Ecuaciones diferenciales Ordinarias

Técnicas de resolución

Luz Marina Moya
Edixon Rojas

Facultad de Ciencias
Sede Bogotá

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Técnicas de resolución

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Técnicas de resolución

Luz Marina Moya y Edixon Rojas

UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Bogotá, D.C., Colombia, Junio de 2020

Catalogación en la publicación Universidad Nacional de Colombia

Primera edición, 2020

ISBN XXX-XXX-XX-XXX (papel)
ISBN XXX-XXX-XX-XXX (digital)

Edición
Coordinación de publicaciones - Facultad de Ciencias
coorpub_fcbog@unal.edu.co

Corrección de estilo:
Deixa Moreno

Diseño de la colección
Leonardo Fernández Suárez

Maqueta LaTeX

Camilo Cubides

Impreso y hecho en Bogotá, D. C., Colombia

Tabla de contenido

Índice de tablas

Prefacio para el instructor

En estas notas se tratan los temas comunes de un curso de Cálculo de ecuaciones diferenciales ordinarias para ser dictado en un semestre a estudiantes universitarios del segundo año en carreras de ciencias naturales e ingeniería. Esto es, temas para estudiantes con conocimientos de cálculo diferencial e integral y de algunos temas de álgebra lineal, tales como resolución de sistemas de ecuaciones y valores (vectores) propios.

Nuestro principal objetivo es desarrollar en los estudiantes la habilidad de entender y manipular los siguientes aspectos de la teoría de ecuaciones diferenciales ordinarias:

- Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)
- Aplicaciones físicas y naturales modeladas mediante EDO.
- Estabilidad de soluciones de ecuaciones y sistemas de EDO.
- Métodos numéricos para hallar soluciones de EDO.

Para lograr nuestra meta, como en el aprendizaje de todo conocimiento matemático, damos principal importancia a los conceptos fundamentales de esta teoría; por lo tanto, nociones como solución general y particular, problema de valor inicial, soluciones linealmente independientes y plano fase, entre otras, son cuidadosamente presentadas. También son presentadas y aclaradas mediante ejemplos y observaciones las herramientas que permiten desarrollar el análisis de estos conceptos, por ejemplo: teoremas de existencia y unicidad, principio de superposición, criterios de independencia lineal de soluciones, convergencia de series y criterios de estabilidad de equilibrios.

El texto está dividido en 7 capítulos y un apéndice. En el capítulo 1 se introducen las definiciones básicas de los temas que serán tratados: ecuaciones diferenciales, problemas de valor inicial y sus soluciones. El capítulo 2 está dedicado al desarrollo de las diferentes técnicas de resolución de EDO de primer orden. Todas estas técnicas de resolución, así como las sustituciones y la introducción de factores integrantes, son propiamente deducidas para el caso general en cada uno de los tipos de EDO aquí estudiadas. En este capítulo también trataremos los aspectos cualitativos de las soluciones de estas ecuaciones, mediante herramientas como isoclinas, y la noción de estabilidad de soluciones de ecuaciones autónomas. En el capítulo 3 se usarán ecuaciones diferenciales de primer orden autónomas para describir algunos problemas típicos dados en diferentes disciplinas científicas tales como dinámica de poblaciones, problema de mezclas de sustancias, cambios de temperatura y mecánica de Newton.

El análisis de diferentes técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior serán trabajados en los capítulos 4, 5 y 6. Estas técnicas incluyen el método de coeficientes indeterminados, variación de parámetros, la transformada de Laplace y soluciones de ecuaciones diferenciales de orden superior dadas en forma de series infinitas. Para esta última parte, en el capítulo 6 incluimos una sección sobre la construcción de soluciones truncadas usando el *software* Maxima, un sistema de cómputo algebraico que permite hacer cálculos numéricos y simbólicos. Este *software* produce buenos resultados y puede ser compilado en varios sistemas operativos bajo la licencia de *software* libre GPL. Entre otras ventajas de esto último, existe una enorme comunidad de desarrolladores y usuarios de donde se puede obtener manuales de uso y otras informaciones de carácter más técnico. También, al final del texto, en forma de apéndice, incluimos una breve guía sobre el uso de Maxima para el cálculo de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En el Capítulo 7 se estudian las técnicas de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales (homogéneos y no homogéneos) con coeficientes constantes y variables, así como también los aspectos cualitativos de las soluciones de sistemas de EDO autónomos. Para esto utilizaremos lineas de fase, planos de fase y analizaremos la estabilidad de los puntos de equilibrio. Nos apoyaremos en las capacidades gráficas de Maxima para analizar la estabilidad de las soluciones y obtendremos soluciones aproximadas de ecuaciones y sistemas de EDO mediante el uso de Maxima (aspectos numéricos). De manera más precisa, introducimos e implementamos el método de aproximación de Euler y el algoritmo de Runge-Kutta de orden cuatro, el cual viene implementado en este *software*.

Finalmente, incluimos una lista no exhaustiva de recursos bibliográficos que pueden complementar los temas aquí tratados.

En la realización de estas notas nos topamos con la decisión de no demostrar los teoremas fundamentales de existencia y unicidad de soluciones aquí utilizados ya que el teorema de Picard-Lindelöff cubre estos resultados. Sin embargo su demostración está fuera del alcance de este texto, si bien se puede hacer la demostración de su versión unidimensional adecuada para la audiencia a quien está dirigida las notas.

Por otro lado, con la expresa intención de escribir este texto de longitud y nivel de dificultad razonable, no demostramos los resultados auxiliares expuestos. En todo el texto solo se demuestra el criterio de exactitud de una ecuación diferencial de primer orden, debido a que en su demostración se sigue la técnica de resolución de este tipo de ecuaciones diferenciales. Sin embargo, en cada uno de los resultados aquí presentados dejamos una fuente en la que se puede ver su demostración.

Dado que casi todos los temas de estas notas están cubiertos en la literatura existente, no hay ninguna reivindicación de originalidad de nuestra parte. Simplemente hemos organizado el material de una manera que creemos que es más beneficioso para nuestros estudiantes.

Invitamos al lector que nos haga saber de errores, por más pequeños que sean, así como también sus comentarios para mejorar este texto.

Luz M. Moya
Pontificia Universidad Javeriana
`luz.moya@javeriana.edu.co`

Edixon M. Rojas
Universidad Nacional de Colombia
`emrojass@unal.edu.co`

Prefacio para el estudiante

Las ecuaciones diferenciales aparecen por primera vez a mediados del siglo XVII en los trabajos de Newton (1665), Leibniz (1684) y los hermanos Bernoulli (1697). Desde entonces estas han sido una herramienta esencial para describir y analizar problemas en muchas disciplinas científicas. Es por ello que se han desarrollado métodos de estudio de las propiedades de sus soluciones, desde técnicas para hallar soluciones exactas en término de funciones elementales hasta métodos modernos de aproximaciones analíticas y numéricas.

Este texto versa sobre los métodos elementales para obtener soluciones exactas de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias y las ideas del análisis cualitativo usando las llamadas técnicas del plano fase. En el desarrollo de estos métodos requerimos conocimientos de cálculo diferencial e integral y de álgebra lineal. En particular, el cálculo de antiderivadas, integrales impropias, convergencia de series, resolución de sistemas de ecuaciones y cálculo de valores y vectores propios, por lo que recomendamos repasar estos temas antes de comenzar a utilizar estas notas.

Por otro lado, dado que los paquetes de computación matemáticos ahora son una herramienta importante en el quehacer diario de científicos e ingenieros, también incluimos una breve guía sobre el uso del *software* Maxima para el cálculo y análisis de soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias. El uso de *software* es particularmente útil en el desarrollo de las técnicas de plano fase, debido a las posibilidades gráficas que proveen los computadores modernos, así como también en el estudio de soluciones numéricas. Sin embargo, quisiéramos puntualizar que el énfasis de este texto radica en la comprensión y manipulación de los cálculos ya que es a través de ellos que se puede entender los resultados generados por el *software*.

No hay mejor manera de aprender este material que deconstruyendo las definiciones y los teoremas aquí dados para luego trabajar con una selección de ejemplos. En este texto, si bien no demostramos los resultados utilizados, citamos algunos textos en los que se encuentran sus demostraciones, y presentamos los aspectos teóricos de manera concisa y rigurosa. Además, deducimos el método de resolución de cada clase de ecuación diferencial presentada. Cuando consideramos necesario dar una explicación adicional sobre algún concepto o método, lo hacemos usando el ícono:

Obs *¡Por favor, lea cuidadosamente!*

Para comprobar las destrezas en el manejo de cada una de las técnicas de resolución de las ecuaciones diferenciales aquí dadas, cada sección termina con una selección de ejercicios propuestos para que sean tratados con los métodos de la sección y estos se deben considerar como una parte integral del texto.

Al leer este texto esperamos que usted aprecie y esté bien preparado para usar esta maravillosa herramienta que son las ecuaciones diferenciales.

Luz M. Moya
Pontificia Universidad Javeriana
luz.moya@javeriana.edu.co

Edixon M. Rojas
Universidad Nacional de Colombia
emrojass@unal.edu.co

Capítulo *uno*

Nociones fundamentales

En este capítulo, el lector encontrará el lenguaje básico de las EDO: *solución general* y *particular* (*implícitas* y *explícitas*), *problemas de valor inicial* entre otros, así como una primera clasificación de este tipo de ecuaciones.

Antes de entrar en detalles técnicos precisaremos el significado de algunos términos que, en ocasiones, se suponen de conocimiento general.

Definición 1.1. Un *objeto* es una unidad elemental sobre la que se pueden hacer observaciones y cuya estructura interna no existe o se puede ignorar. Un *sistema* es una colección de objetos relacionados entre sí. Una *descripción* es una representación de un fenómeno por medio de un lenguaje, en nuestro caso, matemático, en el que se explican sus distintas etapas, partes o cualidades. Un *modelo* es una descripción matemática de un sistema.

En las ciencias, los modelos matemáticos son usados para comprender fenómenos naturales, sistemas reales biológicos o físicos, a través de la identificación de las variables que intervienen en la situación o problema y la cuantificación, generalmente mediante el uso de ecuaciones, de las relaciones existentes entre las variables identificadas. Este procedimiento permite predecir el comportamiento futuro aproximado del sistema bajo estudio y, de ser posible, la manipulación de este.

Algunos problemas que son de especial interés en áreas de las ciencias e ingeniería son problemas dinámicos que involucran *variables independientes*, que cambian respecto a otras *variables dependientes*. Es precisamente la *derivada*, la que permite describir cuantitativamente las relaciones entre las variables involucradas en la descripción del problema en estudio. Como consecuencia, las ecuaciones diferenciales constituyen ejemplos de modelos matemáticos.

En apariencia, las ecuaciones diferenciales parecen ser algo nuevo para nosotros, sin embargo ya nos hemos encontrado con el problema de resolver ecuaciones diferenciales en áreas como la física o de la misma matemática. Por ejemplo, al determinar la posición de un cuerpo en movimiento, o en la búsqueda de las antiderivadas de una función dada. Así, en este capítulo daremos la teoría que fundamenta la validez de estos primeros cálculos.

1. Definiciones y ejemplos

Definición 1.2 (Ecuación diferencial). Se llama a toda ecuación que involucre una función desconocida y algunas de sus derivadas. De manera más precisa, una ecuación diferencial es una expresión de la forma

$$F\left(x_1,\ldots,x_t,f,\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial^{n_1} f}{\partial x_1^{n_1}},\frac{\partial f}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial^{n_2} f}{\partial x_2^{n_2}},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_t},\ldots,\frac{\partial^{n_t} f}{\partial x_t^{n_t}}\right)=0 \tag{1.1}$$

que involucra una función desconocida f en las variables $x_1, \ldots, x_t$ y algunas de sus derivadas, donde F denota una función de $n = n_1 + \cdots + n_t$ variables.

A continuación, presentaremos algunos ejemplos de ecuaciones diferenciales que aparecen en algunas áreas de las ciencias.

Ejemplo 1.1. *Un modelo sencillo para el crecimiento de poblaciones es la ley de Malthus, la cual afirma que la tasa de crecimiento de la población de un país aumenta en forma proporcional a su población total $P(t)$ en cualquier momento t. En otras palabras, mientras más personas haya en el momento t, más personas habrá en el futuro. En términos matemáticos, esto se escribe como*

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{1.2}$$

donde k es la constante de proporcionalidad. ☑

Ejemplo 1.2. *La segunda ley de Newton, que se encarga de cuantificar el concepto de fuerza, afirma que la fuerza neta F aplicada sobre una partícula de masa m es igual al cambio en su* momentum lineal *con respecto al tiempo. En el caso en que la masa del cuerpo permanece constante, se deduce que la fuerza aplicada sobre el cuerpo es proporcional a la aceleración $a(t)$ que adquiere dicho cuerpo; esto es,*

$$F = ma.$$

Si $x(t)$ denota la posición de la partícula en el tiempo t, entonces se tiene la siguiente ecuación diferencial:

$$F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) - m\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \tag{1.3}$$

donde la fuerza F es una función que depende del tiempo t, de la posición $x(t)$ y de la velocidad dx/dt. ☑

Ejemplo 1.3 (Modelo de Hodgkin-Huxley para pulsos neuronales). *En neurobiología, la comunicación neuronal es un área de activa investigación. Esta área se estudia las* señales eléctricas, *también conocidas como* pulsos *o* disparos, *realizados por células nerviosas individuales o neuronas. El encargado de propagar las señales eléctricas hacia el exterior de una neurona es el* axón, *también conocido como* cilindroeje *o* neurita *que es un tubo cilíndrico largo que se extiende desde* *cada neurona. Los pulsos eléctricos aparecen dado que la membrana de cada neurona tiene preferencias de permeabilidad, es decir, es fácilmente permeable por ciertos iones químicos para los cuales dicha permeabilidad es afectada por las corrientes y potenciales presentes.*

Los elementos más importantes en este sistema son los iones de sodio (Na^+), los de potasio (K^+) y la diferencia de potencial V existente entre el interior de la membrana y el medio circundante debido a las altas concentraciones de iones de K^+ al interior del axón. El modelo de Hodgkin-Huxley propone la siguiente ecuación para el potencial V:

$$C\frac{dV}{dt} = I_e - I_i, \tag{1.4}$$

donde C es la capacitancia de la membrana, I_e la corriente externa e I_i la corriente interna. La corriente interna, a su vez, satisface una ecuación del siguiente estilo:

$$I_i = g_0(V - V_0) + g_1 m^3 h(V - V_1) + g_2 n^4 (V - V_2), \tag{1.5}$$

donde $g_0, g_1, g_2 > 0$, y V_0, V_1, V_2 son constantes, mientras que m, n, h son variables de bloqueo, correspondientes a la activación de Na^+, activación de K^+ e inactivación de Na^+ respectivamente. El modelo es normalizado, de forma tal que las variables de bloqueo siempre toman valores entre 0 y 1, y puedan ser interpretadas como probabilidades para que cierto tipo de canal *esté abierto. Al combinar las dos ecuaciones* (1.4) *y* (1.5) *obtenemos:*

$$C\frac{dV}{dt} = I_e - (g_0(V - V_0) + g_1 m^3 h(V - V_1) + g_2 n^4 (V - V_2)). \tag{1.6}$$

Mientras I_e es tratado como un parámetro externo, la dinámica interna depende en gran parte del signo de los tres términos que aparecen en (1.5). ☑

Clasificación de las ecuaciones diferenciales

1. ***Ecuación diferencial ordinaria:*** una ecuación diferencial es llamada *ecuación diferencial ordinaria* (EDO) si es una ecuación diferencial que solo contiene derivadas ordinarias. Esto es, si es una ecuación diferencial de la forma
$$F\left(x, f, \frac{df}{dx}, \cdots, \frac{d^n f}{dx^n}\right) = 0.$$
2. ***Ecuación diferencial parcial:*** una *ecuación diferencial parcial* es una ecuación diferencial de la forma (1.1), en la cual aparecen las derivadas parciales de una función que depende de más de una variable.

Ejemplo 1.4. *La ecuación diferencial*

$$\frac{dx}{dt} + 4x = \cos(t),$$

donde x es la variable dependiente y t la variable independiente, es una ecuación diferencial ordinaria. ☑

Ejemplo 1.5. *Las ecuaciones diferenciales dadas en* (1.2), (1.3) *y* (1.6), *asociadas a los modelos descritos en los ejemplos 1.1, 1.2 y 1.3, son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias.* ☑

Ejemplo 1.6. *La ecuación diferencial*

$$\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial t} = 3,$$

donde y y t son variables independientes y x es la variable dependiente, es un ejemplo de ecuación diferencial parcial. ☑

Ejemplo 1.7. *Otro ejemplo de ecuación diferencial parcial viene dado por*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - p\frac{\partial u}{\partial t} - qu,$$

donde c es una constante. Esta ecuación es llamada ecuación del telégrafo, *dado que apareció por primer vez al tratar de determinar la distribución de la corriente y el voltaje a lo largo de las lineas terrestres de los telégrafos.* ☑

Ejemplo 1.8. *El flujo de calor en un sólido está gobernado por la ecuación diferencial parcial*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_x \frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\lambda_y \frac{\partial T}{\partial y}\right) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t},$$

donde λ_x y λ_y son las conductividades térmicas del solido en las direcciones x y y, T es la temperatura, ρ la densidad del sólido y c una constante. ☑

Ahora que estamos en capacidad de distinguir las ecuaciones diferenciales de acuerdo a su tipo, es momento de refinar un poco más nuestra clasificación. Para tal fin, introduciremos a continuación los conceptos de *orden* y *linealidad* de una ecuación diferencial.

Definición 1.3 (Orden). El orden de una ecuación diferencial es el orden de la mayor derivada que aparece en la ecuación.

Ejemplo 1.9. *Consideremos la ecuación diferencial ordinaria*

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.7}$$

donde F es una función de $n+2$ variables. Si en la expresión explicita de la ecuación (1.7) *aparece $y^{(n)}$, entonces nos encontramos frente a una ecuación diferencial ordinaria de orden n.* ☑

Ejemplo 1.10. *A continuación, explicaremos un poco el ejemplo anterior e indicaremos en cada caso a qué función corresponde F.*

1. *La ecuación diferencial $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0$ es una ecuación diferencial de orden 2 en la cual F está dada por la función $F(x, y, z, w) = 3y + 2z + w$. Nótese que si reemplazamos z por la primera derivada de y y w por la segunda derivada de y e igualamos a cero, obtenemos la ecuación diferencial dada.*

2. *De la misma forma, la ecuación diferencial $\frac{d^2x}{dt^2} + x\frac{dx}{dt} - \cos(t)x = e^{-t}$ es una ecuación diferencial ordinaria de orden 2, en la cual la función F corresponde a $F(t, x, u, v) = w + xu - \cos(t)x - e^{-t}$.*

3. *La ecuación diferencial $\frac{d^3x}{dt^3} = \sin(x)$ es una ecuación diferencial ordinaria de orden 3, en la cual la función F corresponde a $F(t, x, y, z, w) = w - \sin(x)$.* ☑

Definición 1.4 (Grado)**.** El grado de una ecuación diferencial es el exponente al cual está elevada la derivada de mayor orden que aparece en ella. Si esta derivada está elevada a un exponente no natural, el grado de la ecuación no está definido.

Ejemplo 1.11. *a)* $x^3y''' + 2x^2y'' + 3xy' + 4x = 0$ *es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden y primer grado.*

b) $(y'')^2 = \sin(x) + ye^x$ *es una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden y de grado 2.* ☑

Definición 1.5. Una ecuación diferencial ordinaria es *lineal*, si es de la forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y + g(x) = 0, \tag{1.8}$$

donde los coeficientes $g(x)$ y $a_i(x)$ con $i = 1, \ldots, n$ son funciones que no dependen de la función incógnita y y de ninguna de sus derivadas.

Si la ecuación diferencial no puede llevarse a la forma (1.8) decimos que la ecuación es *no lineal*.

Obs Análogo al caso de las ecuaciones *algebraicas*, en general, no tiene sentido hablar del grado de una EDO. Por ejemplo, si en una ecuación diferencial, alguna de las derivadas de la función incógnita aparece con un exponente que no es un número natural o tambien cuando aparecen haciendo parte del argumento de una función trascendente, como por ejemplo sin, ln, exp o cualquier otra de este estilo.

Ejemplo 1.12. *La* EDO $x^3y'''+2x^2y''+3xy'+4x = 0$ *es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden y grado uno.* ☑

Ejemplo 1.13. *La ecuación diferencial* $(y'')^2 = \sin(x) + ye^x$ *es una ecuación diferencial ordinaria cuadrática de segundo orden.* ☑

Ejemplo 1.14. *La ecuación diferencial* $e^{\frac{d^2y}{dx^2}} + \frac{dy}{dx} = \sin(x)$, *es un ejemplo de ecuación diferencial de segundo orden* no lineal. *Nótese que en este ejemplo no tiene sentido hablar del grado de la ecuación.* ☑

Ejemplo 1.15. *La ecuación de Van der Pol, es una ecuación diferencial ordinaria cuadrática de segundo orden:*

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + x = 0,$$

donde μ *es una constante, usada para describir el comportamiento de un oscilador no conservativo con amortiguamiento no lineal.* ☑

Otros ejemplos de ecuaciones diferenciales no lineales son los siguientes:

Ejemplo 1.16. *La ecuación diferencial parcial*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x} - 6f(t)u\frac{\partial u}{\partial x} = g(t, u),$$

llamada ecuación de Korteweig-de Vries (KdV), *usada para modelar el comportamiento de ondas en aguas poco profundas.* ☑

Ejemplo 1.17. *Las ecuaciones diferenciales* $\frac{dy}{dx} = xy^2$ *y* $\frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0$, *también son ejemplos de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.* ☑

Ejercicios

1. Clasificar las siguientes ecuaciones diferenciales según su tipo, indicar las variables dependiente e independiente y proporcionar el orden de la ecuación. Si la ecuación diferencial es ordinaria, determinar si es lineal o no lineal.
   a) $3y''' - 4xy' + x^3y - 4 = 0.$
   b) $\ln(x) - 3xy'' - 4xy = \sin(x).$
   c) $3xy'' - 3y' + 4y - y^2 = 0.$
   d) $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 \cos(x) + 4xy\frac{dy}{dx} + y^2e^x = 0.$
   e) $3\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 y}{\partial z^3} = 0.$
   f) $\ln(x) + 6xy'' - 4xy = \cos(x).$
   g) $x\frac{d^3y}{dx^3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0.$
   h) $(\sin(\theta))y'' - (\cos(\theta))y' = 2.$

Respuesta de ejercicios seleccionados

a) Esta ecuación es ordinaria porque no contiene derivadas parciales. La variable dependiente es y, y la independiente es x. La ecuación es de tercer orden ya que se tiene y''' como la mayor derivada, y como es la derivada de mayor orden de exponente 1, el grado es 1. La ecuación es lineal.

b) Esta ecuación es ordinaria porque no contiene derivadas parciales. La variable dependiente es y, y la independiente es x. La ecuación es de segundo orden ya que se tiene y'', y como es la derivada de mayor orden de exponente 1 el grado es 1. La ecuación es lineal.

c) Esta ecuación es ordinaria porque no contiene derivadas parciales. La variable dependiente es y, y la independiente es x. La ecuación es de segundo orden ya que se tiene y'', y como es la derivada de mayor orden de exponente 1 el grado es 1. La ecuación es no lineal debido al término y^2.

d) Esta ecuación es ordinaria porque no contiene derivadas parciales. La variable dependiente es y, y la independiente es x. La ecuación es de segundo orden ya que se tiene d^2y/dx^2, y como es la derivada de mayor orden de exponente 3 el grado es 3. La ecuación es no lineal.

e) Esta ecuación es parcial de tercer orden porque contiene tercera derivada parcial. La variable dependiente es y, y las variables independientes son x y z.

2. Solución de una ecuación diferencial

Uno de los objetivos al estudiar una ecuación diferencial es determinar si esta posee solución y, en caso de que tal exista, si es única. A continuación daremos la definición precisa de lo que entenderemos por solución de una ecuación diferencial ordinaria.

Definición 1.6 (Solución). Una solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.9}$$

es una función $y = f(x)$ definida en un intervalo abierto I, tal que para todo $x \in I$ las derivadas $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ existen y, al reemplazarlas en la ecuación (1.9), la expresión se convierte en una identidad.

Ejemplo 1.18. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$\frac{dP}{dt} = kP. \tag{1.10}$$

Verificar que la función

$$P(t) = ce^{kt}, \quad -\infty < t < \infty$$

es solución de la ecuación, donde c es una constante arbitraria.

Solución. Derivando la función dada obtenemos $P'(t) = cke^{kt} = kP(t)$, que es la expresión dada en la ecuación (1.10). ☑

En el proceso de resolver una ecuación diferencial, en algún momento necesitamos de la integral indefinida (o antiderivada) de alguna función. Por ejemplo, para la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = g(x)$$

la solución tiene la forma

$$y(x) = \int g(x)dx \;\; + \;\; C$$

en algún intervalo I, donde $\int g(x)dx$ es cualquier antiderivada de $g(x)$.

Obs La expresión "resolver una ecuación diferencial" o "hallar la solución de una ecuación diferencial" indica hallar una *función*, que es una solución de la ecuación diferencial. De forma análoga, cuando nos referimos a cierta *ecuación como solución* de una ecuación diferencial, queremos decir que la *función definida por la ecuación* es solución. Así, si la ecuación no define una función, entonces esta no es una solución de una ecuación diferencial a pesar de que siguiendo el procedimiento formal podamos comprobar que la ecuación satisface la ecuación diferencial.

Ejemplo 1.19. *Comprobar que la fórmula* $y = \sqrt{-(1+x^2)}$ *satisface la ecuación diferencial*

$$x + yy' = 0; \tag{1.11}$$

sin embargo, no es una solución de esta.

Solución. Derivando $y = \sqrt{-(1+x^2)}$ tenemos que $y' = \frac{-x}{\sqrt{-(1+x^2)}}$. Sustituyendo en la ecuación diferencial (1.11), vemos que se satisface la identidad; sin embargo, $y = \sqrt{-(1+x^2)}$ no define una función y por lo tanto no es una solución de la ecuación diferencial (1.11). ☑

Ejemplo 1.20. *La ecuación diferencial de primer orden*

$$xy' = 1 \tag{1.12}$$

no tiene solución en el intervalo $(-1, 1)$.

Solución. Notemos que solo las funciones de la forma $y = \ln(|x|) + c$ con $c \in \mathbb{R}$ satisfacen la identidad (1.12). Sin embargo, esta función es discontinua en $x = 0$, por tanto, no es diferenciable en este punto y, por definición de solución, esta debe satisfacer la ecuación en *todo punto* del intervalo $(-1, 1)$. ☑

Definición 1.7 (Solución explícita). Una solución explícita de la ecuación diferencial (1.9) es una función $y = f(x)$, donde y está escrita explícitamente en términos de x; esto es, y se ha despejado en términos de x.

Ejemplo 1.21. *Verificar que la función* $f(x) = x + e^{-x}$ *, con dominio toda la recta real* $\mathbb{R}$*, define una solución explícita de la ecuación diferencial* $y' + y = x + 1$.

Solución. Se calcula la primera derivada de $f(x)$ y se obtiene $f'(x) = 1 - e^{-x}$ la cual está definida en todo $\mathbb{R}$. Luego,

$$f'(x) + f(x) = 1 - e^{-x} + x + e^{-x} = 1 + x.$$

Es decir, se satisface la igualdad para cualquier $x \in \mathbb{R}$. ☑

Ejemplo 1.22. *Verificar que para cualquier par de números reales* c_1 *y* c_2*, la función*

$$\phi(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x},$$

definida en todo $\mathbb{R}$*, es una solución explícita de la ecuación*

$$y'' - 5y' + 6y = 0.$$

Solución. Dado que,

$$\phi'(x) = 2c_1e^{2x} + 3c_2e^{3x} \quad \text{y} \quad \phi''(x) = 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{3x},$$

entonces

$$\begin{aligned}\phi''(x) - 5\phi'(x) + 6\phi(x) =& (4c_1e^{2x} + 9c_2e^{3x}) - 5(2c_1e^{2x} + 3c_2e^{3x}) \\ & + 6(c_1e^{2x} + c_2e^{3x}) \\ =& e^{2x}(4c_1 - 10c_1 + 6c_1) + e^{3x}(9c_2 - 15c_2 + 6c_2) \\ =& 0.\end{aligned}$$

Puesto que la igualdad se satisface para todo x en $(-\infty, \infty)$, entonces $\phi(x) = c_1e^{2x}+c_2e^{3x}$ es una solución explícita de la ecuación diferencial en el intervalo $(-\infty, \infty)$, para cualquier par de constantes c_1 y c_2. ☑

Ejemplo 1.23. *Verificar que la función* $y = \tan(x) - x$*, definida para todo* $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$*,* $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ *define una solución explícita de la ecuación diferencial* $y' = (x+y)^2$.

Solución. Calculando la primera derivada de y obtenemos $y' = \sec^2(x) - 1 = \tan^2(x)$. Sustituyendo y y y' obtenemos la identidad

$$\tan^2(x) = (x + \tan(x) - x)^2 = \tan^2(x).$$

Se tiene así la igualdad para cualquier x en cada uno de los intervalos donde la función y, y su derivada, están definidas.

Notemos que la ecuación diferencial está definida en todo $\mathbb{R}$; sin embargo, la solución $y = \tan(x) - x$ solo está definida en ciertos intervalos contenidos en $\mathbb{R}$. ☑

Obs El ejemplo anterior muestra que el dominio de definición de una ecuación diferencial puede ser mayor al dominio de una solución. También es posible que una función que esté definida en un intervalo sea solución de una ecuación diferencial solo en una parte de este intervalo. Por ejemplo, la función $f(x) = |x|$ está definida en todo $x \in \mathbb{R}$ y no es diferenciable en $x = 0$. Esta función satisface la ecuación diferencial $f'(x) = 1$, en el intervalo $x > 0$ y $f'(x) = -1$ en el intervalo $x < 0$. Sin embargo $f(x)$ no es solución de ninguna ecuación diferencial en cualquier intervalo que contenga al punto $x = 0$.

Definición 1.8 (Solución implícita). Una relación $g(x, y) = 0$ define una solución implícita de la ecuación diferencial ordinaria

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

en el intervalo I, si se satisfacen las siguientes condiciones:

1. La relación $g(x, y) = 0$ define implícitamente a y como función de x sobre el intervalo I; es decir, existe una función $\phi(x)$ definida sobre I, tal que para todo $x \in I$ se verifica $g(x, \phi(x)) = 0$.

2. La función $\phi(x)$ es n veces diferenciable en el intervalo I y satisface

$$F(x, \phi(x), \phi'(x), \ldots, \phi^{(n)}(x)) = 0,$$

para todo $x \in I$.

Obs Nótese que $g(x, y) = 0$ es una ecuación y una ecuación *nunca* es una solución de una ecuación diferencial ya que solo las funciones pueden ser soluciones de estas. Lo que queremos significar al decir que la relación $g(x, y) = 0$ define una solución implícita de una ecuación diferencial es que la función $y = \phi(x)$, definida por la relación $g(x, y) = 0$, es la solución.

Ejemplo 1.24. *Sea $C > 0$ un número real. Verificar que la relación*

$$x^2 + y^2 = C \tag{1.13}$$

determina una solución implícita de la ecuación diferencial

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0 \tag{1.14}$$

en el intervalo $(-\sqrt{C}, \sqrt{C})$.

Solución. Diferenciando implícitamente la ecuación (1.13) obtenemos

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0,$$

de donde, dividiendo todo entre 2, obtenemos la igualdad (1.14). Ahora, despejando y de la ecuación (1.13) obtenemos $y = \pm\sqrt{C - x^2}$. Consideremos la función $\phi(x) = \sqrt{C - x^2}$, definida en el intervalo $(-\sqrt{C}, \sqrt{C})$. Puesto que $d\phi/dx = -x/\sqrt{C - x^2}$ para todo $x \in (-\sqrt{C}, \sqrt{C})$, sustituyendo en (1.14), obtenemos

$$\sqrt{C - x^2}\ \frac{-x}{\sqrt{C - x^2}} + x = 0.$$

Luego, la ecuación (1.13) determina una solución implícita de la ecuación (1.14). ☑

Ejemplo 1.25. *Verificar que la relación*

$$x^2y + y^2 - C = 0, \tag{1.15}$$

determina una solución implícita de la ecuación diferencial

$$2xy + (x^2 + 2y)\frac{dy}{dx} = 0. \tag{1.16}$$

Solución. El teorema de la función implícita garantiza la existencia de una función diferenciable $y = f(x)$ que satisface (1.15). Diferenciando implícitamente la ecuación (1.15) se obtiene

$$\begin{aligned} 2xy + x^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} &= 0, \\ 2xy + (x^2 + 2y)\frac{dy}{dx} &= 0, \end{aligned}$$

que es igual a la ecuación (1.16). Luego, la relación (1.15) determina una solución implícita de (1.16). ☑

Obs El procedimiento estándar para mostrar que una relación es una solución de una ecuación diferencial es derivar implícitamente la relación y sustituirla en la ecuación. Sin embargo, se debe tener cuidado con el dominio de la solución al realizar este procedimiento ya que puede ocurrir, por ejemplo, que afirmemos que $x^2 + y^2 = 0$ es una solución implícita de $x+yy' = 0$, pues al derivar implícitamente la relación $x^2 + y^2 = 0$ y sustituir en $x + yy' = 0$ obtenemos la identidad, pero $x^2 + y^2 = 0$ no define a y implícitamente como una función de x en ningún intervalo ya que solo el punto $(0, 0)$ satisface esta fórmula. Así, concluir que $x^2 + y^2 = 0$ es una solución implícita de $x + yy' = 0$ no tiene sentido.

2.1. Solución general y particular

Definición 1.9 (Solución general). La solución general de una ecuación diferencial es el conjunto de todas las funciones que verifican la ecuación diferencial. Aquí diremos que la solución general de una ecuación diferencial consiste en una familia n-paramétrica de funciones: parámetros que serían las constantes que aparecen al realizar la operación de *integrar* n-veces, siendo n el orden de la ecuación. Cuando exista alguna (inusual) solución que no pertenece a dicha familia, entonces esta función, como es típico, recibirá el nombre de *solución singular*.

Definición 1.10 (Solución particular). Se llama solución particular de la ecuación diferencial a cualquier función que la satisfaga; esto es, a cualquier elemento del conjunto solución general. Una solución particular se puede obtener fijando valores a los parámetros de la familia de funciones que son solución de la ecuación.

Ejemplo 1.26. *Demostrar que la familia de funciones $y = ke^{2x^2}$ definidas en toda la recta real hacen parte de la solución general de la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = 4xy.$$

Solución. Derivando y obtenemos $y' = 4kxe^{2x^2}$, es decir, $y' = 4xy$. ☑

Obs En el ejemplo anterior, la familia de soluciones dada es en realidad la solución general de la ecuación diferencial en cuestión, pero para demostrar esto necesitamos de las técnicas básicas para hallar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias, las cuales pospondremos hasta el próximo capítulo.

Ejemplo 1.27. *Demostrar que la función $y = 3 - 3e^{-x^2/2}$ es una solución particular de la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} + xy = 3x.$$

Solución. Derivando y obtenemos $y' = 3xe^{-x^2/2}$. Luego,

$$\frac{dy}{dx} + xy = 3xe^{-\frac{x^2}{2}} + x(3 - 3e^{-\frac{x^2}{2}}) = 3xe^{-\frac{x^2}{2}} + 3x - 3xe^{-\frac{x^2}{2}} = 3x.$$

☑

Ejemplo 1.28. *Demostrar que la familia de funciones $y = cx + c^2$, definidas en toda la recta real hacen parte de la solución general de la ecuación diferencial*

$$y = xy' + (y')^2$$

y que la función $y_1 = -\frac{x^2}{4}$ es una solución singular.

Solución. Derivando y obtenemos $y' = c$, de donde se tiene la identidad deseada; así, la familia de funciones $y = cx + c^2$ forman parte de la solución general. Por otro lado, derivando y_1 obtenemos $y_1' = -\frac{x}{2}$ y sustituyendo en la ecuación vemos que esta se satisface. Sin embargo, no es posible obtener $y_1 = -\frac{x^2}{4}$ como una solución particular de la ecuación, no importa el valor de c en $y = cx + c^2$. De esta manera, $y_1 = -\frac{x^2}{4}$ es una solución singular. ☑

Obs El uso de los términos *solución general* y *solución singular* como aquí están definidos es un poco controversial dado que para algunos autores estos no son del todo correctos. Por ejemplo, consideremos la ecuación diferencial de primer orden $y' = -2y^{3/2}$. La familia de funciones de la forma $y = \frac{1}{(x+c)^2}$ hacen parte de la solución general de esta ecuación. Sin embargo, $y = 0$ también es una solución que no se obtiene de la familia de funciones de la forma $y = \frac{1}{(x+c)^2}$ y, por lo tanto, es una solución singular. Pero, por otro lado, cualquier función de la forma $y = \frac{c^2}{(cx+1)^2}$ también es solución de la ecuación diferencial y la solución $y = 0$ es parte de esta familia, por lo cual $y = 0$ es una solución tanto singular como no singular, según la familia de soluciones que se considere. Esto conduce a cuestionar la exactitud de estos términos. Sin embargo, en este texto nos abocaremos al estudio de algunas técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales que nos permitirán establecer una única familia de funciones, que llamamos solución general. No consideraremos soluciones "singulares" o familias de soluciones con otra configuración en su fórmula.

2.2. Problema de valor inicial

Definición 1.11 (Problema de valor inicial). Una ecuación diferencial ordinaria de orden n con *condiciones iniciales*, es una ecuación diferencial de la forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0,$$

para la cual se busca una solución definida en un intervalo I sujeta a n condiciones

$$y(x_0) = y_0, \frac{dy}{dx}(x_0) = y_1, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}(x_0) = y_{n-1},$$

en un punto $x_0 \in I$ y donde $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$ son constantes dadas.

El conjunto de datos que consta de la ecuación diferencial y de las n condiciones recibe el nombre de problema de valor inicial (PVI) o también problema de Cauchy.

Ejemplo 1.29. *La ecuación*

$$\frac{dy}{dx} + 4y - e^{-x} = 0, \quad \textit{sujeta a las condiciones} \quad y(0) = \frac{4}{3},$$

es un problema con condiciones iniciales. ☑

Ejemplo 1.30. *Verificar que $y = xe^x + cx$, donde c es una constante arbitraria, proporciona una familia a un parámetro de soluciones explícitas de la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = xe^x.$$

Graficar varias de estas curvas solución y determinar la solución particular que satisfaga la condición inicial $y(1) = e - 1$.

Solución. Derivando $y = xe^x + cx$ obtenemos $y' = e^x + xe^x + c$. Ahora,

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = e^x + xe^x + c - \frac{(xe^x + cx)}{x} = e^x + xe^x + c - e^x - c = xe^x.$$

En la figura 1.1 se bosquejan algunas curvas solución de $y = xe^x + cx$.

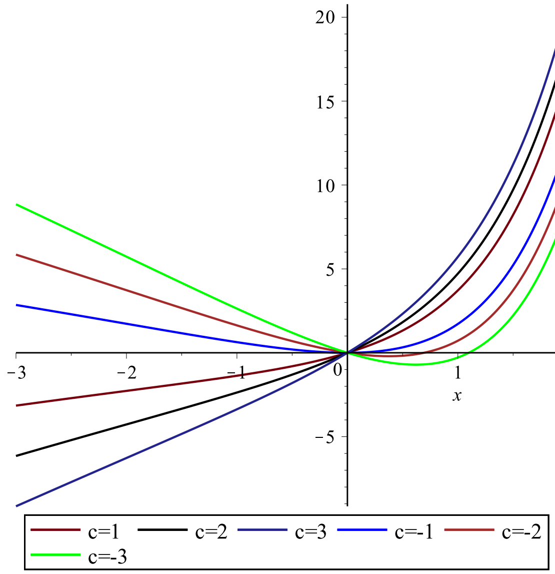


Figura 1.1: Algunas curvas solución en la familia $y = xe^x + cx$.

Por último, se determina c de modo que satisfaga la condición inicial $y(1) = e - 1$. Al hacer $x = 1$ y $y = e - 1$ en la ecuación $y = xe^x + cx$ se tiene

$$e - 1 = e + c,$$

por lo que $c = -1$. Así, la solución del problema de valor inicial es dada por $y(x) = xe^x - x$. ☑

Ejercicios

1. Comprobar si la función o familia de funciones indicada es una solución explícita o implícita de la ecuación diferencial dada.
   a) $y' - 3y = 0; \quad y = -2e^{3x}$.
   b) $y'' - y' + y = 0; \quad y = c_1 e^{x/2}\cos(x\sqrt{3}/2) + c_2 e^{x/2}\sin(x\sqrt{3}/2)$.
   c) $y'\cos(t) + y\sin(t) = 0; \quad y = \sin(t) + \cos(t)$.
   d) $xydx + (x^2/2 + y)dy = 0; \quad x^2y + y^2 = k$.
   e) $y'' + y = \cot(x); \quad y = c_1\cos(x) + c_2\sin(x)$
   $+ \sin(x)\ln[(1 - \cos(x))/\sin(x)]$.
   f) $y'' + y' - 12y = 0; \quad y = c_1 e^{-4x} + c_2 e^{3x}$.
   g) $y''' - 3y'' + 3y' - y - e^x = 0; \quad y = e^x\left(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \frac{x^3}{6}\right)$.
   h) $y'' + 2y' + y = 0; \quad e^y = c_1x + c_2$.
   i) $y'' + (y')^2 = 0; \quad y = \ln|x + c_1| + c_2$.
   j) $y''' - y'' - e^{2x}\sin^2(x) = 0; \quad y = c_1 + c_2e^x + c_3e^{-x}$
   $+ \left(\frac{1}{12} + \frac{9\cos(2x) - 7\sin(2x)}{520}\right)e^{2x}$.
   k) $x^3y''' + 2x^2y'' - xy' + y = 12x^2; \quad y = c_1x + c_2x\ln|x| + 4x^2, \quad x > 0$.
   l) $y^2 - 1 - (2y + xy)y' = 0; \quad y^2 - 1 = (x + 2)^2$.
   m) $e^{x-y} + e^{y-x}\frac{dy}{dx} = 0; \quad e^{2y} + e^{2x} = 1$.
   n) $xy' = 2y; \quad y = c_1x^2$.
   ñ) $y'' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}; \quad y = \arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}$.
   o) $y' = \frac{1}{3}y; \quad y = c_1x^{1/3}$.
   p) $\cos(\theta)\frac{dr}{d\theta} - 2r\sin(\theta) = 0; \quad r = a\sec^2(\theta)$.
2. Demostrar que la ecuación diferencial

$$\left|\frac{dy}{dx}\right| + |y| + 3 = 0$$

   no tiene soluciones.

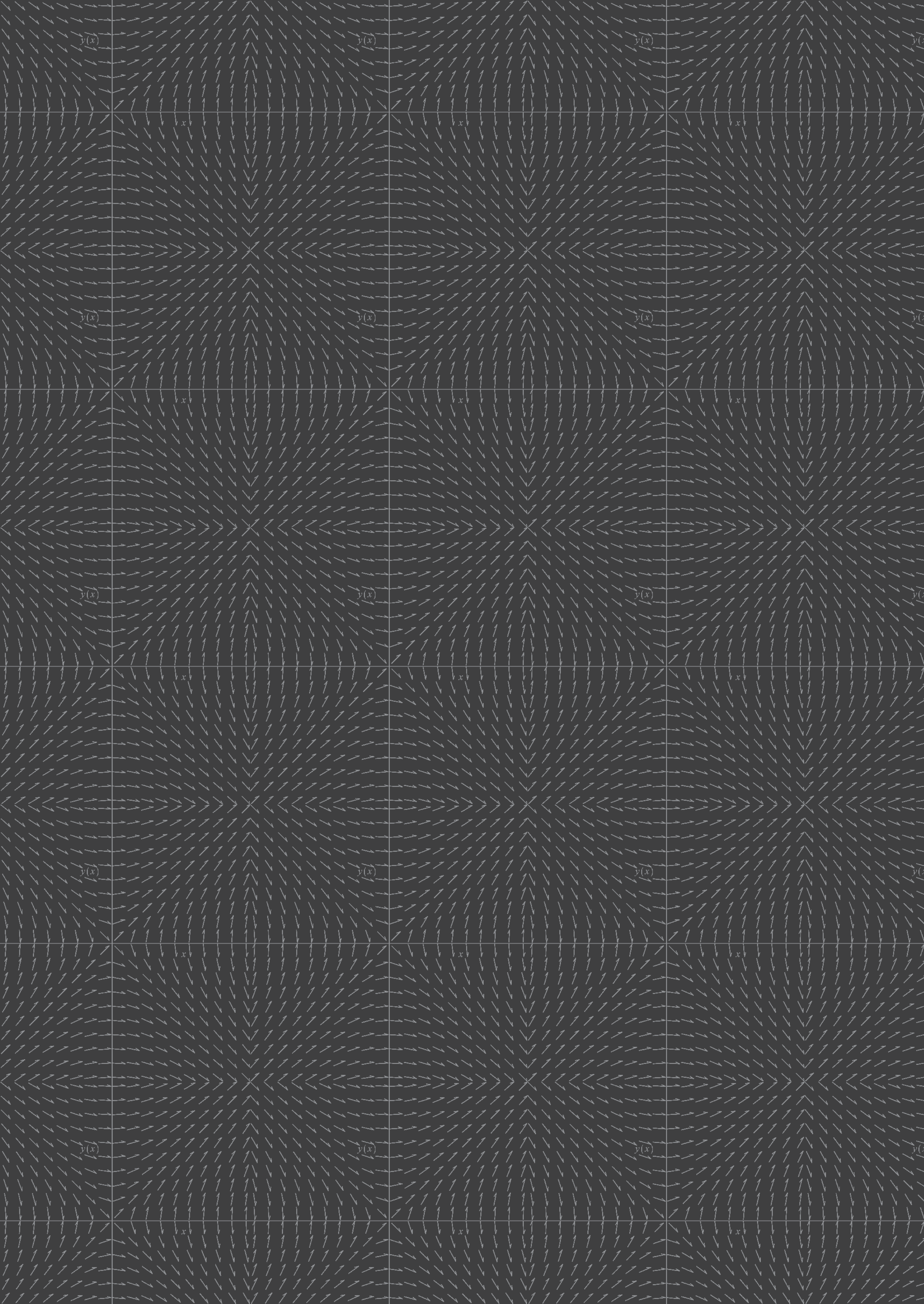
Respuesta de ejercicios seleccionados

1. En los ejercicios *c*), *d*), *h*), *i*), *j*), *k*), *m*) y ñ), la función indicada no es solución de la ecuación diferencial dada; en los demás casos, la función indicada sí satisface la ecuación diferencial.
2. Toda función en valor absoluto es positiva o 0 y, por tanto, la identidad $\left|\frac{dy}{dx}\right| + |y| + 3 = 0$ no puede ser satisfecha.

Capítulo

dos

Ecuaciones diferenciales de primer orden



Como vimos, una ecuación de diferencial de primer orden es una relación de la forma

$$y'(t) = f(t, y).$$

Cuando esta relación es lineal en las variables t, y y y', es decir, que se pueda reescribir como

$$a_1(t)y' + a_2(t)y + g(t) = 0, \qquad a_1(t) \not\equiv 0$$

se dice que la ecuación diferencial de primer orden es *lineal*. En caso contrario se dice *no lineal*.

En este capítulo se describen varios métodos de resolución para ciertos tipos de ecuaciones diferenciales de primer orden. De manera más precisa, se estudiarán técnicas de resolución de ecuaciones de primer orden no lineales llamadas *ecuaciones de variables separables* y *ecuaciones exactas*. Se mostrarán estrategias para hallar algunas funciones auxiliares llamadas *factores integrantes*, las cuales permitirán reducir algunas ecuaciones no lineales a ecuaciones exactas. También se resolverán ecuaciones diferenciales lineales y, finalmente, mediante sustituciones convenientes, se podrán reducir algunas ecuaciones diferenciales tales como las llamadas *ecuaciones homogéneas*, de *Bernoulli*, de *Ricatti*, con *coeficientes lineales* a ecuaciones lineales y a otras ecuaciones estudiadas previamente.

