DS de Physique n° 5

Thème : Mécanique du solide

Durée : 3 heures

Rappel des consignes générales :

- Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.
- Les résultats littéraux non encadrés ne seront pas pris en compte.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne donnera pas lieu à attribution de points.
- Il ne faudra pas hésiter à formuler les commentaires (incluant des considérations numériques) qui vous sembleront pertinents, même lorsque l'énoncé ne le demande pas explicitement. Le barème tiendra compte de ces initiatives.
- Tout résultat fourni dans l'énoncé peut être utilisé pour les questions ultérieures, même s'il n'a pas été démontré.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.
- Les diverses parties de ce sujet sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre choisi par le candidat. Il prendra toutefois soin de bien les séparer dans ses copies et de bien numéroter les questions.

Problème 1 : Analyse d'un mouvement collé-glissé (« stick-slip »)

Le frottement solide jour un rôle considérable dans de nombreuses situations, statiques ou dynamiques. Nous allons analyser ici quelques aspects du mouvement d'un solide qui peut soit glisser (« slip ») soit adhérer (« stick ») sur son support. Ce phénomène a pour origine le fait que les coefficients de frottement statique et cinétique diffèrent. Il est ainsi responsable du grincement des portes, du crissement des craies sur le tableau noir, ou dans un registre plus harmonieux, de la mise en vibration d'une corde de violon.

Les parties 1 et 2 sont indépendantes.

Dans tout le problème, on désigne par a la norme de tout vecteur $\vec{a}$, et par $\dot{x}$ la dérivée de $x(t)$ par rapport au temps.

Définitions et rappels : Lois du frottement solide/solide (lois de Coulomb)

$\vec{f}$ et $\vec{N}$ étant respectivement les composantes tangentielle et normale de l'action de contact exercée par un solide sur un autre, μ_s et μ_c les coefficients de frottement « statique » et « cinétique » avec $\mu_s > \mu_c$:

- si la vitesse de glissement est nulle, alors $\|\vec{f}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$;
- si la vitesse de glissement est non nulle, alors $\vec{f}$ est de sens opposé à cette vitesse et de module $\|\vec{f}\| = \mu_c \|\vec{N}\|$.

A. Principe du mouvement « collé-glissé »

Une poutre rigide et homogène, de longueur L, de masse m et de section carrée s, est posée en équilibre à l'horizontale sur deux supports (numérotés 1 et 2), séparés de la distance D_0 (figure 1). Les coefficients de frottement statique et cinétique entre cette poutre et chacun des supports sont respectivement μ_s et μ_c, avec $\mu_s > \mu_c$. Le centre de gravité G de la poutre se trouve initialement à la distance a_0 du support 1, avec $a_0 < \frac{D_0}{2}$.

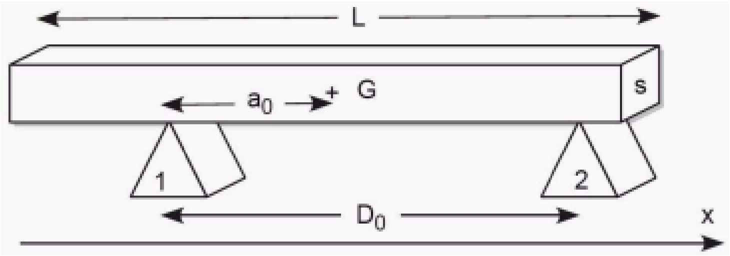


Figure 1

1/ La poutre est immobile. Calculer les forces de réaction verticales des supports sur la poutre, R_{N1} et R_{N2}, en fonction des données du problème.

2/ Les supports 1 et 2 sont maintenant animés l'un vers l'autre de vitesses horizontales et constantes, respectivement $\frac{v_0}{2}$ et $-\frac{v_0}{2}$ selon Ox. La poutre ne peut se déplacer qu'en translation horizontale selon cette même direction. La distance entre les deux supports s'écrit donc $D(t) = D_0 - v_0 t$. Que deviennent les forces $R_{N1}(t)$ et $R_{N2}(t)$ en fonction de $a(t)$, distance horizontale entre le centre de gravité G de la poutre et le support 1 à l'instant t ?

3/ On suppose que la poutre glisse d'abord par rapport à un seul des deux supports. Préciser lequel. Déterminer les forces horizontales de frottement, d'intensités $F_1(t)$ et $F_2(t)$, qui agissent sur la poutre lors de cette phase du mouvement.

