CINEMÁTICA.

La cinemática es una rama de la física dedicada al estudio del movimiento de los cuerpos en el espacio, sin atender a las causas que lo producen (lo que llamamos fuerzas). Por tanto la cinemática sólo estudia el movimiento en sí, a diferencia de la dinámica que estudia las interacciones que lo producen. Cinemática proviene del griego *κινεω*, *kineo*, movimiento

RELATIVIDAD DEL MOVIMIENTO.

Estudiemos el siguiente caso. Dos personas van en un autobús totalmente aislado del exterior para que los viajeros no noten el movimiento del autobús, una delante y otra detrás, por una carretera recta.

Nosotros, que queremos medir la velocidad, nos situamos en la carretera, hacemos dos marcas separadas 50 m y observamos que el autobús tarda 5 s en recorrer esa distancia. Según nuestros cálculos, la persona que va sentada delante del autobús se mueve con una de 50 m/5 s = 10 m/s, pero el pasajero que va detrás dice que el otro no se ha movido y que, por tanto, su velocidad ha sido 0 m/s. Entonces, ¿cuál es la velocidad correcta del pasajero? Simplemente, una velocidad correcta no existe. Ambas son correctas porque la velocidad, como otras magnitudes, es relativa. ¿De que depende? Pues del sistema de referencia que se utilice para medirla.

Otro ejemplo que ilustra mejor esta situación: pregúntate, ¿cuándo estoy sentado no tengo velocidad? Parece razonable decir que no, pero pensemos que estamos sobre la superficie terrestre y que la Tierra se mueve (a una gran velocidad, por cierto). Entonces, ¿nos movemos cuando estamos sentados? Todo depende del sistema desde el cual estemos estudiando el movimiento.

SISTEMAS DE REFERENCIA.

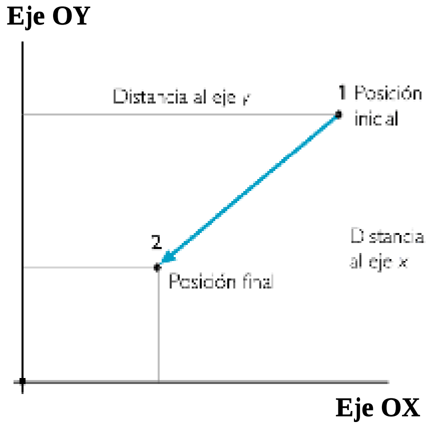
Los sistemas de referencia se emplean para describir la posición y el movimiento de los cuerpos. Un sistema de referencia está formado por:

- Un punto tomado como **origen de referencia de coordenadas**.
- Unos **ejes de coordenadas**. Los ejes se cortan en el origen de referencia.

Para señalar la posición de un cuerpo indicamos la distancia hasta cada eje. Y para definir su movimiento señalamos cómo cambia esta distancia con el tiempo.

Un sistema de referencia espacial indica, de manera precisa, dónde se encuentra el cuerpo en un instante determinado. La coordenada x toma el valor de la distancia que separa la posición del cuerpo de la marca cero del eje OX. Su valor será positivo o negativo dependiendo, igual que antes, de la situación del cuerpo con respecto a la marca cero.

Un sistema de referencia temporal indica, de manera precisa, en qué momento está el cuerpo en una posición concreta. El uso de la coordenada temporal tiene una ventaja adicional: podemos elegir la marca cero, t = 0, cuando más nos convenga.



CONCEPTOS FUNDAMENTALES.

POSICIÓN.

La **posición** de un móvil es el lugar que ocupa en un determinado instante. Siempre ha de referirse a un origen (por esta razón es importantísimo establecer un sistema de referencia) y se suele expresar mediante una, dos o tres coordenadas según la estemos refiriendo a una recta, a un plano o al espacio. Si un móvil se mueve en el eje X, nos bastará decir que se encuentra, por ejemplo, en la posición 5 m del eje X. Pero si se mueve en el plano, tendremos que decir que se encuentra, por ejemplo, en la posición (3,5) m.

TRAYECTORIA.

Se puede definir como la línea que resulta al unir todas las posiciones que ha ocupado el móvil en su movimiento. Según la misma podremos clasificar los movimientos en **rectilíneos** (la trayectoria es una línea recta) o **curvilíneos** (la trayectoria es una línea curva), que a su vez podrán ser **circulares**, **parabólicos**, etc.

Ejercicios.

1. Sostén el bolígrafo en la mano y desplázala a medida que vas puntando el papel. Une los puntos obtenidos. ¿Entiendes la diferencia entre posición y trayectoria?

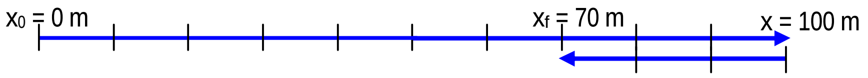
2. Haz un esquema con los diferentes movimientos según la trayectoria seguida y pon ejemplos de cada uno de ellos.

DISTANCIA RECORRIDA Y DESPLAZAMIENTO.

La **distancia recorrida** (Δs) es la longitud de la trayectoria descrita por el móvil mientras que es desplazamiento ($\overrightarrow{\Delta x}$) es un vector que va desde la posición inicial hasta la final, cuyo módulo coincidirá con la distancia recorrida sólo cuando el movimiento sea rectilíneo y el móvil no cambie de sentido. El siguiente ejemplo te ayudará a distinguir ambos conceptos.

Ejercicio resuelto.*Un atleta recorre una pista de 100 m de largo hasta el final y 30 m más en sentido contrario. Calcula la distancia que ha recorrido y desplazamiento.*

El esquema de lo que ha hecho el atleta sería el siguiente:



La distancia recorrida sería la suma de lo que ha corrido en ambos sentidos: 100 m + 30 m = 130 m.

El desplazamiento es: $\overrightarrow{\Delta x} = \vec{x}_f - \vec{x}_0 = 70\,\vec{i}\,m - 0\,\vec{i}\,m = 70\,\vec{i}\,m$

RAPIDEZ.

Podemos distinguir al observar el movimiento de dos cuerpo cuál de ellos se mueve más rápido y cuál se mueve más lento. La base de nuestra afirmación está apoyada en una comparación casi inconsciente que hacemos de los dos movimientos, un movimiento es tomado como patrón o referencia para medir la rapidez del otro y los resultados de tal comparación pueden ser: más rápido que, menos rápido que o igual que. Un observador diría que uno de los vehículos recorre: más distancia, menos distancia, o igual distancia que el otro en el mismo intervalo de tiempo. Pues eso es la rapidez: la distancia recorrida por unidad de tiempo (sean cuales sean las unidades que se utilicen para medir el tiempo y la distancia). Hay dos tipos de rapidez para describir los movimientos. Una es la rapidez que en cada instante de tiempo tienen los cuerpos cuando se mueven en un cierto intervalo de tiempo, y otra la que nos informa sobre la rapidez con que ocurrió todo el proceso en ese intervalo de tiempo. La primera se llama **rapidez instantánea** y la segunda se llama **rapidez media**.

