementary examples of unirational varieties which are not rational*, Proc. Lond. Math. Soc. **25** (1972), 75–95.

[BM] V. V. Batyrev and Y. I. Manin, *Sur le nombre des points rationnels de hauteur bornée des variétés algébriques*, Math. Ann. **286** (1990), 27–43.

[BT1] V. V. Batyrev and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on compactifications of anisotropic tori*, Internat. Math. Res. Notices **12** (1995), 591–635.

[BT2] ———, *Rational points on some Fano cubic bundles*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **323** (1996), n° 1, 41–46.

[BT3] ———, *Manin's conjecture for toric varieties*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), n° 1, 15–53.

[BCTSSD] A. Beauville, J.-L. Colliot-Thélène, J.-J. Sansuc, et P. Swinnerton-Dyer, *Variétés stablement rationnelles non rationnelles*, Ann. of Math. (2) **121** (1985), 283–318.

[BO] S. Bloch and A. Ogus, *Gersten's conjecture and the homology of schemes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 181–202.

[Bo] F. A. Bogomolov, *The Brauer group of quotient spaces by linear group actions*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **51** (1987), n° 3, 485–516; English transl. in Math. USSR Izv. **30** (1988), 455–485.

[Ca] G. Castelnuovo, *Sulla razionalità delle involuzioni piane*, Math. Ann. **44** (1894), 125–155.

[CG] C. H. Clemens and P. A. Griffiths, *The intermediate jacobian of the cubic threefold*, Ann. of Math. (2) **95** (1972), 281–356.

[CTO] J.-L. Colliot-Thélène and M. Ojanguren, *Variétés unirationnelles non rationnelles : au-delà de l'exemple d'Artin et Mumford*, Invent. math. **97** (1989), 141–158.

[CTP] J.-L. Colliot-Thélène and R. Parimala, *Real components of algebraic varieties and étale cohomology*, Invent. Math. **101** (1990), 81–99.

[CTR] J.-L. Colliot-Thélène and W. Raskind, *$\mathcal{K}_2$-cohomology and the second Chow group*, Math. Ann. **270** (1985), 165–199.

[CTS1] J.-L. Colliot-Thélène et J.-J. Sansuc, *La descente sur les variétés rationnelles*, Journées de géométrie algébrique d'Angers (1979) (A. Beauville, ed.), Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1980, pp. 223–237.

[CTS2] ———, *La descente sur les variétés rationnelles, II*, Duke Math. J. **54** (1987), n° 2, 375–492.

[De] P. Deligne, *La conjecture de Weil I.*, Publ. Math. I.H.E.S. **43** (1974), 273–307.

[Del] T. Delzant, *Hamiltoniens périodiques et images convexes de l'application moment*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), n° 3, 315–339.

[EGA] J. A. Dieudonné et A. Grothendieck, *Eléments de géométrie algébrique I*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, vol. 166, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg and New York, 1971.

[Dr] P. K. J. Draxl, *L-Funktionen algebraischer Tori*, J. of Number Theory **3** (1971), 444–467.

[FMT] J. Franke, Y. I. Manin, and Y. Tschinkel, *Rational points of bounded height on Fano varieties*, Invent. Math. **95** (1989), 421–435.

[JR] B. Jacob and M. Rost, *Degree four cohomological invariants for quadratic forms*, Invent. Math. **96** (1989), 551–570.

[Kah1] B. Kahn, *Descente galoisienne et K_2 des corps de nombres*, K-theory **7** (1993), 55–100.

[Kah2] ———, *Applications of weight-two motivic cohomology*, Doc. Math. J. DMV **1** (1996), 395–416.

[KRS] B. Kahn, M. Rost, and R. Sujatha, *Unramified cohomology of quadrics*, preprint (1996).

[Kar] N. A. Karpenko, *Algebro-geometric invariants of quadratic forms*, Algebra i analiz **2** (1990), n° 1, 141–162; English transl. in Leningrad Math. J. **2** (1991), n° 1, 119–138.

[Kö] M. Köcher, *Positivitätsbereiche im* $\mathbf{R}^n$, Amer. J. Math. **79** (1957), 575–596.

[Lü] J. Lüroth, *Beweis eines Satzes über rationale Curven*, Math. Ann. **9** (1875), 163–165.

[Me] A. S. Merkur′ev, *The group* $H^1(X, \mathcal{K}_2)$ *for projective homogeneous varieties*, Algebra i Analiz **7** (1995), 136–164; English transl. in St Petersburg Math. J. **7** (1996), 421–444.

[Oda] T. Oda, *Recent topics on toric varieties*, Selected papers on number theory and algebraic geometry (K. Nomizu, ed.), Amer. Math. Soc. Trans. (2), vol. 172, AMS, Providence, 1996, pp. 77–91.

[Pa] I. A. Panin, *On the algebraic* K*-theory of twisted flag varieties*, K-theory **8** (1994), n° 6, 541–585.

[Pat] S. J. Patterson, *The Hardy-Littlewood method and Diophantine analysis in the light of Igusa's work*, Mathematica Gottingensis, Schriftenreihe des Sonderforschungsbereichs Geometrie und Analysis 11, Mathematisches Institut, Göttingen, 1985.

[Ro] M. Robbiani, *Rational points of bounded height on Del Pezzo surfaces of degree six*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 403–422.

[Sal] P. Salberger, *Tamagawa measures on universal torsors and points of bounded height on Fano varieties*, Nombre et répartition de points de hauteur bornée, Astérisque, vol. 251, SMF, Paris, 1998, pp. 91–258.

[Sa1] D. J. Saltman, *Noether's problem over an algebraically closed field*, Invent. Math. **77** (1984), 71–84.

[Sa2] ———, *Brauer groups of invariant fields, geometrically negligible classes, an equivariant Chow group, and unramified* H^3, K-theory and algebraic geometry : connections with quadratic forms and division algebras (Santa-Barbara, 1992) (B. Jacob and A. Rosenberg, eds.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 58.1, AMS, Providence, 1995, pp. 189–246.

[Seg] B. Segre, *Sull'existenza, sia nel campo razionale che nel campo reale di involuzioni piane non birazionali*, Rend. Acc. Naz. Lincei, Sc. Fis. mat. e nat. **10** (1951), 94–97.

[SD] H. P. F. Swinnerton-Dyer, *Counting rational points on cubic surfaces*, Classification of algebraic varieties (L'Aquila, 1992) (C. Ciliberto, E. L. Livorni, and A. J. Sommese, eds.), Contemp. Math., vol. 162, AMS, Providence, 1994, pp. 371–379.

[We] A. Weil, *Adèles and algebraic groups*, Progress in Mathematics, vol. 23, Birkhaüser, Boston, Basel, Stuttgart, 1982.

[Za] O. Zariski, *On Castelnuovo's criterion of rationality* $p_a = p_2 = 0$ *of an algebraic surface*, Illinois J. of Math. **2** (1958), 303–315.

5 octobre 2022

Emmanuel Peyre, Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et C.N.R.S., 7 rue René-Descartes, 67084 Strasbourg, France
E-mail : peyre@math.u-strasbg.fr