Una **ecuación diferencial** es una ecuación en la que intervienen derivadas de una o más funciones desconocidas. Dependiendo del número de variables independientes respecto de las que se deriva, las ecuaciones diferenciales se dividen en:

- **Ecuaciones diferenciales ordinarias**: aquellas que contienen derivadas respecto a una sola variable independiente.
- **Ecuaciones en derivadas parciales**: aquellas que contienen derivadas respecto a dos o más variables.

Por ejemplo se considera la ley, apoyada en experiencias, de que el radio se desintegra a una velocidad proporcional a la cantidad de radio presente, hecho que se describe mediante la ecuación $\frac{dQ}{dt} = kQ$, Q la cantidad de radio es función del tiempo t; de modo que Q = Q(t).

Una ecuación diferencial es una ecuación que incluye expresiones o términos que involucran a una función matemática incógnita y sus derivadas. Algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales son:

$$y' = 2xy + 1$$

es una ecuación diferencial ordinaria, donde y representa una función no especificada de la variable independiente x, es decir, $y = f(x)$, $y' = \frac{dy}{dx}$ es la derivada de $y$con respecto a x.

La expresión $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ es una ecuación en derivadas parciales.

A la variable dependiente también se le llama función incógnita (desconocida).
La resolución de ecuaciones diferenciales es un tipo de problema matemático que consiste en buscar una función que cumpla una determinada ecuación diferencial. Se puede llevar a cabo mediante un método específico para la ecuación diferencial en cuestión o mediante una transformada (como, por ejemplo, la transformada de Laplace).

Orden de la ecuación

El orden de la derivada más alta en una ecuación diferencial se denomina **orden de la ecuación**.

$\frac{d^2y}{dx^2} + 5x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$	$orden\ 2\ por\ \frac{d^2y}{dx^2}$
$y''' + y'' + y' + y = sen\ 3x$	$orden\ 3\ por\ y'''$
$(x + y)dx = (y - x)dy$	$orden\ 1\ por$ "dx" y "dy"
$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$	$orden\ 2\ por$ y''
$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$	$orden\ 4\ por$ "$\frac{d^4y}{dx^4}$"

Grado de la ecuación

Es la potencia de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación, siempre y cuando la ecuación esté en forma polinómica, de no ser así se considera que no tiene grado.

1) $e^x\frac{d^2y}{dx^2} + sen\ x\frac{dy}{dx} = x$	2do orden	1er grado
2) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + xy = 0$	3er orden	2do grado
3) $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} = tan\ x$	3er orden	1er grado
4) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$	1er orden	1er grado

Ecuación diferencial lineal

Se dice que una ecuación es lineal si tiene la forma $a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$, es decir:

- Ni la función ni sus derivadas están elevadas a ninguna potencia distinta de uno o cero.
- En cada coeficiente que aparece multiplicándolas sólo interviene la variable independiente.
- Una combinación lineal de sus soluciones es también solución de la ecuación.

Ejemplos:

- $y' = y$ es una ecuación diferencial ordinaria lineal de primer orden, tiene como soluciones $y = f(x) = k \cdot e^x$, con *k* un número real cualquiera.
- $y'' + y = 0$ es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, tiene como soluciones $y = f(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$, con *a* y *b* reales.
- $y'' - y = 0$ es una ecuación diferencial ordinaria lineal de segundo orden, tiene como soluciones $a \cdot e^x + b \cdot 1/(e^x)$, con *a* y *b* reales.

Solución de una ecuación diferencial

Tipos de soluciones

Una solución de una ecuación diferencial es una función que al reemplazar a la función incógnita, en cada caso con las derivaciones correspondientes, verifica la ecuación, es decir, la convierte en una identidad. Hay tres tipos de soluciones:

1. **Solución general**: una solución de tipo genérico, expresada con una o más constantes.

Solución general

Es un haz de curvas. Tiene un orden de infinitud de acuerdo a su cantidad de constantes (una constante corresponde a una familia simplemente infinita, dos constantes a una familia doblemente infinita, etc.). En caso de que la ecuación sea lineal, la solución general se logra como combinación lineal de las soluciones (tantas como el orden de la ecuación) de la ecuación homogénea (que resulta de hacer el término no dependiente de $y(x)$ ni de sus derivadas igual a 0) más una solución particular de la ecuación completa.