Rapidez media. Rapidez media es el cociente entre la distancia recorrida por un objeto material y el intervalo de tiempo empleado en recorrer esa distancia sea cual sea el tipo de movimiento: curvo o rectilíneo. Matemáticamente es:

$$\text{rapidez media (r)} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Rapidez instantánea. La rapidez instantánea se refiere a la rapidez que en cada instante tiene un cuerpo en este tipo de movimientos. Un automóvil ha recorrido la distancia entre Mancha Real (20 km) y Jaén en 20 minutos. La rapidez media será:

$$\text{rapidez media (r)} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}} = \frac{20\ \text{km}}{20\ \text{minutos}} = 1\ \text{km/min} = 60\ \text{km/h}$$

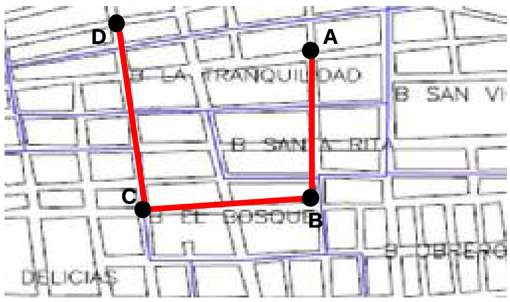
¿Implica este dato que el automóvil siempre ha marchado con esa rapidez? No: ha de arrancar desde una rapidez nula, en la autovía marchará a 100 km/h, frenará y acelerará bastantes veces. Esto hace necesario que se defina la rapidez instantánea, que se refiere a la rapidez que el móvil tiene en intervalos de tiempo tan cortos (¡casi cero!) que se puede considerar que la rapidez se mantiene constante en ese intervalo.

Matemáticamente se expresa de la forma:

$$\text{rapidez instantánea} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Si un cuerpo se mueve con rapidez constante, la rapidez media e instantánea coincidirán en valor numérico aunque ambos conceptos tengan significados diferentes. (Pregunta a tu profesor qué es un límite).

Ejercicio resuelto. ***En la figura se muestra una vista área del camino seguido por una persona: parte del punto A llega al punto B, a 400 m de A, en 4 minutos. Luego avanza de B a C, separados 400 m también y tarda 5 minutos en hacerlo. Finalmente va de C a D (500 m) y tarda 10 minutos en recorrer ese tramo. Calcula la rapidez media en los tres trayectos y la rapidez media entre A y D***



Sin más que aplicar la definición:

$$\text{rapidez media (AB)} = \frac{400\ \text{m}}{4\ \text{min}} = 100\ \text{m/min}\,; \qquad \text{rapidez media (BC)} = \frac{400\ \text{m}}{5\ \text{min}} = 80\ \text{m/min}$$

$$\text{rapidez media (CD)} = \frac{500\ \text{m}}{10\ \text{min}} = 50\ \text{m/min}$$

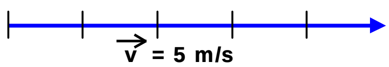
Para todo el trayecto:

$$\text{rapidez media (AD)} = \frac{1300\ \text{m}}{19\ \text{min}} = 68{,}4\ \text{m/min}$$

Analiza el valor que se ha obtenido. Calcula el valor de la rapidez entre A y C y entre B y D. Observarás algo parecido. Discute sobre el hecho de que la rapidez tenga un valor intermedio entre los valores que toma cuando el trayecto se hace por etapas.

VELOCIDAD.

La **velocidad** es una magnitud análoga a la rapidez pero nos ofrece mucha más información. Al tratarse de una magnitud **vectorial**, informará de la rapidez pero también de la dirección y sentido que lleva el móvil.



Hemos de recordar que una magnitud vectorial es aquella que se define mediante un vector y que éste informa sobre la cuantía de la magnitud (**módulo**), la orientación (**dirección**), la posibilidad de dirigirse a un lado u otro de esa orientación (**sentido**) y el punto donde está aplicada esa magnitud (**punto de aplicación**). Por ejemplo: el vector de la figura es un vector velocidad cuyo módulo vale 5 m/s, tiene una dirección horizontal y su sentido se dirige a la derecha.

De forma análoga a como se distingue una rapidez media de una instantánea, también sucederá con la velocidad:

Se define la **velocidad media** o velocidad promedio como la velocidad en un intervalo de tiempo dado. Se calcula dividiendo el vector desplazamiento ($\vec{\Delta x}$) por el tiempo (Δt) empleado en efectuarlo:

$$\boldsymbol{\vec{v}_{media} = \frac{\vec{\Delta x}}{\Delta t}}$$

Y la velocidad instantánea como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

NOTA IMPORTANTE: ***En los movimientos rectilíneos, siempre se puede hacer coincidir la trayectoria con alguno de los ejes de coordenadas y se podrá obviar, ya que no cambia su dirección, el carácter vectorial del problema teniendo en cuenta sólo que si las magnitudes vectoriales que se utilizan se dirigen hacia la derecha o hacia arriba serán POSITIVAS y las que van hacia la izquierda o hacia abajo serán NEGATIVAS.***

CLASIFICACIÓN DE LOS MOVIMIENTOS.

Los movimientos se pueden clasificar según su trayectoria y según su velocidad, aunque la verdadera clasificación viene dada por las componentes intrínsecas de la aceleración que estudiarás el próximo curso. Por ahora diremos que, según su trayectoria podrán ser:

1. **Rectilíneos**, si la trayectoria es una línea recta: un automóvil en una carretera recta.
2. **Curvilíneos** si su trayectoria es curvilínea. Dentro de estos, por su peculiares características:
   a. **Circulares**. Su trayectoria es un círculo: el caballito del tiovivo.
   b. **Parabólicos**. Su trayectoria es una parábola: Casillas cuando saca de puerta con el pie.
   c. **Elípticos**. Su trayectoria es una elipse: la Tierra alrededor del Sol.

Y según su velocidad:

1. **Uniformes**. La velocidad del móvil es constante: un auto por una carretera recta a 60 km/h.
2. **Variados**.
   a. **Acelerado**, si su velocidad aumenta: un cuerpo que cae por el aire.
   b. **Retardado**, si su velocidad disminuye: el automóvil anterior cuando sus frenos comienzan a actuar.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME (MRU). GRÁFICAS.

Este tipo de movimiento ya se estudió en el primer ciclo. Un movimiento rectilíneo uniforme posee las características:

- La trayectoria del movimiento es una línea recta.
- La velocidad permanece constante en todo.
- El módulo de la velocidad coincide con la rapidez.