Por otro lado, como veremos, no siempre podremos hallar la solución de una ecuación diferencial de primer orden en términos de funciones elementales. Por esto, en este capítulo también estudiaremos algunos métodos cualitativos para estas ecuaciones, lo que nos permitirá analizar las características más significativas de las eventuales soluciones.

Primero presentaremos el teorema de existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones de primer orden. Para ver su demostración recomendamos [16].

Teorema 2.1 (Existencia y unicidad de soluciones para EDO de primer orden). *Sean las funciones f y $\frac{\partial f}{\partial y}$ continuas en algún rectángulo $a < t < b$, $c < y < d$ que contiene al punto (t_0, y_0). Entonces en algún intervalo $t_0 - h < t < t_0 + h$ contenido en $a < t < b$ existe una única solución $y = \phi(t)$ del problema de valor inicial*

$$y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

Note que a partir del teorema de existencia y unicidad no se puede concluir que el problema de valor inicial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$, $\;y(5) = 3$ tiene única solución, pues la función $f(t, y) = \sqrt{y^2 - 9}$, si bien es continua, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{y^2-9}}$ no es continua en ningún rectángulo que contiene al punto $(5, 3)$.

1. Ecuaciones diferenciales no lineales

Comenzaremos el estudio de las ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden considerando la clase de ecuaciones llamada de *variables separables*.

1.1. Ecuaciones de variables separables

La ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = r(x, y)$$

se denomina de *variables separables* si la función $r(x, y)$ se puede expresar de la forma $r(x, y) = f(x) \cdot g(y)$, donde f es una función en términos de x y g es una función en y:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y).$$

A veces por comodidad escribimos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{p(y)}$$

con $g(y) = 1/p(y)$. Para resolver esta ecuación diferencial se "separan" las funciones f y g como

$$p(y) \cdot \frac{dy}{dx} = f(x)$$

y se integra ambos lados con respecto a x

$$\int p(y)\frac{dy}{dx}dx = \int f(x)dx.$$

Dado que y depende de x, de la regla de la cadena obtenemos el diferencial $dy = \frac{dy}{dx}dx$; por lo tanto, la ecuación anterior queda en la forma

$$\int p(y)dy = \int f(x)dx.$$

Ejemplo 2.1. *Resolver la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} = x + 2.$$

Solución. Si integramos ambos lados de la ecuación con respecto a la variable independiente x; es decir,

$$\int \frac{dy}{dx}dx = \int (x + 2)dx$$

o, lo que es lo mismo,

$$\int dy = \int (x+2)dx,$$

evaluando las integrales se obtiene

$$y = \frac{x^2}{2} + 2x + c,$$

donde c es una constante arbitraria.

La última expresión constituye una familia de curvas parabólicas, cuyo gráfico se muestra en la figura 2.1

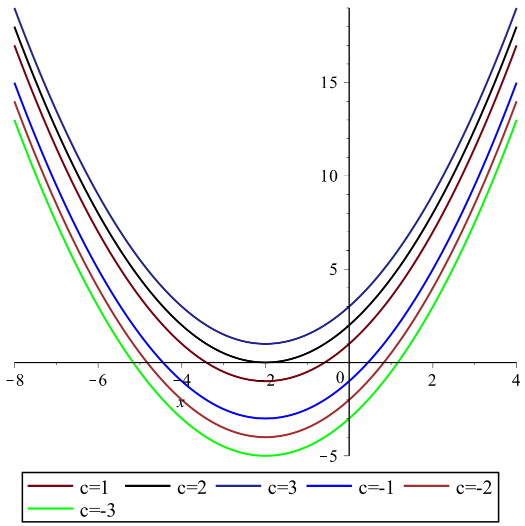


Figura 2.1: Familia de curvas de $y = \frac{x^2}{2} + 2x + c$.

Esta familia es la solución general de la EDO. ☑

Ejemplo 2.2. *Resolver la ecuación*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sec^2(y)}{1+x^2}.$$

Solución. Si reescribimos la ecuación en la forma

$$\frac{1}{\sec^2(y)}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

e integramos ambos lados de la ecuación con respecto a la variable independiente x, es decir,

$$\int \frac{1}{\sec^2(y)}\frac{dy}{dx}dx = \int \frac{1}{1+x^2}dx$$

o

$$\int \frac{dy}{\sec^2(y)} = \int \frac{dx}{1+x^2},$$

evaluando las integrales se obtiene

$$\frac{y}{2} + \frac{\sin(2y)}{4} = \arctan(x) + c.$$

Esta la simplificamos como

$$2y + \sin(2y) = 4\arctan(x) + k,$$

donde k es una constante arbitraria. ☑

Ejemplo 2.3. *Resolver el problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} = x^3(1-y), \qquad y(0) = 3.$$

Solución. Al separar e integrar tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-y}\frac{dy}{dx} &= x^3 \\ \int \frac{1}{y-1}\frac{dy}{dx}dx &= -\int x^3 dx. \end{aligned}$$

Evaluando las integrales y tomando logaritmo, obtenemos

$$\begin{aligned} \ln|y-1| &= -\frac{x^4}{4} + c, \\ |y-1| &= e^{-\frac{x^4}{4}}e^c. \end{aligned}$$

En términos geométricos, esto significa que las soluciones de la ecuación diferencial son aquellas funciones y cuya distancia en cada punto x de su dominio a la función $f(x) \equiv 1$ es igual a la función $e^{-\frac{x^4}{4}}e^c$ con $c \in \mathbb{R}$ arbitrario. Estas soluciones son $y(x) = 1 \pm e^{-\frac{x^4}{4}}k$, donde por simplicidad en la presentación hemos definido $k = e^c > 0$. Ahora bien, estas dos soluciones son parte del conjunto *solución general* de las soluciones de la ecuación diferencial de la forma: $y(x) = 1 + e^{-\frac{x^4}{4}}k$, donde se admiten valores negativos para k. Ahora, usando la condición inicial tenemos

$$3 = y(0) = 1 + ke^0 = 1 + k.$$

De este modo, tenemos que la solución del problema de valor inicial es dada por la función $y(x) = 1 + 2e^{-\frac{x^4}{4}}$. ☑

Ejercicios

1. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales de variables separables:
   a) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$.
   b) $(1 - y^2)dx - xydy = 0$.
   c) $(y + 1)dx + (y - 1)(1 + x^2)dy = 0$.
   d) $(2x + 1)y' + y^2 = 0$.
   e) $y' - x^3 = x^3y$.
   f) $xy^2dy + (x^2 + 1)dx = 0$.
   g) $xy^2 + \sqrt{1 + x^2}y' = 0$.
   h) $xy^2dx + xdy = 0$.
   i) $\frac{dy}{dx} = 1 + x + y + xy$.
   j) $x^2\frac{dy}{dx} = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$.
2. Resolver el problema de valor inicial respectivo.
   a) $\frac{dy}{dx} = 4(x^2 + 1); \quad y(0) = 1$.
   b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2-1}{x^2-1}; \quad y(2) = 2$.
   c) $x^2\frac{dy}{dx} = y - xy; \quad y(-1) = -1$.
   d) $\frac{dy}{dx} = 3x^2(y^2 + 1); \quad y(0) = 1$.
   e) $2y\frac{dy}{dx} = \frac{x}{\sqrt{x^2-16}}; \quad y(5) = 2$.
   f) $\tan(x)\frac{dy}{dx} = y; \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.
   g) $\frac{dy}{dx} = 2xy^2 + 3x^2y^2; \quad y(1) = -1$.
3. Hallar todas las funciones $f(x)$ tales que su derivada es el cuadrado de la función.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. a) $y = cx$.
   b) $c = x^2(1 - y^2)$.
   c) $\tan^{-1}(x) + c = -y + 2\ln|y + 1|$.
   d) $y = \frac{2}{\ln|2x+1|+c}$.
   e) $y = ce^{x^4/4} - 1$.
   f) $y^3 = -\frac{3}{2}x^2 - 3\ln|x| + c$.
   g) $y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}+c}$.
   h) $y = \frac{1}{x+c}$.
   i) $\ln|1 + y| = x + \frac{x^2}{2} + c$.
   j) $y = -\tan(\frac{x^2+cx+1}{x})$.
2. a) $y = \frac{4}{3}x^3 + 4x + 1$.

b) $y = x$.
c) $y = \frac{e^{-1/x}}{e^x}$.
d) $y = \tan(\frac{\pi}{4} + x^3)$.
e) $y = \sqrt{\sqrt{x^2 - 16} + 1}$.
f) $y = -\frac{1}{2}\pi \sin(x)$.
g) $y = -\frac{1}{-1+x^2+x^3}$.

3. $f(x) = \frac{-1}{x+c}, \quad y \neq 0$.

1.2. Ecuaciones exactas

Una ecuación diferencial de la forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{2.1}$$

es llamada *exacta*, si existe una función $F(x, y)$ de dos variables con derivadas parciales continuas hasta de segundo orden en un dominio Ω, tal que:

$$dF(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy.$$

En este caso se tendrá que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y).$$

1.2.1. Solución de una ecuación diferencial exacta

Si la ecuación $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta, entonces podemos encontrar $F(x, y)$ tal que

$$dF = M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0,$$

es decir, $F(x, y) = k$, con $k \in \mathbb{R}$. De esta forma una vez encontrada F, la solución de la ecuación en forma implícita es $F(x, y) = k$.

El siguiente resultado nos permite determinar si una ecuación diferencial de la forma (2.1) es exacta. Daremos su demostración pues en ella se describe el procedimiento para resolver este tipo de ecuaciones.

Teorema 2.2 (Criterio para exactitud de una ecuación diferencial). *Sean $M(x, y)$ y $N(x, y)$ funciones continuas y con derivadas parciales de primer orden continuas en una región rectangular R definida por $a < x < b$, $c < y < d$. La ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta si y solamente si*

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Demostración. La demostración es en dos partes.

1. Supongamos que la ecuación es exacta: entonces existirá una función $F(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y).$$

Derivando en estas igualdades respecto a x y y respectivamente, se tiene

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Puesto que $\partial M/\partial y$ y $\partial N/\partial x$ son continuas, entonces $\partial^2 F/\partial x\partial y$ y $\partial^2 F/\partial y\partial x$ también lo son. Luego el teorema de Clairaut-Schwarz garantiza la igualdad

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}. \tag{2.2}$$

2. Ahora mostramos que si M y N satisfacen la ecuación (2.2) entonces la ecuación $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es exacta. Para la demostración se quiere determinar la existencia de una función $F(x, y)$ tal que

$$dF = Mdx + Ndy.$$

Si esta función existe, se debe verificar que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y).$$

Integrando la primera ecuación con respecto a x, y manteniendo a y como constante, se obtiene que

$$F(x, y) = \int M(x, y)dx + g(y) \tag{2.3}$$

donde la función arbitraria $g(y)$ es la constante de integración. Ahora debemos determinar $g(y)$. Para ello utilizaremos (2.3) y lo derivamos con respecto a y

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \int \left(\frac{\partial M(x, y)dx}{\partial y} \right) + \frac{dg(y)}{dy}.$$

Como $\partial F/\partial y = N(x, y)$ y despejando $g'(y)$ se tiene

$$g'(y) = N(x, y) - \int \left(\frac{\partial M(x, y)dx}{\partial y} \right). \tag{2.4}$$

Para determinar $g(y)$ es importante que el lado derecho de la ecuación (2.4) sea una función que depende solamente de y. Para establecer este hecho derivamos (2.4) con respecto a x, obteniendo

$$\frac{d}{dx}g'(y) = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}.$$

Por la ecuación (2.2), esta expresión es cero; por lo tanto, el lado derecho de (2.4) no depende de x. Integrando (2.4) y sustituyendo $g(y)$ en (2.3), se obtiene la solución de la ecuación (2.1)

$$k = F(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left[N(x,y) - \frac{\partial(\int M(x,y)dx)}{\partial y} \right] dy.$$

☑

Este es el método que se emplea para determinar $F(x,y)$ y es indiferente empezar el cálculo de esta manera o bien con:

$$\int N(x,y)dy + g(x),$$

siguiendo un procedimiento análogo al expuesto anteriormente, pero intercambiando variables.

Para resolver una ecuación diferencial exacta se seguirán los pasos indicados en la demostración anterior, donde se ha establecido cómo encontrar la función $F(x,y)$.

Obs Note que la ecuación de variables separables

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{p(y)},$$

se puede escribir en forma equivalente como

$$p(y)dy - f(x)dx = 0$$

la cual es exacta, como se ve fácilmente.

Ejemplo 2.4. *Resolver el problema de valor inicial*

$$(e^x y + xe^x y)dx + (xe^x + 2)dy = 0, \qquad y(0) = -1. \tag{2.5}$$

Solución. En este caso $M(x,y) = e^x y + xe^x y$, y $N(x,y) = xe^x + 2$. Como

$$\frac{\partial M}{\partial y} = e^x + xe^x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

la ecuación es exacta. Para determinar $F(x,y)$, comenzamos integrando con respecto a x

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} =& M(x,y) = e^x y + xe^x y\\ F(x,y) =& \int (e^x y + xe^x y)dx + g(y)\\ F(x,y) =& xe^x y + g(y).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Ahora derivamos parcialmente con respecto a y, y sustituimos $xe^x + 2$ en vez de $N(x,y)$, ya que $\partial F/\partial y = N(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = xe^x + g'(y)$$

lo que es igual a

$$\begin{aligned}xe^x + 2 =& xe^x + g'(y)\\ 2 =& g'(y).\end{aligned}$$

Así, $2 = g'(y)$, y por tanto $g(y) = 2y$. La constante de integración se puede omitir ya que cualquier solución de la ecuación diferencial se satisface. De esta manera, sustituyendo $g(y)$ en (2.6) tenemos

$$F(x,y) = xe^x y + 2y.$$

Es decir, la solución de la ecuación diferencial (2.5) está dada por

$$xe^x y + 2y = k.$$

Alternativamente, se puede integrar simultáneamente las dos funciones

$$M(x,y) = e^x y + xe^x y, \quad y \quad N(x,y) = xe^x + 2$$

y compararlas para determinar unívocamente $F(x,y)$, salvo una constante. Así,

$$\begin{aligned}F(x,y) = \int M(x,y)dx =& \int (e^x y + xe^x y)dx\\ =& e^x y + (xe^x - e^x)y = xye^x.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}F(x,y) = \int N(x,y)dy =& \int (e^x x + 2)dy\\ =& (e^x x + 2)y = xye^x + 2y.\end{aligned}$$

Comparando (tomando los términos comunes una vez y los no comunes), obtenemos $F(x, y) = xye^x + 2y$. La solución de la ecuación está dada de manera explícita por

$$\begin{aligned} k =& xe^x y + 2y \\ y =& \frac{k}{xe^x + 2}, \end{aligned}$$

con la condición inicial $x = 0$, tenemos $y = -1$, por lo que $k = -2$. De esta manera la solución es dada por $y(x) = \frac{-2}{xe^x+2}$. ☑

Ejemplo 2.5. *Resolver el problema de valor inicial*

$$(y \sin(xy) + x^2)dx + (x \sin(xy) + y^2)dy = 0, \qquad y(0) = -1.$$

Solución. En este caso $M(x, y) = y \sin(xy) + x^2$, $N(x, y) = x \sin(xy) + y^2$. Calculamos

$$\frac{\partial M}{\partial y} \text{ y } \frac{\partial N}{\partial x}$$

y encontramos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \sin(xy) + xy \cos(xy) = \frac{\partial N}{\partial x},$$

luego, la ecuación es exacta. Para determinar $F(x, y)$, comenzamos integrando M con respecto a x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} =& M(x, y) = y \sin(xy) + x^2 \\ F(x, y) =& \int (y \sin(xy) + x^2)dx + g(y) \\ F(x, y) =& -\cos(xy) + \frac{x^3}{3} + g(y). \end{aligned}$$

Ahora derivamos parcialmente F con respecto a y y sustituimos $x \sin(xy)+y^2$ en lugar de $N(x, y)$ ya que $\partial F/\partial y = N(x, y)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} =& x \sin(xy) + g'(y) \\ x \sin(xy) + y^2 =& x \sin(xy) + g'(y) \\ y^2 =& g'(y). \end{aligned}$$

Así,

$$g(y) = \int y^2 dy = \frac{y^3}{3}.$$

Por tanto,

$$F(x,y) = -\cos(xy) + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3},$$

es decir,

$$k = -\cos(xy) + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3}.$$

Ahora, usemos la condición inicial $y(0) = -1$:

$$k = -\cos(0(-1)) + \frac{0^3}{3} + \frac{(-1)^3}{3}$$
$$k = -1 - \frac{1}{3} = -\frac{4}{3}.$$

De esta manera, la solución del problema de valor inicial viene dada en forma implícita por $-\frac{4}{3} = -\cos(xy) + \frac{x^3}{3} + \frac{y^3}{3}$. ☑

Ejercicios

1. Determinar si la ecuación es exacta. Si lo es, resuélvala.
   a) $x^2dy + 2xydx = x^2dx$.
   b) $(y^2 - 2x)dx + 2xydy = 0$.
   c) $\left(\frac{1}{x} + 2y^2x\right)dx + (2yx^2 - \cos(y))dy = 0$.
   d) $(y^2 \sin(x))dx + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x}\right)dy = 0$.
   e) $(\tan(y) - 2)dx + \left(x\sec^2(y) - \frac{1}{y}\right)dy = 0$.
   f) $\left(\frac{2x}{y} - \frac{3y^2}{x^4}\right)dx + \left(\frac{2y}{x^3} - \frac{x^2}{y^2} + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)dy = 0$.
   g) $(e^x \sin(y) + \tan(y))dx + (e^x \cos(y) + x\sec^2(y))dy = 0$.
   h) $(\cos(x) + \ln|y|)dx + \left(\frac{x}{y} + e^y\right)dy = 0$.
   i) $(1 + ye^{xy})dx + (2y + xe^{xy})dy = 0$.
2. Demostrar que cualquier ecuación de la forma

$$f(x)dx + g(y)dy = 0$$

   es exacta.
3. Resolver el problema de valor inicial respectivo:
   a) $(4x^3y^2 - 6x^2y - 2x - 3)dx + (2x^4y - 2x^3)dy = 0, \quad y(1) = 3$.
   b) $(-4y\cos(x) + 4\cos(x)\sin(x) + \sec^2(x))dx + (4y - 4\sin(x))dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.
   c) $(y^3 - x)e^xdx + 3y^2(e^x + y)dy = 0, \quad y(0) = 0$.
   d) $(\sin(x) - y\sin(x))dx + (\cos(x) + y)dy = 0, \quad y(0) = 1$.

4. Determinar la función más general $M(x,y)$ de modo que la ecuación sea exacta:
   a) $M(x,y)dx + \left(\sec^2(y) - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0.$
   b) $M(x,y)dx + (x^3 - y^3)dy = 0.$
   c) $M(x,y)dx + (e^{2x} - e^y \sin(x))dy = 0.$
5. Determinar la función más general $N(x,y)$ de modo que la ecuación sea exacta:
   a) $(x^2y^3 - 3xy + 2y^2)dx + N(x,y)dy = 0.$
   b) $(y\sin(x) + x\sin(y))dx + N(x,y)dy.$
6. Encontrar condiciones para las constantes $A, \quad B, \quad C$ y D tales que la ecuación

$$(Ax + By)dx + (Cx + Dy)dy = 0$$

   sea exacta.
7. Demostrar que la ecuación $y' + y = 0$ es exacta si la multiplicamos por e^x y hallar la solución general.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *a*) $y = \frac{k}{x^2} + \frac{x}{3}.$
   b) $k = y^2x - x^2.$
   c) $x^2y^2 + \ln|x| - \sin(y) = c.$
   d) No es exacta.
   e) $c = x\tan(y) - 2x - \ln|y|.$
   f) $k = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x^3} + 2\sqrt{y}.$
   g) $k = e^x \sin(y) + x\tan(y).$
   h) $k = \sin(x) + x\ln|y| + e^y.$
   i) $k = x + e^{xy} + y^2.$
3. *a*) $-1 = x^4y^2 - 2x^3y - x^2 - 3x.$
   b) $0 = -4y\sin(x) - 2\cos^2(x) + \tan(x) + 2y^2.$
   c) $1 = y^3e^x - xe^x + e^x + \frac{3}{4}y^4.$
   d) $\frac{1}{2} = -\cos(x) + y\cos(x) + \frac{y^2}{2}.$
4. *a*) $\frac{1}{y}.$
   b) $3x^2y.$
   c) $2ye^{2x} - e^y\cos(x).$
5. *a*) $x^3y^2 - \frac{3}{2}x^2 + 4xy.$
   b) $-\cos(x) + \frac{x^2}{2}\cos(y).$
6. $B = C, A$ y D cualquier número real.
7. $y = ce^{-x}.$

1.3. Factor integrante

Algunas ecuaciones diferenciales que no son exactas pueden ser transformadas en estas mediante una función que, multiplicada a la ecuación original, la transforma en una ecuación diferencial exacta. Estas funciones reciben el nombre de *factores integrantes*.

1.3.1. Método para hallar factores integrantes especiales

Sea,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{2.7}$$

una ecuación diferencial que no es exacta. Si multiplicamos esta ecuación por una función $\mu(x,y)$ adecuada que haga que la ecuación resultante

$$\mu(x,y)M(x,y)dx + \mu(x,y)N(x,y)dy = 0$$

sea exacta, se denominará a esta función μ *factor de integración* para la ecuación. Para determinar la función $\mu(x,y)$, verificamos el criterio de exactitud en la ecuación transformada:

$$\frac{\partial\left[\mu(x,y)M(x,y)\right]}{\partial y} = \frac{\partial\left[\mu(x,y)N(x,y)\right]}{\partial x}$$

al usar la regla del producto para derivadas, se reduce a la ecuación

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu. \tag{2.8}$$

Por simplicidad, consideraremos que μ depende de una sola variable. En este caso, suponemos que depende de x, es decir $\mu = \mu(x)$, de tal forma que la ecuación (2.8) se reduce a la ecuación de variables separables

$$\frac{\partial\mu}{\partial x} = \left[\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right]\mu,$$

donde

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$$

depende solo de x. Entonces, el factor integrante para (2.7) es

$$\mu(x) = \exp\left(\int\left[\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right]dx\right).$$

Ahora, supongamos que la ecuación (2.7) tiene un factor integrante que solo depende de y, es decir $\mu = \mu(y)$, en este caso la ecuación (2.8) se reduce a la ecuación de variables separables

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \left[\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\right]\mu$$

donde

$$\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}$$

solo depende de y. Entonces, en este caso el factor integrante para (2.7) es:

$$\mu(y) = \exp\left(\int\left[\frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}\right]dy\right).$$

Ejemplo 2.6. *Resolver la ecuación diferencial*

$$(2y^2 + 2y + 4x^2)dx + (2xy + x)dy = 0. \tag{2.9}$$

Solución. Nótese que la ecuación diferencial no es de variables separables. Determinamos si es exacta:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4y + 2,$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2y + 1,$$

como

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x};$$

entonces, la ecuación diferencial no es exacta. Calculamos

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{4y + 2 - 2y - 1}{2xy + x} = \frac{2y + 1}{x(2y + 1)} = \frac{1}{x},$$

y obtenemos una función que solo depende de x, de modo que el factor integrante es dado por la fórmula

$$\mu(x) = \exp\left(\int\left[\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}\right]dx\right),$$
$$\mu(x) = \exp\left(\int\left[\frac{1}{x}\right]dx\right) = x.$$

Al multiplicar la ecuación (2.9) por $\mu(x) = x$, obtenemos la ecuación exacta

$$(2xy^2 + 2xy + 4x^3)dx + (2x^2y + x^2)dy = 0.$$

En este caso, $M(x, y) = 2xy^2 + 2xy + 4x^3$ y $N(x, y) = 2x^2y + x^2$. Calculamos

$$\frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial N}{\partial x}$$

y encontramos que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 4xy + 2x = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Así tenemos en efecto que la ecuación es exacta. Para determinar $F(x, y)$ comenzamos integrando M con respecto a x:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} =& M(x, y) = 2xy^2 + 2xy + 4x^3\\ F(x, y) =& \int (2xy^2 + 2xy + 4x^3)dx + g(y)\\ F(x, y) =& x^2y^2 + x^2y + x^4 + g(y).\end{aligned}$$

Ahora, derivamos parcialmente F con respecto a y, y sustituimos $2x^2y + x^2$ en lugar de $N(x, y)$ ya que $\partial F/\partial y = N(x, y)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial y} =& 2x^2y + x^2 + g'(y)\\ 2x^2y + x^2 =& 2x^2y + x^2 + g'(y)\\ 0 =& g'(y).\end{aligned}$$

Así:

$$g(y) = c.$$

Por tanto,

$$F(x, y) = x^2y^2 + x^2y + x^4.$$

Es decir, la solución de la ecuación diferencial viene dada de manera implícita por la relación $k = x^2y^2 + x^2y + x^4$. ☑

Ejercicios

1. Encontrar el factor integrante y resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:
   a) $2xy^2dx + 3x^2ydy = 0.$
   b) $(x - y)dx + xdy = 0.$

c) $(2y^3+6xy^2)dx+(3xy^2+4x^2y)dy=0.$
d) $(y^2+2xy)dx-x^2dy=0.$
e) $(x^2y+4xy+2y)dx+(x^2+x)dy=0.$
f) $(y\ln|y|+ye^x)dx+(x+y\cos(y))dy=0.$

2. Demostrar que si $(\partial N/\partial x-\partial M/\partial y)/(xM-yN)$ solo depende del producto xy, es decir,

$$\frac{(\partial N/\partial x-\partial M/\partial y)}{(xM-yN)}=H(xy)$$

entonces la ecuación $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ tiene un factor integrante de la forma $\mu(xy)$. Proporcione la fórmula general para $\mu(xy)$.

3. Encontrar el factor integrante $\mu(xy)$ y resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:
a) $ydx+(x-3x^2y^2)dy=0.$
b) $ydx+(x-3x^3y^2)dy=0.$
c) $y(x^2y^2+xy)dx+x(x^2y^2-1)dy=0.$

4. Suponga que a,b,c y d son constantes tales que $cb-ad\neq 0$ y sean p,q,r y s números reales arbitrarios. Demostrar que

$$y(ax^py^q+bx^ry^s)dx+x(cx^py^q+dx^ry^s)dy=0$$

tiene un factor integrante de la forma $\mu(x,y)=x^\alpha y^\beta$, donde α y β son constantes escogidas de manera conveniente.

5. Determinar el factor integrante $\mu(x,y)=x^\alpha y^\beta$ y resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:
a) $(\frac{x}{y^2}-\frac{1}{xy})dx-\frac{1}{y^2}dy=0.$
b) $(12+5xy)dx+(6x/y+2x^2)dy=0.$
c) $2\frac{y}{x}dx+(\frac{y^2}{x^2}-1)dy=0.$

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *a*) $\mu(y)=y,\quad y=cx^{-2/3}.$
b) $\mu(x)=x^{-2},\quad y=x(c-\ln|x|).$
c) $\mu(x)=x,\quad c=x^2y^3+2x^3y^2.$
d) $\mu(y)=y^{-2},\quad c=x+x^2y^{-1}.$
e) $\mu(x)=xe^x,\quad y=\frac{c}{e^x(x^2+x^3)}.$
f) $\mu(y)=\frac{1}{y},\quad x\ln|y|+e^x+\sin(y)=c.$

3. *a*) $\mu(xy)=\frac{1}{x^2y^2},\quad \frac{-1}{xy}-3y=c.$
b) $\mu(xy)=\frac{1}{x^3y^3},\quad \frac{-1}{2x^2y^2}-3\ln|y|=c.$
c) $\mu(xy)=\frac{1}{xy(xy+1)},\quad xy-\ln|y|=c.$

5. *a*) $\mu(x,y) = xy^2$, $xy - \frac{1}{3}x^3 = c$.
b) $\mu(x,y) = x^{-7}y^{-3}$, $-2x^{-6}y^{-3} - x^{-5}y^{-2} = c$.
c) $\mu(x,y) = x^2y^{-2}$, $\frac{x^2}{y} + y = c$.

2. Ecuaciones diferenciales lineales

Una *ecuación diferencial lineal* de primer orden es una ecuación de la forma:

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad a_1(x) \neq 0; \tag{2.10}$$

por lo tanto, la podemos reescribir como

$$\frac{dy}{dx} + \frac{a_0(x)}{a_1(x)}y = \frac{g(x)}{a_1(x)}.$$

Si definimos

$$P(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)} \ \text{ y } \ Q(x) = \frac{g(x)}{a_1(x)},$$

entonces la ecuación diferencial lineal (2.10) toma la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x). \tag{2.11}$$

Notemos que la ecuación (2.11) no es de variables separables ni exacta. Ahora se trata de encontrar un factor integrante $\mu(x)$. Suponemos que las funciones P y Q son continuas en algún intervalo I. Luego multiplicamos por $\mu(x)$ la ecuación (2.11) y tenemos

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)P(x)y = \mu(x)Q(x); \tag{2.12}$$

multiplicando por el diferencial dx y usando la regla de la cadena obtenemos

$$\left[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)\right]dx + \left[\mu(x)\right]dy = 0.$$

Sea $M(x,y) = \mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)$ y $N(x,y) = \mu(x)$. Para que esta ecuación sea exacta se debe tener que

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial N}{\partial x}\\ \mu(x)P(x) &= \mu'(x)\\ \frac{1}{\mu(x)}d\mu(x) &= P(x)dx.\end{aligned}$$

Al integrar ambos lados tenemos el factor integrante

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}. \tag{2.13}$$

Como se acaba de ver,

$$\mu(x)P(x) = \mu'(x),$$

con lo que la ecuación diferencial (2.12) se convierte en:

$$\mu(x)\frac{dy}{dx} + \frac{d\mu(x)}{dx}y = \mu(x)Q(x)$$

la cual, por la regla de producto para derivadas, reescribimos como:

$$\frac{d\left[\mu(x)y\right]}{dx} = \mu(x)Q(x).$$

Integrando ambos lados de la ecuación tenemos $\mu(x)y = \int \mu(x)Q(x)dx + c$. Despejando $y(x)$ obtenemos,

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left[\int \mu(x)Q(x)dx + c\right] \tag{2.14}$$

donde (2.14) es la solución general de la ecuación lineal (2.11).

En resumen, la solución de la ecuación lineal (escrita en forma estándar)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x),$$

siendo P y Q continuas en algún intervalo $I \subset \mathbb{R}$, está dada por

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)}\left\{\int \mu(x)Q(x)dx + c\right\},$$

donde

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$$

es el factor integrante de la ecuación lineal. Nótese por qué la necesidad de que P y Q sean continuas (condición suficiente para que las integrales existan). Lo anterior demuestra el siguiente teorema de existencia de soluciones para ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Teorema 2.3 (Existencia y unicidad de soluciones para EDO lineales). *Si las funciones P y Q son continuas en un intervalo abierto I que contiene al punto $x = x_0$, entonces existe una única función $y = \psi(x)$ que satisface el problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \qquad y(x_0) = y_0.$$

Ejemplo 2.7. *Resolver*

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = \frac{1}{x^3}, \quad x \neq 0.$$

Solución. Para poder escribir la forma general de la ecuación diferencial lineal dividimos por x, ya que $x \neq 0$, y obtenemos:

$$\frac{dy}{dx} + 2\frac{y}{x} = \frac{1}{x^4}.$$

Reescribiendo la ecuación en la forma

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = \frac{1}{x^4},$$

vemos que

$$P(x) = \frac{2}{x} \text{ y } Q(x) = \frac{1}{x^4}.$$

Entonces podemos hallar el factor integrante sustituyendo en la fórmula (2.13):

$$\mu(x) = e^{\int \frac{2}{x}dx} = e^{2\ln|x|} = x^2.$$

Reemplazando en la ecuación (2.14), tenemos que:

$$\begin{aligned} y(x) &= \frac{1}{x^2}\left[\int x^2\frac{1}{x^4}dx + c\right] \\ y(x) &= \frac{1}{x^2}\left[\int \frac{1}{x^2}dx + c\right] \\ y(x) &= -\frac{1}{x^3} + \frac{c}{x^2}, \end{aligned}$$

es la solución de la ecuación ediferencial. ☑

Ejercicios

1. Resolver los siguientes problemas de valor inicial:
   a) $y' - 2y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 0.$
   b) $xy' + 2y = 3x, \quad y(1) = 5.$
   c) $3xy' + y = 12x, \quad y(1) = -1.$
   d) $xy' - 3y = x^3, \quad y(1) = 10.$
   e) $y' = (1 - y)\cos(x), \quad y(0) = 1.$
   f) $y' = 1 + x + y + xy, \quad y(0) = 0.$

2. Resolver las ecuaciones diferenciales considerando a y como la variable independiente en lugar de x:
   a) $(1-4xy^2)\frac{dy}{dx}=y^3$.
   b) $(x+ye^y)\frac{dy}{dx}=1$.
   c) $(1+2xy)\frac{dy}{dx}=1+y^2$.
3. Sea y_0 una solución distinta de cero de $y'+p(x)y=0$ y y_1 una solución de $y'+p(x)y=q(x)$:
   a) Demostrar por sustitución que y_1+cy_0 es una solución de $y'+p(x)y=q(x)$ para todo número c.
   b) Demostrar que toda solución y de $y'+p(x)y=q(x)$ puede ser escrita como $y=y_1+cy_0$ para algún c.
4. Sean y_1 y y_2 soluciones distintas de $y'+p(x)y=q(x)$, y sea $y_0=y_1-y_2$:
   a) Demostrar que y_0 es solución de $y'+p(x)y=0$.
   b) Escribir toda solución de $y'+p(x)y=q(x)$ en términos de y_1 y y_2.
5. Verificar que las funciones dadas en cada numeral son soluciones de la ecuación diferencial y escriba la solución general por el método del ejercicio 4.
   a) $1-e^{-x}, \quad 1+2e^{-x}; \quad y'+y=1$.
   b) $x-1/x, \quad x+1/x; \quad y'+(1/x)y=2$.
   c) $x, \quad x^2; \quad (x^2-x)y'+(1-2x)y=-x^2$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. a) $y(x)=3e^{2x}x$.
   b) $y(x)=x+\frac{4}{x^2}$.
   c) $y(x)=3x-\frac{4}{x^{1/3}}$.
   d) $y(x)=(\ln|x|+10)x^3$.
   e) $y(x)=1$.
   f) $y(x)=-1+e^{\frac{1}{2}x(x+2)}$.
2. a) $x(y)=\frac{(1/2)y^2+C}{y^4}$.
   b) $x(y)=\left(\frac{1}{2}y^2+c\right)e^y$.
   c) $x(y)=\left(\frac{y}{2(1+y^2)}+\frac{1}{2}\arctan(y)+c\right)(1+y^2)$.
4. b) $y=\frac{y_1+y_2}{2}+c(y_1-y_2)$.
5. a) $y=1+ce^{-x}$.
   b) $y=x+c/x$.
   c) $y=\frac{x^2+x}{2}+c(x^2-x)$.

3. Soluciones de algunas EDO mediante sustituciones

Para resolver una ecuación diferencial primero identificamos qué tipo de ecuación es y luego usamos el método de resolución adecuado para hallar las soluciones de dicha ecuación. Sin embargo, en algunos casos es posible hacer una sustitución para transformar la ecuación dada en una de un tipo conocido, lo cual permite hallar las soluciones de esta sin necesidad de desarrollar nuevos métodos de resolución. En esta sección analizaremos algunas clases de EDO que se pueden reducir a una EDO de algún tipo de las previamente aquí estudiadas.

3.1. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Se puede cambiar la forma de una ecuación diferencial de la siguiente manera: sea y cualquier solución de la ecuación

$$y' = F(x, y), \tag{2.15}$$

se introduce una nueva función (desconocida) u tal que $y(x) = g(u(x))$, luego la función u debe satisfacer la nueva ecuación

$$g'(u)u' = F(x, g(u)). \tag{2.16}$$

A la inversa, note que si u satisface (2.16), entonces satisface (2.15). Este proceso tiene sentido si la ecuación resultante es más sencilla de resolver que la inicial. La sustitución que se va a utilizar es $y = ux$, la cual convierte la ecuación dada en una de variables separables.

Una función F de dos variables $F(x, y)$ es *homogénea* de orden n, si y solo si $F(tx, ty) = t^n F(x, y)$ para todo número x, y, t. Si la función $F(x, y)$ es de orden 0, esto es, $F(tx, ty) = F(x, y)$, para $t = \frac{1}{y}$ suponiendo $y \neq 0$, se tendrá $F(x, y) = F(\frac{x}{y}, 1)$. Es decir, la función puede suponerse como una función que depende solamente de la variable $\frac{x}{y}$.

Por otro lado, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = r(x, y) \tag{2.17}$$

es llamada *homogénea* si $r(x, y)$ es una función que solo depende de $\frac{y}{x}$. En este caso, la ecuación (2.17) toma la forma

$$\frac{dy}{dx} = r\left(1, \frac{y}{x}\right). \tag{2.18}$$

Ejemplo 2.8. *Determinar si la ecuación*

$$(y^3 - xy^2)dx + 2x^2ydy = 0$$

es homogénea.

Solución. Escribimos la ecuación en la forma

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{xy^2 - y^3}{2x^2y} = \frac{xy^2}{2x^2y} - \frac{y^3}{2x^2y} = \frac{y}{2x} - \frac{y^2}{2x^2}\\ &= \frac{1}{2}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2.\end{aligned}$$

Vemos que el lado derecho solo depende de $\frac{y}{x}$, es decir la ecuación es homogénea. ☑

Para resolver una ecuación homogénea hacemos la sustitución $u = \frac{y}{x}$, de tal manera que, si derivamos con respecto a x, obtenemos $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$. Entonces sustituimos en la ecuación (2.18) para obtener

$$u + x\frac{du}{dx} = r(1, u).$$

La nueva ecuación es de variables separables x y u. Una vez resuelta reemplazamos u por $\frac{y}{x}$ para dejar la solución en términos de las variables originales.

Ejemplo 2.9. *Hallar la solución general de la ecuación diferencial*

$$(y^3 - xy^2)dx + 2x^2ydy = 0.$$

Solución. Como vimos en el ejemplo anterior esta ecuación es homogénea. Así:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\frac{y}{x} - \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Ahora hacemos la sustitución $u = \frac{y}{x}$ y $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}u^2.$$

La ecuación anterior es de variables separables. Por tanto reescribiéndola tenemos,

$$\int \frac{-2}{u + u^2}du = \int \frac{dx}{x}$$

e integrando concluimos que:

$$-2\big(\ln|u| - \ln|u+1|\big) = \ln|x| + c.$$

Ahora, reemplazando $u = \frac{y}{x}$, tenemos que

$$-2\ln\left|\frac{y}{x}\right| + 2\ln\left|\frac{y+x}{x}\right| = \ln|x| + c$$

es la solución en forma implícita de la ecuación. ☑

Ejercicios

1. En las siguientes funciones, determinar si la función dada es homogénea. Si lo es, indicar su orden de homogeneidad:
   a) $f(x,y) = 3x^2y - x^3 + \frac{2y^4}{x}$.
   b) $f(x,y) = \frac{\sqrt{2x^2y+xy^2}}{y}$.
   c) $f(x,y) = \frac{4xy^3+2x^2y^2}{xy}$.
   d) $f(x,y) = (x+3y-2)^2$.
2. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:
   a) $y' = \frac{y+x}{x}$.
   b) $y' = \frac{2y-x}{y}$.
   c) $y' = \frac{y}{x+y}$.
   d) $y' = \frac{x^2+y^2}{xy}$.
   e) $y' = \frac{x}{x+y}$.
   f) $y' = \frac{\sqrt{2x^2+3y^2}+y}{x}$.
   g) $(y^2+xy+x^2)dx + (2x^2+3xy+y^2)dy = 0$.
   h) $(2x+y)dx + (3x+2y)dy = 0; \quad y(1) = 0$.
3. Encontrar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:
   a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$.
   b) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-2x}$.
   c) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{y+2x}$.
4. Demostrar que si $P(x,y)$ y $Q(x,y)$ son funciones homogéneas de orden n, la sustitución $u = y/x$ transforma la ecuación

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

en una ecuación de variables separables.

5. Demostrar que las curvas solución de la ecuación homogénea

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(2x^3 - y^3)}{x(2y^3 - x^3)}$$

son de la forma $x^3 + y^3 = Cxy$.

6. Demostrar que si $y' = F(x, y)$ es una ecuación homogénea y $y = g(x)$ es una solución, entonces $y = (1/a)g(ax)$ es una solución para cualquier a. Interpretar el resultado geométricamente.

7. Comprobar que las siguientes ecuaciones diferenciales son homogéneas y hallar la solución general:
   a) $2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$.
   b) $(x + \sqrt{y^2 - xy})dy - ydx = 0$.
   c) $xy' - y - x\sin\left(\frac{y}{x}\right) = 0$.
   d) $(2x^2y + y^3)dx + (xy^2 + 2x^3)dy = 0$.
   e) $\frac{y}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)dx - \left(\frac{y}{x}\sin\left(\frac{y}{x}\right) + \cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)dy = 0$.
   f) $2ye^{x/y}dy + (y - 2xe^{x/y})dx = 0$.
   g) $(xe^{y/x} - y\sin\left(\frac{y}{x}\right))dx + x\sin\left(\frac{y}{x}\right)dy = 0$.

8. Hallar la solución del problema de valor inicial dado:
   a) $(x^2 + y^2)dx = 2xydy; \quad y(-1) = 0$.
   b) $(xe^{y/x} + y)dx = xdy; \quad y(1) = 0$.
   c) $(xy - y^2)dx - x^2dy = 0; \quad y(1) = 1$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *a*) Homogénea de grado 3.
   b) Homogénea de grado 1/2.
   c) Homogénea de grado 2.
   d) No homogénea.

2. *a*) $y = x(\ln|x| + c)$.
   b) $x = (y - x)\left(\ln|y - x| + c\right)$.
   c) $y^2 = 2x^2(\ln|x| + c)$.
   d) $y^2 = 2x^2(\ln|x| + c)$.
   e) $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{y^2}{x^2} + \frac{y}{x} - 1\right| + \frac{1}{\sqrt{5}}\ln\left|\frac{1+\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{2y+x}{x}\right)}{1-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{2y+x}{x}\right)}\right| = \ln|x| + c$.
   f) $\frac{y\sqrt{3}+\sqrt{2x^2+3y^2}}{x^{\sqrt{3}}x} - c = 0$.
   g) $4xy + y^2 + x^2 = c$.
   h) $\frac{x}{2(y+x)} - \ln|y + x| = \frac{1}{2}$.

3. *a*) $-\frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2) + \arctan(y/x) = c$.
   b) $-\frac{2}{3}\ln|y| - \frac{1}{3}\ln|-3x + y| = c$.

c) $\frac{\ln|x+y|-3\ln|x-y|}{2}=c$.

7. *a*) $y^4+2x^2y^2=c$.
   b) $y=ce^{-2\sqrt{1-x/y}}$.
   c) $y=\csc\left(\frac{y}{x}\right)-\operatorname{ctan}\left(\frac{y}{x}\right)=cx$.
   d) $xy=c$.
   e) $y\sin\left(\frac{y}{x}\right)=0$.
   f) $2e^{x/y}+\ln|y|=c$.
   g) $\ln(x^2)-e^{-y/x}\left(\sin\left(\frac{y}{x}\right)+\cos\left(\frac{y}{x}\right)\right)=c$.
8. *a*) $y^2=x^2+x$.
   b) $\ln|x|+e^{-y/x}=1$.
   c) $x=e^{x/y-1}$.

3.2. Ecuaciones con coeficientes lineales

Hemos utilizado sustituciones de y que transforman la ecuación diferencial para poder resolverla, pero en algunos casos se necesita sustituir x e y en nuevas variables. Este es el caso para las llamadas *ecuaciones diferenciales con coeficientes lineales*.

Consideremos la ecuación:

$$(a_1x+b_1y+c_1)dx+(a_2x+b_2y+c_2)dy=0. \tag{2.19}$$

Para resolverla consideremos los siguientes casos:

Caso I. Si $a_1b_2=a_2b_1$, la ecuación (2.19) se puede escribir de la forma $\frac{dy}{dx}=a\frac{x+by+d_1}{x+by+d_2}$, donde $a=-a_1/a_2$, $b=b_1/a_1=b_2/a_2$ y $d_i=c_i/a_i$ $(i=1,2)$. El cambio de variable $u=x+by$ reduce esta ecuación a una de variables separables.

Caso II. Si $c_1=c_2=0$, la ecuación (2.19) se escribe como

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{a_1x+b_1y}{a_2x+b_2y}=-\frac{a_1+b_1\frac{y}{x}}{a_2+b_2\frac{y}{x}},$$

es decir, en este caso (2.19) es una ecuación homogénea.

Caso III. Si $a_1b_2\neq a_2b_1$ la ecuación se hace homogénea mientras tomemos una translación de ejes de la forma $x=u+h$ y $y=v+k$, donde h y k son constantes. En efecto, tomando diferenciales tenemos que $dx=du$ y $dy=dv$. Por lo tanto, $\frac{dy}{dx}=\frac{dv}{du}$. Sustituimos en la ecuación (2.19):

$$\frac{dv}{du}=-\frac{a_1(u+h)+b_1(v+k)+c_1}{a_2(u+h)+b_2(v+k)+c_2}$$

$$\frac{dv}{du}=-\frac{a_1u+b_1v+(a_1h+b_1k+c_1)}{a_2u+b_2v+(a_2h+b_2k+c_2)}. \tag{2.20}$$

Como $a_1b_2 \neq a_2b_1$, el sistema

$$\begin{cases} a_1h + b_1k + c_1 = 0 \\ a_2h + b_2k + c_2 = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

tiene solución. Así, para h y k soluciones del sistema (2.21) se tiene que la ecuación (2.20) es homogénea.