4/ Montrer que ce mouvement ne peut se perpétuer, et qu'il existe un instant t_1 où la poutre se met à glisser sur l'autre support. Déterminer la distance $D_1 = D(t_1)$ en fonction de a_0, μ_s et μ_c.

5/ Justifier qu'il existe alors une phase du mouvement où nécessairement il y a glissement sur les deux supports. Exprimer alors la somme des forces de frottement en fonction de $a(t)$, $D(t)$ et des constantes du problème. Dans quel sens agit-elle ? Donner le critère qui détermine la fin de cette seconde phase en précisant le support sur lequel le glissement cesse. Soit t_1' l'instant correspondant.

6/ Décrire la phase suivante du mouvement. Elle se termine à l'instant t_2. Montrer que :

$$D(t_2) = \left(1 + \frac{\mu_c}{\mu_s}\right)\left(D(t_1') - a(t_1')\right)$$

7/ On admettra que, pour une faible vitesse de rapprochement des supports et une distance a_0 suffisamment grande, les modifications de $D(t)$ et de $a(t)$ durant la phase transitoire (cf. question 5/) restent faibles en valeur relative. En les négligeant, montrer que :

$$D(t_2) \approx \frac{\mu_c}{\mu_s} D(t_1)$$

En déduire un moyen simple d'évaluer le rapport $\frac{\mu_c}{\mu_s}$.

B. Analyse d'un mouvement d'oscillation – Masse sur un tapis roulant

Dans cette partie, on considère le mouvement d'une masse m posée sur un tapis roulant se déplaçant à une vitesse horizontale $\vec{v_0} = v_0 \vec{e_x}$ $(v_0 > 0)$ par rapport au référentiel du laboratoire. La masse est soumise à une force de rappel colinéaire au mouvement du tapis roulant et exercée par un ressort de raideur k. Les coefficients de frottement statique et cinétique entre la masse et le tapis sont notés respectivement μ_s et μ_c. On repèrera la position de la masse par son abscisse x dans le référentiel du laboratoire, l'origine correspondant à l'absence de déformation du ressort.

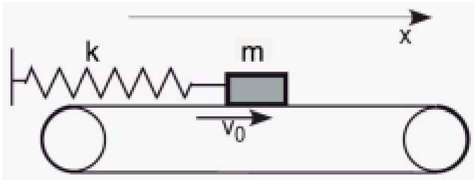


Figure 2

8/ Montrer qu'il existe une position d'équilibre dont on déterminera l'abscisse $x_{éq}$ en fonction de μ_c, g et $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

9/ On pose $X = x - x_{éq}$. Expliciter l'équation du mouvement de la masse ; on distinguera les situations $\dot{X} < v_0$ et $\dot{X} > v_0$. Montrer qu'une phase de mouvement avec collage, pour laquelle $\dot{X} = v_0$, peut s'établir si X appartient à l'intervalle $\left[X_1, X_2\right]$ dont on déterminera les bornes. A quelle condition peut-elle se maintenir ?

10/ La masse est posée sur le tapis sans vitesse initiale à l'abscisse X_0, avec $X_0 > 0$. Déterminer $X(t)$ pour le début du mouvement. Montrer que ce type de mouvement se maintient si X_0 est inférieur à une valeur X_m que l'on déterminera.

11/ On utilise X_m comme longueur caractéristique. On pose $q_{éq} = \frac{x_{éq}}{X_m}$, $q_1 = \frac{X_1}{X_m}$ et $q_2 = \frac{X_2}{X_m}$. Exprimer q_1 et q_2 en fonction de $q_{éq}$ et du rapport $\gamma = \frac{\mu_s}{\mu_c}$.

12/ On pose $q(\theta) = \frac{X}{X_m}$ avec $\theta = \omega t$. Exprimer $q' = \frac{dq}{d\theta}$ en fonction de $\dot{X}$ et v_0. Transcrire pour $q(\theta)$ les équations différentielles du mouvement obtenues à la question 9/. Dans le plan $(q; q')$, tracer le portrait de phase correspondant au mouvement de conditions initiales $(0,5\ ;\ 0)$. Quel est alors le mouvement ?

13/ On donne $q_{éq} = 0,5$ et $\gamma = 2$. Préciser dans le plan $(q; q')$ les points représentatifs des états avec collage.