Por esta razón podremos obtener la ecuación que nos da la posición en función del tiempo de la forma:

$$v = \frac{x_f - x_0}{t_f - t_0} \Rightarrow x_f - x_0 = v(t_f - t_0) \Rightarrow x_f = x_0 + v(t_f - t_0)$$

Y si el movimiento comienza en el tiempo 0, la ecuación quedará:

$$\boldsymbol{x_f = x_0 + vt}$$

La ecuación obtenida coincide con la expresión matemática de una resta en el plano, donde las variables son la posición que va ocupando el móvil y el tiempo, de forma que si se representa la posición del MRU en función del tiempo, resultará una recta con pendiente positiva si la velocidad también lo es y viceversa. Veámoslo con un ejemplo:

<u>Ejercicio resuelto.</u> ***La ecuación de un movimiento es:***

$$x_f = -5 + 2\cdot t \qquad (t \text{ en s y } x \text{ en m})$$

a. Indica su posición inicial y su rapidez.
b. Calcula su posición a los 12 s.
c. Calcula el tiempo que tardará en llegar a la posición 33 m.
d. Representa gráficamente su velocidad y posición frente al tiempo.

a. En la ecuación se aprecia que la posición inicial (término independiente) vale – 5 m y que la rapidez o velocidad (pendiente) es 2 m/s.

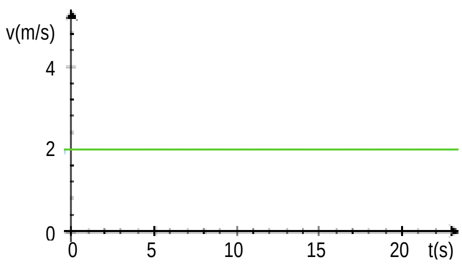
b. Sin más que sustituir en la ecuación:

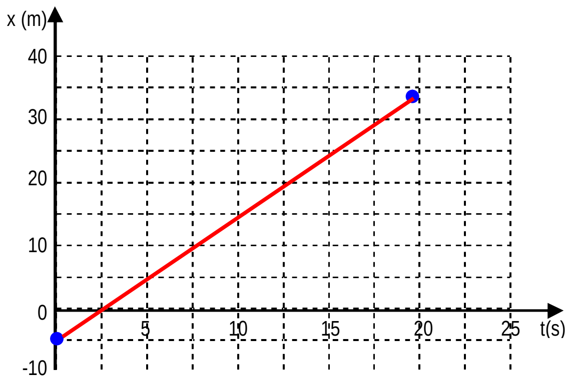
$$x_f = -5\ \text{m} + 2\ \text{m/s}\cdot 12\ \text{s} = 19\ \text{m}$$

c. Despejando el tiempo de la ecuación y sustituyendo:

$$x_f = x_0 + v\cdot t \Rightarrow t = \frac{x_f - x_0}{v} = t = \frac{33\ \text{m} - (-5\ \text{m})}{2\ \text{m/s}} = 19\ \text{s}$$

d. La gráfica de la velocidad será una recta horizontal con ordenadas igual a 2 ya que se mantiene constante. La gráfica de la posición es una recta con pendiente positiva y para representarla sólo necesitaremos dos puntos, por ejemplo: el de partida, (0 s, - 5 m) y al cabo de 12 s que es (12 s, 19 m)





<u>Ejercicios.</u>

3. Un móvil describe un MRU con velocidad de 30 m/s. ¿Qué posición ocupará a los 40 segundos de iniciado el movimiento? ¿Qué tiempo tardará en ocupar la posición 360 m? ¿Qué distancia recorrerá entre los 50 y los 100 segundos?

4. Representa gráficamente la velocidad y la posición de un móvil con MRU que parte de la posición 420 m y se mueve hacia el origen a 72 km/h.

5. Dos móviles parten al mismo tiempo desde las posiciones 0 y 400 m, respectivamente, y se dirigen a su encuentro con una rapidez de 54 km el primero y 90 km/h el segundo. Obtén las ecuaciones de sus movimientos y calcula gráficamente la posición en la que se encontrarán.

ACELERACIÓN.

La aceleración es la consecuencia directa del ejercicio de una fuerza. Es una magnitud que mide el cambio de velocidad en cualquiera de sus elementos: módulo, dirección y sentido.

Ha de ser una magnitud vectorial puesto que también lo es la velocidad y, como ocurre con ésta, se podrá definir una aceleración media e instantánea. Se puede expresar matemáticamente de la forma:

$$\vec{a}_{media} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_0}{\Delta t}$$

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Si no se tiene en cuenta el carácter vectorial como hemos explicado antes, diremos que si la velocidad aumenta ($v_f > v_0$), la aceleración será positiva y el movimiento es acelerado y si la velocidad disminuye ($v_f < v_0$), la aceleración será negativa y el movimiento es retardado o desacelerado.

Ejercicio resuelto. ***Un automóvil circula a 108 km/h cuando comienza a frenar y en 6 s su velocidad pasa a ser la mitad. Calcula su aceleración y el tiempo que tardaría en pasar a 7,2 km/h si sigue frenado como lo hacía.***

a. Sin más que aplicar la expresión de la definición:

$$a_{media} = \frac{v_f - v_0}{\Delta t} = \frac{15\ m/s - 30\ m/s}{6\ s} = -2,5\ m/s^2$$

Evidentemente tenía que ser negativa porque el automóvil va frenando.

b. Volviendo a utilizar la ecuación:

$$a_{media} = \frac{v_f - v_0}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{v_f - v_0}{a_{media}} = \frac{2\ m/s - 30\ m/s}{-2,5\ m/s^2} = 11,2\ s$$

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO (MRUA).

El **movimiento rectilíneo uniformemente acelerado o variado** (**MRUA**), es aquel en el que el móvil posee una trayectoria recta y su velocidad cambia uniformemente. El ejemplo más usual de dicho movimiento es la caída libre vertical, en el cual la aceleración que afecta al móvil es constante, es la que corresponde a la gravedad. También el de un automóvil que se mueve en una carretera recta y va aumentando o disminuyendo su rapidez de forma constante. Sus características son, por tanto:

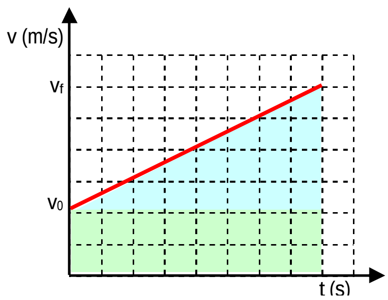
- La trayectoria del movimiento es una línea recta.
- La velocidad aumenta o disminuye de forma constante.
- La aceleración permanece constante.