Ejemplo 2.10. *Hallar la solución general de*

$$(3x + 3y + 4)dx + (2x + 2y + 7)dy = 0.$$

Solución. Como $a_1b_2 = 3 \cdot 2 = 2 \cdot 3 = a_2b_1$, tenemos

$$\begin{aligned} &(3x + 3y + 4)dx + (2x + 2y + 7)dy = 0 \\ &[3(x + y) + 4]dx + [2(x + y) + 7]dy = 0 \\ &\frac{dy}{dx} = \frac{3(x + y) + 4}{-2(x + y) - 7}. \end{aligned}$$

Sea $u = x + y$, por lo tanto, $u' = 1 + y'$ y la ecuación se convierte en

$$\frac{du}{dx} - 1 = \frac{3u + 4}{-2u - 7}, \qquad \text{o} \qquad \frac{du}{dx} = \frac{3 - u}{2u + 7},$$

la cual es una ecuación de variables separables. Integrando con respecto a x obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{2u + 7}{3 - u}\frac{du}{dx}dx &= \int dx \\ -2u - 13\ln|3 - u| &= x + c. \end{aligned}$$

De esta forma, la solución general en forma implícita de la ecuación está dada por $x + c = -2(x + y) - 13\ln|3 - (x + y)|$. ☑

Ejemplo 2.11. *Hallar una solución de la ecuación diferencial*

$$(-3x + y - 1)dx + (x + y + 3)dy = 0. \tag{2.22}$$

Solución. Como $a_1b_2 = -3 \cdot 1 \neq 1 \cdot 1 = a_2b_1$, usaremos la translación $x = u + h$ y $y = v + k$, donde h y k satisfacen el sistema

$$\begin{cases} -3h + k - 1 = 0, \\ h + k + 3 = 0. \end{cases}$$

Al resolver este sistema en términos de h y k, $h = -1$, $k = -2$, es decir $x = u - 1$ y $y = v - 2$. Como $dy = dv$ y $dx = du$, sustituimos en la ecuación (2.22):

$$\begin{aligned}
&(-3u + 3 + v - 2 - 1)du + (u - 1 + v - 2 + 3)dv = 0\\
&(-3u + v)du + (u + v)dv = 0\\
&\frac{dv}{du} = \frac{3u - v}{u + v}.
\end{aligned}$$

La ecuación anterior es homogénea. Ahora tomamos la sustitución $z = \frac{v}{u}$, donde $\frac{dv}{du} = z + u\left(\frac{dz}{du}\right)$ y al sustituir en la última ecuación, obtenemos

$$\begin{aligned}
z + u\frac{dz}{du} &= \frac{3u - zu}{u + zu}\\
z + u\frac{dz}{du} &= \frac{3 - z}{1 + z}\\
u\frac{dz}{du} &= \frac{3 - 2z - z^2}{1 + z},
\end{aligned}$$

la cual es una ecuación de variables separables. Integramos con respecto a u para resolverla.

$$\begin{aligned}
\int \frac{z + 1}{3 - 2z - z^2}\frac{dz}{du}du &= \int \frac{du}{u}\\
\int \frac{z + 1}{z^2 + 2z - 3}dz &= -\int \frac{du}{u}\\
\frac{1}{2}\ln\left|z^2 + 2z - 3\right| &= -\ln|u| + c_1\\
\ln\left|z^2 + 2z - 3\right| &= -2\ln|u| + 2c_1\\
\ln\left|z^2 + 2z - 3\right| &= \ln|u^{-2}| + 2c_1.
\end{aligned}$$

Ahora aplicando exponencial obtenemos

$$z^2 + 2z - 3 = u^{-2}e^{2c_1} = cu^{-2}.$$

Al sustituir de nuevo z, u y v, vemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{v}{u}\right)^2 + 2\left(\frac{v}{u}\right) - 3 = cu^{-2}\\
&v^2 + 2uv - 3u^2 = c\\
&(y + 2)^2 + 2(y + 2)(x + 1) - 3(x + 1)^2 = c.
\end{aligned}$$

La última ecuación es la solución implícita de (2.22). ☑

Ejercicios

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales con coeficientes lineales:
   a) $(x + 2y - 4)dx - (2x - 4y)dy = 0.$
   b) $(3x + 2y + 1)dx - (3x + 2y - 1)dy = 0.$
   c) $(x + y - 1)dx + (2x + 2y - 3)dy = 0.$
   d) $(x + y)dx + (2x + 2y - 1)dy = 0.$
   e) $(x + 2y)dx + (3x + 6y + 3)dy = 0.$
2. Hallar la solución del problema de valor inicial:
   a) $(x + y)dx + (3x + 3y - 4)dy = 0; \quad y(1) = 0.$
   b) $(x + 7)dx + (2x + y + 3)dy = 0, \quad y(0) = 1.$
   c) $(x + y + 2)dx - (x - y - 4)dy = 0; \quad y(4) = -3.$

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *a*) $\ln(4(y-1)^2 + (x-2)^2) - 2\arctan\left(\frac{2y-2}{x-2}\right) = c.$
   b) $\frac{4}{25}\ln|15x + 10y - 1| + \frac{2}{5}(x - y) = c.$
   c) $-2x + 2y + 2\ln|x + 2y + 1| = c.$
   d) $x + 2y + \ln|x + y - 1| = c.$
   e) $x + 3y - 3\ln|x + 2y + 3| = c.$
2. *a*) $x + 3y + 2\ln|2 - x - y| = 1.$
   b) $\frac{y+11}{x-7} = 0.$
   c) $\ln((x-1)^2 + (y+3)^2) - 2\arctan\left(\frac{y+3}{x-1}\right) = 2\ln(3).$

3.3. Ecuación de Bernoulli

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \in \mathbb{R} \tag{2.23}$$

se denomina *ecuación diferencial de Bernoulli*. Nótese en particular, que si n es 0 o 1, la ecuación es lineal o de variables separables y puede resolverse directamente. Si n no es 0 ni 1, la ecuación es no lineal; en este caso, hacemos la sustitución $u = y^{1-n}$, que reduce la ecuación de Bernoulli a una lineal. En efecto, derivando u con respecto a x:

$$u = y^{1-n}, \qquad \frac{du}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}, \qquad \text{donde } \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}y^n\frac{du}{dx}$$

y reemplazando en la ecuación (2.23), tenemos:

$$\frac{1}{1-n}y^n\frac{du}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n, \quad n\in\mathbb{R}. \tag{2.24}$$

Ahora multiplicamos la ecuación (2.24) por $(1-n)y^{-n}$:

$$\frac{du}{dx}+(1-n)P(x)y^{1-n}=(1-n)Q(x)$$

y sustituimos $u=y^{1-n}$:

$$\frac{du}{dx}+(1-n)P(x)u=(1-n)Q(x)$$

la cual es una ecuación diferencial lineal.

Ejemplo 2.12. *Hallar la solución general de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:*

1. $\frac{dy}{dx}-y=e^xy^2$.
2. $\frac{dy}{dx}-y=e^xy^{\frac{1}{2}}$.

Solución. 1. En este caso $n=2$, tomando la sustitución, obtenemos $u=y^{-1}$; derivando con respecto a x, se tiene $\frac{du}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$ y despejando $\frac{dy}{dx}$, tenemos $\frac{dy}{dx}=-y^2\frac{du}{dx}$. Reemplazando en la ecuación obtenemos:

$$-y^2\frac{du}{dx}-y=e^xy^2. \tag{2.25}$$

Ahora multiplicamos la ecuación (2.25) por $(-y^{-2})$:

$$\frac{du}{dx}+y^{-1}=-e^x. \tag{2.26}$$

En (2.26) sustituimos $u=y^{-1}$:

$$\frac{du}{dx}+u=-e^x. \tag{2.27}$$

Como la ecuación diferencial es lineal, el factor integrante para la ecuación (2.27) es

$$\mu(x)=e^{\int 1dx}=e^x.$$

Utilizamos la formula (2.14), de donde se tiene

$$\begin{aligned} u(x)=&e^{-x}\left[\int e^x(-e^x)dx+c\right]\\ u(x)=&e^{-x}\left(-\frac{e^{2x}}{2}+c\right). \end{aligned} \tag{2.28}$$

En (2.28) reemplazamos $u = y^{-1}$:

$$\begin{aligned} y^{-1} =& \frac{-e^x + 2ce^{-x}}{2} \\ y =& \frac{2}{-e^x + 2ce^{-x}}. \end{aligned}$$

2. Para esta ecuación de Bernoulli $n = \frac{1}{2}$, entonces $u = y^{1/2}$; por tanto $\frac{dy}{dx} = 2y^{1/2}\frac{du}{dx}$: Sustituyendo esto y la igualdad $u = y^{1/2}$ en la ecuación original tenemos

$$\begin{aligned} 2y^{1/2}\frac{du}{dx} - y =& e^x y^{1/2} \\ \frac{du}{dx} - \frac{1}{2}y^{1/2} =& \frac{1}{2}e^x \\ \frac{du}{dx} - \frac{1}{2}u =& \frac{1}{2}e^x. \end{aligned}$$

Como la ecuación diferencial es lineal, el factor integrante es

$$\mu(x) = e^{-\int \frac{1}{2}dx} = e^{-\frac{1}{2}x}.$$

Utilizando la fórmula (2.14) tenemos:

$$\begin{aligned} u(x) =& e^{\frac{1}{2}x}\left[\int e^{-\frac{1}{2}x}\left(\frac{1}{2}e^x\right)dx + c\right], \\ u(x) =& e^{\frac{1}{2}x}\left(e^{\frac{1}{2}x} + c\right). \end{aligned} \tag{2.29}$$

En (2.29) sustituimos $u = y^{\frac{1}{2}}$. Es decir, la solución de la ecuación diferencial es

$$y^{\frac{1}{2}} = e^x + ce^{\frac{1}{2}x}.$$

Note que la solución de la primera ecuación es dada de forma explícita, mientras que para la segunda ecuación es dada de forma implícita. ☑

Ejercicios

1. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones de Bernoulli:
   a) $xy' + y = y^2 \ln|x|$.
   b) $y' + y = xy^3$.
   c) $(1 - x^3)\frac{dy}{dx} - 2(1 + x)y = y^{5/2}$.
   d) $xy' - y(2y \ln|x| - 1) = 0$.
   e) $x^2(x - 1)y' - y^2 - x(x - 2)y = 0$.
2. Hallar la solución de los siguientes problemas de valor inicial:
   a) $y' + \frac{1}{x}y = \frac{y^2}{x}$; $\quad y(-1) = 1$.
   b) $2\cos(x)dy = (y\sin(x) - y^3)dx$; $\quad y(0) = 1$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *a*) $y \ln|x| + y + cxy = 1$.
   b) $\frac{1}{y^2} = ce^{2x} + x + \frac{1}{2}$.
   c) $y^{-3/2} = -\frac{3}{4(1+x+x^2)} + \frac{c(1-x)^2}{1+x+x^2}$.
   d) $1 - 2y(1 + \ln|x|) = cxy$.
   e) $y = \frac{x^2}{(x-1)c+1}$.
2. *a*) $y = 1$.
   b) $y^2 = \frac{1}{\sin(x)+\cos(x)}$.

3.4. Ecuación de Ricatti

Se denomina *ecuación diferencial de Ricatti* a una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2. \tag{2.30}$$

Tal ecuación se puede resolver con dos sustituciones consecutivas siempre que conozcamos una solución particular y_1 de dicha ecuación. Esto es,

$$\frac{dy_1}{dx} = P(x) + Q(x)y_1 + R(x)y_1^2. \tag{2.31}$$

Para resolverla tomamos la sustitución $y = y_1 + u$, la cual reduce la ecuación a una de tipo Bernoulli.

Primero derivamos con respecto a x:

$$y = y_1 + u, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx}.$$

Reemplazamos en la ecuación (2.30):

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = P(x) + Q(x)(y_1 + u) + R(x)(y_1 + u)^2. \tag{2.32}$$

Agrupando términos semejantes en (2.32) nos queda:

$$\frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx} = P(x) + Q(x)y_1 + Q(x)u + R(x)y_1^2 + R(x)2y_1u + R(x)u^2.$$

Sustituimos (2.31) y simplificamos:

$$\frac{du}{dx} = \big(Q(x) + R(x)2y_1\big)u + R(x)u^2$$
$$\frac{du}{dx} - \big(Q(x) + R(x)2y_1\big)u = R(x)u^2.$$

Esto es una ecuación de Bernoulli con $n = 2$.

Ejemplo 2.13. *Hallar una familia mono-paramétrica de soluciones de la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2,$$

en donde $y_1 = \frac{2}{x}$ *es una solución conocida de la ecuación.*

Solución. Tomando la sustitución $y = y_1 + u = \frac{2}{x} + u$ y derivando con respecto a x se tiene, $\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x^2} + \frac{du}{dx}$ y reemplazando en la ecuación obtenemos:

$$-\frac{2}{x^2} + \frac{du}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}\left(\frac{2}{x} + u\right) + \left(\frac{2}{x} + u\right)^2.$$

Simplificando la igualdad anterior tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{2}{x^2} + \frac{du}{dx} &= -\frac{4}{x^2} - \frac{2}{x^2} - \frac{u}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{4u}{x} + u^2 \\ \frac{du}{dx} &= \frac{3u}{x} + u^2 \\ \frac{du}{dx} - \left(\frac{3}{x}\right)u &= u^2. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Como la ecuación (2.33) es de Bernoulli con $n = 2$, usando la sustitución obtenemos $s = u^{-1}$; derivando con respecto a x se tiene, $\frac{ds}{dx} = -u^{-2}\frac{du}{dx}$, y despejando $\frac{du}{dx}$ tenemos

$$\frac{du}{dx} = -u^2\frac{ds}{dx}.$$

Reemplazando en la ecuación (2.33) nos queda:

$$-u^2\frac{ds}{dx} - \left(\frac{3}{x}\right)u = u^2. \tag{2.34}$$

Multiplicando la ecuación (2.34) por $(-u^{-2})$, obtenemos:

$$\frac{ds}{dx} + \left(\frac{3}{x}\right)u^{-1} = -1. \tag{2.35}$$

En (2.35) sustituimos $s = u^{-1}$:

$$\frac{ds}{dx} + \left(\frac{3}{x}\right)s = -1. \tag{2.36}$$

Como la ecuación diferencial es lineal, el factor integrante para la ecuación (2.36) es

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln|x|} = x^3.$$

Utilizamos la fórmula (2.14):

$$\begin{aligned} s =& x^{-3}\left[\int x^3(-1)dx + c\right] \\ s =& x^{-3}\left(-\frac{x^4}{4} + c\right) \\ s =& \frac{-x^4 + c}{4x^3}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

En (2.37) reemplazamos $s = u^{-1}$:

$$\begin{aligned} u^{-1} =& \frac{-x^4 + c}{4x^3} \\ u =& \frac{4x^3}{-x^4 + c}. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Sustituyendo $u = y - \frac{2}{x}$ en (2.38) y despejando la función y, obtenemos

$$y = \frac{4x^3}{-x^4 + c} + \frac{2}{x},$$

la cual es la solución de la ecuación diferencial. ☑

Ejercicios

1. Sea la ecuación de Riccati $y' = f_0(x) + f_1(x)y + f_2(x)y^2$, con $f_2(x) \neq 0$. Si y_1 es una solución particular de la ecuación, demostrar que la sustitución $y = y_1 + \frac{1}{u}$ trasforma esta ecuación en una ecuación lineal de la forma $u' + (f_1(x) + 2f_2(x)y_1)u = -f_2(x)$.
2. Dada la solución particular y_1 hallar la solución general de las ecuaciones de Ricatti dadas:
   a) $y' = x^3 + \frac{2}{x}y - \frac{1}{x}y^2; \quad y_1(x) = -x^2.$
   b) $y' = 2\tan(x)\sec(x) - y^2\sin(x); \quad y_1(x) = \sec(x).$
   c) $y' = \frac{1}{x^2} - \frac{y}{x} - y^2; \quad y_1(x) = \frac{1}{x}.$
   d) $y' = 1 + \frac{y}{x} - \frac{y^2}{x^2}; \quad y_1(x) = x.$

Respuesta de ejercicios seleccionados

2. *a)* $u' + \left(\frac{2}{x} + 2x\right)u = \frac{1}{x}; \quad y = -x^2 + \frac{2x^2e^{x^2}}{e^{x^2}+c}.$
   b) $u' - 2u\tan(x) = \sin(x); \quad y = \frac{1}{\cos(x)} + \frac{3\cos^2(x)}{c-\cos^3(x)}.$
   c) $u' - \frac{3}{x}u = 1; \quad y = \frac{1}{x} + \frac{2}{cx^3-x}.$
   d) $u' - \frac{1}{x}u = \frac{1}{x^2}; \quad y = x + \frac{2x}{cx^2-1}.$

3.5. Ecuación de Lagrange

Una ecuación diferencial de la forma

$$y = g(y')x + f(y'),$$

se denomina *ecuación de Lagrange*. Para resolverla, tomamos la sustitución $y' = p$ para obtener la solución general de la ecuación en forma paramétrica, mediante la cual se reduce a

$$y = g(p)x + f(p). \tag{2.39}$$

Derivamos en (2.39) con respecto a x:

$$y' = g'(p)p'x + g(p) + f'(p)p'. \tag{2.40}$$

Reemplazamos $y' = p$ en la ecuación (2.40):

$$\begin{aligned} p &= g'(p)p'x + g(p) + f'(p)p' \\ p - g(p) &= g'(p)p'x + f'(p)p' \\ p - g(p) &= p'(g'(p)x + f'(p)) \\ p - g(p) &= \frac{dp}{dx}(g'(p)x + f'(p)), \end{aligned}$$

y despejamos

$$\frac{dp}{dx} = \frac{p - g(p)}{g'(p)x + f'(p)}. \tag{2.41}$$

Como $y' = p$ y $\frac{dp}{dx}$ son funciones inversas, intercambiando estas en (2.41) nos da

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dp} &= \frac{g'(p)x + f'(p)}{p - g(p)} \\ \frac{dx}{dp} - \frac{g'(p)}{p - g(p)}x &= \frac{f'(p)}{p - g(p)}, \end{aligned}$$

la cual es una ecuación lineal con solución

$$x(p) = \frac{1}{\mu(p)}\left[\int \mu(p)Q(p)dp + c\right] = h(p, c),$$

donde $\mu(p)$ es el factor integrante y p es el parámetro. Así la expresión para y viene dada por la fórmula

$$y(p) = g(p)x(p, c) + f(p). \tag{2.42}$$

Las ecuaciones paramétricas de la solución general de la ecuación de Lagrange (2.42) son $x(p) = h(p, c)$ y $y(p) = g(p)x(p, c) + f(p)$ donde c es la constante de la familia de curvas.

Ejemplo 2.14. *Hallar las ecuaciones paramétricas para la solución de la ecuación diferencial*

$$y = x(y' + 3) - 2(y')^2.$$

Solución. Tomamos la sustitución $y' = p$ y derivamos con respecto a x:

$$\begin{aligned} y &= x(p+3) - 2(p)^2 \\ y' &= p + 3 + x\frac{dp}{dx} - 4p\frac{dp}{dx} \\ p &= p + 3 + x\frac{dp}{dx} - 4p\frac{dp}{dx} \\ -3 &= \frac{dp}{dx}(x - 4p). \end{aligned}$$

Ahora intercambiamos y despejamos:

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{x}{3} + \frac{4}{3}p,$$

$$\frac{dx}{dp} + \frac{x}{3} = \frac{4}{3}p. \tag{2.43}$$

Como la ecuación (2.43) es lineal, obtenemos $P(p) = \frac{1}{3}$, $Q(p) = \frac{4}{3}p$, con factor integrante $\mu(p) = e^{\int \frac{1}{3}dp} = e^{\frac{1}{3}p}$. La solución de esta ecuación viene dada por la fórmula (2.14); es decir,

$$x(p) = e^{-\frac{1}{3}p}\left[\int e^{\frac{1}{3}p}\frac{4}{3}p\,dp + c\right],$$

$$x(p) = 4(p-3) + ce^{-\frac{1}{3}p}.$$

Las ecuaciones paramétricas de la solución de la ecuación diferencial son

$$x(p) = 4(p-3) + ce^{-\frac{1}{3}p}, \quad y(p) = \left[4(p-3) + ce^{-\frac{1}{3}p}\right](p+3) - 2p^2.$$

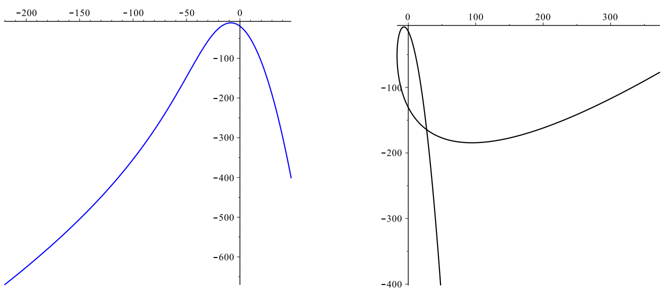


Figura 2.2: Gráfica paramétrica de $[x(p), y(p)]$ para $c = -1$ y $c = 3$.

En la figura 2.2 se muestran dos de estas curvas paramétricas. ☑

Ejercicios

1. Hallar las ecuaciones paramétricas de la soluciones de las ecuaciones diferenciales siguientes:
   a) $y = x(y')^2 + \ln|y'|$.
   b) $y = x(y')^2 + (y')^3$.
   c) $y = x\sqrt{y'} + \frac{1}{2}(y')^2 - \frac{2}{3}(y')^{3/2}$.
   d) $y = (\cos(y') + y')x + \frac{1}{2}\sin(y')\cos(y') + \frac{1}{2}y'$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *a*) $x(p) = \frac{-\frac{1}{p}-\ln|p|+c}{(p-1)^2}$; $\quad y(p) = \left(\frac{-\frac{1}{p}-\ln|p|+c}{(p-1)^2}\right)p^2 + \ln|p|$.
   b) $x(p) = \frac{-p^3+\frac{3}{2}p^2+c}{(p-1)^2}$; $\quad y(p) = p^2\frac{-p^3+\frac{3}{2}p^2+c}{(p-1)^2} + p^3$.
   c) $x(p) = (p + 2\sqrt{p} + 2\ln|\sqrt{p} - 1| + c)(-p^{-1/2} + 1)$; $\quad y(p) = \sqrt{p}(p + 2\sqrt{p} + 2\ln|\sqrt{p} - 1| + c)(-p^{-1/2} + 1) + \frac{1}{2}p^2 - \frac{2}{3}p^{3/2}$.
   d) $x(p) = -\frac{1}{4}\frac{-2\cos^2(p)+4\sin(p)-4c+1}{\sin(p)+1}$,
   $y(p) = (\cos(p) + p)\left(-\frac{1}{4}\frac{-2\cos^2(p)+4\sin(p)-4c+1}{\sin(p)+1}\right) + \frac{1}{2}\sin(p) + \frac{1}{2}p$.

3.6. Reducción a ecuaciones de variables separables

Estudiaremos ahora una clase ecuaciones diferenciales de primer orden que se pueden resolver como ecuaciones de variables separables haciendo una sustitución conveniente. Consideremos la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = g(ax + by + c).$$

Usando la sustitución $u = ax + by + c$ esta se reduce a una ecuación con variables separables. En efecto, derivamos la nueva variable u con respecto a x y obtenemos: $\frac{du}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}$. Ahora reemplazamos en la ecuación original:

$$\frac{1}{b}\frac{du}{dx} - \frac{a}{b} = g(u) \qquad \text{o} \qquad \frac{du}{dx} = bg(u) + a,$$

la cual es una ecuación de variables separables.

Ejemplo 2.15. *Resolver*

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x + y).$$

Solución. Si hacemos $u = x + y$, entonces $\frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$, por lo que la ecuación diferencial se transforma en la ecuación de variables separables

$$\frac{du}{dx} - 1 = \sin(u), \quad \text{o} \quad \frac{du}{dx} = 1 + \sin(u).$$

Integramos con respecto a x y obtenemos

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{1+\sin(u)} \frac{du}{dx} dx &= \int dx \\ \tan(u) - \sec(u) &= x + c. \end{aligned}$$

Como $u = x + y$, sustituimos en la última ecuación y nos queda como resultado:

$$\tan(x+y) - \sec(x+y) = x + c.$$

Esta es la solución implícita de la ecuación diferencial. ☑

Ejercicios

1. Hallar las soluciones de las ecuaciones diferenciales siguientes:
   a) $y' = (x-y)^2$.
   b) $y' = \sin(x - y + 1)$.
   c) $\frac{dy}{dx} = (x + y - 1)^2$.
   d) $\frac{dy}{dx} = \tan^2(x+y)$.
   e) $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$.
   f) $\frac{dy}{dx} = \frac{1-x-y}{x+y}$.
   g) $\frac{dy}{dx} = 1 + e^{y-x+5}$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *a*) $y = \frac{cxe^{-2x} + ce^{-2x} - x + 1}{ce^{-2x} - 1}$.
   b) $y = x + 1 - 2\arctan\left(\frac{c-x+2}{c-x}\right)$.
   c) $y = -x - 1 - \tan(c - x)$.
   d) $\frac{\tan(x+y)}{1+\tan^2(x+y)} + y = x + c$.
   e) $x - 2\sqrt{y - 2x + 3} - c = 0$.
   f) $|x + y| = \sqrt{2x + c}$.
   g) $y = x - 5 - \ln|c - x|$.

4. Análisis cualitativo de EDO de primer orden

Como hemos visto, no siempre es posible hallar una expresión analítica para la solución de una ecuación diferencial ordinaria. Por esto es necesario disponer de otros métodos para estudiar la solubilidad y caracterización matemática de la solución de una ecuación diferencial. En algunas ecuaciones se disponen de métodos de análisis numérico para encontrar una solución aproximada (ver sección 7). Otro método ampliamente utilizado en investigaciones y aplicaciones es el método cualitativo, mediante el cual se busca establecer matemáticamente las características más significativas de la solución.

El teorema de existencia y unicidad es de gran utilidad al momento de determinar si un problema de valor inicial posee solución; sin embargo, no indica cómo calcularla e incluso no indica nada sobre el comportamiento cualitativo de esta (en caso de que exista).

En esta sección describimos algunas pautas para interpretar geometricamente el comportamiento de las soluciones de una ecuación diferencial ordinaria del tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{2.44}$$

Comenzaremos por indicar que, si una función $y = f(x)$ es una solución de la ecuación diferencial (2.44) y pasa por el punto (x_0, y_0), entonces la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva en el punto (x_0, y_0) es igual a $f(x_0, y_0)$. Como consecuencia, la ecuación diferencial (2.44) nos está dando información sobre el *campo de pendientes* de las curvas-solución en cualquier punto sobre el plano.

4.1. Campo de pendientes e isoclinas

Definición 2.1. La gráfica de la solución de un problema de Cauchy es llamada curva solución del problema.

El concepto de curva solución sugiere el siguiente método gráfico para construir soluciones aproximadas de una ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$.

Definición 2.2. Dada una ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$, tracemos por cada uno de los puntos (x, y) un *segmento corto* de recta que tenga la pendiente $m = f(x, y)$. El conjunto de todos estos segmentos de rectas se denomina campo de direcciones o campo de pendientes asociado a la ecuación diferencial dada.

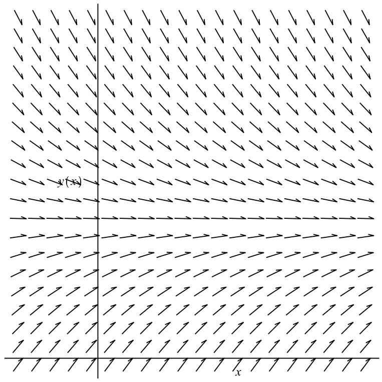


Figura 2.3: Campo de pendientes de la ecuación $\frac{dy}{dx} = 10 - \frac{1}{4}y$.

Para conocer el comportamiento geométrico de las soluciones de un problema de valor inicial $dy/dx = f(x, y)$ sujeto a la condición $y(x_0) = y_0$, seguimos los siguientes pasos:

- Elegimos una colección o muestra de puntos en el plano $\mathbb{R}^2$ y dibujamos, para cada punto (x, y) en la muestra, un segmento de recta que tenga pendiente $m = f(x, y)$ sobre dicho punto (x, y).
- Eligiendo un punto inicial de la muestra, trazamos una curva a partir de dicho punto, haciéndola pasar por otros puntos de la muestra de tal manera que los segmentos de recta sobre los puntos por los cuales pasa la curva en cuestión, sean tangentes a la misma.

Ejemplo 2.16. *En la figura 2.4 se muestra el campo de pendientes de la ecuación* $dy/dx = x + y$*. En la figura 2.5 aparece el campo de misma ecuación y una solución que pasa por el punto* $(1, 2)$*, para la cual la recta tangente a la gráfica de la solución en dicho punto posee pendiente* 3*.*

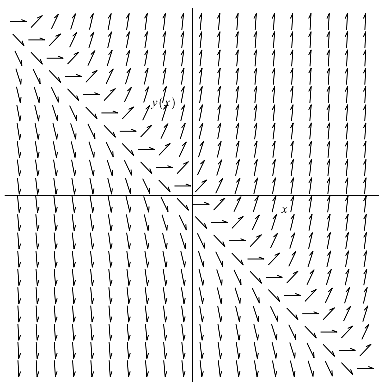


Figura 2.4: Campo de pendientes de la ecuación $\frac{dy}{dx} = x + y$.

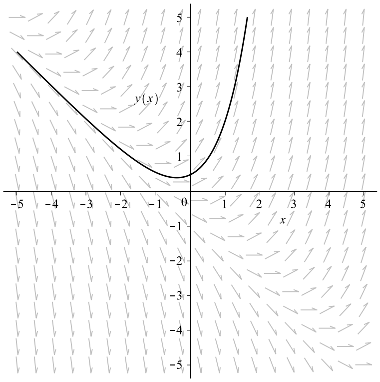


Figura 2.5: Solución de la ecuación $\frac{dy}{dx} = x + y$ que pasa por el punto $(1, 2)$.

El campo de pendiente indica el flujo de las soluciones *y, a su vez, facilita el trazo de cualquier solución particular.* ☑

Otro método gráfico para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales es el llamado método de las *isoclinas*.

Definición 2.3. Una isoclina de la ecuación $dy/dx = f(x, y)$ es una curva de la forma $f(x, y) = c$, con $c \in \mathbb{R}$ constante.

Isoclina significa igual inclinación o pendiente. La isoclina correspondiente a un valor $c \in \mathbb{R}$ es el conjunto de todos los puntos del plano en los cuales el campo de pendientes posee la misma inclinación.

El método de las isoclinas consiste en la aplicación de cada uno de los siguientes pasos:

- Seleccionamos un conjunto de números reales c.
- Para cada número real c en el conjunto seleccionado, determinamos el conjunto $f(x, y) = c$. Para tal fin, resolvemos la ecuación $f(x, y) = c$ para y en términos de x y c o, en su defecto, para x en términos de y y c. De no ser posible, identificamos *localmente* las curvas definidas de forma implícita por la misma ecuación.
- Trazamos segmentos pequeños con pendiente c a lo largo de la isoclina $f(x, y) = c$.

El segundo paso en el procedimiento anterior genera la isoclina correspondiente a c; en otras palabras, el conjunto de todos los puntos en el plano cuyo campo de pendientes correspondiente tiene una inclinación igual a c.

Obs Observe lo siguiente:

1. Si en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$, la función f no depende de y, entonces las isoclinas son lineas verticales.
2. En general, para el caso en que $f(x, y)$ dependa de x e y, las isoclinas pueden ser cualquier tipo de curva. Por ejemplo, si $f(x, y) = x^2 - 2x - y^2 - 4y - 3$, las isoclinas de la ecuación diferencial correspondientes a números reales $c > 0$ son hipérbolas con eje transverso horizontal y con centro en $(1, -2)$. También, de los vértices al centro hay $\sqrt{c}$ unidades y los focos estan ubicados a $\sqrt{2c}$ unidades desde el centro.

Ejemplo 2.17. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = y. \tag{2.45}$$

Las isoclinas de esta ecuación diferencial son las rectas constantes $y = c$, con c un un número real cualquiera. En la figura 2.6 se muestra las isoclinas de la ecuación (2.45) *para los valores $c = -1, 1, 2, 3, 4$.*

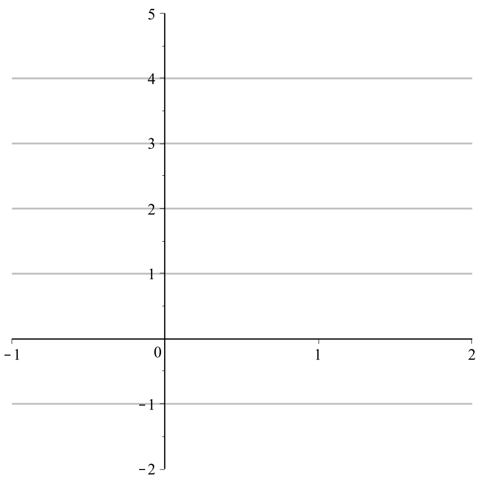


Figura 2.6: Isoclinas de la ecuación $\frac{dy}{dx} = y$.

Si trazamos el campo de pendientes de la misma ecuación, entonces podemos notar en la figura 2.7 que, sobre las isoclinas, el campo de pendientes siempre es el mismo.

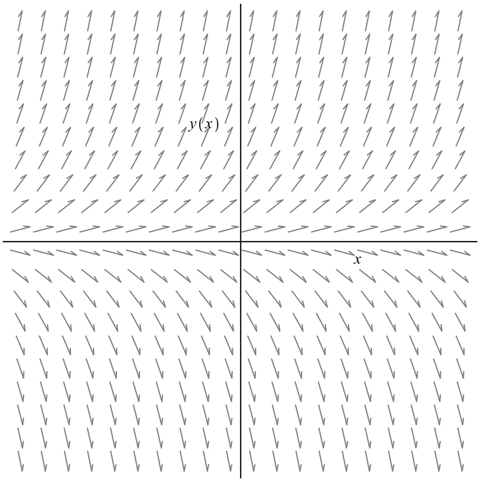


Figura 2.7: Campo de pendientes de la ecuación $\frac{dy}{dx} = y$.

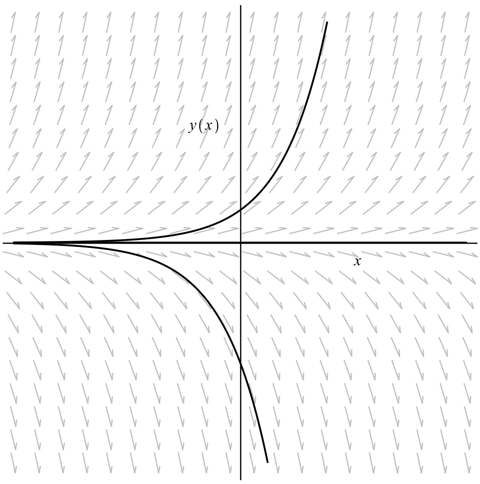


Figura 2.8: Algunas soluciones de la ecuación $\frac{dy}{dx} = y$.

La figura 2.8 muestra algunas curvas solución de la ecuación diferencial. ☑

Ejercicios

1. Dada la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dt} = p(p-2)(4-p)$$

para la población p (en miles) de cierta especie en el instante t:

a) Bosquejar el campo de direcciones usando el método de isoclinas.

b) Si la población inicial es 5000 (es decir, $p(0) = 5$) ¿qué puede decir acerca de la población límite $\lim_{t \to \infty} p(t)$?

c) Si $p(0) = 1.5$ ¿cuál es el valor de $\lim_{t \to \infty} p(t)$?

d) Si $p(0) = 0.5$ ¿cuál es el valor de $\lim_{t \to \infty} p(t)$?

2. En los siguientes problemas use el campo de direcciones para trazar a mano una curva-solución aproximada que pase por los puntos indicados.

a) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$ (figura 2.9)

1) $y(0) = 5$.

2) $y(3) = 3$.

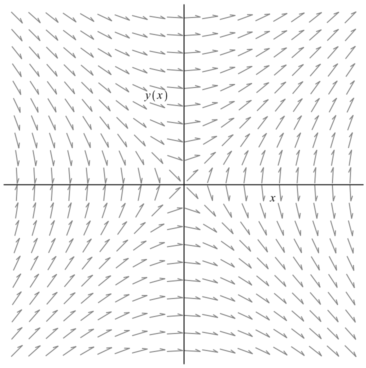


Figura 2.9: Ejercicio 2. a.

b) $\frac{dy}{dx} = \sin(x)\cos(y)$ (figura 2.10)

1) $y(0) = 1$.

2) $y(1) = 0$.

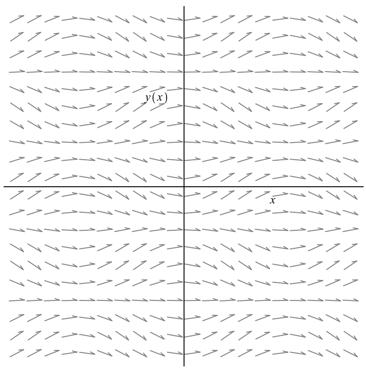


Figura 2.10: Ejercicio 2. b.

3. Trazar las isoclinas y bosquejar varias curvas solución, incluyendo la curva que satisfaga las condiciones iniciales dadas:
   a) $\frac{dy}{dx} = \ln|x| \quad y(1) = 1.$
   b) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad y(-1) = 1.$
   c) $\frac{dy}{dx} = x + 2y \quad y(0) = 1.$
   d) $\frac{dy}{dx} = x^2 \quad y(0) = 1.$
4. (*La integral de seno*). Considere la ecuación diferencial $y' = g(x)$, donde

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

   Trazar las isoclinas y bosquejar varias curvas solución, incluyendo la curva que satisfase $y(0) = 0$. ¿Qué ocurre con $y(x)$ cuando $x \to \infty$?

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *a*) Figura 2.11

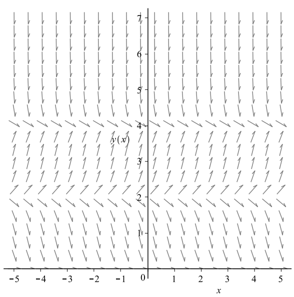


Figura 2.11: Ejercicio 1. a.

   b) 4.
   c) 0.
   d) 0.
3. a) Figura 2.12

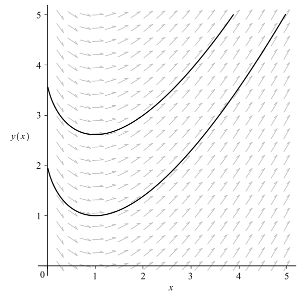


Figura 2.12: Ejercicio 3. a.

c) Figura 2.13

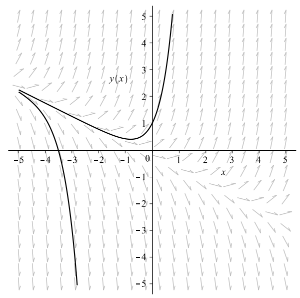


Figura 2.13: Ejercicio 3. c.

4.2. Líneas de fase de una ecuación autónoma

Nos concentraremos ahora en estudiar algunos aspectos cualitativos de EDO de primer orden llamadas *ecuaciones autónomas*. Esto son, ecuaciones que no contienen explícitamente la variable independiente, es decir, ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(y).$$

Supongamos que la función $y = g(x)$ definida en un intervalo abierto $I = (a, b)$ es una solución de la ecuación diferencial autónoma $\frac{dy}{dx} = f(y)$. Sea $k \in \mathbb{R}$ un número real arbitrario y la función $h(x) = g(x - k)$ se define en el intervalo abierto $J = (a + k, b + k)$. Sea $x_0 \in I$, usando la regla de la cadena obtenemos:

$$\frac{dh}{dx}|_{x_0+k} = \frac{dg}{dx}|_{x_0}\ \frac{d}{dx}(x-k)|_{x_0+k} = \frac{dg}{dx}|_{x_0} = f(g(x_0)) = f(h(x_0+k));$$

luego, h también es solución de la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(y)$ en el intervalo J.

Supongamos que g satisface la condición inicial $g(x_0) = y_0$. Ahora, dada otra condición inicial, digamos $y(u_0) = v_0$, consideremos $k = u_0 - x_0$ y definamos $h(x) = g(x-k) + (v_0 - y_0)$. El argumento anterior muestra que h es solución del problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = f(y)$ sujeto a $y(u_0) = v_0$. Luego, considerando el teorema existencia y unicidad, la función h es la única solución de este problema de valor inicial. Esto quiere decir que cualquier solución de un PVI para una ecuación diferencial autónoma determina las soluciones para cualquier otro problema de valor inicial con la misma ecuación diferencial.

Ejemplo 2.18. *Consideremos la ecuación diferencial autónoma*

$$\frac{dy}{dx} = (y-1)(y-2)(y-3). \tag{2.46}$$

En la figura 2.14 se trazan algunas curvas solución de la ecuación (2.46) *y se muestran algunas características geométricas de estas.*

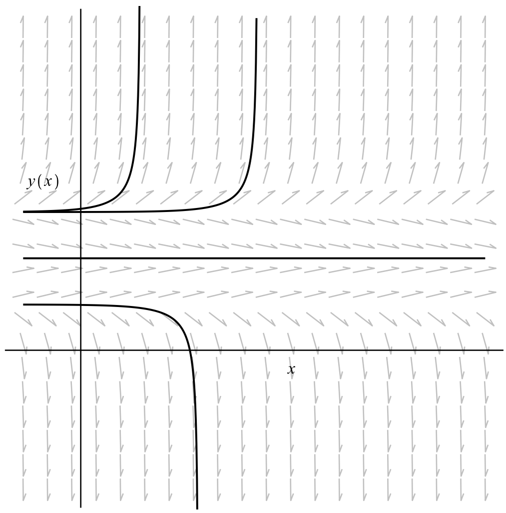


Figura 2.14: Algunas curvas solución de la ecuación (2.46).

Definición 2.4 (Punto de equilibrio). Un equilibrio o punto de equilibrio $y^\infty(x) \equiv y^\infty$ de una ecuación diferencial ordinaria autónoma $dy/dx = f(y)$ es una solución constante de ella; esto es, una solución que satisface $f(y^\infty) = 0$.

Ejemplo 2.19. *Hallar los equilibrios de la ecuación logística*

$$\frac{dy}{dt} = ry\left(1 - \frac{y}{K}\right).$$

Solución. Debemos resolver la ecuación

$$ry\left(1 - \frac{y}{K}\right) = 0,$$

de donde tenemos que los equilibrios son $y^\infty = 0$ y $y^\infty = K$. ☑

Definición 2.5 (Estabilidad). Un equilibrio y^∞ se dice estable si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|y(t_0) - y^\infty| < \delta$ implica que $|y(t) - y^\infty| < \epsilon$ para todo t. Un equilibrio se dice asintóticamente estable si, además de ser estable, $|y(t_0) - y^\infty| < \delta$ implica que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y^\infty.$$

Obs Note que en la definición de estabilidad se supone implícitamente que la ecuación diferencial tiene una solución. *Estabilidad* significa que un pequeño cambio en la condición inicial produce solo un pequeño efecto en la solución o, equivalentemente, que toda solución que comience cerca del equilibrio se mantiene cerca de este para todo t. Es posible que una ecuación diferencial que comience cerca del equilibrio tienda al equilibrio solo después de alejarse de este; en tal caso, el equilibrio se dice inestable pues la noción de estabilidad asintótica requiere que el equilibrio sea estable.

Ejemplo 2.20. *Para la ecuación diferencial autónoma de primer orden del ejemplo 2.18, sabemos que los equilibrios son dados por $y_1^\infty = 1$, $y_2^\infty = 2$ y $y_3^\infty = 3$. En la figura 2.15 se esboza el gráfico de $y' = (y-1)(y-2)(y-3)$ en el plano yy'. En esta figura las líneas continuas ilustran estas soluciones de equilibrio.*

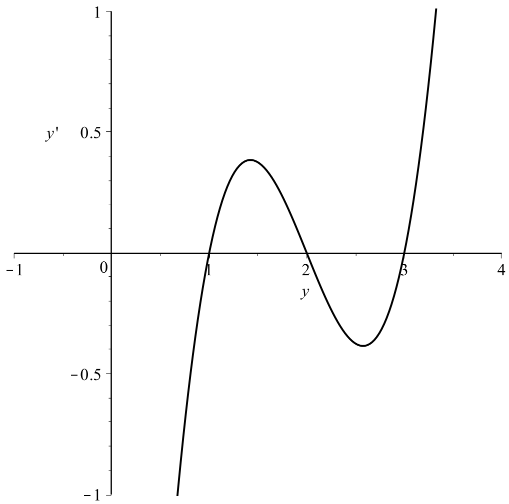


Figura 2.15: Análisis de la estabilidad de la ecuación (2.46).

Note cómo todas las soluciones $y(t)$ que están lo suficientemente cerca al punto de equilibrio $y_2^\infty = 2$ tienden a este cuando $x \to +\infty$. Todo lo contrario sucede con los otros dos puntos de equilibrio $y_1^\infty = 1$ y $y_3^\infty = 3$, para los cuales las soluciones cercanas se alejan de ellos. Por lo tanto, concluimos que $y_2^\infty = 2$ es un punto de equilibrio estable, y que $y_1^\infty = 1$ y $y_3^\infty = 3$ son puntos de equilibrio inestables. ☑

El siguiente teorema nos permite estudiar de manera analítica la naturaleza asintótica de los puntos de equilibrios de una ecuación diferencial autónoma. Para ver su demostración recomendamos [11].

Teorema 2.4. *Un equilibrio y^∞ de la ecuación autónoma*

$$y' = f(y)$$

con $f'(y^\infty) < 0$ es asintóticamente estable mientras que un equilibrio y^∞ tal que $f'(y^\infty) > 0$ es inestable.

Obs Si esbozamos el gráfico de $y' = f(y)$ en el plano yy', el teorema 2.4 dice que si la función f corta el eje y en un equilibrio y^∞ de manera decreciente (esto es, $f'(y^\infty) < 0$) entonces este equilibrio es asintóticamente estable, mientras que, si la función f corta el eje y de manera creciente (es decir, $f'(y^\infty) > 0$), entonces el equilibrio y^∞ es inestable. Si el equilibrio es un punto singular de la función f; es decir, y^∞ es tal que $f'(y^\infty) = 0$, entonces el equilibrio se llama *semiestable*.

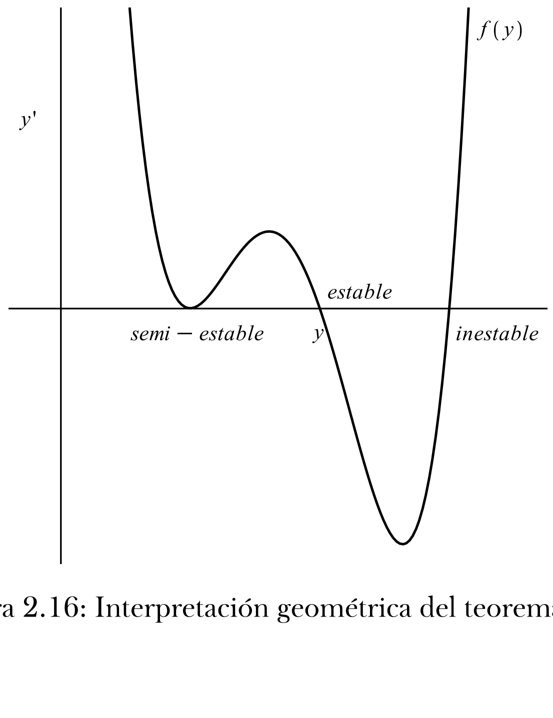


Figura 2.16: Interpretación geométrica del teorema 2.4.

Ejemplo 2.21. *Para la ecuación diferencial* (2.46), $y' = (y-1)(y-2)(y-3)$ *tenemos que* $f'(y) = 3y^2 - 12y + 11$ *y*

$$f'(1) = 2 > 0, \quad f'(2) = -1 < 0, \quad f'(3) = 2 > 0.$$

Por lo tanto, el equilibrio $y_2^\infty = 2$ *es asintóticamente estable mientras que los equilibrios* $y_1^\infty = 1$ *y* $y_3^\infty = 3$ *son inestables.* ☑

Obs Note que toda ecuación autónoma $y' = f(y)$ es de variables separables y; por tanto, en principio, se puede resolver integrando, lo cual puede ser un proceso complicado. Sin embargo, el análisis cualitativo permite conocer el comportamiento de las soluciones sin necesidad de resolver explícitamente la ecuación diferencial.

Con esta información podemos podemos caracterizar los equilibrios de la siguiente manera:

Pozo. Todos los puntos de equilibrios asintóticamente estables (también llamado *sumidero* o *atractor*).

Fuente. Todos los puntos de equilibrios inestables (también llamado *repulsor*).

Nodo. Todos los puntos de equilibrio semiestables.

Ahora podemos estudiar el comportamiento de los puntos de equilibrios de una ecuación autónoma mediante la llamada *línea de fase*.

Definición 2.6. La linea de fase asociada a la ecuación diferencial autónoma $\frac{dy}{dx} = f(y)$ es un diagrama que describe el comportamiento geométrico de los puntos de equilibrio de esta y el cual se construye de la siguiente forma:

- Primero debemos cerciorarnos de que la ecuación diferencial en cuestión satisfaga las condiciones del teorema existencia y unicidad.
- Hallar todas las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial.
- Trazar la recta real y sobre ella marcar todos los equilibrios.
- Estudiar el signo de la función $f(y)$ en los alrededores de los puntos de equilibrio.
- Dado un punto de equilibrio y^∞, si $f(y)$ es menor que cero a la derecha de y^∞ (para valores cercanos a y^∞), trazamos sobre la linea de fase a la derecha de y^∞, una pequeña flecha con dirección hacia y^∞. En caso contrario, trazamos a la derecha de y^∞ una pequeña flecha, desde y^∞ en dirección opuesta al mismo punto.
- Repetimos el procedimiento anterior a la izquierda de y^∞. Si $f(y)$ es positiva a la izquierda de y^∞, trazamos una flecha con dirección hacia y^∞ y, en caso contrario, una flecha desde y^∞ en dirección opuesta. Esto último también lo hacemos si $f(y)$ tiene el mismo signo a ambos lados de y^∞. Repetimos el proceso para cada equilibrio de la ecuación.