1. **Solución particular**: Si fijando cualquier punto $P(X_0, Y_0)$ por donde debe pasar necesariamente la solución de la ecuación diferencial, existe un único valor de C, y por lo tanto de la curva integral que satisface la ecuación, éste recibirá el nombre de solución particular de la ecuación en el punto $P(X_0, Y_0)$, que recibe el nombre de condición inicial.

Solución particular

Es un caso particular de la solución general, en donde la constante (o constantes) recibe un valor específico.

1. **Solución singular**: una función que verifica la ecuación, pero que no se obtiene particularizando la solución general.

Solución singular

Solución de la ecuación no consistente en una particular de la general

FUNCIÓN PRIMITIVA DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Es una expresión equivalente a la ecuación diferencial que carece de derivadas.

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial

La expresión es una "función primitiva" de la ecuación diferencial.

Verificación

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

El objetivo es encontrar la función y
dy = 2x dx, pasando dx para poder integrar

$$\int dy = \int 2xdx \quad integrando$$

$$y = 2\frac{x^2}{2} + c \quad sumamos\ la\ constante\ c, cuando\ la\ integramos\ a\ \ la\ \ v.i.$$

$$y = x^2 + c \quad solución\ general\ (por\ c)$$

La expresión es una "función primitiva" de la ecuación diferencial.

Verificación

$$y = x^2 + c \quad Solución$$

La solución es aquella función que al ser reemplazada en la variable dependiente "y" satisface la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x$$

$$x = 2x$$

Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

ECUACIONES CON VARIABLES SEPARABLES

Encuentre la solución general de la ecuación diferencial.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+3}{x-4}$$

Separando para poder integrar

$$\frac{dy}{dx} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{f}}}{(y+3)} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ \text{g}}}{\frac{1}{(x-4)}}$$

Transponiendo términos

$$\frac{1}{(y+3)} \cdot dy = dx \cdot \frac{1}{(x-4)}$$

Integrando ambos miembros

$$\int \frac{dy}{y+3} = \int \frac{dx}{x-4}$$

$$\ln(y+3) = \ln(x-4) + c$$

Despejando "y" aplicando la propiedad: $a^{\log_a n} = n$

$$e^{\ln(y+3)} = e^{\ln(x-4)+C}$$

Aplicando la propiedad $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$$e^{\ln(y+3)} = e^{\ln(x-4)} e^{C}$$

$$y + 3 = C\,(x-4)$$

$y = C\,(x-4) - 3$ Solución general explicita (cuando se puede despejar y)

$\boldsymbol{Si\ c = 1}$

$y = c\,(x-4) - 3$

$y = 1\,(x-4) - 3$

$y = x - 7$

$\boldsymbol{si\ c = -2}$

$y = c\,(x-4) - 3$

$y = -2\,(x-4) - 3$

$y = -2x + 8 - 3$

$y = -2x + 5$

Comprobación:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+3}{x-4}$$

$$\frac{d(\boldsymbol{x-7})}{dx} = \frac{\boldsymbol{x-7}+3}{x-4}$$

$$1 = \frac{x-4}{x-4}$$

$$1 = 1$$

Ecuaciones diferenciales de segundo orden

Una ecuación diferencial de segundo orden es de la forma

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Si $f(x) = 0$ se llama **Ecuación homogénea,** como por ejemplo

$$y'' + 3y' + 4y = 0$$

Si $f(x) \neq 0$ se llama **Ecuación no homogénea,** como por ejemplo

$$y'' + 6y' + 5y = 2senx$$

ECUACIONES LINEALES HOMOGÉNEAS CON COEFICIENTES CONSTANTES

Una ecuación diferencial homogénea de segundo orden con coeficientes constantes es de la forma:

$$ay'' + by' + cy = 0$$

La ecuación característica o auxiliar es de la forma

$$am^2 + bm + c = 0$$

Como se observa la ecuación auxiliar es una ecuación cuadrática cuyas raíces se las puede determinar empleando la fórmula general

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$m_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad y \quad m_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Por tanto es necesario recordar la solución de una ecuación cuadrática donde se pueden presentar tres casos.