Puesto que hay dos magnitudes que cambian con el tiempo, se necesitarán dos ecuaciones para estudiar este movimiento. La primera, que nos ofrece información de cómo varía la velocidad en función del tiempo, se deduce sin más que despejar la velocidad de la definición de aceleración:

$$a_{media} = \frac{v_f - v_0}{\Delta t} \Rightarrow \boxed{\mathbf{v_f = v_0 + a\Delta t}}$$

La segunda magnitud que cambia con el tiempo es, evidentemente, la posición. Para obtenerla veamos algo que es muy importante: observa que el área comprendida entre la recta que representa v y el eje de abcisas (ejercicio de MRU) en el intervalo estudiado coincide con el espacio recorrido por el móvil:

$$e = b \cdot h = 12\ s \cdot 2\ m/s = 24\ m$$



Esto va a ocurrir en todos los movimientos, sea como sea la gráfica obtenida para v. Apliquemos este conocimiento al MRUA. Imaginemos un móvil que parte con velocidad inicial v_0 y acelera a razón de a m/s^2. La ecuación de su velocidad es:

$$v_f = v_0 + a\Delta t$$

Y la gráfica v/t será del tipo de la figura (como ya sabemos):

Podemos calcular el área descomponiéndola el triángulo y el rectángulo que se aprecian con distinto color. La base del rectángulo es el tiempo transcurrido y su altura es la velocidad inicial. La base del triángulo es la misma y su altura es la diferencia entre la velocidad final e inicial. El área será:

$$\Delta x = A = A_{rectángulo} + A_{triángulo} = b \cdot h_r + \frac{1}{2} b \cdot h_t = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2}(v_f - v_0) \cdot \Delta t = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t \cdot \Delta t = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2$$

Expresión de la que se deduce la posición en función del tiempo: $\Delta x = x_f - x_0 = v_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2$

Si el tiempo inicial es cero, queda la ecuación:

$$\boxed{\mathbf{x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2}}$$

<u>Ejercicio resuelto.</u> ***Un automóvil marcha a 36 km/h por una carretera recta cuando comienza a acelerar y consigue aumentar su velocidad hasta 90 km/h en 20 s. Calcula:***

a. Aceleración que posee.
b. Velocidad y posición que tiene a los 8 s.
c. Espacio que recorre desde el segundo 5 hasta el 15.
d. Representa gráficamente la aceleración, la velocidad y la posición frente al tiempo.

a. Sin más que aplicar la definición de aceleración:

$$a = \frac{v_f - v_0}{t} = \frac{30\ m/s - 10\ m/s}{20\ s} = 1\ m/s^2$$

Este dato quiere decir que cada segundo que pasa, su velocidad aumenta 1 m/s.

b. En la ecuación de velocidad y en la de la posición, se sustituye el tiempo por 8 s:

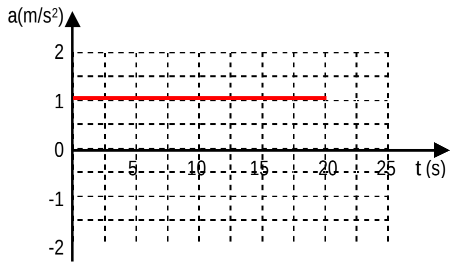
$$v = v_0 + a\cdot t = 10\ m/s + 1\ m/s^2\cdot 8\ s = 18\ m/s$$

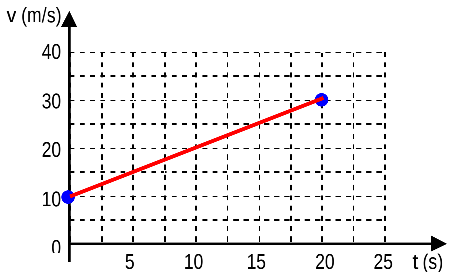
$$x = x_0 + v_0\cdot t + \frac{1}{2}a\cdot t^2 = 0\ m + 10\ m/s\cdot 8\ s + \frac{1}{2}1\ m/s^2\cdot(8\ s)^2 = 112\ m$$

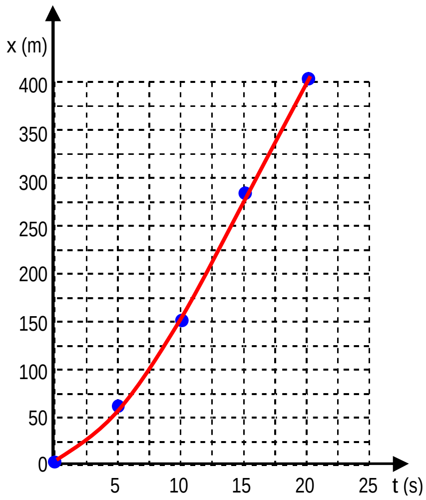
c. Como el movimiento es rectilíneo, bastará restar las dos posiciones que ocupa en esos instantes:

$$s = x_{15} - x_5 = \left(x_0 + v_0\cdot 15 + \frac{1}{2}a\cdot 15^2\right) - \left(x_0 + v_0\cdot 5 + \frac{1}{2}a\cdot 5^2\right) = 200\ m$$

d. La gráfica de la aceleración, al mantenerse constante en le tiempo será una línea paralela al eje OX con ordenada igual a 1 m/s^2. La de la velocidad será una recta de pendiente positiva (a > 0) que parte del punto (0 s, 10 m/s) hasta el punto (20 s, 30 m/s).







La gráfica correspondiente a la posición es una parábola de la que sólo conocemos dos puntos (0 s, 0 m) y (20s, 400 m), por lo que conviene hacer una tabla de valores (4 o 5) para trazarla con más exactitud.

Sustituyendo valores del tiempo en la ecuación de la posición:

t (s)	0	5	10	15	20
x (m)	0	62,5	150,0	262,5	400,0

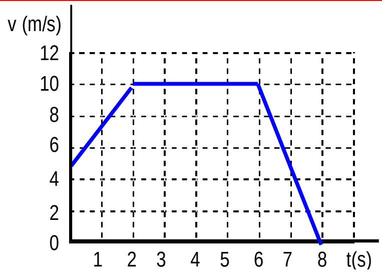
<u>Ejercicios.</u>

6. Una empresa automovilística dice que uno de sus modelos tarda 8,7 segundos en llegar a 100 km/h, partiendo del reposo. ¿Con qué aceleración se tiene que mover el vehículo? ¿Qué longitud mínima tiene que tener una pista para comprobarlo?

7. Un objeto que se movía con una velocidad de 72 km/h, acelera y, al cabo de 5 s, alcanza la velocidad de 40 m/s. Se mantiene con esta velocidad durante 10 segundos y después frena y para en 8 segundos:

a. Construye la gráfica velocidad-tiempo.
b. Calcula la aceleración en cada tramo del movimiento.
c. Calcula el desplazamiento total.

8. El gráfico siguiente representa el movimiento de un cuerpo.
a. ¿Qué clase de movimiento y qué aceleración tiene en cada tramo?
b. ¿Cuál es el desplazamiento en cada tramo?