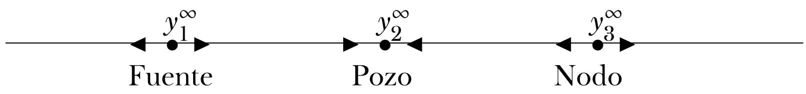


Figura 2.17: Línea de fase.

Ejemplo 2.22. *Establecer los puntos de equilibrio para la ecuación diferencial autónoma*

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 7y + 10, \tag{2.47}$$

determinar su tipo y graficar su línea fase.

Solución. En la figura 2.18 se muestra la gráfica de la función

$$f(y) = y^2 - 7y + 10$$

en el plano yy'.

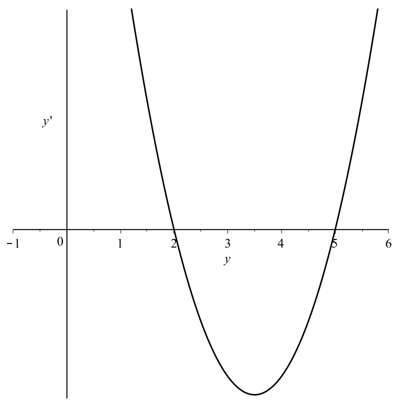


Figura 2.18: Gráfico de $f(y) = y^2 - 7y + 10$ en el plano yy'.

Los puntos de equilibrio para la ecuación autónoma (2.47) son $y_1^\infty = 2$ y $y_2^\infty = 5$. Además $f'(2) = -3 < 0$ y $f'(5) = 3 > 0$, luego $y_1^\infty = 2$ es un atractor, mientras que $y_2^\infty = 5$ es una fuente. La línea de fase se muestra en la figura 2.19.

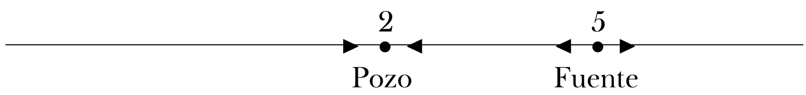


Figura 2.19: Linea de fase de la ecuación (2.47).

El diagrama de pendientes y algunas soluciones aproximadas para esta ecuación se muestran en la figura 2.20.

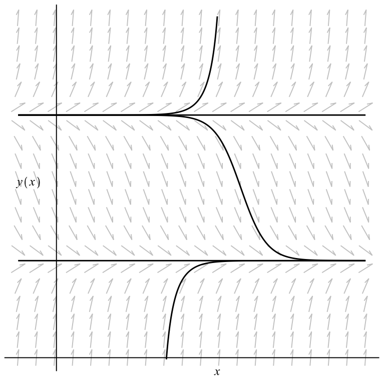


Figura 2.20: Campo de pendientes y algunas soluciones de $y' = y^2 - 7y + 10$.

Note el comportamiento asintótico de los equilibrios de la ecuación. ☑

Ejercicios

1. Hallar todos los equilibrios de las ecuaciones diferenciales dadas y determinar cuáles son asintóticamente estables:
   a) $y' = ry \ln\left|\frac{K}{y}\right|$.
   b) $y' = \frac{ry(K-y)}{K+ay}$.
   c) $y' = ry\left(1 - \left(\frac{y}{K}\right)^{\alpha}\right), \; 0 < \alpha < 1$.
   d) $y' = y(re^{1-y/K} - d)$.
2. *a*) El modelo de una población está gobernado por la ecuación diferencial
   $$y' = y(e^{3-y} - 1).$$
   Hallar todos los equilibrios y determinar su estabilidad.
   b) Una fracción p $(0 < p < 1)$ de la población del punto anterior es removida en una unidad de tiempo, de modo que el tamaño de la población ahora es gobernada por la ecuación diferencial
   $$y' = y(e^{3-y} - 1) - py.$$
   ¿Para cuáles valores de p existe un equilibrio positivo asintóticamente estable?
3. ¿Para qué valor inicial $y(0)$ la solución $y(t)$ de la ecuación diferencial $y' = y(2y - e^{-y})$ se aproxima a cero cuando $t \to \infty$?

4. Sea C la concentración de una sustancia en una célula y sea Γ la concentración fuera de la célula. Suponga que la sustancia entra a la célula por difusión a una tasa de βC. Esto se modela mediante la ecuación diferencial
$$C' = \beta C(\Gamma - C).$$
Ahora incluya un término de absorción dado por la ecuación diferencial
$$C' = \beta C(\Gamma - C) - \frac{C}{1-C},$$
donde β es constante.
   a) Hallar todos los equilibrios de este modelo y determinar su estabilidad.
   b) Comparar el comportamiento de este modelo cuando $t \to \infty$, con el comportamiento del modelo sin absorción.
5. Utilizar un bosquejo de la línea fase para argumentar que cualquier solución de la ecuación diferencial
$$\frac{dx}{dt} = a - bmx; \quad a, b > 0,$$
tiende a la solución de equilibrio $x(t) \equiv a/b$, cuando t tiende a $+\infty$; es decir, a/b es un pozo.
6. Utilizar un bosquejo de la línea fase para justificar que cualquier solución del modelo
$$\frac{dp}{dt} = (a - bp)p; \quad p(t_0) = p_0,$$
donde a, b y p_0 son constantes positivas, tienden a la solución de equilibrio $p(t) \equiv a/b$ cuando t tiende a $+\infty$.
7. *a*) Trazando el campo de tangentes determinar si el equilibrio $y^\infty = 0$ de la ecuación diferencial $y' = y^3$ es asintóticamente estable o inestable.
   b) Trazando el campo de tangentes determinar si el equilibrio $y^\infty = 0$ de la ecuación diferencial $y' = -y^3$ es asintóticamente estable o inestable.
8. Para cada una de las ecuaciones diferenciales, bosquejar la línea fase, identificar las soluciones de equilibrio y clasificar los puntos de equilibrio.
   a) $y' = y^2 - 2y + 1$.
   b) $y' = \cos(y)$.
   c) $y' = (y-2)^4$.

d) $y' = y^2(4 - y^2)$.
e) $y' = 10 + 3y - y^2$.

9. Utilizar la línea fase para predecir el comportamiento asintótico (cuando $t \to +\infty$) de la solución que satisfaga la condición inicial dada.
   a) $y' = y(y^2 - 2y + 1), \quad y(0) = 0.5$.
   b) $y' = y(y^2 - 2y - 8), \quad y(0) = -10$.
   c) $y' = \cos(y), \quad y(0) = 0$.
10. Sea $g(x)$ una función tal que $g(K) = 0$ y $g(x) > 0$ para $0 < x < K$ y suponga que $0 < x_0 < K$.
    a) Demostrar que la función $x(t)$ definida de manera implícita por la relación
    $$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{du}{ug(u)} = t \tag{2.48}$$
    es una solución del problema de valor inicial $x' = xg(x)$, $x(0) = x_0$.
    b) Demostrar que la integral dada en (2.48) es negativa si $x(t) < x_0$ y positiva si $x(t) > x_0$. Deducir que la solución del problema de valor inicial debe satisfacer que $x(t) > x_0$ para $t > 0$.
    c) Demostrar que, cuando $t \to \infty$, la integral en (2.48) diverge. Deducir que $g(x(t)) \to 0$ y así $x(t) \to K$.
11. Para la ecuación diferencial
    $$y' = f(y)$$
    con $f(0) = 0$, $f(x) < 0$ $(0 < x < K_0)$, $f(K_0) = 0$, $f(x) > 0$ $(K_0 < x < K)$, $f(K) = 0$, $f(x) < 0$ $(x > K)$, demostrar que los equilibrios 0 y K son asintóticamente estables y que el equilibrio en K_0 es inestable.
12. Suponga que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y su gráfica se muestra en la figura 2.21. Esboce la línea de fase y las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial autónoma $\frac{dx}{dt} = f(x)$. Clasifique sus puntos de equilibrio.

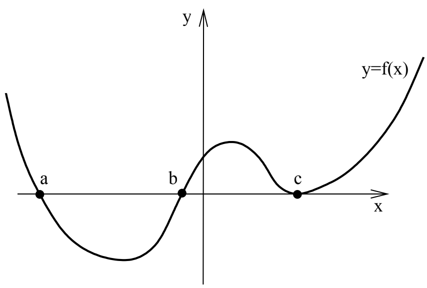


Figura 2.21: Gráfica de la función $f(x)$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. a) $y_1^\infty = 0$ asintóticamente estable. $y_2^\infty = K$ asintóticamente estable si $r > 0$, inestable $r < 0$.
   c) $y_1^\infty = 0$ semiestable, $y_2^\infty = K$ asintóticamente estable si $r < 0$, inestable $r > 0$.
3. 0.
8. a) Figura 2.22

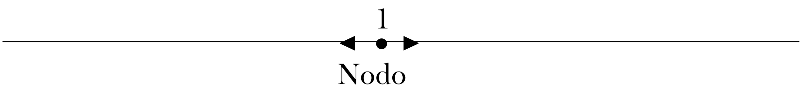


Figura 2.22: Ejercicio 8. a.

   d) Figura 2.23

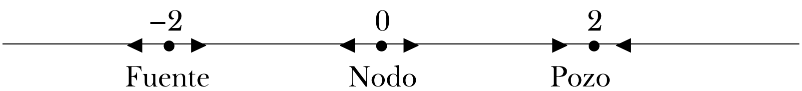
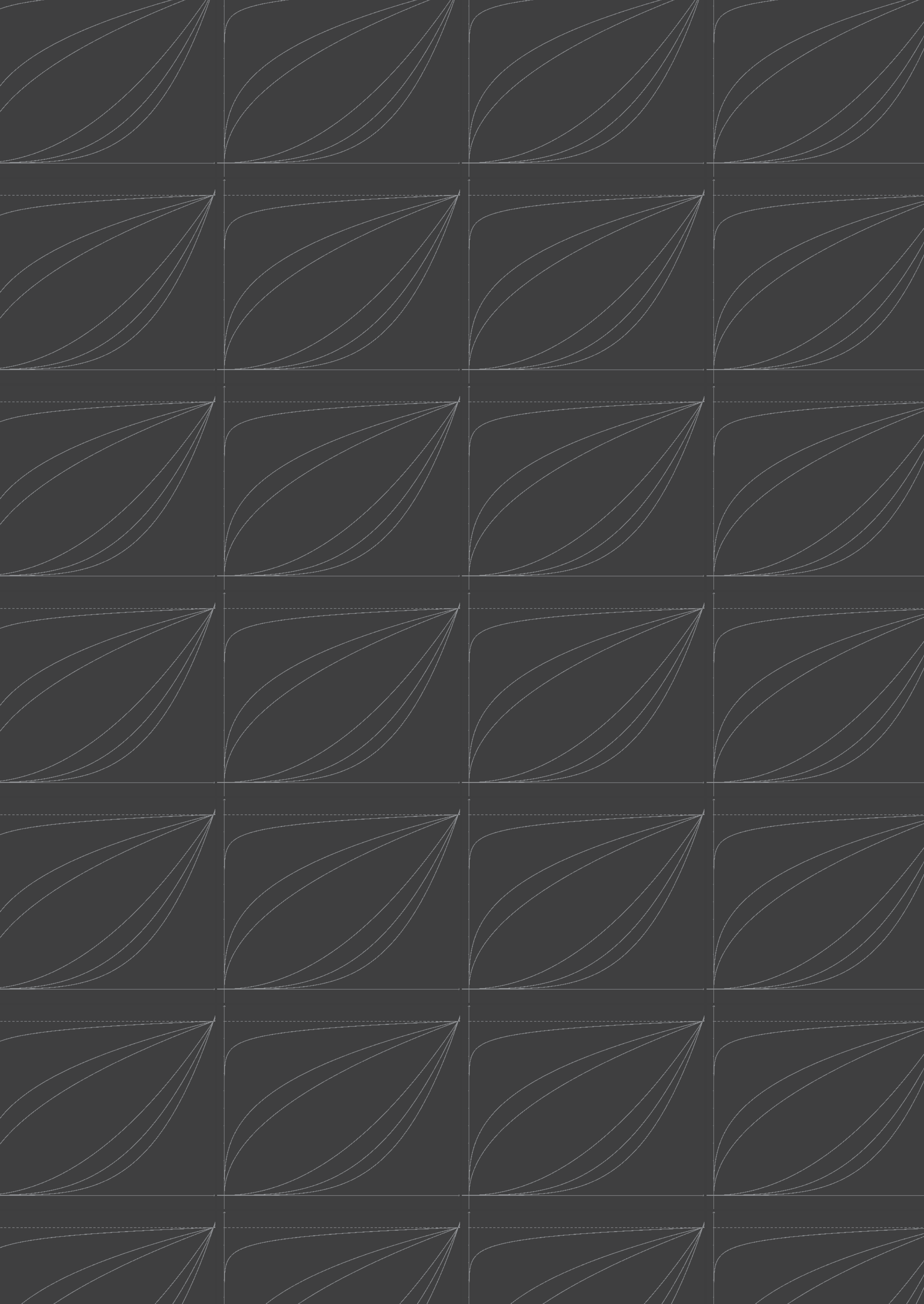


Figura 2.23: Ejercicio 8. d.

Capítulo

tres

Algunas aplicaciones de EDO de primer orden



El propósito de este capítulo es mostrar la utilidad de las ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Para ello, consideraremos algunas situaciones típicas que se modelan mediante este tipo de ecuaciones. Nos concentraremos en aplicaciones modeladas por EDO de primer orden ecuaciones autónomas.

1. Modelos de crecimiento y decrecimiento

Comenzaremos estudiando algunas situaciones prácticas en las cuales se requiere predecir el comportamiento dinámico (de crecimiento y decrecimiento en el tiempo) de algunos fenómenos descritos matemáticamente mediante ecuaciones diferenciales de primer orden autónomas.

1.1. Crecimiento exponencial

Consideremos una población en la cual todos los individuos se desarrollan independientemente de los otros y viven en un ambiente sin restricciones y ninguna forma de competencia.

Los llamados modelos deterministas, a menudo, proporcionan medios útiles para la obtención de suficiente conocimiento sobre la dinámica de las poblaciones, siempre que estas sean lo suficientemente grandes. Por otra parte, las perturbaciones a grandes poblaciones en equilibrio a menudo generan, en el corto tiempo, respuestas individuales independientes que pueden ser apropiadamente modeladas mediante estos modelos deterministas. Por ejemplo, la introducción de un solo individuo infectado en una población libre de enfermedad conduce a la generación de casos secundarios de infección, con lo que propaga así la enfermedad. El entorno está libre de competencia por interferencia, al menos al comienzo del brote, cuando una población susceptible proporciona un suministro casi ilimitado de portadores. La propagación de la enfermedad en una población grande de individuos susceptibles puede ser vista como un proceso de invasión generada por los contactos independientes entre una enorme cantidad de miembros susceptibles y unos pocos individuos infectados.

La densidad de una población de especies en un tiempo t será denotada por $x(t)$, donde se supone que x es diferenciable en casi todo punto. Aunque esta suposición es poco realista ya que $x(t)$ es una función a valores enteros (discreta) y por lo tanto no continuo, para poblaciones con un gran número de miembros la suposición de continuidad y diferenciabilidad proporcionan aproximaciones razonables. En muchos experimentos biológicos la población de biomasa, que se podría esperar esté mejor descrita por una función diferenciable que el tamaño de la población, a menudo se toma como la definición de $x(t)$. La tasa de variación de la densidad de población se puede calcular si se conocen las tasas de nacimiento, muerte y migración.

Una población cerrada no tiene, por definición, migración. En este caso, los cambios de tamaño de población solo son dados mediante nacimientos y muertes, y la tasa de cambio de tamaño de la población es simplemente la tasa de natalidad menos la tasa de mortalidad. La formulación de un modelo específico requiere suposiciones explícitas sobre las tasas de natalidad y mortalidad. Estas suposiciones se hacen con el fin de abordar cuestiones biológicas específicas, tales como bajo qué condiciones habrá competencia por interferencia (competencia por los anfitriones) y la virulencia del patógeno de acoger la coexistencia a largo plazo. Para los microorganismos que se reproducen por división es razonable suponer que la tasa de nacimiento de nuevos organismos es proporcional al número de organismos presentes.

La ley de Malthus permite modelar poblaciones con estas características. Esta ley se expresa en símbolos matemáticos como

$$\frac{dx}{dt} = kx, \qquad x(t_0) = x_0, \tag{3.1}$$

donde k es una constante. Esta ecuación también aparece en muchas aplicaciones en distintas áreas del conocimiento que involucran crecimiento o decrecimiento de una cantidad modelada en el tiempo. Por ejemplo, en biología a menudo se observa que la rapidez con que ciertas bacterias se multiplican es proporcional al número de bacterias presentes en cierto instante. Para intervalos de tiempo cortos, la magnitud de una población de animales pequeños, como roedores, puede predecirse con bastante exactitud mediante la solución de (3.1). En física, un problema de valor inicial como (3.1) proporciona un modelo para aproximar la cantidad que queda de una sustancia radioactiva que se desintegra, esta ecuación en forma simplificada sirve como modelo para determinar la temperatura de un cuerpo que se enfría. En química, el mismo modelo sirve para determinar la cantidad de sustancia que queda durante una reacción.

La constante de proporcionalidad k puede ser negativa o positiva y se puede determinar si se establece otro valor de la variable x en un tiempo $t_1 > t_0$.

Ejemplo 3.1. *Se sabe que la población de cierta comunidad aumenta en un instante cualquiera con una rapidez proporcional al número de personas presentes en dicho instante. Si la población se duplica en 5 años. ¿Cuánto demorará en triplicarse?*

Solución. De acuerdo con el enunciado del problema, un modelo para estudiar este fenómeno es el siguiente:

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{3.2}$$

sujeto a $P(0) = P_0$. Esto produce el modelo matemático llamado ley exponencial o de Malthus para el crecimiento de poblaciones. Se pretende hallar el valor de t para el cual $P(t) = 3P_0$.

La ecuación diferencial en (3.2) es de variables separables, por lo que la podemos reescribir como

$$\frac{dP}{P} = kdt.$$

Integrando tenemos: $\ln|P| = kt + c$ y ahí despejamos P:

$$P(t) = Ce^{kt}.$$

Reemplazando la condición inicial $P(0) = P_0$ se tiene $C = P_0$; por tanto,

$$P(t) = P_0e^{kt}. \tag{3.3}$$

Ahora como $P(5) = 2P_0$ remplazamos en (3.3):

$$\begin{aligned} 2P_0 =& P_0e^{5k} \\ 2 =& e^{5k} \\ \ln(2) =& k5 \\ k = \frac{\ln(2)}{5} & \\ P(t) =& P_0e^{\frac{\ln(2)}{5}t}. \end{aligned}$$

Para determinar el valor de t para el cual la población se ha triplicado, despejamos t de la ecuación

$$3P_0 = P_0e^{\frac{\ln(2)}{5}t};$$

luego cancelamos y tomamos la función logaritmo en ambos miembros de la ecuación:

$$\ln(3) = \frac{\ln(2)}{5}t$$
$$t = 5\frac{\ln(3)}{\ln(2)} \approx 7,9.$$

Así, la población demora en triplicarse $t \approx 7,9$ años. ☑

Otra aplicación modelada mediante ecuaciones autónomas son los llamados *problemas financieros de interés*: Consideremos una cantidad A a ser invertida al α % anual. El capital P al final del año será

$$P = A\left(1+\frac{\alpha}{100}\right) \text{ si el interés es compuesto, anualmente.}$$
$$P = A\left(1+\frac{\alpha}{2\times 100}\right)^2 \text{ si el interés es compuesto, semestralmente.}$$
$$P = A\left(1+\frac{\alpha}{4\times 100}\right)^4 \text{ si el interés es compuesto, trimestralmente.}$$
$$P = A\left(1+\frac{\alpha}{12\times 100}\right)^{12} \text{ si el interés es compuesto, mensualmente.}$$

En general, el capital P al final del año será

$$P = A\left(1+\frac{\alpha}{m\times 100}\right)^m.$$

Si la tasa de interés es r por ciento anual compuesto m veces por año, al final de n años el capital será

$$P = A\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^m\right]^n.$$

Si el número m incrementa sin límite, entonces

$$P = \lim_{m\to\infty} A\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^m\right]^n = \lim_{m\to\infty} A\left[\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m/r}\right]^{nr} = Ae^{nr}.$$

Finalmente, reemplazando n por t, obtenemos que

$$P = Ae^{rt}$$

es el capital al final de un tiempo t, si la cantidad A es compuesta instantáneamente o continuamente a un interés del r por ciento anual. La ecuación anterior es la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = rP.$$

Ejemplo 3.2. *¿Cuánto tiempo toma duplicar* \$ 50 *si el interés es compuesto continuamente al* 6 % *anual?*

Solución. En este caso $r = 6/100 = 0,06$. La condición inicial es $P(0) = 50$ y queremos hallar t^* tal que $P(t^*) = 100$. Tenemos:

$$\frac{dP}{dt} = 0,06P,$$

que es una ecuación de variables separables (también lineal); así

$$\int \frac{dP}{P} = \int 0,06dt, \quad \ln(P) = 0,06t + k;$$

por lo tanto, $P(t) = Ke^{0,06t}$ y usando la condición inicial obtenemos

$$50 = P(0) = Ke^{0,06\times 0} = K.$$

Sustituimos esto en la solución de la ecuación para t^*; esto es: $100 = P(t^*) = 50e^{0,06t^*}$. Finalmente, $\ln(2) = 0,06t^*$, lo cual implica $t^* \approx 11,55$ años. ☑

Ejercicios

1. Suponga que la tasa de crecimiento por día de una población es 0,7944 por miembro. La población inicial es de 2 miembros, hallar el tamaño de la población al final de 5 días.
2. En 1990 el Departamento de Recursos Naturales liberó 2.000 ejemplares de una especie de pez en un lago. En 1997, la población de estos peces en el lago se estimó en 5.000. Usar la ley de Malthus para el crecimiento de poblaciones y estime la población de estos peces en el lago en el año 2010.
3. Suponga que una población tiene 50 miembros en $t = 0$ y 75 al final de 100 días. Hallar la población al final de 150 días.
4. En cualquier tiempo t la cantidad de bacterias en un cultivo crece a razón proporcional al número de bacterias presentes. Al cabo de dos horas se observa que hay 600 individuos. Después de 15 horas hay 3.000 especímenes. ¿Cuál era la cantidad inicial de bacterias?
5. En 1990 la población de lagartos en los terrenos del Centro Espacial Kennedy se estimó en 350. En 2000, la población había aumentado hasta un estimado de 1.300. Usar la ley de Malthus para el crecimiento de poblaciones y estime la población de lagartos en dichos terrenos en el año 2010.
6. Suponga que la tasa de crecimiento diaria de una población dada es 0,21 por miembro. Si el tamaño de la población en un día particular es 100, hallar el tamaño de la población 7 días después.
7. La población de una comunidad crece a razón proporcional a la población en cualquier momento t. Su población inicial es de 6.500 y aumenta 15 % en 10 años. ¿Cuál será la población en 30 años?
8. Suponga que una población tiene 39 miembros en $t = 8$ y 60 miembros en $t = 12$. ¿Cuál fue el tamaño de la población en $t = 0$?
9. ¿A qué tasa de interés se duplicarán \$ 300 en 8 años?

10. Suponga que una población tiene 15 miembros en $t = 4$ y 10 miembros en $t = 12$. ¿Cuál fue el tamaño de la población en $t = 0$?
11. ¿Cuál será el rédito de \$ 1.000 al 4,5 % de interés luego de 20 años?
12. En 1986, la población de la tierra era de 5×10^9. Usar un modelo de crecimiento exponencial con la tasa de crecimiento de la población del 2 % por año observado en 1986 para predecir el tamaño de la población de la tierra en el año 2000.
13. ¿Cuánto dinero se debe depositar en un banco al 5 % de interés para poder retirar \$ 3.600 anuales y que el capital sea consumido al final de este tiempo, si el dinero se retira continuamente desde la fecha del deposito una cantidad de 3.600/365 al día?
14. Una población de bacterias es inoculada en un placa de Petri a una densidad de 10ml. La densidad de las bacterias se duplica en 20 horas. Suponga que esta situación es descrita mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = Cx,$$

donde x es la densidad de las bacterias y C es constante. ¿Cuánto tiempo se requiere para que la densidad se incremente en 8 veces su valor original?
15. Suponga que una población tiene una tasa de crecimiento constante de r por miembro, por unidad de tiempo, y que el tamaño inicial de la población es x_0. Demostrar que el tamaño de la población en un tiempo t es $x_0 e^{r(t-t_0)}$.
16. Suponga que una población tiene una tasa de crecimiento de r por miembro, por cada unidad de tiempo, con $r > 0$. Demostrar que el tiempo requerido para que la población duplique su tamaño inicial es $\ln(2)/r$.
17. Suponga que una población tiene una tasa de crecimiento de r por miembro, por unidad de tiempo con $r < 0$. Demostrar que el tiempo requerido para que la población decrezca a la mitad de su tamaño inicial es $-\ln(2)/r$.
18. Suponga que una población tiene una tasa de crecimiento $r(t)$ que depende de la población en cada instante de tiempo t. El tamaño $x(t)$ de la población es gobernado por el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = r(t)x, \qquad x(0) = x_0.$$

Demostrar que el tamaño de la población en cualquier instante de tiempo t viene dado por la expresión $x(t) = x_0 e^{\int_0^t r(s)ds}$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

2. Aproximadamente 27.416 peces.
5. 4.828,7.
7. 9.885,6.
9. Aproximadamente 8,7 %.
13. 568,31.
15. A=45.513.

1.2. Modelo logístico de crecimiento poblacional

El modelo anterior (ley de Malthus) debido a su simplicidad, solo es aplicable a "pequeñas" poblaciones. Para organismos mas complicados como plantas, animales o seres humanos, este modelo es muy simple puesto que ignora algunas restricciones como: recursos, espacio, alimento, competencia intraespecies, tasa de natalidad y de mortalidad, depredación, mutualismo etc., que deberían ser consideradas en el modelo matemático.

En esta sección estudiaremos un modelo en el cual la tasa de crecimiento depende solo del tamaño de la población, porque a pesar de sus deficiencias, este tipo de modelos predice el comportamiento cualitativo de muchas poblaciones reales. En la sección anterior se supuso que la tasa de crecimiento total es proporcional al tamaño de la población (un modelo lineal), o equivalentemente, que tiene una tasa de crecimiento per cápita constante. En esta sección consideraremos modelos en los cuales la tasa de crecimiento disminuye a medida que aumenta el tamaño de la población que se considera. El modelo mas sencillo en el cual la tasa de crecimiento per cápita decrece como función del tamaño de la población es el llamado modelo logístico, introducido por Verhulst (1838) y luego estudiado por R. Pearl y L. J. Reed (1920). Esta ecuación es frecuentemente asociada al estudio de la dinámica de una población bajo alguna dependencia en las tasas de natalidad y mortalidad. Sin embargo, también se presenta naturalmente en el estudio de sistemas epidemiológicos, como lo mostró Hethcote (1976).

El modelo logístico tiene en cuenta lo siguiente: supongamos que se ha estimado que cierto espacio puede tolerar máximo una población de un tamaño N.

- Usualmente este tamaño recibe el nombre de *soporte* y se puede encontrar por experimentación, simulación, etc.

También supongamos que si la población es pequeña (con respecto al soporte N), la tasa de crecimiento de esta crecerá proporcionalmente a su tamaño. Si la población es demasiado grande (respecto a N), la tasa de crecimiento es negativa. El modelo viene dado en la siguiente forma:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{N}\right).$$

Nótese que el factor $1 - \frac{P}{N}$ es positivo cuando $P < N$ y negativo cuando $P > N$. La ecuación dada es de variables separables. Veamos cómo se resuelve:

$$\begin{aligned}
\frac{dP}{dt} &= kP\left(1 - \frac{P}{N}\right)\\
\frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{N}\right)} &= kdt\\
\int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{N}\right)} &= \int kdt = kt + C_1.
\end{aligned}$$

La integral del lado izquierdo se hace por fracciones parciales

$$\begin{aligned}
\int \frac{dP}{P\left(1 - \frac{P}{N}\right)} &= \int \left(\frac{1}{P} + \frac{1/N}{1 - P/N}\right) dP\\
&= \ln|P| - \ln\left|1 - \frac{P}{N}\right| = \ln\left|\frac{P}{1 - \frac{P}{N}}\right|\\
&= \ln\left|\frac{NP}{N - P}\right|
\end{aligned}$$

de donde

$$\ln\left|\frac{NP}{N - P}\right| = kt + C_1$$

o, equivalentemente,

$$\left|\frac{NP}{N - P}\right| = e^{kt + C_1} = e^{kt}e^{C_1} = C_2 e^{kt}. \tag{3.4}$$

Debemos considerar dos situaciones:

Caso 1. Si $N - P > 0$, entonces (3.4) queda como $\frac{NP}{N-P} = C_2 e^{kt}$. Despejemos P de esta ecuación:

$$\begin{aligned}
\frac{NP}{N - P} &= C_2 e^{kt}\\
NP &= NC_2 e^{kt} - PC_2 e^{kt}\\
P\left(N + C_2 e^{kt}\right) &= NC_2 e^{kt}
\end{aligned}$$

$$P = \frac{NC_2e^{kt}}{N + C_2e^{kt}} = \frac{N}{\frac{N}{C_2}e^{-kt} + 1}$$
$$P = \frac{N}{NC_3e^{-kt} + 1},$$

donde $C_3 = \frac{1}{C_2}$.

Caso II. Si $N - P < 0$, la igualdad (3.4) viene dada por $\frac{NP}{N-P} = -C_2e^{kt}$.

Hallemos P en este caso:

$$\frac{NP}{N - P} = -C_2e^{kt}$$
$$NP = -NC_2e^{kt} + PC_2e^{kt}$$
$$P\left(N - C_2e^{kt}\right) = -NC_2e^{kt}$$
$$P = -\frac{NC_2e^{kt}}{N - C_2e^{kt}} = -\frac{N}{\frac{N}{C_2}e^{-kt} - 1}$$
$$P = \frac{N}{1 - NC_3e^{-kt}}$$

donde, otra vez, hemos hecho $C_3 = \frac{1}{C_2}$.

Si la población inicial es $P(0) = P_0 < N$, entonces la población crecerá (pues $\frac{dP}{dt}$ es positivo suponiendo $k > 0$) hasta el soporte:

$$\lim_{t\to\infty} P = \lim_{t\to\infty} \frac{N}{1 - NC_3e^{-kt}} = N.$$

En cualquiera de las dos situaciones la población tiende a estar en "equilibrio". Si $P(0) = P_0 = 0$, la población se mantendrá en cero, naturalmente. Finalmente, si $P(0) = P_0 = N$, entonces la población se mantendrá constante en $P(t) = N$. En resumidas cuentas la población viene dada mediante la fórmula

$$P(t) = \begin{cases} \frac{N}{NC_3e^{-kt}+1}, & \text{si } 0 < P_0 < N \\ \frac{N}{1-NC_3e^{-kt}}, & \text{si } P_0 > N \\ 0, & \text{si } P_0 = 0 \\ N, & \text{si } P_0 = N. \end{cases}$$

En la figura 3.1 se presentan dos situaciones hipotéticas en que el soporte es 3 (asíntota horizontal). En la primera, la población inicial es mayor que el soporte y a lo largo del tiempo decrecerá. En la segunda ecuación, la población inicial es menor que el soporte (pero positiva) y la población crecerá hasta el soporte.

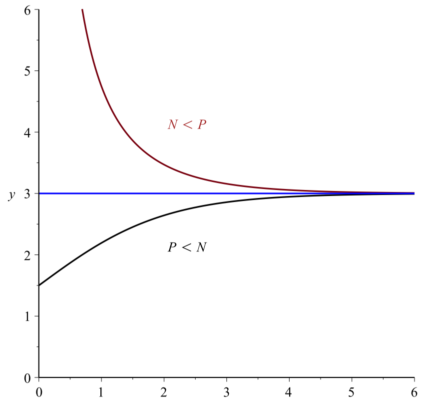


Figura 3.1: Asíntota horizontal en el modelo logístico.

Ejemplo 3.3. *En cierta ciudad hay 4.800 personas susceptibles de contraer una cierta enfermedad contagiosa. La tasa de crecimiento de una epidemia es conjuntamente proporcional al número de personas infectadas y al número de personas que todavía no se han infectado. Inicialmente contraen la enfermedad* 300 *personas y* 10 *días después se han infectado 1.200.*

1. *¿Cuántas personas se habrán infectado al cabo de* 20 *días?*
2. *¿Cuándo se propagará con mayor rapidez la enfermedad (es decir, al cabo de cuántos días se habrá infectado la mitad de las personas susceptibles de contraer la enfermedad)?*

Solución. En este caso N=4.800 y la ecuación está dada por

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dt} &= k_1 P(4.800 - P)\\ &= 4.800 k_1 P\left(1 - \frac{P}{4.800}\right).\end{aligned}$$

Nótese que se trata de una ecuación logística con $k = 4.800k_1$ y soporte $N = 4.800$, además $P(0) = 300 < 4.800 = N$ de tal forma que la solución está dada por

$$\begin{aligned}P(t) &= \frac{N}{NC_3 e^{-kt} + 1}\\ &= \frac{4.800}{4.800C_3 e^{-kt} + 1}.\end{aligned}$$

La condición inicial es $P(0) = 300$, así:

$$P(0) = \frac{4.800}{4.800C_3 + 1} = 300$$

luego,

$$4.800 = 1.440.000C_3 + 300,$$

donde $C_3 = 0{,}003125$. Actualizando la ecuación tenemos:

$$P(t) = \frac{4.800}{15e^{-kt} + 1}.$$

Se sabe también que $P(10) = 1.200$, lo que permite encontrar el valor del parámetro k:

$$\begin{aligned}
P(10) &= \frac{4.800}{15e^{-k10} + 1} = 1.200\\
\frac{4}{15e^{-k10} + 1} &= 1\\
e^{-k10} &= \frac{1}{5}\\
k &= -\frac{1}{10}\ln\left(\frac{1}{5}\right) \approx 0{,}16094.
\end{aligned}$$

Por tanto, la expresión para la población de enfermos está dada por

$$P(t) = \frac{4.800}{15e^{-0{,}16094t} + 1}.$$

1. Para calcular el número aproximado de enfermos al cabo de 20 días, evaluamos:

$$P(20) = \frac{4.800}{15e^{-0{,}16094(20)} + 1} \approx 3.000.$$

2. Para encontrar el tiempo (en días) en que la mitad de la población se ha infectado resolvemos:

$$\begin{aligned}
P(t) &= 2.400\\
\frac{4.800}{15e^{-0{,}16094t} + 1} &= \frac{4.800}{2} = 2.400\\
\frac{2}{15e^{-0{,}16094t} + 1} &= 1\\
15e^{-0{,}16094t} + 1 &= 2\\
e^{-0{,}16094t} &= \frac{1}{15}\\
t &= -\frac{1}{0{,}16094}\ln\left(\frac{1}{15}\right) \approx 16{,}8 \text{ días.}
\end{aligned}$$

☑

Ejercicios

1. Las observaciones sobre el crecimiento de tumores en animales indican que el tamaño $y(t)$ del tumor en el tiempo t puede describirse mediante la ecuación diferencial
$$\frac{dy}{dt} = -ky \ln\left(\frac{y}{a}\right),$$
donde k y a son constantes positivas. Esta ecuación diferencial en ocasiones se conoce como *ley de crecimiento de Gompertz*. Resolver esta ecuación diferencial.
2. Demostrar que, si $k < 0$ y $N < 0$, toda solución de la ecuación logística con $P(0) \geq 0$ tiende a cero cuando $t \to \infty$.
3. Un modelo de poblaciones utilizado en las predicciones actuariales se basa en la ecuación de Gompertz
$$\frac{dP}{dt} = P(a - b\ln(P)),$$
donde a y b son constantes.
   a) Hallar $P(t)$ en la ecuación de Gompertz.
   b) Si $P(0) = P_0 > 0$, dé una fórmula para $P(t)$ en términos de a, b, P_0 y t.
   c) Describa el comportamiento de $P(t)$ cuando $t \to +\infty$. (Sugerencia: considere los casos para $b > 0$ y $b < 0$).
4. Suponga que una población satisface el modelo logístico con $k = 0{,}4$, $N = 100$ y $P(0) = 5$. Hallar el tamaño de la población para $t = 10$.
5. Suponga que una población satisface el modelo logístico con soporte 100 y que el tamaño de la población en $t = 0$ es 10 y 20 en $t = 1$. Hallar la tasa de crecimiento intrínseca.
6. La pesca del fletán del atlántico se modela mediante la ecuación logística con soporte de capacidad $80{,}5 \times 10^6$, medida en kilogramos, y tasa de crecimiento de 0,71 por año. Si la biomasa inicial es una cuarta parte del soporte de capacidad, hallar la biomasa un año después y el tiempo que se requiere para que la biomasa crezca a la mitad del soporte de capacidad.
7. Use un modelo logístico con soporte de 100×10^9, una población de 5×10^9 (observada en 1986) y una tasa de crecimiento del 2 % de la población cuando el tamaño de la población es de 5×10^9 para predecir el tamaño de la población de la tierra en el año 2.000.
8. Demostrar que para una población que satisface el modelo logístico, la máxima tasa de crecimiento de la población es $kN/4$, la cual se alcanza cuando el tamaño de la población es $N/2$.

9. Demostrar que cada escogencia de la constante k, la función

$$P = \frac{N}{1 + e^{-kt}}$$

es una solución de la ecuación logística.

10. Suponga que una población satisface una ecuación diferencial de tipo logística pero con tasa de crecimiento variable que depende de t:

$$\frac{dP}{dt} = k(t)P\left(1 - \frac{P}{N}\right), \quad P(0) = P_0.$$

Muestre que la solución viene dada por

$$P(t) = \frac{Np_0}{P_0 + (N - P_0)e^{-\int_0^t k(s)ds}}.$$

11. El área de la biología que trata con las tasas de crecimiento comparativas de diferentes cantidades biológicas se llama alometría. Sea $x(t)$ la tasa de crecimiento de una cantidad biológica A, y $y(t)$ la tasa de crecimiento de una cantidad biológica B. Suponga que ambas tasas de crecimiento son proporcionales

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} = \alpha\frac{1}{x}\frac{dx}{dt}.$$

Demostrar que la siguiente ley de alometría se satisface: $y = Kx^{\alpha}$, donde K es constante.

12. La tasa metabólica (TM) se define como la tasa de producción de calor por unidad de tiempo. La energía de los alimentos requerida en reposo y ayuno (la tasa metabólica basal) a través de una ventana de tiempo T está dada por

$$\text{TM} \times T.$$

Se sugiere que TM $= \rho S$ donde S es la superficie del área de cuerpo y de acuerdo a la ley alométrica TM $= kW^{\alpha}$ donde W es el peso del cuerpo.

a) Demostrar que para una vaca esférica TM $= k_s W^{2/3}$.
b) ¿Cuál sería la relación de ser una vaca cúbica? Es decir, ¿es α el mismo para una vaca esférica y cuál es la relación entre k_s y k_c?

13. Se tiene un animal hambriento y se supone que su pérdida de peso es proporcional a su tasa metabólica, digamos

$$\frac{dW}{dt} = -\mu\text{TM}.$$

a) Suponga que TM $= \frac{1}{3}W^{2/3}$ y $\mu = 1$. Hallar el peso de un animal de 25 kg luego de t días de dejar de comer.
b) Si la muerte por hambre ocurre luego de que el animal ha quemado el 50 % de su "sustancia corporal" (Ley de Chossat), ¿cuánto tarda en morir un animal dado el escenario anterior?

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. $y(t) = ae^{e^{-kt}c}$.
3. *a*) $p(t) = e^{\frac{a-e^{-bt-bc}}{b}}$.
   b) $p(t) = e^{\frac{a-ae^{-bt}}{b}} p_0 e^{-bt}$.
5. 468,4.
6. *a*) La biomasa en $t = 1$ año es $32{,}52 \times 10^6$kg.
   b) El tiempo para que la biomasa crezca la mitad del soporte es $\approx 1,56$ años.
13. *a*) El peso en t días es $W(t) = \left(-\frac{1}{9}t + \sqrt[3]{25}\right)^3$.
   b) $t_d = 9\sqrt[3]{25}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$.

1.3. Determinación de edades por el método del carbono 14

La teoría de la *datación por carbono* se basa en que el isótopo Carbono 14 se produce en la atmósfera por la acción de la radiación cósmica sobre el nitrógeno. El cociente entre la cantidad de ^{14}C y la cantidad de carbono ordinario presentes en la atmósfera es constante y, en consecuencia, la proporción de isótopo presente en todos los organismos vivos es la misma que en la atmósfera. Cuando un organismo muere, la absorción de ^{14}C cesa. Así, comparando la proporción de ^{14}C que hay en un fósil con la proporción constante encontrada en la atmósfera, es posible obtener una estimación razonable de su edad. El método usa además el hecho de que la vida media del ^{14}C radioactivo es de aproximadamente 5.600 años.

Ejemplo 3.4. *El isótopo radioactivo de plomo, 209 Pb, se desintegra en un instante cualquiera, con una rapidez proporcional a la cantidad presente en dicho instante y tiene una vida media de 3,3 horas. Si inicialmente hay 1 gramo de plomo, ¿cuánto tiempo transcurrirá para que se desintegre el* 90 % *de dicho elemento?*

Solución. Sea $A(t)$ la cantidad de plomo que queda en un instante cualquiera. La ecuación diferencial con condición inicial es:

$$\frac{dA}{dt} = kA, \qquad A(0) = 1 \text{ gramo.}$$

Como en el ejemplo 3.1, se tiene que $A(t) = Ce^{kt}$ donde notamos por la condición inicial que $C = 1$ y así $A(t) = e^{kt}$. Como el isótopo 209 Pb tiene una vida media de 3,3 horas, tenemos que $A(3{,}3h) = \frac{1}{2}$ gramos, entonces para evaluar k se debe resolver $\frac{1}{2} = e^{3{,}3k}$. Despejando k resulta

$$k = \frac{\ln(1/2)}{3{,}3} \approx -0{,}210045.$$

De esta forma, $A(t) = e^{-0{,}210045t}$.

Como se desintegra el 90 % de la cantidad inicial, entonces queda 10 % de la sustancia. Para hallar t se debe resolver $0{,}1 \cdot 1\text{gramos} = e^{-0{,}210045t}$. Despejando t resulta $t = \frac{\ln(0{,}1)}{-0{,}210045} \approx 10{,}96 \approx 11$ horas. Es decir, para que se desintegre pasan 11 horas. ☑

Ejemplo 3.5. *En una cueva de Sudáfrica se halló un cráneo humano junto con los restos de una hoguera. Los arqueólogos creen que la edad del cráneo es igual a la edad de la hoguera. Se ha determinado que solo queda 2 % de la cantidad original de carbono 14 en los restos de madera en la hoguera. Estime la edad del cráneo.*

Solución. Nuevamente, $A(t) = A_0e^{kt}$ donde $A(0) = A_0$ es la cantidad inicial. Cuando t =5.600 años, $A(5.600) = A_0/2$, de lo cual es posible determinar el valor de k como sigue:

$$\frac{A_0}{2} = A_0e^{5.600k},$$

luego, tomando logaritmo tenemos

$$5.600k = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2).$$

Finalmente,

$$k = -\frac{\ln(2)}{5.600} = -0{,}00012378.$$

Por lo tanto, $A(t) = A_0e^{-0{,}00012378t}$. Si queda el 2 % de la cantidad inicial entonces

$$\frac{2}{100}A_0 = A_0e^{-0{,}00012378t}$$

y despejamos t:

$$\ln\left(\frac{2}{100}\right) = -\,0{,}00012378t$$

$$t = -\,\frac{\ln(2/100)}{0{,}00012378} \approx 31.604{,}6 \approx 31.605 \text{ años.}$$

De esta forma determinamos que la edad del cráneo es de aproximadamente 31.605 años. ☑

Ejercicios

1. Se sabe que un material radioactivo se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier instante. Si inicialmente hay 150 mg de material y, después de tres años, se observa que el 10 % de la masa original se desintegró, determinar:
   a) Una expresión para la masa al momento t.
   b) El tiempo necesario para que se desintegre el 20 % de la masa original.
2. Un material radioactivo se desintegra tres quintos en 2.000 años. Determinar su vida media.
3. En los problemas del primer punto suponga que la razón de decaimiento de una sustancia radiactiva es proporcional a la cantidad de sustancia presente. La vida media de una sustancia radiactiva es el tiempo que tarda en desintegrarse la mitad de la sustancia.
   a) Si en un principio se tiene 80 g de una sustancia radiactiva y después de 2 días solo restan 20 g, ¿qué porcentaje de la cantidad original quedará después de 5 días?
   b) Si en un principio se tienen 400 g de una sustancia radiactiva y después de 10 años restan 100 g, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir para que solo queden 5 g?
4. El 209 Pb, isótopo radioactivo del plomo, se desintegra con una rapidez proporcional a la cantidad presente en cualquier tiempo t y tiene una vida media de 3,3 horas. Si al principio había 0,5 gramos de plomo, ¿cuánto tiempo debe transcurrir para que se desintegre 95 %?
5. Muchos creen que el sudario de Turín, que muestra un negativo de la imagen de un cuerpo de un humano crucificado, es la mortaja de Jesús de Nazaret. En 1988, el Vaticano otorgó autorización para que se fechara el carbono del manto. Tres laboratorios científicos independientes, que analizaron la tela, llegaron a la conclusión que tiene unos 600 años, edad que coincide con su aparición histórica.

Con esta edad determinar qué porcentaje de la cantidad original de ^{14}C queda en la tela en 1988.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *a*) $M(t) = 150e^{-0,18932t}$.
   b) 1,17 años.
2. 1.512,9 años.
3. *a*) 3,12 %
   b) 31 años 219 días.
4. 14,3 horas.
5. Queda el 92,8 % de ^{14}C.

2. Problemas de mezclas

Algunos problemas que involucran mezclas de fluidos dan lugar a plantear una ecuación diferencial lineal de primer orden que modele la cantidad de mezcla o la concentración de una sustancia en un fluido.

En los problemas se requiere determinar la cantidad $A(t)$ de una sustancia que hay en un tanque en cada instante t. La razón de cambio de la cantidad de la sustancia presente en el tanque es igual a la velocidad de entrada menos la velocidad de salida

$$\frac{dA}{dt} = (\text{Rapidez de entrada}) - (\text{Rapidez de salida})$$

$$\frac{dA}{dt} = R_1 - R_2, \tag{3.5}$$

donde

$$\text{Rapidez de entrada} = (\text{flujo de entrada}) \times (\text{concentración}).$$

Suponiendo que el flujo de entrada es igual al de salida, la concentración se halla dividiendo la cantidad $A(t)$ por el volumen de la mezcla que hay en el instante t. Así:

$$\text{Rapidez de salida} = (\text{flujo de salida}) \times (\text{concentración}).$$

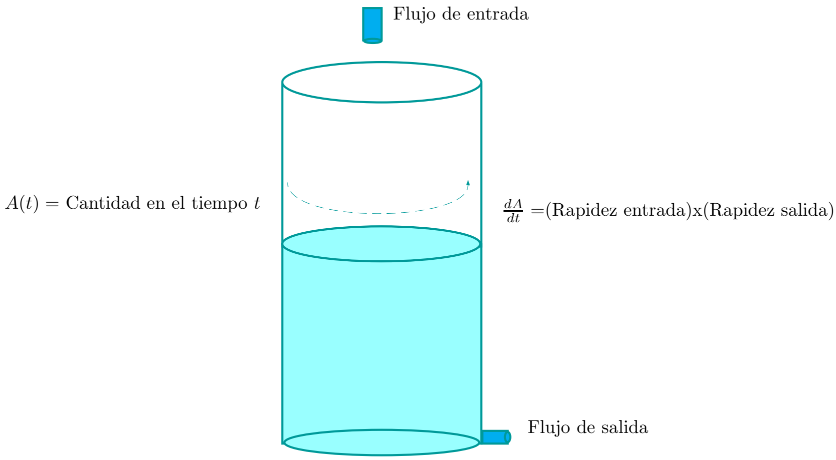


Figura 3.2: Diagrama de un problema de mezcla.