Primer caso: raíces reales y diferentes

Discriminante positivo $(b^2 - 4ac \geq 0)$. Entonces m_1 y m_2 son raíces reales y diferentes. En este caso se dice que existen dos soluciones particulares o fundamentales

$y_1 = C_1 e^{m_1 x}$

$y_2 = C_2 e^{m_2 x}$

La solución General estaría dada por la combinación lineal de las soluciones fundamentales

$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x}$

Ejemplo 1

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 6y' - 7y = 0$$

Solución:

La ecuación característica o auxiliar es

$m^2 + 6m - 7 = 0$

Al resolver la ecuación auxiliar se tiene

$(m + 7)(m - 1) = 0 \Rightarrow m_1 = -7\,; m_2 = 1$

Luego las soluciones particulares son

$y_1 = C_1 e^{m_1 x} \Rightarrow y_1 = C_1 e^{-7x}$

$y_2 = C_2 e^{m_2 x} \Rightarrow y_2 = C_2 e^{x}$

Además, como estas dos soluciones son linealmente independientes, la solución general es

$y = C_1 e^{-7x} + C_2 e^{x}$

Ejemplo 2

Resolver la ecuación

$y'' - 3y' - 10y = 0$ para $y(0) = 1\,;\ y'(0) = 10$

La ecuación auxiliar es

$$m^2 - 3m - 10 = 0$$

Resolviendo la ecuación anterior

$$(m-5)(m+2) = 0 \Longrightarrow m_1 = 5; m_2 = -2$$

Luego las soluciones particulares son

$$y_1 = C_1 e^{m_1 x} \Rightarrow y_1 = C_1 e^{5x}$$

$$y_2 = C_2 e^{m_2 x} \Rightarrow y_2 = C_2 e^{-2x}$$

Además, como estas dos soluciones son linealmente independientes, la solución general es.

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x}$$

Remplazando la primera condición $y(0) = 1$ en la solución general

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x}$$

$$1 = C_1 e^{5\cdot 0} + C_2 e^{-2\cdot 0}$$

$$1 = C_1 e^{0} + C_2 e^{0}$$

$$1 = C_1 + C_2$$

Para remplazar la segunda condición $y'(0) = 10$ se deriva la solución general

$$y = C_1 e^{5x} + C_2 e^{-2x}$$

$$y' = C_1 e^{5x} \cdot 5 + C_2 e^{-2x}(-2)$$

$$y' = 5C_1 e^{5x} - 2C_2 e^{-2x}$$

Remplazando $y'(0) = 10$

$$y' = 5C_1 e^{5x} - 2C_2 e^{-2x}$$

$$10 = 5C_1 e^{5\cdot 0} - 2C_2 e^{-2\cdot 0}$$

$$10 = 5C_1 e^{0} - 2C_2 e^{0}$$

$$10 = 5C_1 - 2C_2$$

Segundo Caso: Soluciones reales e iguales

Discriminante cero $(b^2 - 4ac = 0)$. Entonces m_1 y m_2 son raíces reales e iguales. En este caso la solución general es

$$y = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}$$

Ejemplo:

Resolver la ecuación diferencial

$$y'' + 4y' + 4y = 0$$

La ecuación característica o auxiliar es $m^2 + 4m + 4 = 0$

Al resolver la ecuación auxiliar se tiene

$$(m+2)(m+2) = (m+2)^2 = 0 \Rightarrow m_1 = m_2 = -2$$

Luego la solución general es

$$y = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}$$

Bibliografía

- Zill, Dennis G. (2006). Ecuaciones diferenciales con aplicaciones. Segunda edición. Grupo Editorial Iberoamérica
- José Ignacio Aranda Iriarte (2007). Apuntes de ecuaciones diferenciales I. Universidad Complutense de Madrid.
- José Ignacio Aranda Iriarte (2008). Apuntes de ecuaciones diferenciales II (EDPs). Universidad Complutense de Madrid.
- Simmons, George F. (1993)“Ecuaciones Diferenciales con aplicaciones y notas históricas”; Editorial Mc Graw Hill