MOVIMIENTO VERTICAL. CAÍDA LIBRE.

Un caso particular del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado es el aquel con el que se mueven los cuerpos (que no disponen de generador de fuerza motriz) verticalmente, hacia arriba o hacia abajo, siempre que se encuentren en la proximidades de la superficie terrestre. Su particularidad estriba en que siempre están dotados de la misma aceleración: – 9,8 **j** m/s². Ya que todo sucede en la misma dirección (perpendicular a la superficie terrestre, podemos obviar el carácter vectorial y estudiar el movimiento escalarmente.

Como tal MRUA, tendrán las ecuaciones del movimiento vistas anteriormente:

$$\text{Posición: } y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \quad \text{y velocidad: } v = v_0 + at$$

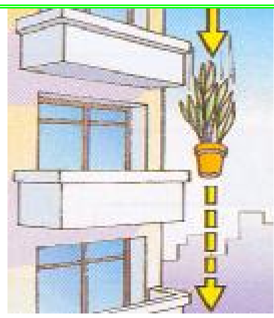
Pero estas ecuaciones, generalmente, se suelen simplificar dadas las características del movimiento.

Tomando como sistema de referencia la superficie terrestre, si el movimiento de caída desde una altura h hasta el suelo, la velocidad inicial y la posición final serán cero y quedará:

$$\text{Posición: } 0 = h + \frac{1}{2}(-9{,}8\ \text{m s}^{-2})t^2 \quad \text{y velocidad: } v = (-9{,}8\ \text{m s}^{-2})t$$

<u>Ejercicio resuelto.</u> ***Desde el ático de un edificio que se encuentra a 30 m de altura cae una maceta hasta el suelo. Calcula:***

a. El tiempo que tarda en llegar al suelo.
b. La velocidad con que impacta en el mismo.
c. Representa gráficamente velocidad y posición frente al tiempo.



a. Se trata de un MRUA del que conocemos la posición inicial (altura desde la que cae: 30 m), velocidad inicial (0 m s⁻¹), ya que se trata de una caída y aceleración con la que cae (– 9,8 m s⁻²). Se plantean las ecuaciones del MRUA:

$$v = v_0 + at \qquad y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

Y se observa que en la ecuación de la posición se conocen los valores de todas las magnitudes excepto el tiempo de caída, que se despeja de la misma:

$$0 = h + \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{-2h}{g}} = \sqrt{\frac{-2\cdot 30\ \text{m}}{-9{,}8\ \text{m s}^{-2}}} = \sqrt{6{,}1\ \text{s}^2} = 2{,}5\ \text{s}$$

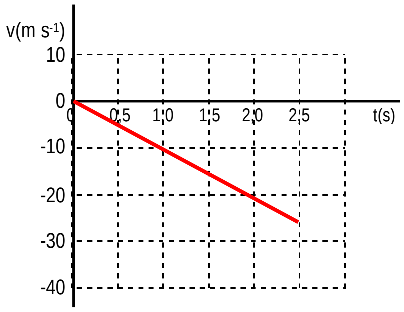
b. Conocido el tiempo de caída, basta con sustituirlo en ka ecuación de velocidad:

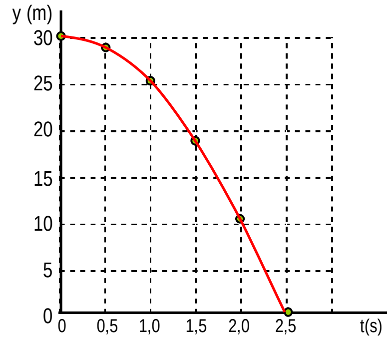
$$v = v_0 + at = 0 - 9{,}8\ \text{m s}^{-2}\cdot 2{,}5\ \text{s} = -24{,}5\ \text{m s}^{-1}$$

Evidentemente tenía que ser negativa ya que se dirige hacia abajo

c. Como hemos estudiado, las gráficas de movimiento serán una recta de pendiente negativa para la de la velocidad (bastan los dos valores que se conocen para representarla) y una rama descendente de una parábola para la posición por lo que es conveniente hacer una tabla de valores y la gráfica será más exacta. Así:

t (s)	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5
y (m)	30,0	28,8	25,1	19,0	10,4	0





Ejercicios.

9. Un cuerpo que se deja caer libremente desde cierta altura, tarda 10 segundos en llegar al suelo. ¿Desde qué altura se dejó caer? ¿Cuál es su velocidad cuando llega al suelo?

10. Si dejamos caer un objeto desde 50 m de altura:

a. ¿Cuál será su posición y la distancia recorrida a los 3s de haberlo soltado? ¿Qué velocidad lleva en ese instante?

b. ¿Cuánto tarda en llegar al suelo? ¿Con qué velocidad llega?

Si es un lanzamiento vertical desde el suelo, la velocidad final es la que ahora es nula y quedará:

$$\text{Posición: } y = v_0 t + \frac{1}{2}(-9{,}8 \text{ m s}^{-2})t^2 \quad \text{y velocidad: } v = v_0 - (9{,}8 \text{ m s}^{-2})t$$

Veamos un ejemplo de este movimiento.

Ejercicio resuelto. ***Desde el suelo se lanza hacia arriba un objeto con velocidad de 60 m s-1. Calcula:***

a. ***El tiempo que tarda en llegar a la máxima altura.***

b. ***El valor de ésta.***

c. ***La velocidad con que llega al suelo.***

d. ***Tiempo que tarda en pasar por la altura de 100 m. ¿Por qué existen dos soluciones?***

e. ***Representa gráficamente velocidad y posición frente al tiempo.***

Nota: toma g = - 10 ms-2.

a. Se plantean las ecuaciones del MRUA de las que conocemos la posición inicial (y_0 = 0 m), la velocidad inicial (60 m s^{-1}), la velocidad con la que llega a la máxima altura (0 m s^{-1}), y la aceleración con la que sube (– 9,8 m s^{-2}). Se plantean las ecuaciones del MRUA:

$$v = v_0 + at; \qquad y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

En la ecuación de la velocidad sólo se desconoce el tiempo. Despejando en ella:

$$v = v_0 + at;\ \ 0 = v_0 + gt \Rightarrow t = \frac{-v_0}{g} = \frac{-\ 60 \text{ m s}^{-1}}{-\ 10 \text{ m s}^{-2}} = 6 \text{ s}$$

b. El valor de la altura se calcula sin más que sustituir el tiempo calculado en la ecuación de la posición:

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 = 60 \text{ m s}^{-1}\cdot 6\text{s} + \frac{1}{2}(-10\text{m s}^{-2})\cdot(6\text{s})^2 = 180 \text{ m}$$

c. Cuando llega al suelo, la posición (altura) es cero. Sustituyendo en la ecuación de la posición, se puede calcula el tiempo que tarda en llegar

$$y = y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2;\ 0 = 0 + v_0 t + \frac{1}{2}gt^2$$