Ejemplo 3.6. *La corriente sanguínea lleva un medicamento hacia el interior de un órgano a razón de 3 cm^3/s y sale de él a la misma velocidad. Se sabe que el volumen del órgano es de 125 cm^3 y la concentración del medicamento que entra es de 0,2 g/cm^3. ¿Cuál es la concentración del medicamento en el órgano en el instante t, si inicialmente no había vestigio alguno del medicamento? ¿Cuándo la concentración será de 0,1 g/cm^3?*

Solución. Primero debemos determinar la rapidez con que un medicamento entra a un órgano y sabemos que el medicamento entra a una razón constante de 3 cm^3/seg. La concentración del medicamento que entra es de 0,2 g/cm^3, concluimos que la rapidez de entrada en el órgano es

$$R_1 = 3\frac{\text{cm}^3}{\text{seg}} \times 0{,}2\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = 0{,}6\frac{\text{g}}{\text{seg}}.$$

Ahora debemos determinar la rapidez de salida. Como el flujo de entrada es igual al de salida, la concentración es $A(t)/$(el volumen del órgano). Por lo tanto, la rapidez con que el medicamento sale del órgano es

$$R_2 = \frac{A(t)}{125}\frac{\text{g}}{\text{cm}^3} \times 3\frac{\text{cm}^3}{\text{seg}} = \frac{3A(t)}{125}\frac{\text{g}}{\text{seg}}.$$

En un principio no hay medicamento en el órgano, de modo que $A(0) = 0$ g, al sustituir R_1 y R_2 en (3.5) tenemos,

$$\begin{aligned}\frac{dA(t)}{dt} &= 0{,}6 - \frac{3A(t)}{125}\\ A(0) &= 0.\end{aligned}$$

Obtenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{dA}{dt} + \frac{3A}{125} = 0{,}6. \tag{3.6}$$

La ecuación (3.6) es lineal, donde $P(t) = \frac{3}{125}$ y $Q(t) = 0{,}6$, entonces podemos hallar el factor integrante sustituyendo en la fórmula (2.13)

$$\mu(t) = e^{\int \frac{3}{125} dt} = e^{\frac{3}{125}t}.$$

Reemplazando en la fórmula (2.14) tenemos:

$$\begin{aligned} A(t) &= e^{-\frac{3}{125}t} \left[\int 0{,}6 e^{\frac{3}{125}t} dt + c \right] \\ &= e^{-\frac{3}{125}t} \left[25 e^{\frac{3}{125}t} + c \right] \\ &= 25 + c e^{-\frac{3}{125}t}. \end{aligned}$$

Al usar la condición inicial $A(0) = 0$ para hallar la constante c, obtenemos

$$\begin{aligned} A(0) &= 25 + c = 0 \\ c &= -25. \end{aligned}$$

Luego,

$$A(t) = 25 - 25 e^{-\frac{3}{125}t}.$$

La cual es la cantidad de medicamento en el órgano en cada instante t. Para determinar la concentración, se divide la cantidad entre el volumen. Es decir,

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{A(t)}{125} = \frac{25 - 25 e^{-\frac{3}{125}t}}{125} \\ C(t) &= \frac{1 - 1 e^{-\frac{3}{125}t}}{5}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

La ecuación (3.7) es la concentración de medicamento en el órgano en cualquier instante t.

Para determinar en que momento t_0 la concentración es $0{,}1\ \text{g/cm}^3$ reemplazamos en (3.7)

$$0.1 = \frac{1 - e^{-\frac{3}{125}t_0}}{5}$$

despejemos t_0:

$$t_0 = \frac{-125 \ln |0{,}5|}{3} \approx 28{,}88 \approx 29.$$

En $t_0 \approx 29$ seg la concentración será de $0{,}1\ \text{g/cm}^3$. ☑

Ejemplo 3.7. *Una solución de ácido nítrico entra a una razón constante de 6 l/min en un tanque de gran tamaño que en un principio contenía 200 litros de una solución de ácido nítrico al 0,5 %. La solución dentro del tanque se mantiene bien revuelta y sale del tanque a razón de 8 l/min. Si la solución que entra en el tanque tiene ácido nítrico al 20 %, determinar el volumen de ácido nítrico en el tanque después de t minutos.*

Solución. Sea $V(t)$ el volumen de ácido nítrico en el tanque en cada instante de tiempo t. En problemas de esta clase la rapidez neta con que $V(t)$ cambia está dada por

$$\frac{dV}{dt} = R_1 - R_2, \tag{3.8}$$

donde R_1 es la rapidez de entrada y R_2 la rapidez de salida.

Primero debemos determinar la rapidez con que el ácido nítrico entra al tanque; sabemos que la solución entra a una razón constante de 6 l/min. La solución que entra en el tanque tiene ácido nítrico al 20 % y la concentración es $\frac{20}{100}$, con lo que concluimos que la rapidez de entrada en el tanque es

$$R_1 = 6\frac{1}{\min}\frac{20}{100} = \frac{6}{5}\,\frac{1}{\min}.$$

Ahora debemos determinar la rapidez de salida. La diferencia entre la razón de flujo de entrada y la razón de flujo de salida es $6 - 8 = -2$ litros/minuto, de modo que el volumen de fluido en el tanque después de t minutos es $(200 - 2t)$ litros. Por lo tanto, la rapidez con que el ácido nítrico sale del tanque es

$$R_2 = 8\frac{1}{\min}\left[\frac{V(t)}{200 - 2t}\right] = \frac{4V(t)}{100 - t}\frac{1}{\min}.$$

En un principio el tanque contenía 200 litros de una solución de ácido nítrico al 0,5 %, de modo que $V(0) = 200$ litros, es decir $\frac{0{,}5}{100}200 = 1$ litros. Al sustituir R_1 y R_2 en (3.8) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{6}{5} - \frac{4V}{100 - t}, \qquad V(0) = 1\text{l} \\ \frac{dV}{dt} + \frac{4V}{100 - t} &= \frac{6}{5}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

La ecuación (3.9) es lineal, con $P(t) = \frac{4}{100-t}$ y $Q(t) = \frac{6}{5}$, entonces podemos hallar el factor integrante sustituyendo en la fórmula (2.13):

$$\mu(t) = e^{\int \frac{4}{100-t}dt} = e^{-4\ln(100-t)} = (100 - t)^{-4}.$$

Reemplazamos la fórmula (2.14):

$$\begin{aligned}
V(t) &= \frac{1}{(100-t)^{-4}}\left[\int (100-t)^{-4}\frac{6}{5}dt + c\right]\\
&= \frac{1}{(100-t)^{-4}}\left[\frac{2(100-t)^{-3}}{5} + c\right]\\
&= 0{,}4(100-t) + c(100-t)^4.
\end{aligned}$$

Usamos la condición inicial $V(0) = 1$ para hallar la constante c:

$$V(0) = 0{,}4(100-0) + c(100-0)^4 = 1$$

y obtenemos:

$$\begin{aligned}
&40 + 10^8 c = 1\\
&c = -3{,}9 \times 10^{-7}.
\end{aligned}$$

Luego, $V(t) = 0{,}4(100-t) - (3{,}9 \times 10^{-7})(100-t)^4$. ☑

Ejercicios

1. Un tanque de 400 galones contiene inicialmente 200 galones de agua que contiene 2 partes por 1.000 millones en peso de una dioxina, una carcinógena extremadamente potente. Suponga que el agua que contiene 5 partes por 1.000 millones de dioxina fluye hacia arriba del tanque a razón de 4 galones por minuto. El agua en el tanque se mantiene bien mezclada y se retiran dos galones por minuto por el fondo del tanque. ¿Cuánta dioxina se encuentra en el tanque cuando está lleno?
2. Una cubeta de 5 galones está llena de agua pura. Suponga que empezamos a añadir sal a la cubeta a razón de $\frac{1}{4}$ de libra por minuto. Además, abrimos el grifo de manera que salga $\frac{1}{2}$ galón por minuto de la cubeta y agregamos agua pura para mantener llena la cubeta. Si la solución de agua salada está siempre bien mezclada, ¿cuál es la cantidad de sal en la cubeta después de...?
   a) 1 minuto.
   b) 10 minutos.
   c) 60 minutos.
3. A un tanque parcialmente lleno con 100 galones de salmuera y 10 lb de sal disuelta, le entra salmuera con 1/2 lb de sal por galón a razón de 6 gal/min. El contenido del tanque está bien mezclado y de él sale

a razón de 4 gal/min de solución. Calcular la cantidad de libras de sal que hay en el tanque a los 30 minutos.

4. Un depósito contiene 50 litros de una solución compuesta por 90 % de agua y 10 % de alcohol. Se vierte en el depósito, a razón de 4 l/min, una segunda solución que contiene 50 % de agua y 50 % de alcohol. Al mismo tiempo se vacía el depósito a razón de 5 l/min. Suponiendo que la solución se agita constantemente, calcular la cantidad de alcohol que queda después de 10 minutos.
5. Una piscina cuyo volumen es de 10.000 galones contiene agua con cloro al 0,01 %. A partir del instante $t = 0$, se bombea agua del servicio publico con cloro al 0,001 % hacia la piscina, a razón de 5 gal/min. El agua sale de la piscina con la misma razón. ¿Cuál es el porcentaje de cloro en la piscina después de 1 hora? ¿En qué momento el agua de la piscina tendrá 0,002 % de cloro?
6. La sangre conduce un medicamento a un órgano a razón de 3 cm^3/seg y sale con la misma razón. El órgano tiene un volumen líquido de 125 cm^3. Si la concentración del medicamento en la sangre que entra al órgano es de 0.2 g/cm^3. ¿Cuál es la concentración del medicamento en el órgano en el instante t, si inicialmente no había rastros de dicho medicamento? ¿En qué momento llegará la concentración del medicamento en el órgano a 0,1 g/cm^3?

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. $1{,}5 \times 10^{-6}$gal.
2. a) 0,237 lb.
   b) 1,58 lb.
   c) 2,49 lb.
3. $\approx$ 15,62 lb.
4. $\approx$ 26,55 l.
5. $\approx$ 210,72 min.
6. $\approx$ 28,81 s.

3. Problemas de temperatura: la ley de enfriamiento de Newton

La ley del enfriamiento de Newton dice que, en un cuerpo que se enfría, la rapidez con que la temperatura $T(t)$ cambia es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo y la temperatura constante T_m del medio que lo rodea. Esto es,

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \tag{3.10}$$

en donde k es una constante de proporcionalidad.

Ejemplo 3.8. *Un termómetro se saca de una habitación, donde la temperatura del aire es de* $70°F$*, al exterior, donde la temperatura es de* $10°F$*. Después de 1/2 minuto el termómetro marca* $50°F$*. ¿Cuánto marca el termómetro cuando* $t = 1$ *minuto? ¿Cuánto demorará el termómetro en alcanzar los* $15°F$*?*

Solución. Es claro que $T_m = 10°$F, de modo que reemplazamos en la ecuación (3.10):

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= k(T - 10) \qquad (3.11)\\ T(0) &= 70°\mathrm{F} \\ T\left(\frac{1}{2}\right) &= 50°\mathrm{F}. \end{aligned}$$

Se debe resolver la ecuación (3.11) con condiciones iniciales, la cual es lineal y tambien de variables separables. Empleando la técnica de resolución de ecuaciones de variables separables obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T-10} &= k\,dt \\ \int \frac{dT}{T-10} &= \int k\,dt \\ \ln |T - 10| &= kt + c_1 \\ T - 10 &= c_2 e^{kt}, \quad c_2 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Entonces $T = 10 + c_2 e^{kt}$.

Cuando $t = 0$, $T = 70°$F, de modo que $70 = 10 + c_2$, es decir, $c_2 = 60$ y, por lo tanto, $T = 10 + 60e^{kt}$. Ahora podemos hallar k ya que $T(1/2) = 50°$F

$$\begin{aligned} 50 &= 10 + 60e^{k\frac{1}{2}} \\ e^{\frac{1}{2}k} &= \frac{40}{60} \\ k &= 2\ln\left(\frac{2}{3}\right) \approx -0{,}81093. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$T(t) = 10 + 60e^{-0{,}81093t}.$$

Para $t = 1$ tenemos $T(1) = 10 + 60e^{-0{,}81093\cdot 1} = 36{,}66 \approx 37°\text{F}$. El termómetro marca 37°F cuando $t = 1$ minuto. Ahora debemos hallar cuánto se demora para alcanzar 15°F,

$$\begin{aligned} 15 =& 10 + 60e^{-0{,}81093t} \\ \frac{5}{60} =& e^{-0{,}81093t} \\ t =& \frac{\ln(1/12)}{-0{,}81093} = 3{,}06427 \approx 3{,}1 \text{ min.} \end{aligned}$$

Para alcanzar 15°F se demora 3,1 minutos. ☑

Ahora queremos formular un módelo matemático que describa el perfil de temperatura dentro de un edificio durante 24 horas como función de la temperatura exterior, el calor generado dentro del edificio y el calefactor o aire acondicionado.

Sea $T(t)$ la temperatura dentro del edificio en el instante t y veamos al edificio como un único comportamiento. La razón de cambio en la temperatura queda determinada por todos los factores que generan o disipan calor.

Factores que afectan la temperatura dentro del edificio:

- Calor generado por las personas, las luces y las máquinas dentro del edificio. Esto incrementa la temperatura y se denota por $H(t)$, que siempre es positiva.
- Calentamiento o enfriamiento proporcionado por calefacción o aire acondicionado. Esta razón de incremento (o decremento) de temperatura se denota por $U(t)$, que es positiva para la calefacción y negativa para el aire acondicionado. $H(t)$ y $U(t)$ están en términos de temperatura por unidad de tiempo.
- Efecto de la temperatura exterior $M(t)$ sobre la temperatura dentro del edificio.

El tercer factor lo podemos modelar mediante la ley de enfriamiento de Newton. Esto es: la razón de cambio de la temperatura $T(t)$ es proporcional a la diferencia entre la temperatura exterior $M(t)$ y la temperatura interior $T(t)$. Es decir,

$$\frac{dT}{dt} = K[M(t) - T(t)].$$

La constante depende de las propiedades físicas del edificio, como cantidad de puertas, ventanas y el tipo de aislamiento. Por lo tanto, el modelo matemático que describe el perfil de temperatura dentro de un edificio considerando estos factores que generan o disipan calor viene dado por la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = K[M(t) - T(t)] + H(t) + U(t), \tag{3.12}$$

donde

$$\frac{dT}{dt} + KT(t) = KM(t) + H(t) + U(t)$$

es una ecuación diferencial lineal con

$$\begin{aligned} p(t) &= K \\ Q(t) &= KM(t) + H(t) + U(t). \end{aligned}$$

El factor integrante es

$$\mu(t) = e^{\int K dt} = e^{Kt}.$$

Utilizando la fórmula (2.14) obtenemos:

$$T(t) = e^{-Kt}\left[\int e^{Kt}[KM(t) + H(t) + U(t)]dt + c\right]$$

y $\frac{1}{K}$ es la constante de tiempo para el edificio (sin calefacción o aire acondicionado).

Ejemplo 3.9. *En una calurosa mañana de sábado, cuando las personas trabajan dentro del edificio, el aire acondicionado mantiene la temperatura interior en* $24°$C*. A mediodía, el aire acondicionado se apaga y las personas se van a casa. La temperatura exterior es constante e igual a* $35°$C *durante el resto de la tarde. Si la constante de tiempo del edificio es de 4 horas, ¿cuál será la temperatura dentro del edificio a las* 2 *pm? ¿Y a las* 6 *pm? ¿En qué momento llegará la temperatura interior del edificio a* $27°$C*?*

Solución. Se tiene $M(t) = 35°$C, $T(0) = 24^0°$C, $H(t) = 0$, $U(t) = 0$, $\frac{1}{K} = 4$, por lo tanto tenemos que $K = \frac{1}{4}$. Hallemos $T(2)$. Reemplazamos en la ecuación:

$$T(t) = e^{-Kt}\left[\int e^{Kt}[KM(t) + H(t) + U(t)]dt + c\right]$$

obtenemos,

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{-\frac{1}{4}t}\left[\int e^{\frac{1}{4}t}\frac{1}{4}35dt + c\right] \\ T(t) &= e^{-\frac{1}{4}t}\left[e^{\frac{1}{4}t}35 + c\right] \\ T(t) &= 35 + ce^{-\frac{1}{4}t}. \end{aligned}$$

Como $T(0) = 24°\text{C}$, concluimos que

$$\begin{aligned}24 &= 35 + ce^{-\frac{1}{4}0}\\ c &= -11.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $T(t) = 35 - 11e^{-\frac{1}{4}t}$, donde reemplazando podemos hallar $T(2) = 35 - 11e^{-\frac{1}{4}2} = 28{,}32°\text{C}$.

La temperatura a las 2 pm es de 28,32°C. La temperatura a las 6 pm es de 32,54°C. Para hallar en qué momento t_0 la temperatura llega a 27°C reemplazamos en $T(t_0) = 35 - 11e^{-\frac{1}{4}t_0}$; es decir, $27 = 35 - 11e^{-\frac{1}{4}t_0}$; despejando t_0 obtenemos $t_0 = 1{:}16$ p.m. ☑

Ejemplo 3.10. *Se va a construir un almacén sin calefacción ni aire acondicionado. Según la cantidad de aislamiento, la constante de tiempo para este edificio puede variar de 1 a 5 horas. Para ilustrar el efecto del aislamiento sobre la temperatura dentro del almacén, suponga que la temperatura exterior varía como una onda sinusoidal, con un mínimo de* 16°C *a las* 2 *a.m. y un máximo de* 32°C *a las* 2 *p.m. Suponiendo que el término exponencial (que implica la temperatura inicial* T_0*) se ha extinguido, ¿cuál es la temperatura mínima dentro del edificio si la constante de tiempo es 1 hora? ¿Y si la constante de tiempo es 5 horas? ¿Cuál es la máxima temperatura dentro del edificio si la constante de tiempo es 1 hora? ¿Y si es 5 horas?*

Solución. Como $M(t)$ varía como una onda sinusoidal en un periodo de 24 horas, con un mínimo 16°C a las 2 a.m. y un máximo de 32°C a las 2 p.m. $t = 12$. Es decir.

$$M(t) = M_0 - B\cos(wt),$$

donde B es una constante positiva, M_0 es la temperatura exterior promedio:

$$M_0 = \frac{32+16}{2} = 24°\text{C} \;\text{ y }\; w = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}\frac{\text{radianes}}{\text{hora}}.$$

Además $U(t) = 0$ porque no hay calefacción ni aire acondicionado. Además, $H(t) = H_0 = 0$, pues no hay razón de calentamiento dentro del edificio. De la ecuación (3.12) tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= K\left[M_0 - B\cos(wt) - T(t)\right] + H_0\\ \frac{dT}{dt} + KT &= K\left[M_0 - B\cos(wt)\right] + H_0. \qquad (3.13)\end{aligned}$$

Llamemos a la temperatura promedio interior B_0, en este caso $B_0 = M_0 + \frac{H_0}{K}$. Reemplazamos en (3.13):

$$\frac{dT}{dt} + KT = K\left[B_0 - B\cos(wt)\right],$$

donde KB_0 representa el valor promedio diario de $KB_0 - KB\cos(wt)$; es decir,

$$KB_0 = \frac{1}{24}\int_0^{24} (KB_0 - KB\cos(wt))\,dt.$$

La solución de la ecuación es

$$T(t) = e^{-Kt}\left[\int e^{Kt}\,[KB_0 - KB\cos(wt)]\,dt + c\right]$$

$$T(t) = B_0 - \frac{B\left(\frac{K}{w}\right)\left(\sin(wt) + \frac{K}{w}\cos(wt)\right)}{1 + \left(\frac{K}{w}\right)^2} + ce^{-Kt}.$$

Para $t = 0$ y $T_0 = 16°C$, reemplazamos en la última ecuación:

$$16 = B_0 - \frac{B\left(\frac{K}{w}\right)^2}{1 + \left(\frac{K}{w}\right)^2} + c.$$

Por lo tanto,

$$c = 16 - B_0 + \frac{B\left(\frac{K}{w}\right)^2}{1 + \left(\frac{K}{w}\right)^2}.$$

Es decir,

$$T(t) = B_0 - \frac{B\left(\cos(wt) + \frac{w}{K}\sin(wt)\right)}{1 + \left(\frac{w}{t}\right)^2} + \left(16 - B_0 + \frac{B\left(\frac{K}{w}\right)^2}{1 + \left(\frac{K}{w}\right)^2}\right)e^{-Kt}.$$

Como $H_0 = 0$ y $B_0 = M_0$, cuando no hay razón de calentamiento adicional dentro del edificio $\left(H_0 = 0\right)$, la temperatura promedio interior B_0 es igual a la temperatura promedio exterior M_0. Por lo tanto, $B_0 = 24°C$. Como el término exponencial se ha extinguido, entonces $c = 0$. Luego, reemplazamos

$$T(t) = 24 - \frac{B\left(\frac{K}{w}\right)\left(\sin(wt) + \frac{K}{w}\cos(wt)\right)}{1 + \left(\frac{K}{w}\right)^2}.$$

Para hallar el valor de B tomamos

$$M(t) = M_0 + B\cos(wt),$$

ahora reemplazamos los valores de M_0 y w:

$$M(t) = 24 - B\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right).$$

Para $t = 0$ y $M(t) = 16$ se tiene $B = 8$. Por lo tanto,

$$T(t) = 24 - \frac{8\left(\frac{K}{w}\right)\left(\sin(wt) + \frac{K}{w}\cos(wt)\right)}{1 + \left(\frac{K}{w}\right)^2}.$$

Para hallar la temperatura mínima para $t = 0$, $\frac{1}{K} = 1$, se tiene $K = 1$ y tomamos $w = \frac{2\pi}{24}$ que es aproximadamente $\frac{1}{4}$. Reemplazando en la última ecuación obtenemos:

$$T(0) = 24 - \frac{8(4)^2}{1 + (4)^2} \approx 16{,}5^\circ\text{C};$$

para $\frac{1}{K} = 5$, se tiene $K = \frac{1}{5}$. La temperatura mínima es

$$T(0) = 24 - \frac{8\left(\frac{4}{5}\right)^2}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} =\approx 20{,}8^\circ\text{C}.$$

Para hallar la temperatura máxima $t = 12$, $\frac{1}{K} = 1$, se tiene $K = 1$

$$T(12) = 24 + \frac{8(4)^2}{1 + (4)^2} \approx 31{,}5^\circ\text{C}$$

para $\frac{1}{K} = 5$, se tiene $K = \frac{1}{5}$; la temperatura máxima es

$$T(12) = 24 + \frac{8\left(\frac{4}{5}\right)^2}{1 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} =\approx 27{,}1^\circ\text{C}.$$

Obtenemos así las respuestas a todas las preguntas. ☑

Ejemplo 3.11. *Durante el verano la temperatura dentro de una camioneta llega a* 55°C*, mientras que en el exterior es constante e igual a* 35°C*. Cuando la conductora entra a la camioneta, enciende el aire acondicionado con el termostato en* 16°C*. Si la constante de tiempo para la camioneta es* $\frac{1}{K} = 2$ *horas y para la camioneta con el aire acondicionado es* $\frac{1}{K_1} = \frac{1}{3}$ *hora, ¿en qué momento llegará la temperatura dentro de la camioneta a los* 27°C*?*

Solución. $\frac{1}{K_1}$ es la constante de tiempo con calefacción y aire acondicionado, donde $K_1 = K + K_u$. En la camioneta se instala un termostato que se utiliza para comparar la temperatura real dentro de la camioneta con una temperatura deseada T_D. Si la temperatura real es menor que la temperatura deseada, el calefactor comienza a funcionar y, en caso contrario, se desconecta. Si la temperatura real es mayor que la temperatura deseada, el aire acondicionado comienza a enfriar y en caso contrario se desconecta. La cantidad de calentamiento es proporcional a la diferencia de temperatura

$$U(t) = K_u \left[T_D - T(t)\right],$$

donde K_u es la constante de proporcionalidad (positiva). Así, $M(t) = 35°\mathrm{C}$, $T(t) = 55°\mathrm{C}$, $H(t) = 0$, $T_D = 16°\mathrm{C}$, $\frac{1}{K} = 2$. Entonces $K = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{K_1} = \frac{1}{3}$, luego $K_1 = 3$. Como $U(t) = K_u\left[T_D - T(t)\right]$, de la ecuación (3.12) se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} &= K\left[M(t) - T(t)\right] + K_u\left[T_D - T(t)\right]\\ \frac{dT}{dt} &+ T\left[K + K_u\right] = KM(t) + K_uT_D. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Vemos que para este ejemplo, la cantidad $p(t) = K$ es igual a $K + K_u$; por lo tanto,

$$\begin{aligned} K_1 &= K + K_u\\ 3 &= \frac{1}{2} + K_u\\ K_u &= \frac{5}{2}. \end{aligned}$$

Reemplazando en (3.14) obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt} + 3T &= \frac{1}{2}35 + \frac{5}{2}16\\ \frac{dT}{dt} + 3T &= \frac{115}{2}, \end{aligned}$$

la cual es una ecuación diferencial lineal. Su factor integrante es $\mu(t) = e^{3t}$, por lo tanto la solución es

$$T = e^{-3t}\left[\int e^{3t}\frac{115}{2}dt + c\right] = e^{-3t}\left[e^{3t}\frac{115}{6}dt + c\right] = \frac{115}{6} + ce^{-3t}.$$

Como $T(0) = 55$, tenemos:

$$55 = \frac{115}{6} + c$$

luego,

$$c = \frac{215}{6}$$

y

$$T(t) = \frac{115}{6} + \frac{215}{6}e^{-3t}.$$

Para hallar en qué momento t_0 la temperatura llegará a 27°C, reemplazamos en la última ecuación y despejamos t_0.

$$27 = \frac{115}{6} + \frac{215}{6}e^{-3t_0},$$

Obtenemos así que $t_0 = 0{,}5068$ horas, o equivalentemente $t_0 = 30{,}4$ minutos. ☑

Ejercicios

1. Un termómetro se lleva del interior de una habitación al exterior, donde la temperatura del aire es 60°F. Después de un minuto, el termómetro indica 58°F; cinco minutos después marca 32°F. ¿Cuál era la temperatura interior?
2. Una barra metálica pequeña, cuya temperatura inicial es de 25°F, se deja caer en un recipiente con agua hirviente cuya temperatura es de 212°F. ¿Cuánto tiempo tardará en alcanzar 100°F si se sabe que la temperatura aumentó 3°F en un segundo? ¿Cuánto tiempo tardará en llegar a 105°F?
3. Una taza de café caliente, inicialmente a 100°C, se enfría hasta 85°C en 5 minutos al estar en un cuarto con temperatura de 21°C. Usar solo la ley de enfriamiento de Newton y determinar el momento en que la temperatura del café estará a unos 55°C.
4. Una cerveza fría, inicialmente a 33°F, se calienta hasta 45°F en 3 minutos, en un cuarto con temperatura 65°F. ¿Qué tan caliente estará la cerveza si se deja ahí durante 10 minutos?
5. Una taza de té caliente está inicialmente a 190°F y se deja en un cuarto que tiene una temperatura ambiente de 75°F. Suponga que a partir del tiempo $t = 0$ se enfría a razón de 25°F por minuto.
   a) Suponga que se aplica la ley de Newton sobre el enfriamiento. Escribir un problema de valor inicial que modele la temperatura del té caliente.
   b) ¿Cuánto tiempo le toma al té caliente enfriarse a una temperatura de 120°F?

6. En una fría mañana de Bogotá con una temperatura ambiente de 10°C, se encontró un cadáver a las 10 a.m. El detective sacó un termómetro y midió la temperatura del cuerpo: 33°C. Luego salió a revisar la escena del crimen. Al regresar, a las 11 a.m. halló que la temperatura del cuerpo era de 32°C. ¿En qué momento ocurrió el homicidio? (Sugerencia: la temperatura normal del cuerpo es de 37°C.)
7. En una fresca mañana de sábado, mientras las personas trabajan en un edificio, el calefactor mantiene la temperatura interior en 21°C. A mediodía, el aparato se apaga y los empleados se van a casa. La temperatura exterior es constante e igual a 12°C durante el resto de la tarde. Si la constante de tiempo para el edificio es de 3 horas, ¿en qué momento llegará la temperatura del edificio a 16°C? Si algunas ventanas se dejan abiertas y la constante de tiempo se reduce a 2 horas, ¿en qué momento llegará la temperatura interior a 16°C?
8. Una cochera sin calefacción ni aire acondicionado tiene una constante de tiempo de 2 horas. Si la temperatura exterior varía como una onda sinusoidal con un mínimo de 50°F a las 2 a.m. y un máximo de 80°F a las 2 p.m. determinar los instantes en que el edificio alcanza su temperatura máxima y mínima, suponiendo que el término exponencial se extingue.
9. Un lunes temprano por la mañana, la temperatura en la sala de lectura ha descendido hasta 40°F, igual a la temperatura exterior. A las 7 a.m. el conserje enciende el calefactor con el termostato puesto en 70°F. La constante de tiempo para el edificio es $1/K = 2$ horas y la constante de tiempo para el edificio junto con su sistema de calentamiento es $1/K_1 = 1/2$ hora. Suponiendo que la temperatura exterior permanece constante, ¿cuál será la temperatura dentro de la sala de lectura a las 8 a.m? ¿En qué momento llegará la temperatura dentro de la sala a 65°F?

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. 71,516°F.
2.
   a) Para llegar a 100°F tarda 31,7 s.
   b) Para llegar a 105°F tarda 34,526 s.
3. 20,02 min.
4. 58,3°F.
5.
   a) $T = 75 + 115e^{-0,24512t}$.
   b) 3,82 min.
6.
   a) $T = 72 + 108e^{-0,26329t}$.

b) 5,13 min.
c) Murió a las 4 a.m. con 21 minutos.

4. Mecánica de Newton

La mecánica es el estudio del movimiento de los objetos y el efecto de las fuerzas que actúan sobre ellos. La mecánica de Newton, o clásica, trata del movimiento de los objetos comunes; es decir, de los objetos que son grandes en comparación con un átomo y lentos en comparación con la velocidad de la luz.

Un modelo de la mecánica de Newton se puede basar en las leyes del movimiento de Newton:

- En ausencia de fuerzas, un objeto (cuerpo) en reposo seguirá en reposo, y un cuerpo moviéndose a una velocidad constante en línea recta, lo continuará haciendo indefinidamente.
- Cuando un cuerpo es sujeto a una o más fuerzas externas, la razón de cambio temporal del momento del cuerpo es igual a la suma vectorial de las fuerzas externas que actúan sobre él.
- Cuando un cuerpo interactúa con otro, la fuerza del primer cuerpo sobre el segundo es igual en magnitud, pero opuesta en dirección, a la fuerza del segundo cuerpo sobre el primero.

La segunda ley de Newton, que solo se aplica a marcos de referencia inerciales, nos permite formular las ecuaciones de movimiento para un cuerpo. Podemos expresar la segunda ley de Newton como

$$\frac{dp}{dt} = F(t, x, v),$$

donde $F(t, x, v)$ es la fuerza resultante sobre el cuerpo en el instante t, posición x, velocidad v y $p(t)$ es el *momentum* del cuerpo en el instante t. El *momentum* es el producto de la masa del cuerpo y su velocidad, es decir,

$$p(t) = mv(t).$$

De este modo, podemos expresar la segunda ley de Newton como

$$m\frac{dv}{dt} = ma = F(t, x, v),$$

donde $a = \frac{dv}{dt}$ es la aceleración del cuerpo en el instante t.

En esta sección nos centraremos en situaciones donde la fuerza F no depende de x. Luego la ecuación de primer orden en $v(t)$ es

$$m\frac{dv}{dt} = ma = F(t, v). \tag{3.15}$$

Ejemplo 3.12. *Un objeto de masa 5 kg recibe una velocidad inicial hacia abajo de 50 m/s y luego se le permite caer bajo la influencia de la gravedad. Suponga que la fuerza en newtons debida a la resistencia del aire es $-10v$, donde v es la velocidad del objeto en m/s. Determinar la ecuación de movimiento del objeto. Si el objeto está inicialmente a 500 m sobre el suelo, determinar el momento en que el objeto golpeará el suelo (figura 3.3).*

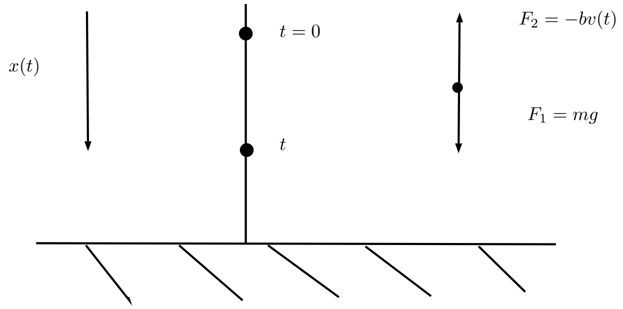


Figura 3.3: Caída libre.

Solución. Hay dos fuerzas actuando sobre el objeto: una fuerza constante debida al empuje hacia abajo de la gravedad y una fuerza debida a la resistencia del aire que es proporcional a la velocidad del objeto, que actuán en forma opuesta al movimiento del objeto; por lo tanto, el movimiento del objeto se realizará a lo largo de un eje vertical. En este eje, elegimos el origen como el punto donde el objeto fue lanzado inicialmente y definimos $x(t)$ como la distancia que ha caido el objeto hasta el instante t.

Las fuerzas que actúan sobre el objeto a lo largo de este eje se pueden expresar de la siguiente manera:

- La fuerza debida a la gravedad

  $$F_1 = mg,$$

  donde g es la aceleración de la gravedad en la superficie de la tierra.
- La fuerza producto de la resistencia del aire:

  $$F_2 = -bv(t).$$

  Aquí $b > 0$ es la constante de proporcionalidad y el signo negativo está presente dado que la resistencia del aire actúa en forma opuesta al movimiento del objeto.
- La fuerza neta que actúa en el objeto es:

$$F = F_1 + F_2 = mg - bv(t). \tag{3.16}$$

Ahora, utilizando la ecuación (3.15), y sustituyendo en (3.16) se obtiene:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - bv, \quad v(0) = v_0, \tag{3.17}$$

donde $m = 5$ kg, $v_0 = v(0) = 50\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $b = 10$, $g = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$. Reemplazamos en (3.17):

$$\begin{aligned}
&5\text{kg}\frac{dv}{dt} = 5\text{kg} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 10v(t)N\\
&\frac{dv}{dt} = \frac{5\text{kg}}{5\text{kg}} \cdot 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - \frac{10N}{5\text{kg}}v(t)\\
&\frac{dv}{dt} = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2} - 2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}v(t)\\
&\frac{dv}{dt} + 2v(t) = 9{,}81.
\end{aligned}$$

Utilizando el método de resolución para ecuaciones de tipo variables separables o lineal, hallamos la solución de esta ecuación diferencial:

$$v(t) = 4{,}905 + ce^{-2t},$$

como $v(0) = 50$ se obtiene, $c = 45{,}095$. Entonces,

$$v(t) = 4{,}905 + 45{,}095e^{-2t}.$$

Para hallar la ecuación de movimiento, primero resolvemos la ecuación diferencial:

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 4{,}905 + 45{,}095e^{-2t}$$

donde, integrando respecto a t concluimos:

$$x(t) = 4{,}905t - 22{,}55e^{-2t} + k. \tag{3.18}$$

Como hemos considerado que $x = 0$ cuando $t = 0$, reemplazando en (3.18) obtenemos $k = 22{,}55$. Por lo tanto, la ecuación de movimiento es

$$x(t) = 4{,}905t - 22{,}55e^{-2t} + 22{,}55.$$

Puesto que el objeto se liberó a 500 m sobre el suelo, podemos determinar el momento en que el objeto toca el suelo haciendo $x(t) = 500$:

$$500 = 4{,}905t - 22{,}55e^{-2t} + 22{,}55$$

despejando t obtenemos:

$$t - 4.59e^{-2t} = 97{,}3. \tag{3.19}$$

La ecuación (3.19) no se puede resolver de manera explícita en términos de t. Para resolverla tomamos el hecho que e^{-2t} será muy pequeño para t grande, es decir ignoramos el término e^{-2t} y obtenemos como aproximación $t \approx 97{,}3$ segundos. ☑

Ejemplo 3.13. *Un paracaidista cuya masa es de 75 kg se arroja de un helicóptero que vuela a 2.000 m sobre el suelo y cae hacia este bajo la influencia de la gravedad. Suponga que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del paracaidista, con la constante de proporcionalidad $b_1 = 30$ N.s/m si el paracaídas está cerrado, y $b_2 = 90$ N.s/m cuando está abierto. Si el paracaídas no se abre hasta que la velocidad del paracaidista es de 20 m/s. ¿Después de cuántos segundos llegará al suelo?*

Solución. Solo nos interesa el momento en que el paracaidista toca el suelo, no el lugar. Así, únicamente consideramos la componente vertical de su descenso. Para esto, necesitamos usar dos ecuaciones, una para describir el movimiento antes de abrir el paracaídas y la otra para aplicar después de abrirlo.

- Antes de abrirse: $m = 75$ kg, $v_0 = v(0) = 0$, $b = b_1 = 30$ N.s/m, $g = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{seg}^2}$ y $x(0) = 0$. Reemplazando en (3.15) tenemos:

$$75\frac{dv}{dt} = 75 \cdot 9{,}81 - 30v(t)$$
$$\frac{dv}{dt} = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{seg}^2} - 0{,}4v(t)$$
$$\frac{dv}{dt} + 0{,}4v(t) = 9{,}81.$$

Utilizando el método de resolución de ecuaciones de variables separables, o el hecho de que esta ecuación es lineal, resolvemos y hallamos que

$$v_1(t) = 24{,}53 + ce^{-0{,}4t}.$$

Como $v(0) = 0$, se obtiene que $c = -24{,}53$. Así obtenemos que $v_1(t) = 24{,}53 - 24{,}53e^{-0{,}4t}$ y

$$x_1(t) = 24{,}53t + 61{,}31e^{-0{,}4t} - 61{,}31.$$

Dado que el paracaídas se abre cuando se alcance la velocidad de 20 m/s, es decir la velocidad final, se puede hallar el tiempo que recorrió:

$$20 = v(t_1) = 24{,}53 - 24{,}53e^{-0{,}4t_1}.$$

Despejando de esta ecuación obtenemos el tiempo t_1:

$$t_1 = 4{,}22\text{s}.$$

Luego, el paracaidista ha caído

$$x_1(4{,}22) = 24{,}53(4{,}22) + 61{,}31e^{-0.4(4{,}22)} - 61{,}31 = 53{,}54$$

(en estos y otros cálculos, redondearemos nuestras cifras a dos cifras decimales). Ahora, al abrirse el paracaídas, el paracaidista está a 2.000-53,54=1.946,46 metros sobre el suelo.

- Consideramos el caso después de abrirse: $m = 75$ kg, $v_0 = v(0) = 20\frac{\text{m}}{\text{s}}$, $b_2 = 90N \cdot \text{seg/m}$, $g = 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ y $x_2(0) = 0$; por lo tanto,

$$x_2(t) = 8{,}12t + 9{,}85 - 9{,}85e^{-1{,}2t}.$$

Para determinar el momento en que el paracaidista llega al suelo, hacemos $x_2(t_2)$ =1.946,46 m, la altura a la que estaba el paracaidista al abrir su paracaídas. Esto da como resultado

$$\begin{aligned} 1.946{,}46 &= x_2(t_2) = 8{,}12t_2 + 9{,}85 - 9{,}85e^{-1{,}2t_2} \\ 238{,}5 &= t_2 - 1{,}21e^{-1{,}2t_2}. \end{aligned} \tag{3.20}$$

La ecuación (3.20) no se puede resolver de manera explícita en términos de t. Para resolverla tomamos el hecho de que $e^{-1{,}2t}$ será muy pequeño para t grande; esto significa que ignoramos el término $e^{-1{,}2t}$ y obtenemos como aproximación $t_2 \approx 238{,}5$ segundos. Por lo tanto, golpeará el suelo 238,5 s después de arrojarse desde el helicóptero. ☑

Ejercicios

1. Un objeto de 400 libras se libera desde el reposo a 500 pies sobre el suelo y se le permite caer bajo la influencia de la gravedad. Suponiendo que la fuerza en libras debida a la resistencia del aire es $-10v$, donde v es la velocidad del objeto en pies/s, determinar la ecuación de movimiento del objeto. ¿En qué momento tocará el objeto el suelo?
2. Un objeto de masa 8 kg recibe una velocidad inicial hacia abajo de 20 m/s y luego se le permite caer bajo la influencia de la gravedad. Suponga que la fuerza en newtons debida a la resistencia del aire es $-16v$, donde v es la velocidad del objeto en m/s. Determinar la ecuación de movimiento del objeto. Si el objeto está inicialmente a 100 m sobre el suelo, determinar el momento en que el objeto golpeará el suelo.

3. Un objeto con masa de 2 kg se lanza desde el reposo de una plataforma a 30 m sobre el agua y se deja caer bajo la influencia de la gravedad. Después de que el objeto golpea el agua, comienza a hundirse, con la gravedad jalándolo hacia abajo y una fuerza de flotación empujándolo hacia arriba. Suponga que la fuerza de gravedad es constante, que no hay cambios en el momento del objeto al golpear el agua, que la fuerza de flotación es $1/2$ del peso (peso = mg) y que la fuerza debida a la resistencia del aire o del agua es proporcional a la velocidad del objeto, con constante de proporcionalidad b_1 = 10N.seg/m en el aire y b_2 = 30N.s/m en el agua. Determinar la ecuación de movimiento del objeto. ¿Cuál es la velocidad del objeto al minuto después de ser arrojado?
4. Un paracaidista cuya masa es de 100 kg se arroja de un helicóptero que vuela a 3.000 m sobre el suelo y cae bajo la influencia de la gravedad. Suponga que la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a la velocidad del paracaidista, con la constante de proporcionalidad b_3 = 30 N.s/m cuando el paracaídas está cerrado y b_4 = 50 N.s/m cuando se abre. Si el paracaídas no se abre hasta 30 segundos después de que el paracaidista sale del helicóptero, ¿después de cuántos segundos llegará él al suelo? Si el paracaídas no se abre hasta 1 minuto después de que el paracaidista sale del helicóptero, ¿después de cuántos segundos llegará él al suelo?
5. Un objeto con masa de 100 kg se lanza desde el reposo de una lancha hacia el agua y se deja hundir. Aunque la gravedad jala el objeto hacia abajo, una fuerza de flotación de $1/40$ veces el peso del objeto lo empuja hacia arriba (peso = mg). Si suponemos que la resistencia del agua ejerce sobre el objeto una fuerza proporcional a la velocidad del objeto, con constante de proporcionalidad 10 N.s/m. Determinar la ecuación de movimiento del objeto. ¿Después de cuantos segundos ocurrirá que la velocidad del objeto es igual a 70 m/s?
6. Un objeto de masa m se libera desde el reposo y cae bajo la influencia de la gravedad. Si la magnitud de la fuerza debida a la resistencia del aire es bv^n, donde b y n son constantes positivas, determinar la velocidad límite del objeto (suponiendo que este límite existe). (Sugerencia: justifique que la existencia de una velocidad límite (finita) implica $\frac{dv}{dt} \to 0$ cuando $t \to +\infty$).
7. Cuando la velocidad v de un objeto es muy grande, la magnitud de la fuerza debida a la resistencia del aire es proporcional a v^2 y la fuerza actúa en dirección opuesta al movimiento del objeto. Un proyectil con masa de 3 kg se lanza desde el suelo hacia arriba y con una velocidad

inicial de 500 m/s. Si la magnitud de la fuerza debida a la resistencia del aire es $0{,}1v^2$, ¿en qué momento alcanzará el proyectil su máxima altura sobre el suelo?. ¿Cuál es esa máxima altura?

8. Si un objeto cae desde un aeroplano, la velocidad hacia abajo después de x seg es aproximadamente $y' = \frac{g}{k}(1 - e^{-kx})$ en donde $g = 9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ y $k = 0{,}2\mathrm{s}^{-1}$. $y(x)$ es la distancia que ha caído, por lo tanto $y(0) = 0$. Si este objeto cae desde una altura de 5.000 m, ¿cuánto le tomará llegar a la tierra?

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. $\approx 13{,}74$ s.
2. $\approx 488{,}45$ s.
3. La ecuación del movimiento es $y(t) = 1{,}96t + 0{,}392e^{-2t} - 0{,}392$ y la velocidad después de un minuto es $\approx 0{,}327$ m/s.
4. El paracaidista llega al suelo, si el paracaídas abre luego de 30 s, en $\approx 424{,}28$ s.
5. Ecuación de movimiento $x(t) = 96t + 960e^{0{,}1t} - 960$. En $t = 13{,}06$; el cuerpo alcanza la velocidad de 70 m/s.
6. $\sqrt[n]{\frac{mg}{b}}$.

5. Trayectorias ortogonales

Dos curvas se cortan en ángulo recto si las respectivas rectas tangentes, en los puntos de intersección, son rectas perpendiculares. En esta sección utilizaremos ecuaciones diferenciales de primer orden para establecer cuando dos familias de curvas son ortogonales; es decir, cuando cada curva de una familia corta a las curvas pertenecientes a la otra familia en un ángulo recto.

Definición 3.1. Cuando todas las curvas de una familia $F(x, y, c_1) = 0$ cortan ortogonalmente a todas las curvas de otra familia $G(x, y, c_2) = 0$, se dice que las familias son ortogonales. Esto significa que cada curva de la familia $F(x, y, c_1) = 0$ corta en ángulo recto a toda curva de la otra familia $G(x, y, c_2) = 0$.

Ejemplo 3.14. *En la figura 3.4 se ve que la familia de rectas que pasan por el origen $y = c_1x$ y la familia de círculos concéntricos con centro en el origen $x^2 + y^2 = c_2$ son trayectorias ortogonales.*

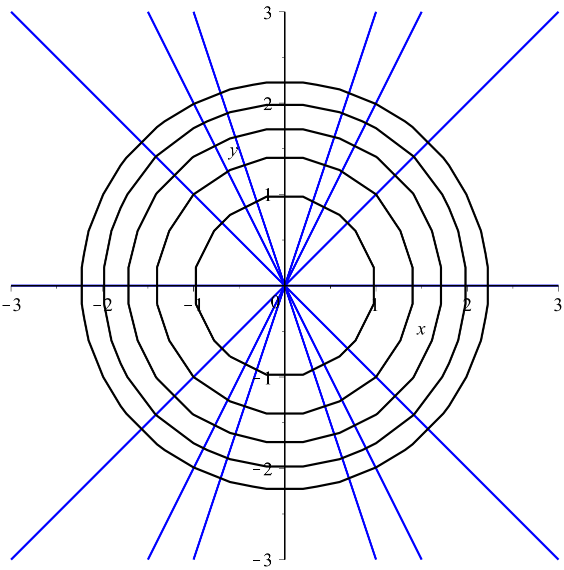


Figura 3.4: Círculos concéntricos y las rectas $y = c_1 x$.

Para encontrar las trayectorias ortogonales de una familia de curvas $F(x, y, c_1) = 0$*, se halla de esta ecuación (por diferenciación implícita) la derivada* $\frac{dy}{dx}$*, que usualmente se puede expresar de la forma siguente:*

$$\frac{dy}{dx} = r(x, y)$$

$\left(r(x, y) = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}\right.$*, en todo punto* (x, y) *de* $F(x, y, c_1) = 0$*, donde* $\left.\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0\right)$.

La ecuación de la familia ortogonal es dada, en forma diferencial, por la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{r(x, y)}.$$

- ▶ *Esta expresión está inspirada en el hecho que dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es* -1.

Al eliminar la constante c_1 *entre el par de ecuaciones*

$$F(x, y, c_1) = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{r(x, y)}$$

y resolver la ecuación diferencial resultante (en caso de ser posible), obtenemos una representación algebraica de la familia de curvas que es ortogonal a la familia $F(x, y, c_1) = 0$. ☑

Ejemplo 3.15. *Hallar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas* $y = e^{kx}$.