14/ En procédant par étapes, tracer le portrait de phase correspondant aux conditions initiales $(2\ ;\ 0)$. Préciser ce qui se passe lorsque le point représentatif de l'état du système franchit la ligne $q' = 1$ pour la première fois, puis la seconde fois. Montrer que le mouvement devient périodique et préciser le cycle correspondant dans le plan de phase $(q; q')$. Ce cycle dépend-il des conditions initiales ?

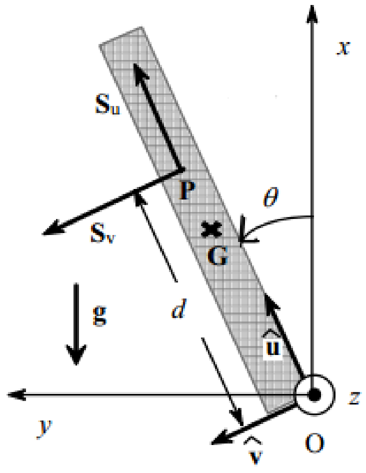
15/ Dans le cas général, calculer la période T_c de ce cycle avec collage en fonction de ω et q_2.

L'étude précédente peut servir de modèle au fonctionnement d'un patin de frein s'appuyant sur une roue en rotation, système pour lequel on désire savoir si l'alternance éventuelle de collage et de glissement nuit à son efficacité.

16/ Calculer le travail W des forces de frottement pendant un cycle du mouvement en distinguant les deux types de cycle (avec ou sans phase de collage). En déduire, pour chacun d'eux, la puissance moyenne correspondante et comparer les résultats. Quelle conclusion en tirez-vous ? Pourquoi cherche-t-on à éviter le collage ?

Problème 2 : Chute d'une cheminée d'usine

Une cheminée verticale est modélisée par un cylindre homogène de masse M, de longueur D et de rayon très petit devant D. Pour une raison quelconque, l'équilibre de la cheminée est détruit ; cette dernière amorce une rotation autour de sa base dans le plan vertical Oxy. On appelle θ l'angle de la cheminée avec la verticale. On étudie le mouvement de la cheminée dans le repère R_G en projection sur la base mobile de coordonnées polaires $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$, où $\vec{u}$ est porté par l'axe de la cheminée, $\vec{v}$ est perpendiculaire à $\vec{u}$ dans le sens de rotation de l'angle θ et G est le centre de masse de la cheminée. Les moments d'inertie en G autour de l'axe Gz et en O autour de l'axe Oz sont respectivement $J_G = \frac{1}{12}MD^2$ et $J_O = \frac{1}{3}MD^2$.



La liaison pivot en O est parfaite.

1/ Déterminer, par application du théorème du moment cinétique en O, l'équation d'évolution de l'angle θ.

2/ Retrouver cette équation par un raisonnement énergétique.

3/ Exprimer, en fonction de l'angle θ, les composantes R_u et R_v de la réaction du sol en O en projection sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

4/ Pour quelle valeur de θ la cheminée décolle-t-elle du sol ?

En réalité, une cheminée peut se briser au cours de sa chute. L'étude suivante va préciser les contraintes subies par la cheminée pendant sa chute. Une longueur $OP = d$ de cheminée subit l'action du sol en O, l'action de son poids ainsi que l'action du reste de la cheminée sur elle-même, en P. Cette action assure la rigidité de la cheminée. Le contact en P n'est pas ponctuel. L'action du reste de la cheminée sur la longueur d est modélisée par une force $\vec{S}$, de composantes S_u et S_v, et un couple $\vec{C}$ porté par l'axe horizontal Oz.

5/ En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la longueur d de la cheminée, exprimer S_v en fonction de M, g, θ, d et D. La grandeur S_v est appelée *effort de cisaillement*. Tracer qualitativement le graphe donnant S_v en fonction du rapport $\frac{d}{D}$ (θ est donné).

6/ Si la cheminée perd sa rigidité, elle s'effrite. Elle aura tendance à s'effriter au point où l'effort de cisaillement S_v est le plus important ; quel est ce point ?

7/ Montrer que le théorème du moment cinétique en O, appliqué à la longueur d de cheminée conduit à l'expression suivante du moment (noté C) du couple $\vec{C}$: $C = -\frac{1}{4}Mgd\left(\frac{d}{D}-1\right)^2 \sin\theta$.

8/ Si ce couple est supérieur au couple maximum que peut subir la cheminée, celle-ci se brise. En quel point la cheminée se brisera-t-elle ? Commenter à ce sujet les deux photographies ci-dessous.

Fin