Queda una ecuación de 2º grado sin término independiente. Tendrá dos soluciones:

$$0 = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2 = t\left(v_0 + \frac{1}{2} g t\right) \Rightarrow t_1 = 0\ ;\ t_2 = \frac{-2v_0}{g} = \frac{-2\cdot 60\ \text{m s}^{-1}}{-10\ \text{m s}^{-2}} = 12\ \text{s}$$

Una de las soluciones se conocía ya que para t = 0 s, el cuerpo está en el punto de salida. En la otra se observa que el tiempo de subida y de bajada es el mismo (6 s). Este tiempo se sustituye en la ecuación de velocidad:

$$v = v_0 + at = 60\ \text{m s}^{-1} - 10\ \text{m s}^{-2}\cdot 12\ \text{s} = -60\ \text{m s}^{-1}$$

No olvides esta curiosidad: ***si un cuerpo cae al mismo punto desde donde se lanzó, tarda el mismo tiempo en subir que en bajar y llega con el mismo valor numérico de la velocidad.*** Era evidente: la gráfica de su posición es una parábola con el eje de simetría en el tiempo que tarda en alcanzar la máxima altura (pregunta a tu profesor de matemáticas).

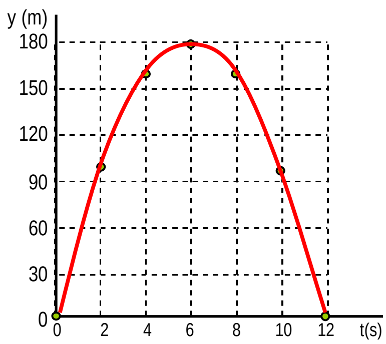
d. Ya hemos visto que tendremos dos soluciones. Procediendo como antes:

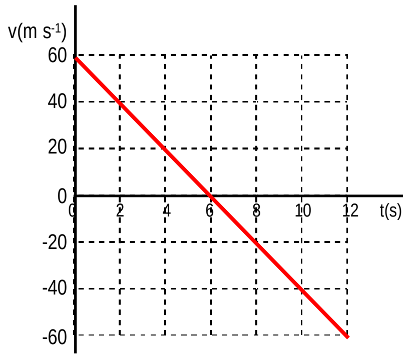
$$100\ \text{m} = \left(60\ \text{m s}^{-1}\right)\cdot t + \frac{1}{2}\left(-10\ \text{m s}^{-2}\right)\cdot t^2$$

Resolviendo la ecuación quedan dos soluciones: $t_1 = 2\ \text{s}\ ;\ t_2 = 10\ \text{s}$, que corresponden a los instantes en que el cuerpo pasa por esa posición en la subida y en la bajada.

e. Igual que en el ejemplo anterior, para la gráfica de la velocidad bastará con los datos que conocemos ya que se trata de dos rectas. Para la posición convendrá una tabla de algunos valores. Así:

t (s)	0	2	4	6	8	10	12
y (m)	0	100	160	180	160	100	0





En estos problemas se suele despreciar el rozamiento con el aire estudiando el movimiento como si de una situación ideal se tratase. No obstante, dicha fuerza de rozamiento, en algunos casos, es tan importante que si no se tiene en cuenta, los resultados de los problemas nada tienen que ver con la realidad. Piensa en una situación concreta: la caída de un papel desde determinada altura al aire libre. Imagina (que te ayude el profesor) la misma caída en el interior de un tubo donde previamente se ha practicado el vacío.

Ejercicios.

11. *Contesta razonadamente:*
   a. *¿Qué tipo de movimiento tiene un móvil lanzado verticalmente hacia arriba? ¿Hasta dónde sube?*
   b. *Cuando vuelve a bajar, ¿qué velocidad tiene al llegar al punto de partida?*
   c. *El tiempo que le lleva subir, ¿es igual, mayor o menor que el tiempo que le lleva bajar?*

12. *Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba, con una velocidad inicial de 30,0 m/s. Halla:*
   a. *Posición que ocupa y velocidad al cabo de 1 s.*
   b. *La altura máxima que alcanza y el tiempo empleado.*
   c. *Velocidad cuando llega al suelo y tiempo total empleado.*
   d. *¿Qué relación hay entre los tiempos calculados en los apartados b y c?*
   e. *¿Cómo son las velocidades de partida y de llegada?*

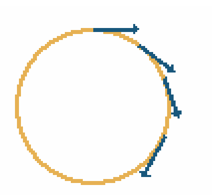
MOVIMIENTO CIRCULAR. CONCEPTO DE RADIÁN.

Los engranajes, las ruedas, los cederrons, la rotación de la Tierra, etc, los movimientos circulares nos rodean y de todos ellos sólo vamos a estudiar los más sencillos: los uniformes (los que transcurren a un ritmo constante). El movimiento circular uniforme se puede estudiar con las ecuaciones de que ya conocemos:

$$\begin{bmatrix} x = x_0 + vt \\ v = cte \end{bmatrix}$$

No obstante hay que tener en cuenta dos cuestiones importantes:

1. El módulo de la velocidad (**rapidez**) se mantiene constante, pero no así su dirección que va cambiando uniformemente. Este cambio de velocidad (como todos) se debe a la presencia de una aceleración: la **aceleración normal o centrípeta**. Piensa por un momento en un móvil que se encuentra atado al extremo de una cuerda y que se mueve con MRU. Si en determinado instante quieres que no se mueva en línea recta y que se acerque a ti describiendo una curva, ¿qué has de hacer? Efectivamente, sólo tienes que tirar de la cuerda hacia ti con una fuerza constante y el móvil se te acercará describiendo un arco de circunferencia. Esta fuerza es la **fuerza normal o centrípeta**, la causante del cambio en la dirección de la velocidad. El valor de la aceleración centrípeta es:

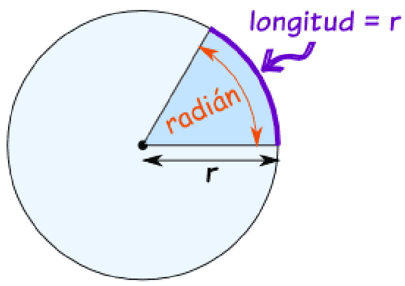


$$\mathbf{a_n = a_{centrípeta} = \frac{v^2}{r}}$$

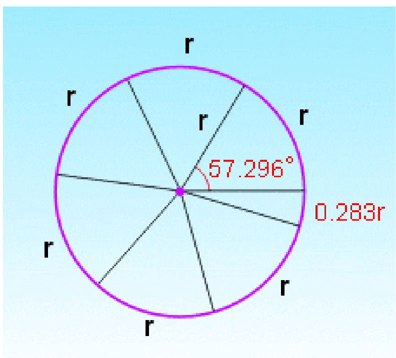
Expresión en la que v el módulo de la velocidad y r es el radio de la circunferencia que describe el móvil.