Solución. La derivada de $y = e^{kx}$ es

$$\frac{dy}{dx} = ke^{kx}.$$

Despejamos k de $y = e^{kx}$, $\ln(y) = kx$, $k = \frac{\ln(y)}{x}$, $x \neq 0$ y reemplazamos:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\ln(y)}{x} e^{\ln(y)} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y\ln(y)}{x}. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial de la familia ortogonal es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y\ln(y)}.$$

Esta última ecuación se resuelve por el método de resolución de ecuaciones de variables separables:

$$\begin{aligned} y\ln(y)\frac{dy}{dx} &= -x \\ \int y\ln(y)\frac{dy}{dx}dx &= \int -xdx \\ \frac{y^2\ln(y)}{2} - \frac{y^2}{4} &= -\frac{x^2}{2} + c_2 \\ 2y^2\ln(y) - y^2 + 2x^2 &= 4c_2 \\ 2y^2\ln(y) - y^2 + 2x^2 &= c_3, \end{aligned}$$

donde por conveniencia se reemplazó $4c_2$ por c_3. ☑

Ejemplo 3.16. *Hallar las trayectorias ortogonales a las curvas*

$$y = cx^n, \quad n \in \mathbb{R}. \tag{3.21}$$

Solución. La derivada de $y = cx^n$ es $y' = cnx^{n-1}$. Despejamos c de la ecuación (3.21) de modo que tenemos $c = yx^{-n}$, $x, y \neq 0$. Reemplazando concluimos que

$$\frac{dy}{dx} = yx^{-n}nx^{n-1} = nx^{-1}y.$$

La ecuación diferencial de la familia de curvas es $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{ny}$. Esta última ecuación es de variables separables, de donde tenemos

$$ny\frac{dy}{dx} = -x$$

integramos la igualdad para obtener la solución:

$$n\int y\frac{dy}{dx}dx = -\int x dx$$
$$n\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c.$$

Así, las trayectorias ortogonales vienen dadas por la fórmula $\frac{ny^2}{2} + \frac{x^2}{2} = c$.

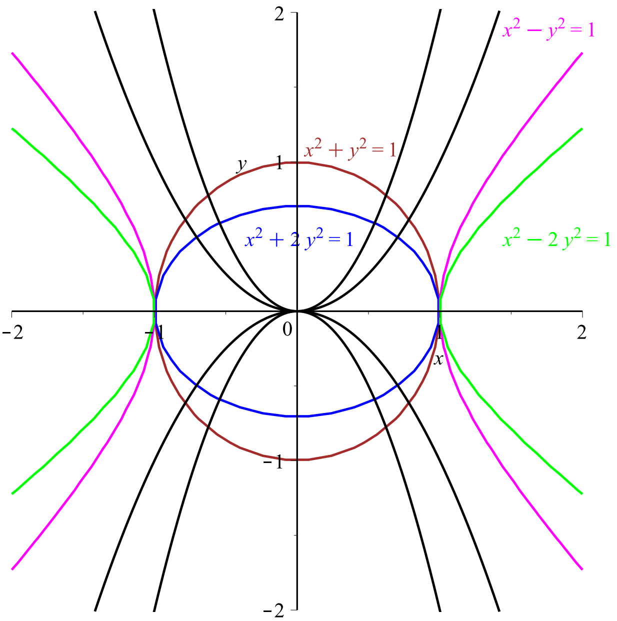


Figura 3.5: Las curvas $y = cx^2$ para $c = \pm 1, \pm 2$ y sus trayectorias ortogonales.

Note que las trayectorias ortogonales incluyen, circunferencias, elipses e hipérbolas. ☑

Ejercicios

1. Encontrar las trayectorias ortogonales a la familia:
   a) $x^2 + 2xy - y^2 = k$.
   b) $x^2 + (y - k)^2 = k^2$.
   c) $y = -x - 1 + c_1 e^x$.
   d) $y^2 = 4px$.
   e) $xy = kx - 1$.
   f) $y = \frac{1}{x + c_1}$.
   g) $y = x^k$, para $x > 0$, $\quad c > 0$.

   h) $xy = c$.
   i) $e^x \cos(y) = k$.
   j) $\sin(y) = ke^{x^2}$.
   k) $x^2 + xy + y^2 = k$.

2. Determinar el valor de a para que las familias de curvas $y^3 = C_1 x$ y $x^2 + ay^2 = C_2$ sean ortogonales.
3. Hallar las trayectorias ortogonales de cada una de las siguientes familias de curvas
   a) Una familia de líneas rectas que cortan el origen.
   b) Una familia de círculos con radio variable, centradas en el eje x y pasando a través del origen.
   c) Una familia de elipses con centros en el origen y vértices en $(\pm 1, 0)$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *a*) $x^2 - 2xy - y^2 = c$.
   b) $x^2 + y^2 = cx$.
   d) $2x^2 + y^2 = c$.
   e) $x^3 + 3y = c$.
   i) $e^y \sin(y) = c$.
   j) $x = \cos^2(y)$.
3. *a*) $x^2 + y^2 = c$.
   b) $x^2 + y^2 = cy$.
   c) $x^2 = ce^{x^2+y^2}$.

Capítulo *cuatro*

Ecuaciones diferenciales lineales de orden superior

En este capítulo presentamos algunos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales lineales de orden mayor o igual a dos.

Como vimos anteriormente una ecuación diferencial de orden n lineal es una ecuación de la forma:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

- Si $g(x) \equiv 0$ la ecuación diferencial es llamada *homogénea*, en caso contrario se dice que es *no homogénea*.
- Si las funciones $a_i(x)$ para todo $i = 1, 2, \cdots, n$ son constantes; es decir, $a_i(x) \equiv a_i \in \mathbb{R}$ para $0 \leq i \leq n$, entonces se dice que la ecuación lineal es de *coeficientes constantes*.

Estudiaremos los métodos más conocidos y de mayor utilidad para hallar soluciones de ecuaciones diferenciales como las antes mencionadas. El caso más sencillo de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior, es el de ecuaciones diferenciales homogéneas con coeficientes constantes. El método de resolución de este tipo de ecuaciones se reduce a la factorización de polinomios de orden n con los coeficientes dados en la ecuación diferencial. El caso de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes no homogéneas se resolverá primero mediante el llamado *método de los coeficientes indeterminados*, aplicable solo para ciertos términos no homogéneos, y luego usando el *método de reducción de orden* y *variación de parámetros*, que a diferencia del método de coeficientes indeterminados, pueden ser usados para hallar soluciones de ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes no constantes.

A diferencia de las ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes, las soluciones de otras clases de ecuaciones dependerán de al menos una solución conocida de dicha ecuación (o una solución de la ecuación homogénea asociada), la construcción de la solución general en este caso se justificará mediante el llamado *principio de superposición*.

1. Teoría preliminar

Antes de mostrar las técnicas de resolución de ecuaciones lineales de orden superior daremos los resultados teóricos que garantizan que dichas técnicas son aplicables, y que las eventuales soluciones son únicas. Comenzaremos con el teorema de existencia y unicidad de soluciones para estas ecuaciones cuya demostración se puede ver en [16].

Teorema 4.1 (Existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones lineales de orden n). *Dada la ecuación diferencial lineal de orden n,*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x),$$

supongamos que $g(x)$, $a_i(x)$, con $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, son funciones continuas en un intervalo (a, b), que contiene al punto x_0 y $a_n(x) \neq 0$ en (a, b). Entonces, para cualquier elección de los valores iniciales $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, existe una única solución $y(x)$ en todo el intervalo (a, b) del problema con valor inicial

$$y(x_0) = y_0, \;\; y'(x_0) = y_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}.$$

Obs Desde el punto de vista geométrico, la unicidad en el teorema permite afirmar que dos curvas solución que pasan por el mismo punto deben ser idénticas en todo intervalo (a, b).

Ejemplo 4.1. *Considere la ecuación diferencial*

$$y'' - y = 0.$$

1. *Demostrar que todas las funciones de la forma $y(x) = \alpha e^x$ son soluciones de dicha ecuación.*
2. *Demostrar que todas las funciones de la forma $y(x) = \alpha e^{-x}$ son soluciones de dicha ecuación.*
3. *Demostrar que todas las funciones de la forma $y(x) = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x}$ son soluciones de dicha ecuación.*

Solución. Primero notemos que $a_2(x) \equiv 1$ y $a_0(x) \equiv -1$ son funciones continuas, de modo que del teorema de existencia y unicidad (teorema 4.1), la ecuación $y'' - y = 0$ tiene solución. Consideremos $y(x) = \alpha e^x$, luego $y''(x) = \alpha e^x$ y así tenemos que $y(x) = \alpha e^x$ es una solución de la ecuación lo que comprueba 1. Para $y(x) = \alpha e^{-x}$, tenemos que $y''(x) = \alpha e^{-x}$, de manera que esta función también es una solución de la ecuación, de donde tenemos 2. Para demostrar 3, notemos que para $y(x) = \alpha_1 e^x + \alpha_2 e^{-x}$ también se satisface que $y(x) = y''(x)$, por lo cual $y'' - y = 0$, es decir, se satisface la ecuación para esta función. ☑

El ejemplo anterior muestra que dada una solución $y(x)$ de una ecuación diferencial homogénea, entonces todo múltiplo de ella, $\alpha y(x)$ también lo es, incluso, dadas dos soluciones diferentes $y_1(x)$ y $y_2(x)$, toda combinación lineal de ellas también es solución de la ecuación. Lo anterior nos lleva a preguntar cuando dos (o más) soluciones de una ecuación diferencial son *realmente* diferentes, para lo cual usaremos las siguientes nociones:

Definición 4.1 (Dependencia lineal). Un conjunto $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ de funciones definidas en un intervalo I se dice linealmente dependiente en I, si existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, no todas iguales a 0, tales que

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n \equiv 0.$$

Es decir,

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

para todo x en el intervalo I. Por otro lado, si todas las constantes son iguales a cero, se dice que $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ es un conjunto linealmente independiente.

Definición 4.2 (Wronskiano). Dadas las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ se define su wronskiano como el determinante:

$$W[f_1, f_2, \cdots, f_n](x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \cdots & f_n(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \cdots & f_n'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)}(x) & f_2^{(n-1)}(x) & \cdots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}.$$

El wronskiano es una herramienta muy útil para determinar si un conjunto de funciones es linealmente independiente o linealmente dependiente. Los siguientes resultados relacionan ambas nociones (ver [16] para sus demostraciones).

Proposición 4.2. *Si un conjunto de funciones $\{f_1, \ldots, f_n\}$ continuas con derivadas de orden n continuas es linealmente dependiente en un intervalo (a, b), entonces el wronskiano es idénticamente cero en (a, b).*

La proposición anterior nos da condiciones necesarias para la dependencia lineal de un conjunto de funciones, pero esta condición no es suficiente. Si el wronskiano de un conjunto de funciones es idénticamente cero en (a, b) no podemos concluir que el conjunto es linealmente dependiente.

Ejemplo 4.2. *Sea $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = x|x|$ y consideremos un intervalo abierto I que contenga al punto $x = 0$. El wronskiano de $\{f_1, f_2\}$ es*

$$W[f_1, f_2](x) = \begin{vmatrix} x^2 & x|x| \\ 2x & x|x|' + |x| \end{vmatrix} = x^3|x|' + x^2|x| - 2x^2|x|.$$

Cuando $x > 0$, $|x| = x$ y $|x|' = x' = 1$. Así, el wronskiano queda $x^3 + x^3 - 2x^3 = 0$. Cuando $x = 0$, $|x| = x = 0$ y de nuevo el wronskiano es 0.

Para $x < 0$, $|x| = -x$ y $|x|' = -x' = -1$. El wronskiano en este caso es $x^3(-1) - x^3 + 2x^3 = 0$. Por lo tanto, el wronskiano es idénticamente cero en un *intervalo que contiene al punto $x = 0$. Sin embargo, estas funciones son linealmente independientes en I. En efecto, consideremos la combinación lineal*

$$c_1x^2 + c_2x|x| = 0.$$

Si $x = 1$ entonces $c_1 = c_2$ y, si $x = -1$, entonces $c_1 = -c_2$. Luego la única solución es $c_1 = c_2 = 0$. Es decir, $\{x^2, x|x|\}$ es un conjunto linealmente independiente en el intervalo I. ☑

Condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto de funciones $\{f_1, \ldots, f_n\}$ sea linealmente independiente en I vienen dadas mediante el llamado *grammiano* del conjunto $\{f_1, \ldots, f_n\}$ (ver p. 131).

Para un conjunto de funciones que son soluciones de una ecuación diferencial lineal de orden n homogénea, el wronskiano sí aporta condiciones necesarias y suficientes para independencia lineal de estas funciones.

Proposición 4.3. *Si cada función $y_1, y_2, \ldots, y_n$ es una solución de la ecuación diferencial lineal de orden n homogénea*

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

en un intervalo $I = [a, b]$, entonces el wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x)$ o es idénticamente cero en el intervalo I o no es cero para cualquier $x \in I$.

Deduciremos una expresión para el wronskiano de dos soluciones de una ecuación diferencial lineal de orden 2 homogénea:

Sean y_1 y y_2 soluciones de la ecuación diferencial lineal de orden 2 homogénea $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$. Por el teorema de existencia y unicidad sus derivadas de primer y segundo orden existen, además

$$W[y_1, y_2](x) = y_1y_2' - y_2y_1'.$$

Ahora, derivamos esta igualdad:

$$\frac{dW[y_1, y_2](x)}{dx} = y_1y_2'' - y_2y_1'', \tag{4.1}$$

donde se cumple que

$$a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0$$

y

$$a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0.$$

Despejemos y_1'' y y_2'' de estas igualdades:

$$
\begin{aligned}
y_1'' &= -\frac{a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1}{a_2(x)}\\
y_2'' &= -\frac{a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2}{a_2(x)}
\end{aligned}
$$

y sustituyendo esto en (4.1) tenemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{dW[y_1, y_2](x)}{dx} &= -\frac{a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2}{a_2(x)}y_1 + \frac{a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1}{a_2(x)}y_2\\
&= -\frac{a_1(x)(y_2'y_1 - y_1'y_2)}{a_2(x)}\\
&= -\frac{a_1(x)}{a_2(x)}W[y_1, y_2](x).
\end{aligned}
$$

Es decir, obtenemos la ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden

$$\frac{dW[y_1, y_2](x)}{dx} + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}W[y_1, y_2](x) = 0,$$

cuya solución es

$$W[y_1, y_2](x) = Ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}, \quad C \text{ constante.}$$

Esta expresión para el wronskiano de dos soluciones de una diferencial lineal de segundo orden homogénea es llamada *fórmula de Abel* y permite demostrar el siguiente resultado para el caso particular $n = 2$.

Proposición 4.4. *Un conjunto de soluciones $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ de la ecuación diferencial lineal de orden n homogénea*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

es linealmente independiente en un intervalo I, si y solo si, el wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x)$ no es idénticamente cero en el intervalo I.

Definición 4.3 (Conjunto fundamental de soluciones). Las soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación diferencial

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

forman un conjunto fundamental de soluciones en I, si

$$W[y_1, y_2, \cdots, y_n](x) \neq 0.$$

El hecho de tener un conjunto fundamental de soluciones es importante por los siguientes resultados cuyas demostraciones se pueden ver en [17].

Proposición 4.5. *Si $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ en un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

y si y es cualquier otra solución de esta ecuación diferencial, entonces existen constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n.$$

Es decir, un conjunto fundamental de soluciones es realmente una base para el espacio vectorial de todas las soluciones de una ecuación lineal homogénea de orden n. De ahí que

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

reciba el nombre de *solución general* de tal ecuación.

Corolario 4.6. *Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones en I de*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. *$\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones en I.*
2. *$y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes en I.*
3. *El wronskiano $W[y_1, y_2, \ldots, y_n](x) \neq 0$ en I.*

Ejemplo 4.3. *Determinar si las soluciones $y_1(x) = e^{-x}\cos(2x)$, $y_2(x) = e^{-x}\sin(2x)$ de la ecuación diferencial $y''+2y'+5y = 0$ son linealmente dependientes en el intervalo $(0, 1)$.*

Solución. Para determinar si son linealmente independientes hallamos el wronskiano de y_1 y y_2

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x) =& \begin{vmatrix} e^{-x}\cos(2x) & e^{-x}\sin(2x) \\ -e^{-x}\cos(2x) - 2e^{-x}\sin(2x) & -e^{-x}\sin(2x) + 2e^{-x}\cos(2x) \end{vmatrix} \\ =& 2e^{-2x}. \end{aligned}$$

Note que $2e^{-2x}$ es diferente de cero en todo el conjunto de los números reales; por lo tanto, del corolario anterior $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto linealmente independiente. ☑

Ahora consideraremos el caso de diferentes soluciones de una ecuación diferencial con distintos coeficientes no homogéneos. En este caso tenemos el siguiente importante resultado.

Teorema 4.7 (Principio de superposición). *Sea y_1 una solución de la ecuación diferencial*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g_1(x)$$

y sea y_2 una solución de la ecuación diferencial

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g_2(x),$$

entonces para cualquier par de constantes c_1 y c_2, la función $c_1y_1 + c_2y_2$ es una solución de la ecuación diferencial

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = c_1g_1(x) + c_2g_2(x).$$

Consideremos la ecuación diferencial

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x) \tag{4.2}$$

y sea Y una solución particular de esta ecuación. Sean $\{y_1, y_2\}$ el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea correspondiente

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{4.3}$$

Veamos que toda solución de (4.2) se escribe de la forma

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + Y, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Primero veamos que y, dada como en (4.4), es una solución (4.2) para cualquier escogencia de $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$:

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2' + Y', \qquad y' = c_1y_1'' + c_2y_2'' + Y''.$$

Sustituimos esto en (4.2):

$$\begin{aligned}
&a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y\\
=&a_2(x)(c_1y_1'' + c_2y_2'' + Y'') + a_1(x)(c_1y_1' + c_2y_2' + Y') + a_0(x)(c_1y_1 + c_2y_2 + Y)\\
=&a_2(x)Y'' + a_1(x)Y' + a_0(x)Y + c_2(a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2)\\
&+ c_1(a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1)
\end{aligned}$$

$=f(x)+0+0$
$=f(x).$

Por lo tanto, $y = c_1y_1 + c_2y_2 + Y$ es una solución de (4.2). Ahora veamos que toda solución de (4.2) es de la forma (4.4). Supongamos que y es una solución de (4.2) y demostremos que $y - Y$ es una solución de (4.3) y, por lo tanto, $y - Y$ está en el conjunto fundamental generado por $\{y_1, y_2\}$; es decir,

$$y - Y = c_1y_1 + c_2y_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

En efecto, reemplacemos $y - Y$ en (4.2)

$$\begin{aligned} &a_2(x)(y-Y)'' + a_1(x)(y-Y)' + a_0(x)(y-Y) \\ &\quad = a_2(x)(y''-Y'') + a_1(x)(y'-Y') + a_0(x)(y-Y) \\ &\quad = a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y - (a_2(x)Y'' + a_1(x)Y' + a_0(x)Y) \\ &\quad = f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Así, $y - Y$ es una solución de (4.3).

Hemos mostrado que toda solución de una ecuación diferencial lineal no homogénea de orden 2 se escribe como la solución general de la ecuación diferencial homogénea correspondiente más una solución particular de ecuación diferencial no homogénea. Este hecho es cierto para EDO lineales no homogéneas de orden n como muestra la siguiente proposición:

Proposición 4.8. *La solución general de la ecuación diferencial*

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

se puede escribir como

$$y(x) = c_1y_1(x) + \cdots + c_ny_n(x) + Y(x),$$

donde $c_1y_1 + \cdots + c_ny_n$ es la solución general de la ecuación homogénea correspondiente

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

y Y es una solución particular de la ecuación no homogénea.

Así, para obtener la solución de una ecuación diferencial lineal no homogénea

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

se realizan los siguientes dos pasos:

- Encontramos la solución general y_h de la ecuación homogénea:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0.$$

- Encontramos una solución particular y_p de la ecuación no homogénea

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

De donde se tiene entonces que la solución general y_g de la ecuación no homogénea viene dada por

$$y_g = y_h + y_p.$$

Ejemplo 4.4. *Dada la ecuación diferencial $y'' - 2y' + 5y = 0$.*

1. *Determinar si $y_1(x) = e^x\cos(2x)$ y $y_2(x) = e^x\sin(2x)$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación dada.*
2. *Determinar una solución general de la ecuación diferencial.*
3. *Determinar la solución que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.*

Solución. 1. Hallamos el wronskiano de y_1 y y_2,

$$\begin{aligned} W[y_1, y_2](x) =& \begin{vmatrix} e^x\cos(2x) & e^x\sin(2x) \\ e^x\cos(2x) - 2e^x\sin(2x) & e^x\sin(2x) + 2e^x\cos(2x) \end{vmatrix} \\ =& 2e^{2x}. \end{aligned}$$

Como $2e^{2x}$ es diferente de cero para todos los reales, entonces y_1, y_2 son linealmente independientes.

2. Para determinar una solución general de la ecuación diferencial, en primer lugar sustituimos y_1 y y_2 en $y'' - 2y' + 5y = 0$ para determinar si son soluciones particulares de la ecuación. De ahí, obtenemos las identidades:

$$\begin{aligned} 3e^x\cos(2x) + 4e^x\sin(2x) + 2e^x\cos(2x) - 4e^x\sin(2x) - 5e^x\cos(2x) =& 0 \\ 4e^x\cos(2x) - 3e^x\sin(2x) - 4e^x\cos(2x) - 2e^x\sin(2x) + 5e^x\sin(2x) =& 0. \end{aligned}$$

Es decir, y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial, las cuales son linealmente independientes en todos los reales (ninguna es múltiplo escalar de la otra en $\mathbb{R}$). Por lo tanto, por el corolario 4.6, $\{e^x\cos(2x), e^x\sin(2x)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones en $\mathbb{R}$, de modo que una solución general es

$$y(x) = c_1 e^x\cos(2x) + c_2 e^x\sin(2x).$$

3. Con las condiciones iniciales $y(0) = 2, \;\; y'(0) = 0$ podemos determinar una solución particular. Sustituyendo en la ecuación diferencial y en su derivada tenemos:

$$\begin{aligned} 2 =& c_1 \\ 0 =& c_1 + 2c_2. \end{aligned}$$

Donde $c_1 = 2$ y $c_2 = -1$. Por lo tanto, la solución que satisface las condiciones iniciales es

$$y(x) = 2e^x \cos(2x) - 1e^x \sin(2x).$$

☑

Ejercicios

1. En los siguientes cuatro problemas, cada familia de funciones es la solución general de la ecuación diferencial en el intervalo indicado. Determinar un miembro de la familia que sea solución del problema del valor inicial:
   a) $y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$; $(-\infty, \infty)$; $y'' - y = 0$, $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
   b) $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-x}$; $(-\infty, \infty)$; $y'' - 3y' - 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
   c) $y(x) = c_1 x + c_2 x \ln(x)$; $(0, \infty)$; $x^2 y'' - xy' + y = 0$, $y(1) = 3, y'(1) = -1$.
   d) $y(x) = c_1 + c_2 \cos(x) + c_3 \sin(x)$; $(-\infty, \infty)$; $y''' + y' = 0$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2, y''(\pi) = -1$.
2. Si $y(x) = c_1 + c_2 x^2$ es una familia biparamétrica de soluciones de $xy'' - y' = 0$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$, demostrar que las constantes c_1 y c_2 no se pueden determinar de tal manera que un miembro de la familia satisfaga las condiciones $y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1$. Explicar por qué esto no contradice el teorema 4.1.
3. Determinar dos miembros de la familia de soluciones en el ejercicio anterior que satisfagan las condiciones iniciales $y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0$.
4. En los ejercicios a) y b) determinar un intervalo con centro $x = 0$, para el cual el problema de valor inicial tenga una solución única.
   a) $(x - 2)y'' + 3y = x, \;\; y(0) = 0, y'(0) = 1$.
   b) $y'' + (\tan(x))y = e^x, \;\; y(0) = 1, y'(0) = 0$.
5. Usar el teorema 4.1 para analizar la existencia y unicidad de una solución de la ecuación diferencial que satisfaga las condiciones iniciales $y(1) = y_0, \;\; y'(1) = y_1$, donde y_0 y y_1 son constantes reales.

a) $(1+x^2)y''+xy'-y=\tan(x)$.

b) $e^x y''-\frac{y'}{x-3}+y=\ln(x)$.

6. Determinar si se aplica el teorema 4.1. En caso afirmativo, analice las conclusiones que pueden extraerse. En caso negativo, explique por qué:

   a) $y''+yy'=x^2-1;\ \ y(0)=1,\ \ y'(0)=-1$.

   b) $(1-t)x''+tx'-2=t\sin(t);\ \ x(0)=1,\ \ x'(0)=1$.

7. Sabiendo que $y(x)=e^{2x}$ es una solución de la ecuación diferencial

$$(2x+1)y''-4(x+1)y'+4y=0,$$

   encontrar la otra solución linealmente independiente. Escribir la solución general.

8. (*Grammiano*). Un conjunto de funciones $\{f_1,\ldots,f_n\}$ cada una continua en un intervalo $I=[a,b]$ es linealmente dependiente en I, si y solo si

$$G[f_1,\ldots,f_n]=\begin{vmatrix} \int_a^b f_1^2(x)dx & \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx & \ldots & \int_a^b f_1(x)f_n(x)dx \\ \int_a^b f_2(x)f_1(x)dx & \int_a^b f_2^2(x)dx & \ldots & \int_a^b f_2(x)f_n(x)dx \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ \int_a^b f_n(x)f_1(x)dx & \int_a^b f_n(x)f_2(x)dx & \ldots & \int_a^b f_n^2(x)dx \end{vmatrix}$$

   es igual a 0 en I. Este determinante se llama el grammiano del conjunto $\{f_1,\ldots,f_n\}$.

   a) Demostrar que e^x y e^{2x} son linealmente independientes en $[-1,1]$.

   b) Demostrar que x y $|x|$ son linealmente independientes en $[-1,1]$.

9. Determinar si las funciones y_1 y y_2 son linealmente independientes en el intervalo $(0,1)$. Calcular además el wronskiano $W[y_1,y_2](x)$:

   a) $y_1(x)=e^{-x}\cos(2x),\quad y_2(x)=e^{-x}\sin(2x)$.

   b) $y_1(x)=xe^{2x},\quad y_2(x)=e^{2x}$.

   c) $y_1(x)=x^2\cos(\ln|x|),\quad y_2(x)=x^2\sin(\ln|x|)$.

   d) $y_1(x)=0,\quad y_2(x)=e^x$.

   e) $y_1(x)=e^{px},\quad y_2(x)=-e^{qx},\ p\neq q$.

10. En los siguientes tres problemas verificar si las funciones y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial dada. También determinar una solución general de la ecuación dada y determinar la solución que satisface las condiciones iniciales:

    a) $x^2y''-2y=0;\quad y_1(x)=x^2,\quad y_2(x)=x^{-1};\ \ y(1)=-2;$ $y'(1)=-7$.

b) $y'' - 5y' + 6y = 0; \quad y_1(x) = e^{2x},\ y_2(x) = e^{3x};\ y(0) = -1;$ $y'(0) = -4.$

c) $ty'' - (t+2)y' + 2y = 0; \quad y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = t^2 + 2t + 2;$ $y(1) = 0; \quad y'(1) = 1.$

11. Sean $y_1(x) = x^3$ y $y_2(x) = |x^3|$, ¿son y_1 y y_2 linealmente independientes en los siguientes intervalos?

 a) $[0, \infty)$.

 b) $(-\infty, 0)$.

 c) $(-\infty, \infty)$.

 d) Calcular el wronskiano $W[y_1, y_2](x)$ en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

12. Encontrar las regiones donde el teorema de existencia y unicidad garantiza la unicidad para el problema de Cauchy:

$$y'' + 3xy' + x^3y = e^x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

13. Dado que $y_1(x) = \cos(x)$ es una solución de $y'' - y' + y = \sin(x)$, y $y_2(x) = e^{2x}/3$ es una solución de $y'' - y' + y = e^{2x}$, determinar las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:

 a) $y'' - y' + y = 5\sin(x)$.

 b) $y'' - y' + y = \sin(x) - 3e^{2x}$.

 c) $y'' - y' + y = 4\sin(x) + 18e^{2x}$.

14. Dado que $1+x$, $1+2x$ y $1+3x^2$ son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$, determinar la solución de esta ecuación que satisface $y(1) = 1, y'(1) = 0$.

15. Demostrar que el conjunto todas las soluciones de la ecuación diferencial

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0$$

 es un espacio vectorial.

16. Demostrar que si $y_p(x)$ es una solución de $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y = g(x)$, entonces $Ay_p(x)$, con A constante, es una solución de $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y = Ag(x)$.

17. Si $y_p(x) = u(x) + iv(x)$, $(i = \sqrt{-1})$ es una solución particular de $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y = R(x) + iS(x)$, donde $a_i(x)$ son funciones reales, entonces:

 a) La parte real de $y_p(x)$; esto es $u(x)$, es una solución de $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y = R(x)$.

 b) La parte imaginaria de $y_p(x)$; esto es $v(x)$, es una solución de $a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_0(x)y = S(x)$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *b*) $y(x) = \frac{3}{3}e^{4x} + \frac{2}{5}e^{-x}$.
   c) $y(x) = 3x - 4x \ln|x|$.
   d) $y(x) = 1 + \cos(x) - 2\sin(x)$.
4. *a*) $(-\infty, 2)$ o $(2, \infty)$.
9. *b*) Linealmente independiente.
   c) Linealmente independiente.
   d) Linealmente dependiente.
10. *a*) $y(x) = -3x^2 + x^{-1}$.
    c) $y(x) = 5e^{t-1} - t^2 - 2t - 2$.
11. *b*) No son linealmente independientes.
    d) 0.
13. *b*) $y(x) = \cos(x) - e^{2x}$.
    c) $y(x) = 4\cos(x) + 6e^{2x}$.

2. Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

En esta sección mostraremos la técnica para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de la forma

$$a_n y^n + a_{n-1}y^{n-1} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \text{ con } a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}. \quad (4.5)$$

Sabemos que la solución de una ecuación diferencial de primer orden de la forma $y' + ay = 0$ es $y(x) = ce^{-ax}$, entonces podemos generalizar este resultado para la ecuación (4.5). Para resolver esta ecuación es necesario determinar n soluciones linealmente independientes.

Comenzaremos suponiendo que la ecuación tiene una solución de la forma $y(x) = e^{mx}$. El problema se reduce a encontrar los valores del exponente m que hace que las funciones $y(x) = e^{mx}$ sean soluciones de la ecuación. Así,

$$y(x) = e^{mx}, \quad y'(x) = me^{mx}, \quad y''(x) = m^2e^{mx}, \ldots, y^n(x) = m^n e^{mx}.$$

Sustituyendo en la ecuación tenemos

$$\begin{aligned}
&a_n m^n e^{mx} + a_{n-1}m^{n-1}e^{mx} + \cdots + a_1 me^{mx} + a_0 e^{mx} = 0,\\
&(a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1 me^{mx} + a_0)e^{mx} = 0,\\
&a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0 = 0.
\end{aligned}$$

Esta última ecuación es llamada *ecuación auxiliar* (asociada a la ecuación diferencial). Los exponentes buscados son las raíces del *polinomio característico*:

$$p(m) = a_n m^n + a_{n-1}m^{n-1} + \cdots + a_1 m + a_0$$

del cual podemos tener varios casos:

Caso I. El polinomio característico tiene n raíces reales simples y distintas: $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Por lo tanto, tenemos n soluciones fundamentales de la ecuación:

$$y_1(x) = e^{m_1 x}, \quad y_2(x) = e^{m_2 x}, \ldots, y_n(x) = e^{m_n x}.$$

Puede verificarse que el wronskiano es no nulo para todo $x \in \mathbb{R}$. Por la definición 4.3 se puede concluir que es un conjunto fundamental de soluciones de modo que la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \quad \cdots \quad + C_n e^{m_n x}.$$

Caso II. Las raíces del polinomio son reales pero algunas con multiplicidad mayor que uno. Primero supongamos que tenemos una ecuación de segundo orden $ay'' + by' + cy = 0$, cuyo polinomio característico tiene dos raíces iguales, entonces $y_1(x) = e^{mx}$ es una solución; para encontrar la otra utilizamos el método de reducción de orden (el cual se deduce en detalle en la p. 142), con la fórmula $y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2} dx$ en este caso $p(x) = \frac{b}{a}$ y $m = \frac{-b}{2a}$ ya que $b^2 - 4ac = 0$. Sustituyendo en la ecuación obtenemos,

$$y_2(x) = e^{mx} \int \frac{e^{-\int \frac{b}{a}dx}}{\left(e^{-\frac{b}{2a}x}\right)^2} dx;$$

calculando la integral obtenemos $y_2(x) = xe^{mx}$. Estas dos soluciones son linealmente independientes y la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx}.$$

Para la ecuación (4.5), si la multiplicidad de la raíz es n, se obtienen n soluciones linealmente independientes. Así, la solución general viene dada por

$$y(x) = C_1 e^{mx} + C_2 x e^{mx} + \cdots + C_n x^{n-1} e^{mx}.$$

Caso III. El polinomio tiene un par de raíces complejas conjugadas:

$$m_1 = a + ib,$$

$$m_2 = a - ib.$$

Las soluciones fundamentales son $y_1(x) = e^{(a+ib)x}$, $y_2(x) = e^{(a-ib)x}$. Puede tomarse la expresión de estas exponenciales según la fórmula de Euler:

$$e^{(a+ib)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}[\cos(bx) + i\sin(bx)].$$

De esta forma podemos escribir las soluciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
&C_1e^{\alpha x}[\cos(bx) + i\sin(bx)] + C_2e^{\alpha x}[\cos(-bx) + i\sin(-bx)]\\
&= C_1e^{\alpha x}[\cos(bx) + i\sin(bx)] + C_2e^{\alpha x}[\cos(bx) - i\sin(bx)]\\
&= e^{\alpha x}[(C_1 + C_2)\cos(bx) + (iC_1 - iC_2)\sin(bx)]\\
&= e^{\alpha x}[K_1\cos(bx) + K_2\sin(bx)].
\end{aligned}$$

Si la multiplicidad de la raíz compleja es r, la solución general es

$$\begin{aligned}
y =& e^{\alpha x}[K_1\cos(bx) + K_2\sin(bx) + x(K_3\cos(bx) + K_4\sin(bx))\\
&+ \cdots + x^{r-1}(K_{2r-1}\cos(bx) + K_{2r}\sin(bx))].
\end{aligned}$$

Ejemplo 4.5. *Determinar la solución general de la ecuación diferencial:*

1. $y''' - 6y'' - y' + 6y = 0$.
2. $4y'' + 20y' + 25y = 0$.
3. $y''' - y'' + y' + 3y = 0$.

Solución. 1. Si tratamos de hallar la solución de la forma $y(x) = e^{mx}$, entonces esto nos conduce a hallar las raíces de la ecuación auxiliar

$$m^3 - 6m^2 - m + 6 = 0.$$

Factorizando la ecuación anterior obtenemos $(m-6)(m-1)(m+1) = 0$. Por lo tanto, las raíces de la ecuación auxiliar son 6,1 y -1, de modo que tres soluciones fundamentales de la ecuación son e^{6x}, e^x y e^{-x}, y como sabemos estas funciones forman un conjunto fundamental de soluciones, por lo tanto solución general es

$$y(x) = c_1e^{6x} + c_2e^x + c_3e^{-x}.$$

2. Si tratamos de hallar la solución de la forma $y(x) = e^{mx}$, esto se reduce a hallar las raíces de la ecuación auxiliar

$$4m^2 + 20m + 25 = 0.$$

La ecuación anterior se reescribe como $(2m+5)(2m+5)=0$. Luego, $-\frac{5}{2}$ es una raíz con multiplicidad dos, de modo que las dos soluciones fundamentales son $e^{-\frac{5}{2}x}$ y $xe^{-\frac{5}{2}x}$. Luego la solución general es

$$y(x) = c_1 e^{-\frac{5}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{5}{2}x}.$$

3. La ecuación auxiliar en este caso es

$$m^3 - m^2 + m + 3 = 0,$$

la cual se factoriza como $(m+1)(m^2-2m+3)=0$. Por lo tanto las raíces de la ecuación auxiliar son:

$$\begin{aligned} m_1 &= -1 \\ m_2 &= \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} = 1 \pm i\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Aquí $\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{2}$, así

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} \cos(\sqrt{2}x) + c_3 e^{x} \sin(\sqrt{2}x)$$

es la solución general.

☑

Ejercicios

1. Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas:
   a) $3y'' + 11y' - 7y = 0$.
   b) $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0$.
   c) $y''' + y'' + 3y' - 5y = 0$.
   d) $4y'' + 4y' + 6y = 0$.
   e) $4y'' - 4y' + 26y = 0$.
   f) $y'' + 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
   g) $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$.
   h) $y''' - y'' + y' + 3y = 0$.
   i) $y''' + 2y'' - 5y' - 6y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$.
   j) $y''' - 4y'' + 7y' - 6y = 0$; $y(0) = y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$.
   k) $y'' + 16y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$.
   l) $y^{(4)} + y''' + 3y'' = 0$.
   m) $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$.
   n) $y'' + y' + 2y = 0$; $y(0) = y'(0) = 0$.
   ñ) $y'' - 2y' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

o) $y'' - 2y' + 2y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(\pi) = 1.$

2. Examinar la ecuación de segundo orden con coeficientes constantes $y'' + by' + cy = 0$. Si $y(x)$ es una solución de la ecuación describa qué condiciones deben satisfacer b y c para que $\lim_{x\to\infty} y(x) = 0$.
3. Para ver el efecto de cambiar el parámetro b en el problema con valores iniciales

$$y'' + by' + 4y = 0; \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0,$$

resolver el problema para $b = 5.4$ y 2 y bosquejar las soluciones.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *d*) $y(x) = c_1 e^{-\frac{x}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right) + c_2 e^{-\frac{x}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{5}}{2}x\right).$

   g) $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x.$

   i) $y(x) = -\frac{1}{5}e^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x} + e^{-x}.$

   k) $y(x) = -\frac{1}{2}\sin(4x) + 2\cos(4x).$

   m) $y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 e^{-x} + c_4 x e^{-x}.$

   n) $y(x) = 0.$

   o) $y(x) = e^x \cos(x) - \frac{(e^\pi + 1)}{e^\pi} e^x \sin(x).$

3. Ecuaciones diferenciales no homogéneas

En esta, y las siguientes secciones, nos dedicaremos a hallar una solución particular de una ecuación diferencial lineal de orden superior no homogénea.

3.1. Método de coeficientes indeterminados

Primero estudiaremos el *método de los coeficientes indeterminados* que nos permite hallar de una forma directa una solución particular de una ecuación diferencial lineal no homogénea con coeficientes constantes. La técnica consiste en suponer una forma particular de dicha solución $y_p(x)$, la cual dependerá directamente de la forma del término no homogéneo; por ejemplo, si el término no homogéneo es $g(x)$, la forma de la correspondiente solución particular podría ser $y_p(x) = \alpha g(x)$. Así, al sustituir $\alpha g(x)$ en la ecuación obtendremos un sistema de ecuaciones algebraico que nos permitirá determinar α.

A modo de ejemplo, consideremos la ecuación

$$y'' + 2y' + y = e^x.$$

Dado que $g(x) = e^x$, entonces la función "candidata" a ser solución particular de la ecuación tendrá la forma $y_p(x) = \alpha e^x$. Ahora debemos determinar el coeficiente α; para ello derivamos esta función y sustituimos en la ecuación:

$$\alpha e^x + 2\alpha e^x + \alpha e^x = e^x,$$

de donde concluimos que el coeficiente es $\alpha = \frac{1}{4}$, y por tanto la solución particular de la ecuación es

$$y_p(x) = \frac{1}{4}e^x.$$

Debido a la naturaleza del método, este es útil en el caso de coeficientes constantes y términos no homogéneos particulares. Así que en este caso solo consideraremos términos no homogéneos $g(x)$ de los de la forma dada en la tabla 4.1.

$\mathbf{g(x)}$	$\mathbf{y_p(x)}$
$p_n(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$	$x^s P_n(x) = x^s(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)$
$ae^{\alpha x}$	$x^s A e^{\alpha x}$
$a\cos(\beta x) + b\sin(\beta x)$	$x^s(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x))$
$p_n(x)e^{\alpha x}$	$x^s(A_n x^n + \cdots + A_1 x + A_0)e^{\alpha x}$
$p_n(x)\cos(\beta x) + q_m(x)\sin(\beta x)$, donde, $q_m(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$.	$x^s\{P_N(x)\cos(\beta x) + Q_N(x)\sin(\beta x)\}$, donde $Q_N(x) = B_N x^N + \cdots + B_1 x + B_0$ y $N = \text{máx}(m, n)$.
$ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + be^{\alpha x}\sin(\beta x)$	$x^s(Ae^{\alpha x}\cos(\beta x) + Be^{\alpha x}\sin(\beta x))$
$e^{\alpha x}[p_n(x)\cos(\beta x) + q_m(x)\sin(\beta x)]$	$x^s\{e^{\alpha x}(P_N(x)\cos(\beta x) + Q_N(x)\sin(\beta x))\}$, y $N = \text{máx}(m, n)$.

Tabla 4.1: Coeficiente no homogéneo para el método de los coeficientes indeterminados y la correspondiente forma de la solución particular. Aquí el entero no negativo s es el menor entero tal que ningún término de la solución y_p sea solución de la ecuación homogénea.

Ejemplo 4.6. *Determinar una solución general de la ecuación:*

1. $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.
2. $y'' + 5y' + 6y = \text{sen}(x) - \cos(2x)$.

Solución. 1. Primero resolvemos la ecuación homogénea $y'' - 4y' + 4y = 0$ y obtenemos como solución

$$y_h(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}.$$

Observe que $g(x) = xe^{2x}$ es del tipo 4, es decir $y_p(x) = x^s(Ax + B)e^{2x}$ donde $s = 2$ ya que el término Axe^{2x} es parte de solución de la homogénea por lo tanto,

$$y_p(x) = x^2(Ax + B)e^{2x}.$$

Para determinar A y B derivamos dos veces y remplazamos en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}&(4Ax^3 + (12A + 4B)x^2 + (6A + 8B)x + 2B\\&- 4(2Ax^3 + (3A + 2B)x^2 + 2Bx) + 4(Ax^3 + Bx^2))e^{2x} = xe^{2x}.\end{aligned}$$

Simplificando tenemos,

$$\begin{aligned}&(4A - 8A + 4A)x^3 + (12A + 4B - 12A - 8B + 4B)x^2\\&+ (6A - 8B + 8B)x + 2B = x\end{aligned}$$

de donde concluimos que

$$A = \frac{1}{6} \quad \text{y} \quad B = 0.$$

Por lo tanto, $y_p(x) = \frac{1}{6}x^3e^{2x}$, es decir la solución general es

$$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x}.$$

2. Primero resolvemos la ecuación homogénea $y'' + 5y' + 6y = 0$ y obtenemos como solución

$$y_h(x) = c_1e^{-3x} + c_2e^{-2x}.$$

En este caso $g(x) = \sin(x) - \cos(2x)$ que no es de las formas dadas en la tabla 4.1, pero es la suma de dos de tales términos. Entonces utilizamos el principio de superposición y consideramos por separado las ecuaciones:

$$y'' + 5y' + 6y = \sin(x), \tag{4.6}$$

$$y'' + 5y' + 6y = -\cos(2x). \tag{4.7}$$

Para resolver la ecuación (4.6), $g_1(x) = \sin(x)$, es decir,

$$y_{p_1}(x) = x^s[A\cos(x) + B\sin(x)]$$

donde tomamos $s = 0$, puesto que $y_{p_1}(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$ no es una solución de la ecuación homogénea; por lo tanto, la forma de la solución particular para esta ecuación no homogénea viene dada por $y_{p_1}(x) = A\cos(x) + B\sin(x)$. Para determinar A y B derivamos dos veces y remplazamos en la ecuación diferencial:

$$\begin{aligned}-A\cos(x) - B\sin(x) - 5A\sin(x) + 5B\cos(x) + 6A\cos(x) + 6B\sin(x)\\ = \sin(x).\end{aligned}$$

Simplificando tenemos

$$5A\cos(x) + 5B\cos(x) - 5A\sin(x) + 5B\sin(x) = \sin(x)$$

y concluimos que

$$A = -\frac{1}{10} \quad \text{y} \quad B = \frac{1}{10}.$$

Por lo tanto, $y_{p_1}(x) = -\frac{1}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x)$. Ahora resolvemos la ecuación (4.7) para la cual $g_2(x) = -\cos(2x)$; es decir,

$$y_{p_2}(x) = x^s[C\cos(2x) + D\sin(2x)],$$

donde $s = 0$, ya que para este valor y_{p_2} no es una solución de la ecuación homogénea; por lo tanto,

$$y_{p_2}(x) = C\cos(2x) + D\sin(2x).$$

Para determinar C y D derivamos dos veces y reemplazamos en la ecuación diferencial.

$$\begin{aligned}&-4C\cos(2x) - 4D\sin(2x) - 10C\sin(2x) + 10D\cos(2x)\\ &+ 6C\cos(2x) + 6D\sin(2x) = -\cos(2x).\end{aligned}$$

Simplificando tenemos

$$2C\cos(2x) + 2D\sin(2x) - 10C\sin(2x) + 10D\cos(2x) = -\cos(2x)$$

y concluimos que

$$C = -\frac{1}{52} \quad \text{y} \quad D = -\frac{5}{52}.$$

Por lo tanto: $y_{p_2}(x) = -\frac{1}{52}\cos(2x) - \frac{5}{52}\sin(2x)$, es decir, la solución general es

$$y(x) = C_1e^{-3x} + C_2e^{-2x} - \frac{1}{10}\cos(x) + \frac{1}{10}\sin(x) - \frac{1}{52}\cos(2x) - \frac{5}{52}\sin(2x).$$

☑

Ejercicios

1. Determinar una solución general de la ecuación diferencial dada:
   a) $y'' - 8y' + 16y = 6xe^{4x} + 2 + 16x + 16x^2$.
   b) $y'' + 4y' + 3y = -e^{-x}(2 + 8x); \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$.
   c) $y'' - y' - 2y = \cos(x) - \sin(2x); \quad y(0) = -\frac{7}{20}, \quad y'(0) = \frac{1}{5}$.
   d) $y'' - 4y' + 4y = x^2e^{2x} - e^{2x}$.
   e) $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}(1 + x)$.
   f) $y'' + 2y' + y = x^2 + 1 - e^x; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$.
   g) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos(2x)$.
   h) $y''' + 8y'' = -6x^2 + 9x + 2$
   i) $y'' + y' + \frac{1}{4}y = e^x(\sin(3x) - \cos(3x))$.
   j) $y'' + 5y' - 6y = 10e^{2x}; \quad y(0) = y'(0) = 1$.
   k) $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$.
   l) $y'' + 3y' - 2y = e^{-2x}((4 + 20x)\cos(3x) + (26 - 32x)\sin(3x))$.
   m) $y^{(4)} - y'' = 4x + 2xe^{-x}$.
   n) $y''' + 8y = 2x - 5 + 8e^{-2x}; \quad y(0) = -5, \quad y'(0) = 3, \quad y''(0) = -4$.
   ñ) $y'' - 4y' + 4y = 6e^{2x} + 25\sin(x); \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 3$.
   o) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(1 + x) + e^{2x}(\cos(x) - \sin(x)) + 3e^{3x} + 1 + x$.
2. (*Método del anulador*). El método del anulador permite justificar el método de coeficientes indeterminados. Sabemos que una ecuación diferencial se puede escribir de la forma $a_nD^ny + a_{n-1}D^{n-1}y + \cdots + a_1Dy + a_0y = g(x)$ donde $D^k = \frac{d^ky}{dx^k}$, $k = 1, 2, \cdots, n$. Cuando nos convenga, representaremos también la ecuación de la forma $Ly(x) = g(x)$, donde L representa el operador diferencial lineal de orden n: $L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0$. Se dice que L es un anulador si $L(f(x)) = 0$. Ejemplo, D^n anula a cada una de las funciones $1, x, x^2, \cdots, x^{n-1}$; $(D-\alpha)^n$anula las funciones $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2e^{\alpha x}, \cdots, x^{n-1}e^{\alpha x}$; $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2+\beta^2)]^n$ anula las funciones $e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $xe^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $x^2e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $\cdots$, $x^{n-1}e^{\alpha x}\cos(\beta x)$, $e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $xe^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $x^2e^{\alpha x}\sin(\beta x)$, $\cdots$, $x^{n-1}e^{\alpha x}\sin(\beta x)$.
   Para ilustrar, considere la ecuación.
$$(D - 1)(D + 1)[y] = y'' - y = e^{3x}. \tag{4.8}$$
   a) Demostrar que al aplicar $D - 3$ a ambos lados de la ecuación (4.8) tenemos
$$(D - 3)(D - 1)(D + 1)[y] = y'' - y = 0 \tag{4.9}$$
   (como $(D - 3)[e^{3x}] = 0$, decimos que $D - 3$ anula a e^{3x}).

b) Si y_p satisface la ecuación diferencial (4.8), también satisface la ecuación (4.9). Verificar que

$$c_1e^{3x} + c_2e^{x} + c_3e^{-x} \tag{4.10}$$

es una solución general de (4.9) y concluya que existe una solución particular de (4.8) de la forma (4.10).

c) Usar el hecho de que $c_2e^x + c_3e^{-x}$ es una solución de la ecuación homogénea $(D-1)(D+1)[y] = 0$ y concluya que existe una solución particular de (4.8) de la forma $y_p = c_1e^{3x}$.

d) Usar el procedimiento anterior para demostrar que existe una solución particular $(D-1)(D+1)[y] = e^x$, de la forma $y_p = cxe^{3x}$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *a)* $y(x) = c_1e^{4x} + c_2xe^{4x} + x^3e^{4x} + x^2 + 2x + 1$.
   c) $y(x) = -\frac{1}{10}\sin(x) - \frac{3}{10}\cos(x) + \frac{1}{20}(3\sin(2x) - \cos(2x))$.
   d) $y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \frac{1}{12}x^4e^{2x} - \frac{1}{2}x^2e^{2x}$.
   f) $y(x) = -\frac{27}{4}e^{-x} - \frac{1}{2}xe^{-x} + x^2 - 4x + 7 - \frac{1}{4}e^x$.
   i) $y(x) = c_1e^{-\frac{1}{2}x} + c_2e^{-\frac{1}{2}x}x - \frac{4}{225}e^x\cos(3x) - \frac{28}{225}e^{3x}\sin(3x))$.
   ñ) $y(x) = e^{2x} - 2xe^{2x} + 3x^2e^{2x} + 3\sin(x) + 4\cos(x)$.