Observa que la aceleración es mayor cuanto menor sea el radio de curvatura y mayor cuanto mayor sea la velocidad. Es razonable si piensas que la aceleración está provocada por una fuerza: si el radio de curvatura es pequeño implica que se ha cambiando mucho la dirección en poco recorrido por lo que se ha de ejercer una fuerza mayor.

2. Los movimientos circulares se pueden estudiar mediante magnitudes lineales (como se han estudiado hasta ahora), pero también con magnitudes angulares, aunque fácilmente se podrán relacionar unas y otras. Para entender este tipo de magnitudes es preciso tener una noción clara de lo que es un radián.



El **radián** es la unidad de ángulo plano en el SI. Su símbolo es **rad** y se define como la medida de un ángulo central cuyos lados cortan un arco igual en longitud al radio de la circunferencia. Por esta razón se llama radián. Sabemos que una circunferencia contiene 2π veces el al radio. Por tanto, un ángulo de 360° equivaldrán a 2π radianes.



Es la unidad que se utiliza en física generalmente para medir ángulos y para estudiar los movimientos angulares.

Si se estudian angularmente, las ecuaciones serán las mismas pero las unidades serán angulares:

$$\begin{bmatrix} j = j_0 + \omega t \\ \omega = cte \end{bmatrix}$$

Donde es el ángulo (rad) y es la velocidad angular (rad/s)

También se utilizan otras unidades que habrás visto en algunos discos o cd's como son las **r.p.m.** (revoluciones por minuto) que son la vueltas que el móvil efectúa en un minuto o **r.p.s.** (revoluciones por segundos) que será las vueltas que da en un segundo.

Las ruedas de un tractor amarillo que va a 36 km/h miden 40 y 80 cm de radio respectivamente. Calcula:

a. Velocidad angular y lineal de un punto exterior de cada rueda.
b. Período y frecuencia de cada rueda.
c. Ángulo que describe cada una en 0,25 segundos.
d. Aceleración angular de un punto exterior de cada rueda.

a. Ambas ha de rodar con la misma velocidad lineal, de lo contrario el tractor se alargaría o se contraería. Para ello, las ruedas pequeñas se ven obligadas girar más rápido. Como la velocidad lineal de ambas será igual, calculamos la angular a partir de ella:

$$\omega_p = 10\frac{m}{s}\cdot\frac{1\,rad}{0{,}4\,m} = 25\,rad/s; \qquad \omega_g = 10\frac{m}{s}\cdot\frac{1\,rad}{0{,}8\,m} = 12{,}5\,rad/s$$

b. La frecuencia es, por definición, el número de vueltas que da en un segundo, o sea, la velocidad angular expresada en r.p.s.:

$$f_p = 25\frac{rad}{s}\cdot\frac{1\,rev}{2\pi\,rad} = 3{,}98\,s^{-1}\ ;\ 4\,s^{-1}; \qquad f_g = 12{,}5\frac{rad}{s}\cdot\frac{1\,rev}{2\pi\,rad} = 1{,}99\,s^{-1}\ ;\ 2\,s^{-1}$$

El período es lo que tarda cada rueda en describir una vuelta completa, o sea, la inversa de la frecuencia:

$$T_p = \frac{1}{f_p} = \frac{1}{3{,}98\,s^{-1}} = 0{,}25\,s; \qquad T_g = \frac{1}{f_g} = \frac{1}{1{,}99\,s^{-1}} = 0{,}5\,s$$

c. El ángulo que han descrito lo calculamos con la ecuación angulra del MCU:

$$j_p = j_{0p} + \omega t = 25\,rad/s\cdot 0{,}25\,s = 6{,}25\,rad; \qquad j_g = j_{0g} + \omega t = 12{,}5\,rad/s\cdot 0{,}25\,s = 3{,}12\,rad$$

d. La aceleración normal será:

$$a_{np} = \frac{v^2}{R_p} = \frac{(10\,m/s)^2}{0{,}4\,m} = 250\,m/s^2; \qquad a_{ng} = \frac{v^2}{R_g} = \frac{(10\,m/s)^2}{0{,}8\,m} = 125\,m/s^2.$$

<u>Ejercicios.</u>

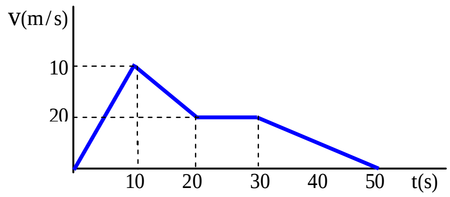
13. Una rueda gira a razón de 30π rad/s. Calcula las vueltas que da en 15 minutos.

14. ¿Cuál es la velocidad angular de la Tierra alrededor de su eje? ¿Qué velocidad lineal, en km/h, corresponde a un punto del ecuador, en ese movimiento de rotación? Radio de la Tierra: 6370 km.

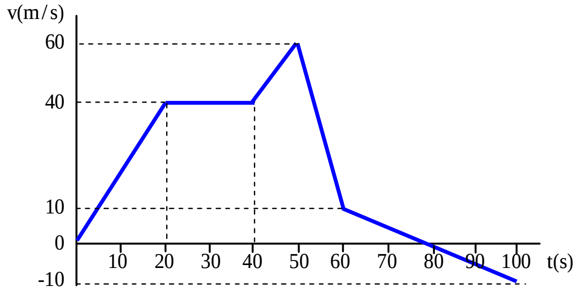
15. ¿Dónde tendrías mayor velocidad angular, estando en un punto de Vigo o en uno del mismo meridiano, pero más al Norte? ¿Dónde tendrías mayor velocidad lineal?

RELACIÓN DE EJERCICIOS.

1. Estudia de la forma más completa posible el movimiento descrito en la gráfica:



2. Un móvil que parte del origen, se mueve en el eje X de la forma que indica la figura:



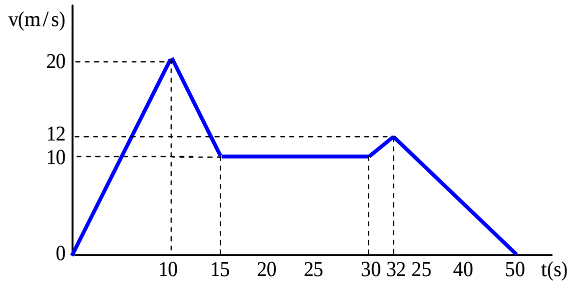
Calcula:

a. Tipo de movimiento de cada tramo.
b. Aceleración media en cada tramo.
c. Espacio recorrido.
d. Velocidad media de todo el trayecto.