3.2. Reducción de orden

Este método se usa para hallar una segunda solución de una ecuación diferencial lineal no homogénea de orden superior cuando se conoce una solución $y_1(x) = g(x)$ de esta. Asimismo, conocida una solución de la ecuación homogénea correspondiente, podemos usar este método para hallar la solución general de la ecuación no homogénea.

Dada la ecuación diferencial de orden n

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x)$$

y una solución no trivial $y_1(x) = g(x)$, el cambio de variable $y(x) = g(x)u(x)$ transforma la ecuación diferencial, en una ecuación lineal de orden $n-1$ en la variable $w = \frac{du}{dx}$.

Primero veamos el caso $n = 2$ y $f(x) \equiv 0$.

Sea

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{4.11}$$

y una solución no nula $y_1(x) = g(x)$. Luego, para $y_2(x) = g(x)u(x)$ tenemos:

$$\begin{aligned} y_2' &= g'u + gu' \\ y_2'' &= gu'' + 2g'u' + g''u. \end{aligned}$$

Sustituimos en la ecuación (4.11):

$$\begin{aligned} &a_2(x)[gu'' + 2g'u' + g''u] + a_1(x)[g'u + gu'] + a_0(x)[gu] = 0 \\ &[a_2(x)g'' + a_1(x)g' + a_0(x)g]u + a_2(x)gu'' + 2a_2(x)g'u' + a_1(x)gu' = 0. \end{aligned}$$

Podemos ver que el primer corchete toma el valor cero por ser $g(x)$ solución de la ecuación homogénea, entonces:

$$a_2(x)gu'' + 2a_2(x)g'u' + a_1(x)gu' = 0.$$

Ahora llamamos $w = u'$; la ecuación queda en la forma

$$a_2(x)gw' + 2a_2(x)g'w + a_1(x)gw = 0.$$

Esta ecuación es de variables separables, de modo que, integrando respecto a x,

$$\begin{aligned} \frac{w'}{w} &= -\left[\frac{2a_2(x)g'}{a_2(x)g} + \frac{a_1(x)}{a_2(x)}\right] \\ \int \frac{1}{w}\frac{dw}{dx}dx &= -\int \frac{2g'}{g}dx - \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx \\ \ln|w| &= \ln(g^{-2}) - \int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx \\ w &= g^{-2}e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}. \end{aligned}$$

Reemplazando u' en lugar de w en la última ecuación e integrando respecto a x obtenemos:

$$u(x) = \int \frac{e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}}{[g(x)]^2}dx.$$

Esta fórmula nos da la segunda solución linealmente independiente:

$$y_2(x) = g(x)\int \frac{e^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)}dx}}{[g(x)]^2}dx.$$

Ejemplo 4.7. *Dada la ecuación diferencial* $tx'' - (t+1)x' + x = 0, \quad t > 0$ *y una solución no trivial* $x_1(t) = e^t$, *determinar una segunda solución* x_2 *linealmente independiente.*

Solución. En este caso $a_2(t) = t$ y $a_1(t) = -(t+1)$, de modo que

$$-\int \frac{-(t+1)}{t} dt = \int \left(1 + \frac{1}{t}\right) dt = t + \ln(t).$$

Hemos considerado que la constante de integración se anula. La fórmula para reducción de orden implica que

$$u(t) = \int \frac{e^{t+\ln(t)}}{(e^t)^2} dt = \int \frac{e^{t+\ln(t)}}{e^{2t}} dt = -(t+1)e^{-t},$$

luego

$$x_2(t) = e^t \int \frac{e^{t+\ln(t)}}{e^{2t}} dt = e^t[-e^{-t}(t+1)] = -(t+1).$$

Tenemos así la segunda solución buscada. ☑

De manera similar, el cambio $y = uy_1$ nos permite hallar la solución general de una ecuación no homogénea:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = f(x),$$

si conocemos una solución y_1 de la correspondiente ecuación homogénea:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0,$$

como lo muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.8. *Hallar la solución general de la ecuación*

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = x^2,$$

dado que la función $y_1(x) = e^x$ *es una solución de la correspondiente ecuación homogénea*

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0.$$

Solución. Sea $y(x) = u(x)e^x$, de manera que $y' = u'e^x + ue^x$ y $y'' = u''e^x + 2u'e^x + ue^x$. Ahora reemplazamos esto en el lado izquierdo de la ecuación y obtenemos:

$$xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = x(u''e^x + 2u'e^x + ue^x) - (2x+1)(u'e^x + ue^x)$$

$$
\begin{aligned}
&+ (x+1)(ue^x) \\
=&(xu'' - u')e^x.
\end{aligned}
$$

Así, $y(x) = u(x)e^x$ es una solución de la ecuación no homogénea, si

$$(xu'' - u')e^x = x^2.$$

Si hacemos $z = u'$, tenemos que la ecuación anterior es una ecuación de primer orden:

$$(xz' - z)e^x = x^2.$$

Esta ecuación se escribe como

$$z' - \frac{1}{x}z = xe^{-x},$$

la cual tiene como solución $z(x) = -xe^{-x} + C_1x$. Regresamos el cambio y tenemos $u'(x) = -xe^{-x} + C_1x$, integrando esto obtenemos:

$$u(x) = (x+1)e^{-x} + \frac{C_1}{2}x^2 + C_2.$$

Finalmente,

$$y(x) = u(x)e^x = x + 1 + \frac{C_1}{2}x^2e^x + C_2e^x$$

es la solución general de la ecuación no homogénea. ☑

Ejemplo 4.9. *Hallar la solución del problema de valor inicial*

$$x^2y'' + xy' - y = x^2 + 1, \quad y(1) = 2,\ y'(1) = -3,$$

teniendo en cuenta que $y_1(x) = x$ es una solución de la ecuación diferencial homogénea correspondiente.

Solución. Sea $y(x) = u(x)y_1(x) = u(x)x$. Tenemos que $y' = u'x + u$ y $y'' = u''x + 2u'$. Reemplazamos en la ecuación

$$
\begin{aligned}
x^2y'' + xy' - y =&x^2(u''x + 2u') + x(u'x + u) - ux \\
=&x^3u'' + 3x^2u'.
\end{aligned}
$$

Luego, $y(x) = u(x)x$ es una solución de la ecuación no homogénea si

$$x^3u'' + 3x^2u' = x^2 + 1.$$

Haciendo el cambio de variable $z = u'$ tenemos que la ecuación anterior se escribe como la ecuación de primer orden

$$z' + \frac{3}{x}z = x^{-1} + x^{-3}.$$

Resolvemos esta ecuación y obtenemos $z(x) = \frac{1}{3} + x^{-2} + c_1x^{-3}$. Regresando el cambio $u'(x) = z(x)$ e integrando obtenemos:

$$u(x) = \frac{1}{3}x - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}c_1x^{-2} + c_2.$$

Como $y = ux$, entonces:

$$y(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1 - \frac{1}{2}c_1x^{-1} + c_2x.$$

Resolvamos el problema de valor inicial: $y'(x) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}c_1x^{-2} + c_2$, ahora usemos las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} 2 = y(1) &= -\frac{2}{3} - \frac{1}{2}c_1 + c_2 \\ -3 = y'(1) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{2}c_1 + c_2. \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $c_1 = -19/3$ y $c_2 = -1/2$. Así,

$$y(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1 + \frac{19}{6}x^{-1} - \frac{1}{2}x$$

es la solución del problema de valor inicial. ☑

Ejercicios

1. Se da una ecuación diferencial y una solución no trivial f. Determinar una segunda solución linealmente independiente.
   a) $x^2y'' - xy' + 2y = 0; \quad f(x) = x\sin(\ln|x|)$.
   b) $y'' - 25y = 0; \quad f(x) = e^{5x}$.
   c) $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0; \quad f(x) = x^2$.
   d) $xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y = 0; \quad x > 0; \quad f(x) = e^x$.
   e) $(1-2x-x^2)y'' + 2(1+x)y' - 2y = 0; \quad f(x) = x+1$.
   f) $4x^2\sin(x)y'' - 4x(x\cos(x)+\sin(x))y' + (2x\cos(x)+3\sin(x))y = 0; \quad f(x) = x^{1/2}$.
   g) $y'' + 2y' + 2y = e^x\sec(x); \quad f(x) = e^{-x}\cos(x)$.
   h) $x^2y'' + xy' - 4y = -6x - 4; \quad f(x) = x^2$.
   i) $(1-2x)y'' + 2y' + (2x-3)y = (1-4x+4x^2)e^x; \quad f(x) = e^x$.
   j) $4x^2y'' - 4x(x+1)y' + (2x+3)y = 4x^{5/2}e^{2x}; \quad f(x) = x^{1/2}$.
   k) $x^2y'' - 5xy' + 8y = 4x^2; \quad f(x) = x^2$.
   l) $y'' + 4xy' + (4x^2+2)y = 8e^{-x(x+2)}; \quad f(x) = e^{-x^2}$.

2. En física matemática muchos problemas con simetría esférica implican el estudio de la ecuación de Legendre,

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \lambda(\lambda+1)y = 0; \quad -1 < x < 1,$$

donde λ es un parámetro. Usar la fórmula para reducción de orden para obtener una representación integral de una segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Legendre para el valor dado de λ y la solución correspondiente de $f(x)$.
   a) $\lambda = 1, \quad f(x) = x.$
   b) $\lambda = 2, \quad f(x) = 3x^2 - 1.$
   c) $\lambda = 3, \quad f(x) = 5x^3 - 3x.$
3. La ecuación $xy''' + (1-x)y'' + xy' - y = 0$, tiene a $f(x) = x$ como solución. Usar la sustitución $y(x) = v(x)f(x)$ para reducir esta ecuación de tercer orden a una ecuación lineal homogénea de segundo orden en la variable $w = v'$.
4. (*Forma normal*). Mostrar que la sustitución $y(x) = u(x)v(x)$, donde

$$v(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\int p(x)dx\right),$$

transforma la ecuación diferencial

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en una ecuación de la forma

$$u'' + f(x)u = 0.$$

La última ecuación se llama *forma normal* de una ecuación lineal de segundo orden homogénea.
5. En mecánica cuántica, el estudio de la ecuación de Schödinger para el átomo de hidrógeno conduce a considerar la ecuación de Laguerre: $xy'' + (1-x)y' + \lambda y = 0$, donde λ es un parámetro. Usar la fórmula de reducción de orden para obtener una representación integral de una segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Laguerre para $\lambda = 2, \; f(x) = x^2 - 4x + 2$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. a) $y_2(x) = -x\cos(\ln|x|)$.
   d) $y_2(x) = e^x \ln|x|$.
   f) $y_2(x) = -\sqrt{x}\cos(x)$.

g) $y_2(x) = e^{-x}\sin(x)$.
i) $y_2(x) = \frac{e^x}{2}(x^2 - x + c_1(-2xe^{-2x})) + c_2$.
k) $y_2(x) = \frac{x^4}{2}$.

2. a) $y_2(x) = x\int x^{-2}(1-x^2)^{-1}dx$.
c) $y_2(x) = (5x^3 - 3x)\int \frac{dx}{x^2(1-x^2)(5x^2-3)^2}$.

5. $y_2(x) = (x^2 - 4x + 2)\int \frac{e^x}{x(x^2-4x+2)^2}dx$.

3.3. Variación de parámetros

Ahora vamos a estudiar un método, llamado de *variación de parámetros*, que nos permite hallar una solución particular de una ecuación diferencial lineal no homogénea cuyos coeficientes pueden ser funciones y el término no homogéneo no tiene una forma especial.

Este método nos proporciona una solución particular y_p de la ecuación

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_n(x)y = f(x),$$

para *cualquier* función continua $f(x)$, una vez conocida la solución general de la ecuación homogénea

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_n(x)y = 0.$$

Dado que este método requiere de la solución general de la ecuación homogénea y el método de reducción de orden requiere solo de una solución no trivial de la ecuación homogénea para obtener una solución particular de la ecuación no homogénea, cabe preguntarse sobre la relevancia de esta técnica. Como veremos, este método suele ser más simple y directo que el de reducción de orden y se adapta mejor para ecuaciones de orden mayor que 2.

Deduzcamos este método para la ecuación diferencial

$$y'' + P_1(x)y' + P_0(x)y = f(x), \tag{4.12}$$

donde $P_1(x)$, $P_2(x)$ y $f(x)$ son funciones continuas en un intervalo (a, b). Supongamos que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea correspondiente. Buscamos una solución particular de (4.12) de la forma

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2.$$

Dado que tenemos dos funciones desconocidas, u_1 y u_2 impondremos dos condiciones sobre estas funciones para así obtener un sistema de ecuaciones

2×2. La primera condición sobre estas funciones es que y_p sea solución de (4.12). Para obtener la segunda condición derivemos y_p:

$$y_p' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2'.$$

La segunda condición sobre u_1 y u_2 es

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0.$$

De esta manera,

$$y_p' = u_1y_1' + u_2y_2'.$$

Luego, calculamos la segunda derivada de y_p:

$$y_p'' = u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2y_2' + u_2y_2''.$$

Sustituimos y_p y sus derivadas en (4.12) y obtenemos:

$$\begin{aligned} u_1'y_1' + u_1y_1'' + u_2'y_2' + u_2y_2'' + P_1(u_1y_1' + u_2y_2') + P_0(u_1y_1 + u_2y_2) \\ = u_1(y_1'' + P_1y_1' + P_0y_1) + u_2(y_2'' + P_1y_2' + P_0y_2) \\ + u_1'y_1' + u_2'y_2' = f. \end{aligned}$$

Como y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea correspondiente, la ecuación anterior queda como

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f.$$

Por lo tanto, y_p satisface la ecuación diferencial (4.12), si

$$\begin{cases} u_1'y_1 + u_2'y_2 = & 0 \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' = & f. \end{cases}$$

Para resolver este sistema 2×2 multipliquemos la primera ecuación por y_2' y la segunda por y_2':

$$\begin{cases} u_1'y_1y_2' + u_2'y_2y_2' = & 0 \\ u_1'y_1'y_2 + u_2'y_2'y_2 = & fy_2. \end{cases}$$

Restamos la segunda ecuación de la primera y obtenemos:

$$u_1'y_1y_2 - u_1'y_1'y_2 = -y_2f,$$

así,

$$u_1' = \frac{-y_2f}{y_1y_2' - y_1'y_2}.$$

Luego

$$u_1(x) = \int \frac{-y_2(x)f(x)dx}{W[y_1, y_2](x)}.$$

Note que $W[y_1, y_2](x) \neq 0$ para todo $x \in (a, b)$, pues y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación homogénea (corolario 4.6).

De forma similar obtenemos:

$$u_2(x) = \int \frac{y_1(x)f(x)dx}{W[y_1, y_2](x)}.$$

Note que

$$y_1(x) = W[y_1](x) \quad \text{y} \quad y_2(x) = W[y_2](x),$$

por lo que las expresiones para u_1 y u_2 las podemos escribir como

$$u_1(x) = \int \frac{-W[y_2](x)f(x)dx}{W[y_1, y_2](x)}$$
$$u_2(x) = \int \frac{W[y_1](x)f(x)dx}{W[y_1, y_2](x)}.$$

Para el caso general de la ecuación

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_n(x)y = f(x),$$

este método nos proporciona una solución particular y_p, una vez conocida la solución general de la ecuación homogénea

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{n-1} + \cdots + P_n(x)y = 0,$$

digamos

$$y_h = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n.$$

El método de variación de parámetros propone una solución particular de la forma

$$y_p(x) = y_1(x)u_1(x) + y_2(x)u_2(x) + \cdots + y_n(x)u_n(x),$$

donde las funciones $u_1, u_2, \ldots, u_n$ vienen dadas por la fórmula

$$u_k(x) := \int \frac{f(x)W_k(x)}{W[y_1, \ldots, y_k](x)}dx, \quad k = 1, \ldots, n$$

con $W_k(x) = (-1)^{n-k}W[y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n](x), \;\; k = 1, \ldots, n.$

Ejemplo 4.10. *Determinar una solución general de la ecuación:*

1. $y'' + y = \tan^2(x)$.

2. $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln |x|$.

Solución. 1. Primero resolvemos la ecuación homogénea $y'' + y = 0$ y obtenemos como solución

$$y_h(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x).$$

Ahora,

$$y_p(x) = u_1(x) \cos(x) + u_2(x) \sin(x)$$

de donde $y_1(x) = \cos(x), y_2(x) = \sin(x), W_1(x) = (-1)^{2-1} W[y_2](x) = -\sin(x)$ y $W_2(x) = (-1)^{2-2} W[y_1](x) = \cos(x)$. El wronskiano de $\{y_1, y_2\}$ es

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) \\ -\sin(x) & \cos(x) \end{vmatrix} = \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Por lo tanto,

$$u_1(x) = \int \frac{-\tan^2(x)\sin(x)}{1} dx, \quad u_2(x) = \int \frac{\tan^2(x)\cos(x)}{1} dx$$
$$u_1(x) = \frac{-(\cos^2(x) + 1)}{\cos(x)}, \quad u_2(x) = \ln|\sec(x) + \tan(x)| - \sin(x),$$

es decir,

$$y_p(x) = \frac{-(\cos^2(x) + 1)}{\cos(x)} \cos(x) + (\ln|\sec(x) + \tan(x)| - \sin(x)) \sin(x)$$
$$y_p(x) = \sin(x)(\ln|\sec(x) + \tan(x)|) - 2.$$

La solución general de la ecuación es

$$y(x) = c_1 \cos(x) + c_2 \sin(x) + (\ln|\sec(x) + \tan(x)|) \sin(x) - 2.$$

2. Resolvemos la ecuación homogénea $y'' + 4y' + 4y = 0$ y obtenemos como solución

$$y_h(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}.$$

Ahora

$$y_p(x) = u_1(x) e^{-2x} + u_2(x) x e^{-2x}$$

con $y_1(x) = e^{-2x}, y_2(x) = xe^{-2x}, W_1(x) = (-1)^{2-1} W[y_2](x) = -xe^{-2x}$ y $W_2(x) = (-1)^{2-2} W[y_1](x) = e^{-2x}$. El wronskiano de $\{y_1, y_2\}$ es:

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & e^{-2x} - 2xe^{-2x} \end{vmatrix} = e^{-4x} - 2xe^{-4x} + 2xe^{-4x} = e^{-4x}.$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
u_1(x) &= \int \frac{-e^{-2x}\ln|x|xe^{-2x}}{e^{-4x}}dx, & u_2(x) &= \int \frac{e^{-2x}\ln|x|e^{-2x}}{e^{-4x}}dx\\
u_1(x) &= -\int x\ln|x|dx, & u_2(x) &= \int \ln|x|dx\\
u_1(x) &= \frac{-2x^2\ln|x| + x^2}{4}, & u_2(x) &= x\ln|x| - x.
\end{aligned}
$$

Es decir,

$$
\begin{aligned}
y_p(x) &= \frac{-2x^2\ln|x| + x^2}{4}e^{-2x} + (x\ln|x| - x)xe^{-2x}\\
y_p(x) &= \frac{e^{-2x}x^2(2\ln|x| - 3)}{4};
\end{aligned}
$$

luego, la solución general de la ecuación es

$$y(x) = c_1e^{-2x} + c_2xe^{-2x} + \frac{e^{-2x}x^2(2\ln|x| - 3)}{4}.$$

☑

Ejemplo 4.11. *Resolver el problema de valor inicial:*

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = e^{3x}; \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1,\ y''(0) = 0.$$

Solución. Primero resolvamos la ecuación homogénea

$$y''' - 2y'' - y' + 2y = 0,$$

cuya solución es $y_h(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{x}$. Así, $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = e^{-x}$ y $y_3(x) = e^{x}$. Calculemos $W_k(x)$, $k = 1, 2, 3$:

$$W_1(x) = (-1)^{3-1}W[y_2, y_3](x) = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^{x}\\ -e^{-x} & e^{x}\end{vmatrix} = 2,$$

$$W_2(x) = (-1)^{3-2}W[y_1, y_3](x) = -\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{x}\\ 2e^{2x} & e^{x}\end{vmatrix} = e^{3x},$$

$$W_3(x) = (-1)^{3-3}W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x}\\ 2e^{2x} & -e^{-x}\end{vmatrix} = -3e^{x}.$$

El wronskiano de $\{y_1, y_2, y_3\}$ es

$$W[y_1, y_2, y_3](x) = \begin{vmatrix} e^{2x} & e^{-x} & e^{x} \\ 2e^{2x} & -e^{-x} & e^{x} \\ 4e^{2x} & e^{-x} & e^{x} \end{vmatrix} = 6e^{2x}.$$

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int \frac{2e^{3x}}{6e^{2x}}dx = \frac{1}{3}e^{x}, \\ u_2(x) &= \int \frac{e^{3x}e^{3x}}{6e^{2x}}dx = \frac{1}{24}e^{4x}, \\ u_3(x) &= \int \frac{-3e^{x}e^{3x}}{6e^{2x}}dx = -\frac{1}{4}e^{2x}. \end{aligned}$$

Donde la solución general de la ecuación no homogénea entonces es

$$\begin{aligned} y_g(x) =& c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{x} + \frac{1}{3}e^{3x} + \frac{1}{24}e^{3x} - \frac{1}{4}e^{3x} \\ =& c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{x} + \frac{1}{8}e^{3x}. \end{aligned}$$

Finalmente, calculemos la solución del problema de valor inicial. Usando las condiciones iniciales tenemos el sistema:

$$\begin{aligned} 1 = y_g(0) =& c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{8} \\ -1 = y_g'(0) =& 2c_1 - c_2 + c_3 + \frac{3}{8} \\ 0 = y_g''(0) =& 4c_1 + c_2 + c_3 + \frac{9}{8}, \end{aligned}$$

cuya solución es $c_1 = -\frac{2}{3}$, $c_2 = \frac{19}{24}$ y $c_3 = \frac{3}{4}$. Así, la solución del problema de valor inicial es

$$y(x) = -\frac{2}{3}e^{2x} + \frac{19}{24}e^{-x} + \frac{3}{4}e^{x} + \frac{1}{8}e^{3x}.$$

☑

Ejemplo 4.12. *Hallar una solución particular y_p de la ecuación*

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2, \qquad x \neq 1,$$

dado que $y_1(x) = x$ y $y_2(x) = e^{x}$ son soluciones de la correspondiente ecuación homogénea

$$(x-1)y'' - xy' + y = 0.$$

Solución. La solución particular y_p tiene la forma

$$y_p(x) = u_1(x)x + u_2(x)e^x.$$

Para calcular u_1 y u_2 primero escribamos la ecuación en forma canónica:

$$y'' - \frac{x}{x-1}y' + \frac{1}{x-1}y = x - 1,$$

ahora:

$$W[y_1, y_2](x) = \begin{vmatrix} x & e^x \\ 1 & e^x \end{vmatrix} = (x-1)e^x,$$

$W_1(x) = (-1)^{2-1}W[y_2](x) = -e^x$, $W_2(x) = (-1)^{2-2}W[y_1](x) = x$, de donde tenemos

$$u_1(x) = \int \frac{-(x-1)e^x}{e^x(x-1)}dx = -x,$$
$$u_2(x) = \int \frac{(x-1)x}{e^x(x-1)}dx = -e^{-x}(x+1).$$

Así,

$$y_p(x) = -x^2 - x - 1$$

es la solución particular de la ecuación diferencial. ☑

Ejercicios

1. Resolver cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales:
   a) $y'' + y = \tan(x)$.
   b) $y'' - y = \cosh(x)$.
   c) $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}$.
   d) $y'' + 3y' + 2y = \sin(e^x)$.
   e) $y''' + y' = \tan(x)$.
   f) $y'' - 2y' + y = 14x^{\frac{2}{3}}e^x$.
   g) $y'' - y = \frac{4e^{-x}}{1-e^{-2x}}$.
   h) $y''' - y'' + y' - y = e^{-x}\sin(x)$.
   i) $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin(t)$.
   j) $y''' + y'' - y - 2y = x^2 + \sec(x)$
2. Hallar la solución del problema de valor inicial dado:
   a) $y''' + y' = \sec(x); \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -2.$
   b) $y^{(4)} + 2y'' + y = \sin(x); \quad y(0) = 2,\ y'(0) = 0,$
   $y''(0) = -1,\ y'''(0) = 1.$
   c) $y''' - y' = \csc(x); \quad y(\pi/2) = 2,\ y'(\pi/2) = 1,\ y''(\pi/2) = -1.$

3. Hallar una solución particular de la ecuación, dadas las soluciones de la correspondiente ecuación homogénea:
   a) $4x^2y'' + (4x - 8x^2)y' + (4x^2 - 4x - 1)y = 4x^{1/2}e^x$, $x > 0$;
   $y_1(x) = x^{1/2}e^x$, $y_2(x) = x^{-1/2}e^x$.
   b) $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^{5/2}$, $x > 0$; $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$.
   c) $4xy'' + 2y' + y = \sin(\sqrt{x})$, $x > 0$; $y_1(x) = \cos(\sqrt{x})$,
   $y_2(x) = \sin(\sqrt{x})$.
   d) $\sin(x)y'' + (2\sin(x) - \cos(x))y' + (\sin(x) - \cos(x))y = e^{-x}$;
   $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = e^{-x}\cos(x)$.
   e) $x^2y'' - x(x+4)y' + 2(x+3)y = x^4e^x$; $y_1(x) = x^2$,
   $y_2(x) = x^2e^x$.
   f) $(x-1)y'' - xy' + y = 2(x-1)^2e^x$; $y_1(x) = x$, $y_2(x) = e^x$.
   g) $4x^2y'' - 4x(x+1)y' + (2x+3)y = x^{5/2}e^x$, $x > 0$; $y_1(x) = \sqrt{x}$,
   $y_2(x) = \sqrt{x}e^x$.
4. Usar el método de variación de parámetros para demostrar que

$$y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + \int_a^b f(s)\sin(x-s)ds$$

   es una solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + y = f(x),$$

   donde $f(x)$ es una función continua en $(-\infty, \infty)$ (sugerencia: Usar la identidad trigonométrica $\sin(x-s) = \sin(x)\cos(s) - \sin(s)\cos(x)$).
5. Determinar a para que $y(x) = ax^3$ sea solución de la ecuación

$$xy'' - y' = 3x^2$$

   y usar el resultado para escribir una solución general.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. a) $y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) - \ln\left|\frac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right|\cos(x)$.
   c) $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + \frac{1}{4}\left(e^{2x}\ln|x| - e^{-2x}\int_{x_0}^{x}\frac{e^{4t}}{t}dt\right)$, $x_0 > 0$.
   e) $y(x) = c_1 + c_2\cos(x) + c_3\sin(x) - \ln|\cos(x)| - \sin(x)\ln|\sec(x) + \tan(x)|$.
   g) $y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + e^x\ln|1 - e^{2x}| - 2xe^x - e^{-x}\ln|1 - e^{2x}|$.
   i) $y(x) = c_1\cos(x) + c_2\sin(x) + c_3x\cos(x) + c_4x\sin(x) - \frac{x}{8}\cos(x)$
   $+\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8}x^2\right)\sin(x)$.

2. a) $y(x) = 2\cos(x) + \sin(x) - x\cos(x) + \ln|\sec(x) + \tan(x)|$
 $+ \sin(x)\ln|\cos(x)|$.
 b) $y(x) = 2\cos(x) + \frac{7}{8}\sin(x) - \frac{7}{8}x\cos(x) + \frac{1}{2}x\sin(x) - \frac{1}{8}x^2\sin(x)$.
3. a) $y(x) = c_1 x^{-1/2}e^x + c_2 x^{1/2}e^x + (\ln|x| - 1)x^{1/2}e^x$.
 b) $y(x) = c_1 x^2 + c_2 x^3 - 4x^{5/2}$.
 d) $y(x) = -e^{-x}\csc(x) + e^{-x}\cos(x)\cot(x)$.
 f) $y(x) = c_1\sqrt{x} + c_2\sqrt{x}e^x + \frac{x}{4}\sqrt{x}e^x$.
5. $a = 1, y(x) = x^3 + c_1 x^2 + c_2$.

3.4. Ecuación de Cauchy-Euler

Una ecuación diferencial lineal de la forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x\frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x),$$

con $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ constantes, es llamada una *ecuación de Cauchy-Euler*. La característica de este tipo de ecuación es que el grado de x^k, $k = 0, 1, \ldots, n$ coincide con el orden k de la derivada $\frac{d^k y}{dx^k}$.

Primero resolvamos la ecuación Cauchy-Euler homogénea:

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x\frac{dy}{dx} + a_0 y = 0. \tag{4.13}$$

Para ello supongamos que una solución es de la forma $y(x) = x^m$. El problema se reduce a encontrar los valores del exponente m que hace que las funciones $y(x) = x^m$ sean solución de la ecuación. Así,

$$y(x) = x^m \text{ implica que } y'(x) = mx^{m-1}, \ \ y''(x) = m(m-1)x^{m-2}, \ldots$$

sustituyendo en la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} a_n x^n x^{m-n} m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)] + \cdots + a_1 x m x^{m-1} + a_0 x^m &= 0 \\ a_n x^m m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)] + \cdots + a_1 m x^m + a_0 x^m &= 0 \\ x^m [a_n m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)] + \cdots + a_1 m + a_0] &= 0. \end{aligned}$$

Luego $y(x) = x^m$ es una solución de la ecuación diferencial siempre que m sea una solución de la ecuación (característica):

$$a_n m(m-1)(m-2)\cdots[m-(n-1)] + \cdots + a_1 m + a_0 = 0.$$

De aquí podemos tener los siguientes casos:

Caso I. El polinomio característico tiene n raíces reales simples y distintas: $m_1, m_2, \ldots, m_n$. En este caso tenemos n soluciones de la ecuación que serán de la forma:

$$y_1(x) = x^{m_1}, \quad y_2(x) = x^{m_2}, \ldots, y_n(x) = x^{m_n}.$$

Puede verificarse que el wronskiano es no nulo para todo $x \in \mathbb{R}$; por lo tanto, por la definición 4.3, estas funciones forman un conjunto fundamental de soluciones y la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_2} + \cdots + C_nx^{m_n}.$$

Caso II. Las raíces del polinomio son reales pero algunas con multiplicidad mayor que uno. Supongamos, para ejemplificar, que tenemos la ecuación de segundo orden $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$, sustituyendo tenemos:

$$\begin{aligned} ax^2m(m-1)x^{m-2} + bxmx^{m-1} + cx^m &= 0 \\ am(m-1)x^m + bmx^m + cx^m &= 0 \\ x^m[am(m-1) + bm + c] &= 0 \\ am^2 + m(b-a) + c &= 0 \end{aligned}$$

con dos raíces iguales, digamos, m_1. Entonces $y_1(x) = x^{m_1}$ es una solución de la ecuación diferencial. Para encontrar la otra solución utilizamos el método de reducción de orden (ver p. 143)

$$y_2(x) = y_1(x)\int \frac{e^{-\int p(x)dx}}{[y_1(x)]^2}dx,$$

en este caso $p(x) = \frac{b}{ax}$ y $m_1 = \frac{-(b-a)}{2a}$ ya que $(b-a)^2 - 4ac = 0$. Sustituyendo en la ecuación obtenemos:

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^{m_1}\int \frac{e^{-\int \frac{b}{ax}dx}}{\left(x^{-\frac{(b-a)}{2a}}\right)^2}dx \\ &= x^{m_1}\int \frac{e^{-\frac{b}{a}\ln|x|}}{x^{-\frac{b}{a}+1}}dx. \end{aligned}$$

Calculando la integral obtenemos que $y_2(x) = \ln|x|x^{m_1}$. Estas dos soluciones son linealmente independientes y la solución general de la ecuación es

$$y(x) = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_1}\ln|x|.$$

Si para la ecuación (4.13) la multiplicidad de la raíz en la ecuación característica es n, se extienden estas soluciones, a partir de lo cual se obtienen n soluciones linealmente independientes de la forma $\ln^2|x|x^{m_1}$, $\ln^3|x|x^{m_1}, \ldots, \ln^{n-1}|x|x^{m_1}$. De esta forma, la solución general es:

$$y(x) = C_1x^{m_1} + C_2x^{m_1}\ln|x| + C_3x^{m_1}\ln^2|x| + \cdots + C_n\ln^{n-1}|x|x^{m_1}.$$

Caso III. El polinomio tiene un par de raíces complejas conjugadas:

$$\begin{aligned} m_1 &= a + ib \\ m_2 &= a - ib. \end{aligned}$$

Como $y(x) = x^m$ es una solución de la ecuación diferencial y $m_1 = a+ib$, $m_2 = a - ib$ son soluciones de la ecuación característica, $y_1(x) = x^{a+ib}$, $y_2(x) = x^{a-ib}$ son soluciones particulares de la ecuación diferencial.
Para $x > 0$ puede tomarse la expresión de estas exponenciales según la fórmula de Euler:

$$x^{a+ib} = x^a x^{ib} = x^a e^{ib\ln(x)} = x^a[\cos(b\ln(x)) + i\sin(b\ln(x))].$$

De esta forma, podemos escribir las soluciones de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} &C_1x^a[\cos(b\ln(x)) + i\sin(b\ln(x))] + C_2x^a[\cos(-b\ln(x)) + i\sin(-b\ln(x))] \\ &= C_1x^a[\cos(b\ln(x)) + i\sin(b\ln(x))] + C_2x^a[\cos(b\ln(x)) - i\sin(b\ln(x))] \\ &= x^a[(C_1 + C_2)\cos(b\ln(x)) + (iC_1 - iC_2)\sin(b\ln(x))] \\ &= x^a[K_1\cos(b\ln(x)) + K_2\sin(b\ln(x))]. \end{aligned}$$

Si la multiplicidad de la raíz compleja es r, la solución general viene dada por

$$y(x) = x^a[\{K_1\cos(b\ln(x)) + K_2\sin(b\ln(x))\} + \ln(x)\{K_3\cos(b\ln(x)) +$$

$$K_4\sin(b\ln(x))\} + \cdots + (\ln(x))^{r-1}\{K_{2r-1}\cos(b\ln(x)) + K_{2r}\sin(b\ln(x))\}].$$

Ejemplo 4.13. *Determinar la solución general de la ecuación diferencial*

$$x^3y''' - 6y = 0, \quad x > 0.$$

Solución. Si tratamos de hallar la solución de la forma $y(x) = x^m$, entonces esto nos conduce a hallar las raíces de la ecuación auxiliar

$$m(m-1)(m-2) - 6 = 0$$

la cual se escribe como:

$$m^3 - 3m^2 + 2m - 6 = 0.$$

Factorizando, obtenemos $(m-3)(m^2+2) = 0$. Por lo tanto, las raíces de la ecuación auxiliar son

$$m = 3, \quad m = \pm i\sqrt{2};$$

una raíz real y una imaginaria pura, luego $a = 0$, $b = \sqrt{2}$, de esta manera

$$y(x) = c_1 x^3 + c_2 \cos(\sqrt{2}\ln(x)) + c_3 \sin(\sqrt{2}\ln(x))$$

es la solución general de la ecuación. ☑

Ahora consideremos la ecuación de Cauchy-Euler no homogénea

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x\frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x), \quad x > 0.$$

Esta ecuación se puede reducir a una ecuación con coeficientes constantes mediante el cambio de variable $x = e^t$, lo cual nos permite hallar la solución general de esta ecuación sin necesidad de conocer previamente alguna otra solución.

Ejemplo 4.14. *Encontrar la solución general de la ecuación*

$$x^2y'' + 3xy' + y = x^{-1}.$$

Solución. Se trata de una ecuación de Cauchy-Euler. Haciendo $x = e^t$, si suponemos $x > 0$, tenemos

$$\begin{aligned} t &= \ln(x) \\ \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{x} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{1}{x} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{1}{x}\left[\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx}\right] - \frac{1}{x^2}\left[\frac{dy}{dt}\right] = \frac{1}{x^2}\left[\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right]. \end{aligned}$$

Es decir, las siguientes relaciones se satisfacen:

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \tag{4.14}$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}. \tag{4.15}$$

Sustituyendo (4.14) y (4.15) en la ecuación $x^2y''+3xy'+y = x^{-1}$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} + 3\frac{dy}{dt} + y(t) &= e^{-t}\\ \frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + y(t) &= e^{-t};\end{aligned}$$

esta última ecuación es lineal de segundo orden con coeficientes constantes no homogénea que sabemos resolver. Primero resolvemos la ecuación homogénea

$$y'' + 2y' + y = 0$$

y obtenemos como solución

$$y_h(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}.$$

Usaremos el método variación de parámetros para hallar una solución particular de la ecuación no homogénea

$$y_p(t) = u_1(t)e^{-t} + u_2(t)te^{-t}$$

con $y_1(t) = e^{-t}$ y $y_2(t) = te^{-t}$. Hallamos el wronskiano:

$$W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} e^{-t} & te^{-t} \\ -e^{-t} & e^{-t} - te^{-t} \end{vmatrix} = e^{-2t} - te^{-2t} + te^{-2t} = e^{-2t}$$

por lo tanto;

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \int \frac{-e^{-t}te^{-t}}{e^{-2t}}dt, \quad u_2(t) = \int \frac{e^{-t}e^{-t}}{e^{-2t}}dt\\ u_1(t) &= \int -t, \quad u_2(t) = \int dt\\ u_1(t) &= \frac{-t^2}{2}, \quad u_2(t) = t\end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \frac{-t^2}{2}e^{-t} + t^2e^{-t}\\ y_p(t) &= \frac{t^2e^{-t}}{2}.\end{aligned}$$

Así, la solución general de la ecuación con coeficientes constantes es

$$y(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + \frac{t^2e^{-t}}{2}.$$

Sustituimos $x = e^t$ y se obtiene que

$$y(x) = c_1 x^{-1} + c_2 \ln(x) x^{-1} + \frac{\ln^2(x) x^{-1}}{2}$$

es la solución general de la ecuación de Cauchy-Euler. ☑

Ejemplo 4.15. *Hallar la solución del problema de valor inicial*

$$x^2 y''' - x y'' + y' = \frac{\ln(x)}{x}, \quad x > 0, \ y(1) = 0, \ y'(1) = -1, \ y''(1) = 1.$$

Solución. Esta ecuación es del tipo Cauchy-Euler ya que se puede reescribir como

$$x^3 y''' - x^2 y'' + x y' = \ln(x). \tag{4.16}$$

Haciendo el cambio de variable $x = e^t$ tenemos, por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dt}{dx}} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{d}{dt}(e^t)} = e^{-t}\frac{dy}{dt} \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^{-t}\frac{d^2y}{dt^2} - e^{-t}\frac{dy}{dt}}{e^t} = e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{e^{-2t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - \frac{d^2y}{dt^2}\right) - 2e^{-2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)}{e^t} = e^{-3t}\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt}\right).
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación (4.16) tenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} - \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} &= t \\
\frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} &= t,
\end{aligned} \tag{4.17}$$

la cual es una ecuación no homogénea con coeficientes constantes. Para hallar su solución general primero hallemos la solución de la ecuación homogénea. La ecuación auxiliar de la ecuación homogénea es

$$m^3 - 4m^2 + 4m = m(m-2)^2 = 0,$$

así, el conjunto fundamental de soluciones es $\{y_1(t) = 1, y_2(t) = e^{2t}, y_3(t) = te^{2t}\}$. Hallaremos una solución particular de la ecuación no homogénea usando el método de variación de parámetros. Calculemos el wronskiano

$$W[y_1, y_2, y_3](t) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 2e^{2t} & (2t+1)e^{2t} \\ 0 & 4e^{2t} & (4t+4)e^{2t} \end{vmatrix} = 4e^{4t}.$$

Ahora hallemos u_i, $i = 1, 2, 3$ tales que $y_p = u_1y_1 + u_2y_2 + u_3y_3$. Para ello calculemos

$$\begin{aligned}
W_1(t) =&(-1)^{3-1}W[y_2, y_3](t) = \begin{vmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 2e^{2t} & e^{2t} + 2te^{2t} \end{vmatrix} = e^{4t}, \\
W_2(t) =&(-1)^{3-2}W[y_1, y_3](t) = -\begin{vmatrix} 1 & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} + 2te^{2t} \end{vmatrix} = -e^{2t}(2t+1), \\
W_3(t) =&(-1)^{3-3}W[y_1, y_2](t) = \begin{vmatrix} 1 & e^{2t} \\ 0 & 2e^{2t} \end{vmatrix} = 2e^{2t}.
\end{aligned}$$

Con esto,

$$\begin{aligned}
u_1(t) &= \int \frac{te^{4t}}{4e^{4t}}dt = \frac{1}{8}t^2, \\
u_2(t) &= \int \frac{-te^{2t}(2t+1)}{4e^{4t}}dt = \frac{1}{16}e^{-2t}(3+6t+4t^2), \\
u_3(t) &= \int \frac{2te^{2t}}{4e^{4t}}dt = -\frac{1}{8}e^{-2t}(2t+1).
\end{aligned}$$

Así, la solución general de la ecuación (4.17) es

$$\begin{aligned}
y(t) =&c_1 + c_2e^{2t} + c_3te^{2t} + \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}e^{-2t}(3+6t+4t^2)e^{2t} - \frac{1}{8}e^{-2t}(2t+1)te^{2t} \\
=&c_1 + c_2e^{2t} + c_3te^{2t} + \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{4}t.
\end{aligned}$$

Regresamos el cambio de variable $x = e^t$ y obtenemos $t = \ln(x)$, luego la solución general de la ecuación (4.16) es

$$y(x) = c_1 + c_2x^2 + c_3x^2\ln(x) + \frac{1}{8}\ln^2(x) + \frac{1}{4}\ln(x).$$

Ahora resolvamos el problema de valor inicial:

$$\begin{aligned}
y'(x) =&2c_2x + c_3(x + 2x\ln(x)) + \frac{1}{4}\frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{4x}, \\
y''(x) =&2c_2 + c_3(3 + 2\ln(x)) + \frac{1}{4}\left(\frac{1-\ln(x)}{x^2}\right) - \frac{1}{4x^2},
\end{aligned}$$

usando las condiciones iniciales obtenemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned}
0 &= y(1) = c_1 + c_2 \\
-1 &= y'(1) = 2c_2 + c_3 + \frac{1}{4} \\
1 &= y''(1) = 2c_2 + 3c_3,
\end{aligned}$$

cuya solución es $c_1 = 23/8$, $c_2 = -23/8$ y $c_3 = 9/8$. Luego,

$$y(x) = \frac{23}{8} - \frac{23}{8}x^2 + \frac{9}{8}x^2\ln(x) + \frac{1}{8}\ln^2(x) + \frac{1}{4}\ln(x)$$

es la solución del problema de valor inicial. ☑

Ejercicios

1. En los ejercicios a) y b) diseñar una modificación del método de ecuaciones de Cauchy-Euler para determinar una solución general de la ecuación dada:
   a) $(x-2)^2y''(x) - 7(x-2)y'(x) + 7y(x) = 0, \quad x > 2.$
   b) $(x+1)^2y''(x) + 10(x+1)y'(x) + 14y(x) = 0, \quad x > -1.$
2. Determinar una solución general de la ecuación diferencial dada (considere $x > 0$ cuando sea necesario):
   a) $x^2y'' + 7xy' - 7y = 0.$
   b) $y'' - \frac{1}{x}y' + \frac{5}{x^2}y = 0.$
   c) $x^2y'' - 3xy' + 6y = 0.$
   d) $x^2y'' - 3xy' - 2y = 0.$
   e) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0.$
   f) $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0.$
   g) $x^2y'' + 9xy' + 17y = 0.$
   h) $x^3y''' + xy' - y = 0.$
   i) $x^2y'' - 5xy' + 8y = 0; \quad y(2) = 32; \quad y'(2) = 0.$
   j) $y''' = \frac{24(x+y)}{x^3}.$
   k) $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = x^3.$
   l) $x^3y''' + 5x^2y'' + 2xy' - 2y = x^4.$
   m) $x^3y''' - 4x^2y^2 + 8xy' - 9y = 4\ln(x).$
   n) $x^3y''' + x^2y' - 6xy' + 6y = 30x.$
3. Determinar una solución general de la ecuación diferencial dada
   a) $x^2y'' + 73xy' + y = x^{-1}.$
   b) $\frac{1}{2}y'' + 2y = \tan(2x) - \frac{1}{2}e^x.$
   c) $(1+x^2)y'' + xy' - y + 1 = 0$, sabiendo que $y_1(x) = x$ es una solución particular.
   d) $x^3y''' - 4x^2y'' + 8xy' + -8y = 4\ln|x|.$
4. La ecuación de Bessel de orden un medio,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = x^{\frac{5}{2}}, \quad x > 0$$

tiene dos soluciones linealmente independientes, $y_1(x) = x^{-\frac{1}{2}} \cos(x)$, $y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}} \sin(x)$. Determinar una solución general de la ecuación no homogénea.