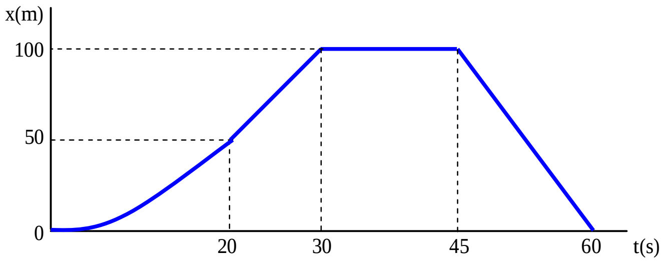
3. El segundero de un reloj mide 2 cm. Calcula su vector velocidad media y su rapidez para los intervalos de tiempo: $\Delta t = 15$ s; $\Delta t = 30$ s; $\Delta t = 60$ s.

4. El móvil de la gráfica adjunta se mueve rectilíneamente. Calcula:

a. Espacio total recorrido.
b. Espacio recorrido a los 50 segundos.
c. Ecuación de la posición entre 60 y 70 segundos.
d. Aceleración en cada tramo del recorrido.



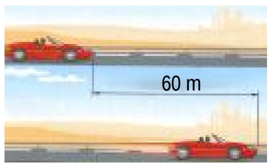
5. Par un movimiento rectilíneo, la representación gráfica de su posición (en metros) frente al tiempo (en segundos) es la siguiente:



Calcula:

a. Vector velocidad media de todo el movimiento
b. ¿Qué clase de movimiento posee en cada tramo? Explica lo que hace.
c. Si partió del reposo, calcula la aceleración en el primer tramo.

6. Un móvil lleva una velocidad de 108 km/h y ha de parar en una distancia de 60 m. Calcula el tiempo que tardará en hacerlo y la aceleración con qué lo hará.



7. Uno de los datos que se dan a conocer en la venta de un automóvil es el tiempo que tarda en alcanzar los 100 km/h partiendo del reposo. Si el de un determinado modelo es 8 segundos, calcula:

a. Distancia que recorrerá en el mismo;
b. Velocidad que llevará cuando se encuentre a la mitad del recorrido.

8. Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad de 200 m/s. Calcula:

a. Altura que alcanza;
b. Velocidad que lleva cuando ha alcanzado la mitad de la altura y cuando ha pasado la mitad del tiempo de vuelo.

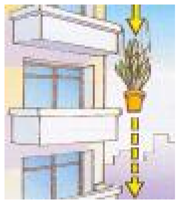
9. Un avión toma tierra con velocidad de 70 m/s y logra detenerse transcurridos 10 segundos desde que tomó tierra. Calcula la distancia de aterrizaje y la aceleración de frenado.

10. Una bola llega al suelo con una velocidad de 35 m/s después de dejarse caer desde cierta altura. ¿Cuánto tiempo tarda en caer? ¿Qué distancia recorre en la caída?

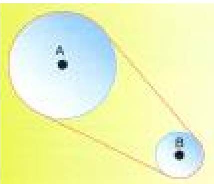
11. Un automóvil marcha a 108 km/h cuando ve un semáforo en rojo a 90 m de distancia. Calcula la aceleración que deberá imprimir al coche para parase en el semáforo y el tiempo que tardará en hacerlo.

12. Desde un balcón que se encuentra a 25 m del suelo se lanza verticalmente hacia abajo una maceta con una velocidad de 15 m/s. Calcula:

a. Velocidad con que llega al suelo
b. Altura a la que lleva la mitad de la velocidad con que llega al suelo.



13. Suponiendo trayectoria circular de $1{,}5 \cdot 10^8$ km de radio, calcula las velocidades angular y lineal y la aceleración normal de la Tierra alrededor del Sol. ¿Qué deduces de los resultados?



14. Las ruedas de dos poleas unidas por una correa tienen radios de 8 y 4 cm respectivamente. Si la velocidad angular de la pequeña es 250 rad/s, calcula:

a. La velocidad angular de la grande;
b. La velocidad lineal de un punto exterior en ambas;
c. El número de vueltas que dará cada una en 3 minutos.

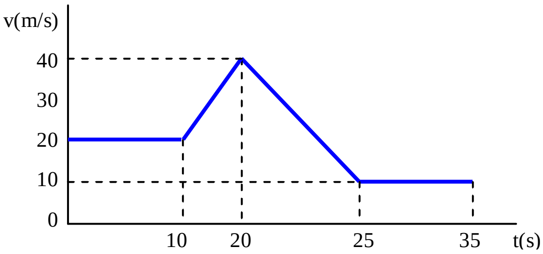
15. La siguiente tabla corresponde a la posición de un móvil, que parte del reposo, en función del tiempo. Estudia analítica y gráficamente de la forma más completa posible el movimiento.

t(s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34
x(m)	0	2	8	18	32	50	70	90	110	130	150	168	182	192	198	200	200	200

16. Haz lo mismo con la siguiente tabla de datos:

t(s)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
x(m)	0	72	128	168	192	200	200	200	200	200	200	204	216	236	264	300

17. Suponiendo que un móvil lleva una velocidad de 72 km/h cuando pasa por el origen, explica de la forma más completa posible el movimiento que se describe en la gráfica de la derecha.



18. Un coche arranca con una aceleración de 0,5 m/s^2 durante 10 segundos para mantener la velocidad adquirida durante 30 segundos y después comenzar a frenar hasta pararse en 20 segundos. Calcula (gráfica y analíticamente) todo lo que se pueda de dicho movimiento.

19. 5. Se lanza desde el suelo hacia arriba un cuerpo con una velocidad de 100 m/s. Calcula:

a. Velocidad y posición al cabo de 2, 12 y 25 segundos.
b. Tiempo que tarda en llegar a la altura máxima y valor de ésta.
c. Tiempo que tarda en volver al suelo y velocidad con que llega al mismo.
d. Representa las gráficas y/t y v/t de este movimiento.

20. Calcula la velocidad con hay que lanzar un cuerpo desde el suelo para alcance 1000 m de altura.

21. Se lanza hacia arriba un cuerpo a 50 m/s, desde un balcón que está situado a 50 m de altura. Calcula la velocidad con que llega al suelo. Calcula lo mismo si se lanza hacia abajo. ¿Qué opinas?

22. Un globo se encuentra en reposos a 500 m de altura. Desde él se cae un objeto. Calcula el tiempo que tarda en caer y la velocidad con que llega al suelo.

23. Desde el suelo se lanza un cuerpo hacia arriba a 50 m/s y al mismo tiempo se deja caer otro desde una altura de 100 m. ¿Cuándo y dónde se cruzan?

24. Calcula la velocidad angular y el ángulo que describen en 10 segundos las ruedas de un tractor si sus radios son 85 y 40 cm respectivamente y marcha a 18 km/h.