Respuesta de ejercicios seleccionados

2. *b*) $y(x) = c_1 x \cos(2 \ln |x|) + c_2 x \sin(2 \ln |x|)$.
   d) $y(x) = c_1 x^2 \sin(\sqrt{2} \ln |x|) + c_2 x^2 \cos(\sqrt{2} \ln |x|)$.
   f) $y(x) = c_1 x^{-1} \cos(2 \ln |x|) + c_1 x^{-1} \sin(2 \ln |x|)$.
   h) $y(x) = c_1 x + c_2 x \ln |x| + c_3 x \ln^2 |x|$.
   j) $y(x) = -x + c_1 x^4 + c_2 x^{-1/2} \cos\left(\frac{\sqrt{23}}{2} \ln |x|\right) + c_3 x^{-1/2} \sin\left(\frac{\sqrt{23}}{2} \ln |x|\right)$.
3. *a*) $y(x) = c_1 x^{(-36+\sqrt{1295})} + c_2 x^{(-36-\sqrt{1295})} - \frac{1}{70x}$.
   c) $y(x) = c_1 \sqrt{x^2+1} + c_2 x + 1$.
4. $y(x) = c_1 x^{-1/2} \cos(x) + c_2 x^{-1/2} \sin(x) + \sqrt{x}$.

4. Aplicaciones: el oscilador armónico

En esta sección modelaremos el movimiento armónico vibratorio de una partícula mediante ecuaciones diferenciales lineales de orden 2 con coeficientes constantes de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2r\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = f(t),$$

con f una función continua en un intervalo I, r y ω constantes positivas.

4.1. Movimiento armónico simple

Muchos objetos tienen un movimiento vibratorio natural oscilando hacia adelante y atrás sobre un punto de equilibrio fijo. Una partícula que oscila de esta manera en un medio con resistencia, o factor de amortiguamiento, despreciable se dice que ejecuta un *movimiento sin amortiguamiento* o *movimiento armónico simple*. Ejemplos de objetos con movimiento como el descrito son los resortes helicoidales y los péndulos.

Así, formalmente, una partícula se dice que ejecuta un *movimiento armónico simple* si la ecuación del movimiento satisface una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,$$

donde ω es una constante positiva y x describe la posición de la partícula como una función del tiempo t. Las raíces de la ecuación auxiliar asociada

$m^2 + \omega = 0$ son $r_{1,2} = \omega i$ y por lo tanto la solución de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t).$$

Tomamos $A \geq 0$, haciendo $c_1 = A \sin(\phi)$ y $c_2 = A \cos(\phi)$, luego sustituimos en la ecuación anterior

$$\begin{aligned} c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t) =& A \sin(\phi) \cos(\omega t) + A \cos(\phi) \sin(\omega t) \\ =& A \sin(\omega t + \phi). \end{aligned}$$

Al hallar A y ϕ en términos de c_1 y c_2 tenemos

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}, \quad \tan(\phi) = \frac{c_1}{c_2};$$

es decir, la solución de la ecuación del movimiento armónico simple queda como:

$$x(t) = A \sin(\phi + \omega t).$$

La *posición de equilibrio* es centro del segmento de recta en el cual la partícula se mueve de ida y vuelta. La constante A es llamada la *amplitud del movimiento* y ϕ es el *ángulo de fase del movimiento oscilatorio*. El movimiento es periódico con periodo $\frac{2\pi}{\omega}$. Es decir, este es el tiempo que toma la partícula en hacer una oscilación completa alrededor de su posición de equilibrio. Por ejemplo, si hace dos oscilaciones completas en un segundo; esto es, si $\omega = 4\pi$ rad/s, entonces su periodo es 1/2 s. si hace 1/4 de una oscilación completa, lo que quiere decir que $\omega = \frac{1}{2}\pi$ rad/s, entonces su periodo es 4 s. note que el inverso de este periodo, $\omega/2\pi$, nos da el número de oscilaciones completas hechas por la partícula en un segundo. Por ejemplo, cuando el periodo es 1/2, la particula hace dos oscilaciones completas en un segundo.

Llamaremos al valor $\frac{\omega}{2\pi}$ la *frecuencia natural del movimiento*. Esto nos da el número de oscilaciones o ciclos que hace la partícula en una unidad de tiempo. Alternativamente, también llamaremos a la constante ω frecuencia natural del movimiento.

El periodo se mide en unidades de tiempo, la frecuencia natural ciclos/segundo y la frecuencia angular radianes/segundo.

Obs Note que si reemplazamos ϕ por $-\phi$ en el procedimiento anterior tenemos que la solución de la ecuación diferencial que modela el movimiento de una partícula que ejecuta un movimiento armónico simple queda como

$$x(t) = A \cos(\phi + \omega t).$$

Así, la solución de la ecuación del movimiento armónico simple puede ser escrita en cualquiera de las siguientes formas:

$$x(t) = c_1 \cos(\omega t) + c_2 \sin(\omega t),$$
$$x(t) = A \sin(\phi + \omega t),$$
$$x(t) = A \cos(\phi + \omega t).$$

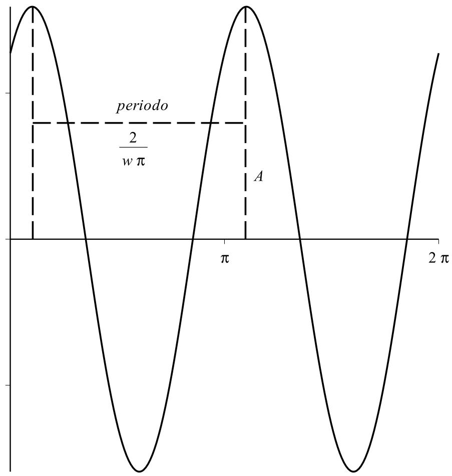


Figura 4.1: Movimiento armónico simple de vibraciones libres no amortiguado.

Ejemplo 4.16. *Una partícula ejecuta un movimiento armónico simple; la frecuencia natural de este movimiento es 4 rad/s. Si la partícula comienza desde el punto de equilibrio con una velocidad de 4 m/s hallar:*

1. *La ecuación del movimiento de la partícula.*
2. *La amplitud del movimiento.*
3. *El ángulo fase.*
4. *El periodo del movimiento.*
5. *La frecuencia del movimiento en ciclos por segundo.*

Solución. 1. Como la partícula ejecuta un movimiento armónico simple, su ecuación de movimiento viene dada por

$$x(t) = A\cos(\phi + \omega t), \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\phi + \omega t).$$

La frecuencia es 4 rad/seg, es decir $\omega = 4$ y la ecuación de movimiento queda como

$$x(t) = A\cos(\phi + 4t), \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\phi + 4t). \tag{4.18}$$

Las condiciones iniciales son $x(0) = 0$ y $v(0) = 4$. Reemplazando estos valores en (4.18) obtenemos:

$$0 = A\cos(\phi), \quad 4 = -4A\sin(\phi).$$

Como la amplitud $A \neq 0$ tenemos que $0 = A\cos(\phi)$ si $\phi = \pm\frac{\pi}{2}$. Evaluamos este valor en la ecuación $4 = -4A\sin(\phi)$ y concluimos que $A = \mp 1$. Así, la ecuación de movimiento es:

$$x(t) = \cos\left(-\frac{\pi}{2} + 4t\right) \quad \text{o,} \quad x(t) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + 4t\right).$$

2. La amplitud del movimiento es 1.
3. El ángulo fase es $-\frac{\pi}{2}$.
4. El periodo del movimiento es $\frac{\pi}{2}$ radianes.
5. La frecuencia del movimiento en ciclos por segundo es $\frac{2}{\pi}$.

☑

Ejemplo 4.17. *Una partícula que se mueve en linea recta es atraída hacia el origen por una fuerza F. Si la fuerza de atracción es proporcional a la distancia x de la partícula desde el origen, demostrar que la partícula ejecuta un movimiento armónico simple. Describa el movimiento.*

Solución. Por hipótesis tenemos que

$$F = -kx,$$

donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad. El signo negativo es necesario pues cuando la partícula en el punto P_1 (figura 4.2), x es positiva y F actúa en una dirección negativa; cuando la partícula está en P_2, x es negativa y F actúa en una dirección positiva. F y x siempre tienen signos opuestos.

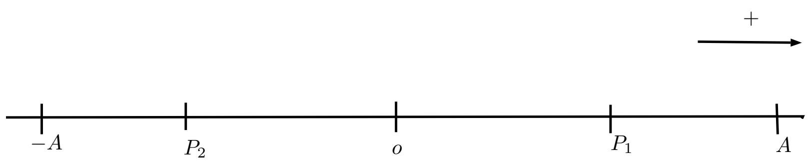


Figura 4.2: Descripción del movimiento.

Luego, de la ley de Newton tenemos:

$$F = m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx.$$

Es decir, la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x.$$

Como k y m son constantes positivas entonces podemos escribir $\omega^2 = k/m$, así la ecuación diferencial queda

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \tag{4.19}$$

la cual es la ecuación del movimiento armónico simple. Ahora describamos el movimiento. La solución de la ecuación (4.19) es

$$x(t) = A\sin(\omega t + \phi).$$

Derivando la ecuación anterior tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = A\omega\cos(\omega t + \phi),$$

donde v es la velocidad de la partícula. Como $|\sin(\theta)| \leq 1$, entonces $|x(t)| \leq A$. Así la partícula nunca pasa de los puntos $-A$ y A; por lo tanto, estos puntos representan los desplazamientos máximos de la partícula desde el origen. Cuando $|x(t)| = A$, se determina que $|\sin(\omega t + \phi)| = 1$, lo cual implica que $\cos(\omega t + \phi) = 0$; por lo tanto, cuando $|x(t)| = |A|$, la velocidad v es cero. Esto muestra que la velocidad de la partícula en los puntos finales $\pm A$ es cero.

Cuando $x(t) = 0$; es decir, cuando la partícula está en el origen del sistema de coordenadas, $\sin(\omega t + \phi) = 0$, de donde se sigue que $|\cos(\omega t + \phi)| = 1$. Esto significa que la partícula alcanza su velocidad máxima $v_{\text{max}} = |A\omega|$ en el origen. También se verifica que para $x(t)$ entre 0 y $|A|$ la velocidad de la partícula está entre 0 y su valor máximo $|A\omega|$; esta velocidad crece cuando la partícula parte desde A, donde la velocidad es cero, hasta el origen, donde alcanza su máximo, mientras que decrece cuando la partícula cruza el origen hasta que sea de nuevo cero en la posición $-A$. De esta forma, la partícula oscila de ida y vuelta sin parar en un ciclo A, desde $-A$ hasta A. ☑

El movimiento de una masa sujeta a un resorte, que es un ejemplo de las vibraciones que ocurren en sistemas mecánicos, se describe a continuación.

Consideremos un resorte helicoidal flexible con una longitud natural ℓ_0 suspendido de un soporte fijo. A él se le sujeta un objeto de masa m y luego entra en equilibrio. Debido al estiramiento producto del objeto sujeto, se crea una fuerza o tensión F en el resorte la cual trata de regresar el resorte a su longitud natural. La ley de Hooke dice que el resorte mismo ejerce una fuerza F de restitución proporcional a la distancia ℓ que el resorte ha sido estirado y opuesta a la dirección del alargamiento que sucede con la masa m. Así,

$$F = k\ell,$$

donde $k > 0$ es la constante de proporcionalidad, llamada *constante del resorte* (o rigidez). Como el resorte entra en equilibrio, la fuerza de restitución debe ser igual a la fuerza de peso (hacia abajo) ejercida por la masa m. Esto es,

$$k\ell = mg.$$

Sea $y = 0$ la posición de equilibrio del resorte con el objeto de masa m sujeto a él. Si el resorte se estira una distancia adicional y, entonces las siguientes fuerzas actuarán en el resorte

1. Una fuerza de tensión del resorte (hacia arriba), la cual por la ley de Hooke es $k(\ell + y)$.
2. Una fuerza debido a la fuerza de peso de la masa m sujeta al resorte la cual es igual a mg.

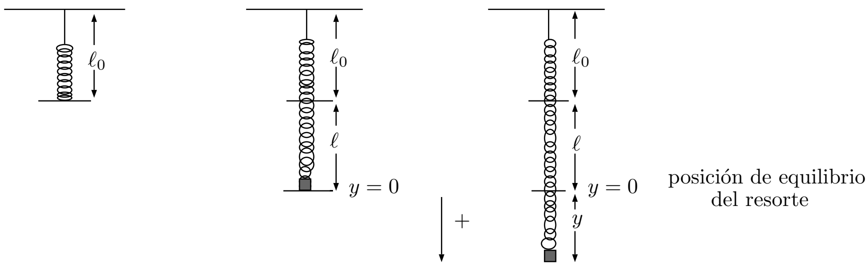


Figura 4.3: Ley de Hooke.

Por la segunda ley de Newton, la fuerza total del sistema es igual a la masa por su aceleración la cual es una ecuación diferencial de segundo orden, pues la aceleración es la segunda derivada de la posición y con respeto al tiempo. Resulta (tomando la dirección positiva hacia abajo) que el desplazamiento $y(t)$ del resorte sigue la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} m\frac{d^2y}{dt^2} &= mg - k(\ell + y) \\ &= -ky. \end{aligned}$$

O, equivalentemente,

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0. \tag{4.20}$$

Escribimos la ecuación auxiliar asociada a (4.20), que es $z^2 + \frac{k}{m}z = 0$, cuyas raíces son complejas conjugadas $\pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$. Por lo tanto, la solución general de (4.20) es

$$y(t) = c_1 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right), \tag{4.21}$$

$$= A \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right). \tag{4.22}$$

Con amplitud de movimiento $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, y su ángulo fase es dado por $\tan(\phi) = \frac{c_1}{c_2}$. El movimiento es periódico con periodo $\frac{2\pi}{\sqrt{k/m}}$ y frecuencia natural $\frac{\sqrt{k/m}}{2\pi}$.

Ejemplo 4.18. *Una masa de 3 kg está unida a un resorte con rigidez $k = 48$. La masa se desplaza $\frac{1}{2}$ m a la izquierda del punto de equilibrio y recibe una velocidad de 2 m/s hacia la derecha. La fuerza de amortiguamiento es despreciable. Determinar la ecuación de movimiento de la masa junto con su amplitud, periodo y frecuencia. ¿Cuánto tiempo después de su liberación la masa pasa por su posición de equilibrio?*

Solución. Tenemos un caso de vibración libre no amortiguada; la ecuación de movimiento que usamos es (4.20). La frecuencia angular es

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{48}{3}} = 4\frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

sustituyendo en (4.21) obtenemos:

$$y(t) = c_1 \cos(4t) + c_2 \sin(4t).$$

Ahora usamos las condiciones iniciales $y(0) = -\frac{1}{2}$ m, $y'(0) = 2$ m/s para hallar c_1 y c_2. Reemplazamos las condiciones iniciales en la última ecuación:

$$-\frac{1}{2} = c_1$$
$$2 = 4c_2,$$

de modo que $-\frac{1}{2} = c_1$ y $c_2 = \frac{1}{2}$. Por lo tanto la ecuación de movimiento de la masa es

$$y(t) = -\frac{1}{2}\cos(4t) + \frac{1}{2}\sin(4t).$$

Como $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$, entonces $A = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$, luego la amplitud es dada por $A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ m. Para hallar el ángulo fase tomamos $\tan(\phi) = \frac{c_1}{c_2}$, luego reemplazamos $\tan(\phi) = \frac{-1/2}{1/2} = -1$, de donde $\phi = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ rad, que es el ángulo fase. El periodo es $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ s y la frecuencia

$$\frac{\omega}{2\pi} = \frac{4}{2\pi} = \frac{2}{\pi}\ \frac{\text{ciclos}}{\text{s}}.$$

Por último, para determinar el momento en el que la masa pasa por su posición de equilibrio hacemos $y = 0$. Reemplazando en la ecuación tenemos,

$$\begin{aligned} y(t) &= -\frac{1}{2}\cos(4t) + \frac{1}{2}\sin(4t) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(4t+\phi) \\ 0 &= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(4t+\phi). \end{aligned}$$

Ahora resolvemos la ecuación que se satisface si $4t + \phi = n\pi$ o $t = \frac{n\pi + \pi/4}{4}$, donde n es un entero. Si tomamos que es la primera vez que la masa pasa por la posición de equilibrio obtenemos

$$t = \frac{1\pi + \pi/4}{4} = \frac{5\pi}{16}\ \text{s}.$$

☑

Ejemplo 4.19. *Un cuerpo sujeto a un resorte helicoidal ejecuta un movimiento armónico simple. La frecuencia natural del movimiento es 2 ciclos por segundo y su amplitud es de 1 m. Hallar la velocidad del cuerpo cuando este pasa por el punto* $y = \frac{1}{2}$ *m.*

Solución. Como el cuerpo ejecuta un movimiento armónico simple, la ecuación del movimiento es

$$y(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right).$$

La amplitud es 1 m; esto es, $A = 1$. La frecuencia es 2 ciclos por segundo, de donde $2 = \frac{\sqrt{\frac{k}{m}}}{2\pi}$, o $\sqrt{\frac{k}{m}} = 4\pi$. Sustituimos estos valores en la ecuación del movimiento:

$$y(t) = \cos(\phi + 4\pi t), \quad v(t) = \frac{dy}{dt} = -4\pi\sin(\phi + 4\pi t).$$

Cuando $y = \frac{1}{2}$ obtenemos de la primera ecuación

$$\frac{1}{2} = \cos(\phi + 4\pi t), \quad \phi + 4\pi t = \arccos(1/2).$$

Luego, cuando $y = \frac{1}{2}$, $\sin(\phi + 4\pi t) = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Finalmente, concluimos que

$$v(t) = \pm 2\sqrt{3}\pi,$$

la cual es la velocidad del cuerpo cuando pasa por el punto $y = \frac{1}{2}$. El signo + indica que el cuerpo se mueve hacia abajo mientras que el signo − indica que lo hace hacia arriba. ☑

Ejercicios

1. Una partícula ejecuta un movimiento armónico simple con periodo 2π por segundo. Si la partícula comienza desde la posición $x = -4$ m con una velocidad de 4 m/s hallar:
   a) La ecuación del movimiento.
   b) La amplitud del movimiento.
   c) La frecuencia del movimiento.
   d) El ángulo fase.
   e) El tiempo t cuando la partícula atraviesa por primera vez la posición de equilibrio.
2. Una partícula ejecuta un movimiento armónico simple. En $t = 0$ su velocidad es 0 y está a 5 m de la posición de equilibrio. En $t = \frac{1}{4}$ su velocidad de nuevo es 0 y su posición una vez más es 5 m de la posición de equilibrio.
   a) Hallar la posición y velocidad como función del tiempo.
   b) Hallar la frecuencia y amplitud.
   c) ¿Cuándo y con qué velocidad la partícula atraviesa la posición de equilibrio?
3. Una partícula ejecuta un movimiento armónico simple y al final de cada $\frac{3}{4}$ de segundo pasa por la posición de equilibrio con una velocidad de ± 8 m/s.
   a) Hallar su ecuación de movimiento.
   b) Hallar el periodo, la frecuencia y amplitud del movimiento.
4. Una partícula ejecuta un movimiento armónico simple con periodo $a\pi$ s. Su velocidad en $t = 0$, cuando pasa por el punto $x = x_1$, es $\pm v_1$. Hallar su ecuación de movimiento.
5. Una partícula ejecuta un movimiento armónico simple, su frecuencia es 3 ciclos por segundo. En $t = 1$ seg la partícula está a 3 m de la posición de equilibrio a una velocidad de 6 m/s. Hallar la ecuación del movimiento.
6. Un objeto que pesa 8 kg que se mueve en linea recta es atraído hacia el origen por una fuerza F que es proporcional a la distancia del objeto

al origen. Si esta fuerza es de 6 N a una distancia de -2 m, hallar la frecuencia natural del sistema.

7. Un objeto de masa m que se mueve en linea recta es repelido desde el origen por una fuerza F. Si la fuerza es proporcional a la distancia del objeto al origen, hallar la posición del objeto en función del tiempo (note que el objeto no ejecuta un movimiento armónico simple).
8. Un cuerpo de 12 kg se engancha a un resorte helicoidal y lo estira 6 cm, luego este regresa a su posición inicial, se estira 4 cm y se suelta. Hallar la ecuación del movimiento, también el periodo, frecuencia y amplitud del movimiento. ¿Con qué velocidad el cuerpo cruza la posición de equilibrio?
9. Un cuerpo de 10 kg estira un resorte 3 cm, luego de regresar al reposo se estira 6 cm y comienza a oscilar.
   a) Hallar la posición y velocidad al final de 1 s.
   b) ¿Cuándo y con qué velocidad el cuerpo pasa por primera vez por la posición de equilibrio?
   c) ¿Cual es la velocidad del cuerpo cuando está a -3 cm del equilibrio?
   d) ¿Cuándo su velocidad será de 2 m/s y en qué posición estará en ese instante?
   e) ¿Cual es el periodo, frecuencia y amplitud del movimiento?

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. a) $x(t) = 4\sqrt{2}\sin\left(-\frac{\pi}{4} + t\right)$.
   b) 5.
   c) 1 rad/s.
   d) $-\frac{\pi}{4}$.
   e) $\frac{\pi}{4}$ segundos.
2. a) $x(t) = 5\cos(8\pi t)$; $v(t) = -40\pi\sin(8\pi t)$.
   b) 8π rad/s.
   c) $\frac{1}{16}$ s, -40π m/s.
3. a) $x(t) = \frac{6}{\pi}\sin\left(\frac{4}{3}\pi t\right)$.
   b) $\frac{3}{2}$ s, $\frac{4}{3}\pi$ rad/s o $\frac{2}{3}$ ciclos por segundo, $\frac{6}{\pi}$ m.
4. $x(t) = \sqrt{x_1^2 + a^2v_1^2/4}\,\sin\left(\phi + \frac{2t}{a}\right)$, donde $\phi = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+a^2v_1^2/4}}$.
5. $x(t) = \sqrt{9 + 1/\pi^2}\,\sin(\phi + 6\pi t)$, donde $\phi = \arcsin\left(\frac{3\pi}{\sqrt{9\pi^2+1}}\right)$.
6. $\sqrt{12}$ rad/s o $\frac{\sqrt{6}}{8\pi}$ ciclos por segundo.

7. $x(t) = c_1 e^{\sqrt{\frac{k}{m}}t} + c_2 e^{-\sqrt{\frac{k}{m}}t}$, donde k es una constante de proporcionalidad.
8. $y(t) = \frac{1}{3}\cos(8t)$, $\frac{\pi}{4}$ s, 8 rad/s o $\frac{4}{\pi}$ ciclos por segundo, $\frac{1}{3}$ m, $\pm\frac{8}{3}$ m/s.
9. a) 0,16 mts, -5,37 m/s.
   b) $\frac{\sqrt{2}\pi}{32}$ s, -5,66 m/s.
   c) $\pm 2\sqrt{6}$ m/s.
   d) 0,31 s, -0,47 m.
   e) $\frac{\sqrt{2}}{8}\pi$ s, $8\sqrt{2}$ rad/s, $\frac{1}{2}$ m.

4.2. Movimiento armónico amortiguado

Se dice que una partícula ejecuta un *movimiento armónico amortiguado* si su ecuación de movimiento satisface una ecuación diferencial de la forma

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + 2mr\frac{dx}{dt} + m\omega^2 x = 0, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + 2r\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0 \tag{4.23}$$

donde el coeficiente $2mr > 0$ es llamado el *coeficiente de resistencia del sistema*. Como antes ω es la frecuencia (no amortiguada) del sistema y m la masa de la partícula.

La ecuación auxiliar de (4.23) es $z^2 + 2rz + \omega^2 = 0$, la cual tiene como raíces $z_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - \omega^2}$. Estas muestran tres casos posibles, en las que las raíces son diferentes, iguales o complejas.

Caso 1. $r^2 - \omega^2 > 0$. Se tienen raíces reales distintas con $\omega \neq r$ y $r > \omega$.

$$x(t) = c_1 e^{z_1 t} + c_2 e^{z_2 t} = c_1 e^{(-r+\sqrt{r^2-\omega^2})t} + c_2 e^{(-r-\sqrt{r^2-\omega^2})t}. \tag{4.24}$$

Como ambos exponentes son cantidades negativas, podemos escribir (4.24) como

$$x(t) = c_1 e^{\alpha t} + c_2 e^{\beta t}, \quad \alpha, \beta < 0.$$

Si $c_1, c_2 \neq 0$ tienen igual signo, entonces, dado que $e^t > 0$ para todo t, no existe t^* tal que $x(t^*) = 0$ (es decir, el gráfico de la función x no cruza el origen, como lo muestra la figura 4.4).

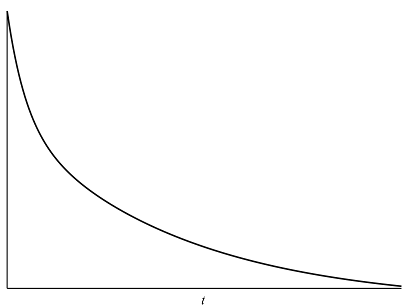


Figura 4.4: $c_1 c_2 > 0$.

Por otro lado, si $c_1, c_2 \neq 0$ además c_1 y c_2 tienen diferente signo, entonces existe t^* tal que $x(t^*) = 0$ (figura 4.5). El punto t^* será:

$$\begin{aligned} 0 &= x(t^*) = c_1 e^{\alpha t^*} + c_2 e^{\beta t^*} \\ e^{(\alpha-\beta)t^*} &= -\frac{c_2}{c_1} \\ t^* &= \frac{1}{\alpha - \beta} \ln\left|-\frac{c_2}{c_1}\right|. \end{aligned}$$

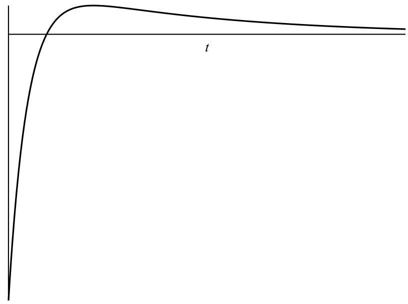


Figura 4.5: $c_1 c_2 < 0$.

Así, el gráfico que representa a la solución $x(t)$ cruza por el origen solo una vez, además $x(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Calculando $\frac{dx}{dt}$ tenemos:

$$\frac{dx}{dt} = c_1 \alpha e^{\alpha t} + c_2 \beta e^{\beta t}, \quad \alpha, \beta < 0.$$

Esta ecuación tiene la misma forma que $x(t)$ y por lo tanto solo tiene un punto t^{**} tal que $x'(t^{**}) = 0$, es decir la curva determinada por $x(t)$ tiene a lo más un máximo y un mínimo. Esto significa que el movimiento no es oscilatorio y termina con el tiempo.
En este caso la fuerza de amortiguamiento r es mayor que la fuerza de restitución ω y así evita la oscilación. El sistema es llamado *sobreamortiguado*.

Caso II. $r^2 - \omega^2 = 0$. Las dos raíces z_1 y z_2 son iguales. Esto quiere decir que la fuerza de amortiguamiento r es igual a la causada por la fuerza de restitución ω. La solución del sistema es:

$$\begin{aligned} x(t) =& c_1 e^{-rt} + c_2 t e^{-rt} \\ x'(t) =& -c_1 r e^{-rt} + c_2 e^{-rt} - c_2 r t e^{-rt}. \end{aligned}$$

Dado que $r > 0$, entonces $e^{-rt}, te^{-rt} \to 0$ cuando $t \to \infty$ y, como en el caso anterior, existe un único valor t^* tal que $x'(t^*) = 0$, el movimiento no es oscilatorio y termina con el tiempo. Decimos que el movimiento es *críticamente amortiguado* ya que una pequeña disminución de la fuerza de amortiguamiento provocaría un movimiento oscilatorio.

Caso III. $r^2 - \omega^2 < 0$. En este caso las raíces son imaginarias conjugadas $z_{1,2} = -r \pm \sqrt{\omega^2 - r^2}i$. La ecuación resultante del movimiento es:

$$x(t) = e^{-rt}\left(c_1 \cos\left(\sqrt{\omega^2 - r^2}t\right) + c_2 \sin\left(\sqrt{\omega^2 - r^2}t\right)\right),$$

la cual podemos escribir como

$$Ae^{-rt} \sin(\sqrt{\omega^2 - r^2}t + \phi),$$

con $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$. Debido al término $\sin(\sqrt{\omega^2 - r^2}t + \phi)$ en la solución, el movimiento es oscilatorio. La amplitud (amortiguada) del movimiento es Ae^{-rt} y como $r > 0$ este factor decrece cuando t crece y tiende a cero cuando $t \to \infty$. Así en el tiempo la partícula vibra con oscilación cada vez menor alrededor de la posición de equilibrio. Las funciones que aparecen en la solución no son periódicas ya que sus valores no se repiten; sin embargo, dado que el movimiento es oscilatorio, decimos que la función es amortiguada periódicamente y definimos su periodo (amortiguado) como el tiempo que toma la partícula, comenzando desde la posición de equilibrio, en hacer una oscilación completa. Así, su periodo amortiguado viene dado por

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - r^2}}.$$

La frecuencia (amortiguada) del movimiento es $\sqrt{\omega^2 - r^2}$ radianes por unidad de tiempo, o $\frac{\sqrt{\omega^2 - r^2}}{2\pi}$ ciclos por unidad de tiempo. El factor e^{-rt} se llama factor de amortiguamiento. Como este factor decrece con el tiempo, el movimiento eventualmente acaba. Cuando $t = \frac{1}{r}$, el factor de amortiguamiento es $\frac{1}{e}$. El tiempo que toma el factor de amortiguamiento en alcanzar este valor $1/e$ es llamado constante de tiempo. Así la constante de tiempo es $\tau = 1/r$.

Decimos que el movimiento está *subamortiguado* porque la fuerza de amortiguamiento r es pequeña en comparación con la fuerza de restitución ω.

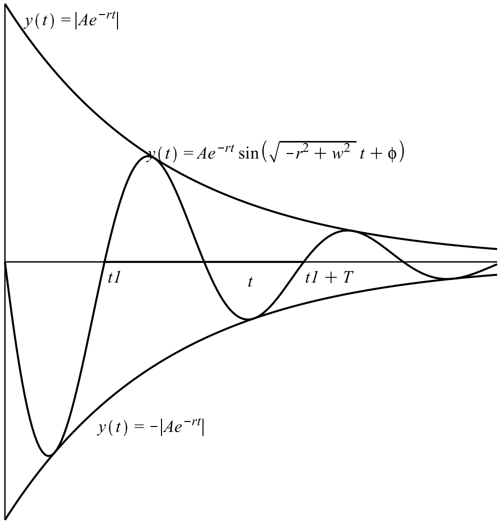


Figura 4.6: Movimiento oscilatorio cuya amplitud decrece con el tiempo.

El desplazamiento de una masa sujeta a un resorte como se presenta en la parte inicial del movimiento armónico simple se amortigua por fuerzas externas como por fuerzas internas. Por lo menos habrá la fuerza de amortiguación debida al medio que lo rodea. Se ha determinado que las fuerzas de amortiguamiento son múltiplos de $\frac{dx}{dt}$; es decir, esta fuerza es proporcional a la velocidad instantánea de la masa. Llamamos b a la constante de proporcionalidad. La segunda ley de Newton dice que:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0.$$

Dividiendo por m, $2\lambda = \frac{b}{m}$ y haciendo $\omega^2 = \frac{k}{m}$ tenemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\lambda\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0.$$

Ejemplo 4.20. *El movimiento de un sistema masa-resorte con amortiguamiento está descrito por*

$$y''(t) + by'(t) + 64y(t) = 0, \quad y(0) = -\frac{1}{2}, \quad y'(0) = 2.$$

Determinar la ecuación de movimiento y bosqueje la gráfica para los siguientes valores $b = 0, 10, 16$ *y* 20.

Solución. La ecuación auxiliar está dada por

$$m^2 + bm + 64 = 0,$$

cuya solución es

$$m = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 256}}{2} = \frac{-b}{2} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 256}}{2}.$$

1. $b = 0$. En este caso las raices de la ecuación son complejas (puras):

$$m_1 = \frac{16i}{2} = 8i$$
$$m_2 = -8i.$$

La ecuación de movimiento (subamortiguado) está dada por

$$y(t) = c_1 \cos(8t) + c_2 \sin(8t).$$

Ahora usamos las condiciones iniciales $y(0) = -1/2$, $y'(0) = 2$ para hallar c_1 y c_2; reemplazamos las condiciones iniciales en la última ecuación y obtenemos:

$$c_1 = 1,$$
$$c_2 = 0.$$

Por lo tanto, la ecuación de movimiento de la masa es

$$y(t) = \cos(8t),$$

donde $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = 1$ es el factor de amortiguamiento.
Para hallar el ángulo ϕ, hacemos $\tan(\phi) = \frac{c_1}{c_2}$, el cual es indeterminado; ademas ϕ es un ángulo en el primer cuadrante: $\phi = \frac{\pi}{2}$. El gráfico que describe el movimiento de la masa se muestra en la figura 4.7.

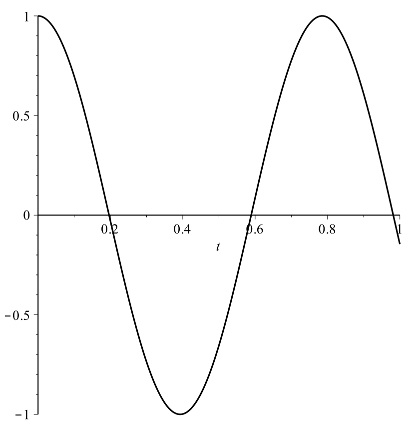


Figura 4.7: $y(t) = \sin\left(8t + \frac{\pi}{2}\right)$.

2. $b = 10$. Las raíces de la ecuación son complejas conjugadas.

$$m_1 = -5 + \sqrt{39}i,$$
$$m_2 = -5 - \sqrt{39}i.$$

La ecuación del movimiento (subamortiguado) está dada por

$$\begin{aligned} y(t) =& e^{-5t}(c_1 \cos(\sqrt{39}t) + c_2 \sin(\sqrt{39}t)) \\ y'(t) =& e^{-5t}(c_1(-5\cos(\sqrt{39}t) - \sqrt{39}\sin(\sqrt{39}t)) \\ &+ c_2(\sqrt{39}\cos(\sqrt{39}t) - \sqrt{39}\sin(\sqrt{39}t))). \end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales tenemos:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} =& y(0) = c_1 \\ 2 =& y'(0) = -5c_1 + \sqrt{39}c_2, \end{aligned}$$

esto es, $c_1 = -\frac{1}{2}$ y $c_2 = -\frac{\sqrt{39}}{78}$. Por lo tanto, la ecuación del movimiento en este caso es

$$\begin{aligned} y(t) =& e^{-5t}\left(-\frac{1}{2}\cos(\sqrt{39}t) - \frac{\sqrt{39}}{78}\sin(\sqrt{39}t)\right) \\ =& \frac{\sqrt{78}}{39}e^{-5t}(\sin(\sqrt{39}t) + \phi). \end{aligned}$$

Para hallar el ángulo ϕ, hacemos $\tan(\phi) = \frac{c_1}{c_2}$ y tenemos que este ángulo es $\phi \approx 0{,}15$ rad. El gráfico que describe el movimiento de la masa se muestra en la figura 4.8.

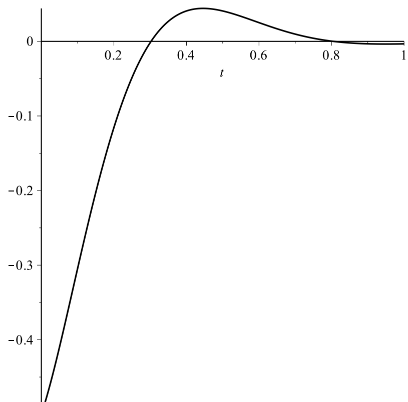


Figura 4.8: $y(t) = \frac{\sqrt{78}}{39}e^{-5t}(\sin(\sqrt{39}t) + \phi)$.

3. $b = 16$. En este caso las raíces son reales y se repiten $m_1 = m_2 = 8$. La ecuación del movimiento (críticamente amortiguado) es

$$\begin{aligned} y(t) =& c_1 e^{-8t} + c_2 t e^{-8t} \\ y'(t) =& -8c_1 e^{-8t} + c_2 e^{-8t} - 8c_2 t e^{-t}. \end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales tenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} =& y(0) = c_1 \\ 2 =& y'(0) = -8c_1 + c_2. \end{aligned}$$

Así, $c_1 = -\frac{1}{2}$ y $c_2 = -2$. La ecuación finalmente queda como

$$y(t) = -\frac{1}{2} e^{-8t} - 2te^{-8t}.$$

El gráfico que describe el movimiento de la masa se muestra en la figura 4.9.

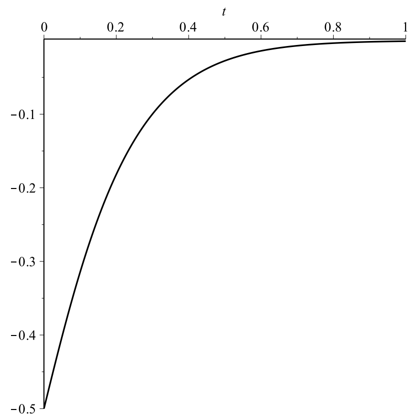


Figura 4.9: $y(t) = -\frac{1}{2} e^{-8t} - 2te^{-8t}$.

4. $b = 20$. Las raíces son reales y diferentes $m_1 = -4$, $m_2 = -16$. La ecuación del movimiento (sobreamortiguado) es

$$\begin{aligned} y(t) =& c_1 e^{-4t} + c_2 e^{-16t} \\ y'(t) =& -4c_1 e^{-4t} - 16c_2 e^{-16t}. \end{aligned}$$

Resolvemos el problema de valor inicial usando las condiciones iniciales en las ecuaciones anteriores

$$-\frac{1}{2} = y(0) = c_1 + c_2$$

y

$$2 = y'(0) = -4c_1 - 16c_2.$$

Las soluciones del sistema son $c_1 = -\frac{1}{2}$ y $c_2 = 0$. La ecuación del movimiento queda de la forma:

$$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-4t}.$$

El gráfico que describe el movimiento de la masa se muestra en la figura 4.10.

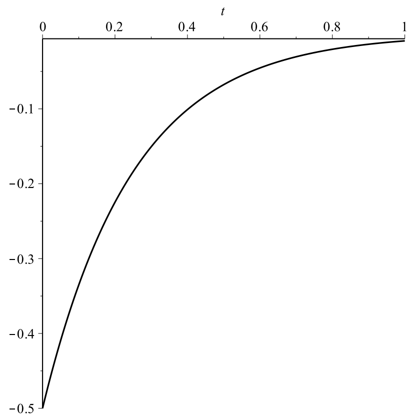


Figura 4.10: $y(t) = -\frac{1}{2}e^{-4t}$.

☑

Ejemplo 4.21. *Un resorte helicoidal se estira 32 pulgadas al ser colgado de él objeto con un peso de 2 libras y luego entra en equilibrio. Se le da ahora un tirón de 1 pie y se libera. Si el resorte se sumerge en un medio cuyo coeficiente de resistencia es 1/2, hallar la ecuación de movimiento del objeto. Suponga que la fuerza de resistencia es proporcional a la velocidad.*

Solución. La segunda ley de Newton, debido al factor de resistencia, en este caso queda como

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky - \frac{1}{2}\frac{dy}{dt}.$$

Como 2 libras estiran el resorte 32 pulgadas (1 pie=12 pulgadas), entonces 32 pulgadas $=\frac{8}{3}$ pies. Así, dado que $ky = mg$ tenemos

$$\frac{8}{3}k = 2, \quad g = 32 \text{ pies/s}^2,$$

la masa del objeto, por lo tanto, es

$$m = \frac{ky}{g} = \frac{1}{16}.$$

De allí tenemos la ecuación diferencial:

$$\frac{1}{16}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{2}\frac{dy}{dt} + \frac{3}{4}y = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 8\frac{dy}{dt} + 12y = 0,$$

cuya solución es

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{-6t}, \quad y'(t) = -2c_1e^{-2t} - 6c_2e^{-6t}.$$

Las condiciones iniciales son $y(0) = 1, y'(0) = 0$. Usando las condiciones iniciales nos queda el sistema

$$\begin{aligned} 1 =& c_1 + c_2 \\ 0 =& -2c_2 - 6c_2, \end{aligned}$$

cuya solución es $c_1 = \frac{3}{2}$ y $c_2 = -\frac{1}{2}$. Luego, ecuación del movimiento del objeto es

$$y(t) = \frac{3}{2}e^{-2t} - \frac{1}{2}e^{-6t}.$$

☑

Ejemplo 4.22. *Si el coeficiente de resistencia en el ejemplo anterior es $\frac{3}{8}$ en vez de $\frac{1}{2}$, hallar:*

1. *La ecuación del movimiento del sistema*
2. *El factor de amortiguamiento*
3. *La amplitud amortiguada del movimiento*
4. *El periodo amortiguado del movimiento*
5. *La frecuencia amortiguada del movimiento*
6. *La constante del tiempo*

Solución. 1. La ecuación diferencial del movimiento en este caso es

$$\frac{1}{16}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{3}{8}\frac{dy}{dt} + \frac{3}{4}y = 0, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} + 6\frac{dy}{dt} + 12y = 0.$$

La solución es

$$y(t) = Ae^{-3t}\sin(\sqrt{3}t + \phi)$$

y la velocidad es

$$y'(t) = -3Ae^{-3t}\sin(\sqrt{3}t + \phi) + \sqrt{3}Ae^{-3t}\cos(\sqrt{3}t + \phi).$$

Las condiciones iniciales son $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. De donde tenemos el sistema

$$
\begin{aligned}
1 =& A\sin(\phi)\\
0 =& -3A\sin(\phi) + \sqrt{3}A\cos(\phi).
\end{aligned}
$$

Luego, $A = \frac{1}{\sin(\phi)}$ y

$$0 = -3 + \sqrt{3}\cot(\phi), \quad \cot(\phi) = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

tenemos así

$$\phi = \frac{\pi}{6} \text{ ó } \frac{7\pi}{6}, \quad \sin(\phi) = \pm\frac{1}{2}.$$

Si suponemos $\sin(\phi) = \frac{1}{2}$, $A = 2$ y la ecuación del movimiento queda

$$y(t) = 2e^{-3t}\sin\left(\sqrt{3}t + \frac{\pi}{6}\right).$$

2. El factor de amortiguamiento es e^{-3t}.
3. La amplitud amortiguada del movimiento es $2e^{-3t}$.
4. El periodo amortiguado del movimiento es $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ s.
5. La frecuencia amortiguada del movimiento $\sqrt{3}$ rad/s $\equiv \frac{\sqrt{3}}{2}$ ciclos por segundo.
6. La constante del tiempo $\tau = \frac{1}{3}$ s.

☑

Ejercicios

1. Una partícula se mueve en linea recta según la ley

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2r\frac{dx}{dt} + x = 0,$$

donde r es constante y x es el desplazamiento de la partícula desde su punto de equilibrio.

a) ¿Para qué valores de r el sistema será subamortiguado, críticamente amortiguado, sobreamortiguado?

b) Comprobar sus respuesta resolviendo la ecuación con $r = -1$, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2.

c) ¿Para cuál valor de r el movimiento será oscilatorio con un periodo amortiguado de 3π?

d) ¿Existe un valor de r que haga el periodo amortiguado menor que 2π?

2. Una partícula ejecuta un movimiento armónico amortiguado. En 10 segundos el factor de amortiguamiento decrece en un 80 %. Su periodo de amortiguamiento es 2 s. Hallar la ecuación diferencial del movimiento.
3. Un peso de 16 libras estira un resorte helicoidal 3/5 pies. El coeficiente de resistencia del resorte es 8. Después que el resorte regresa al origen, este es estirado 3 pulgadas adicionales y luego se libera. Hallar la ecuación del movimiento.
4. En el ejercicio anterior cambie el coeficiente de resistencia a 10, luego hallar la ecuación del movimiento.
5. La frecuencia natural de un resorte es 1 ciclo por segundo. Después de que el resorte se sumerge en un medio resistente su frecuencia se reduce a $\frac{2}{3}$ de ciclo por segundo.
   a) ¿Cuál es el factor de amortiguamiento?
   b) ¿Cuál es la ecuación diferencial del movimiento?

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *a*) Subamortiguado si $0 < r < 1$, críticamente amortiguado si $r = 1$ y sobreamortiguado si $r > 1$.
   b) $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^t$.
   $x(t) = Ae^{\frac{1}{2}t}\sin(\sqrt{3}/2t + \phi)$.
   $x(t) = Ae^{-\frac{1}{2}t}\sin(\sqrt{3}/2t + \phi)$.
   $x(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-t}$.
   $x(t) = c_1 e^{(-2+\sqrt{3})t} + c_2 e^{(-2-\sqrt{3})t}$.
   c) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.
   d) No.
2. $\frac{d^2y}{dt^2} + 0.322\frac{dy}{dt} + 9.896y = 0$.
3. $y(t) = e^{-8t}\left(\frac{1}{4} + 2t\right)$.
4. $y(t) = \frac{1}{3}e^{-4t} - \frac{1}{12}e^{-16t}$.
5. *a*) $e^{-4,68t}$.
   b) $y'' + 9,37y' + 39,5y = 0$.

Capítulo

cinco

Transformada de Laplace y problemas de Cauchy

$$\mathcal{L}(f)(t) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

En este capítulo se estudiará un método de resolución de problemas de Cauchy con valor inicial en $x_0 = 0$, llamado *método de la transformada de Laplace*. La idea consiste en transformar un problema analítico en uno algebraico, más fácil de resolver, y luego trasformar esta solución al problema original (analítico). Este método fue inspirado por Leonhard Euler y utilizado extensivamente por Pierre-Simon Laplace, de ahí que se conozca con el nombre de trasformada de Laplace. Esta transformada hace parte de las llamadas transformadas integrales, que en su forma general se escriben como

$$T\left[f(x)\right] = \int_I K(t,s)f(t)dt.$$

Donde I es un intervalo de la recta real, $K(t,s)$ se conoce como el *núcleo* de la transformación y s es la variable de la transformada. El caso que vamos a considerar es cuando $I = [0,\infty)$ y $K(t,s) = e^{-st}$.

1. Transformada de Laplace: definición y propiedades

Definición 5.1. Sea f una función definida sobre $[0,\infty)$, se define la transformada de Laplace de f, que denotaremos por $\mathfrak{L}(f)$ o $F(s)$, como

$$\mathfrak{L}(f) = F(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt,$$

siempre que esta integral impropia converja. Nótese la transformada de Laplace aplicada a una función es de nuevo una función, a saber, $\mathfrak{L}(f)$ o F.

Ejemplo 5.1. *Hallar la transformada de Laplace de la función constante definida por* $f(t) = 1$.

Solución.

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(f) &= \int_0^\infty 1e^{-st}dt = \lim_{N\to\infty}\int_0^N 1e^{-st}dt\\ &= \lim_{N\to\infty} -\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{t=0}^{t=N} = \lim_{N\to\infty}\left(-\frac{1}{s}e^{-sN} + \frac{1}{s}\right)\\ &= \frac{1}{s},\ \text{siempre que } s > 0.\end{aligned}$$

☑

Ejemplo 5.2. *Determinar la transformada de Laplace de la función dada por* $f(t) = t^2$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(t^2) &= \int_0^\infty t^2 e^{-st} dt \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_0^N t^2 e^{-st} dt \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[-\frac{t^2 e^{-st}}{s} - \frac{2te^{-st}}{s^2} - \frac{2e^{-st}}{s^3} \right] \Bigg|_0^N \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[-\frac{N^2 e^{-sN}}{s} - \frac{2Ne^{-sN}}{s^2} - \frac{2e^{-sN}}{s^3} + \frac{2}{s^3} \right].
\end{aligned}$$

Como $-\frac{N^2 e^{-sN}}{s} - \frac{2Ne^{-sN}}{s^2} - \frac{2e^{-sN}}{s^3} \to 0$ cuando $s > 0$ y $N \to \infty$, obtenemos que

$$F(s) = \frac{2}{s^3}, \text{ para } s > 0$$

es la transformada de Laplace de $f(t) = t^2$. ☑

Ejemplo 5.3. *Determinar la transformada de Laplace de la función dada por* $f(t) = \cos(2t)$.

Solución.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(\cos(2t)) &= \int_0^\infty \cos(2t) e^{-st} dt \\
&= \lim_{N\to\infty} \int_0^N \cos(2t) e^{-st} dt \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\frac{2\sin(2t)e^{-st}}{s^2+4} - \frac{s\cos(2t)e^{-st}}{s^2+4} \right] \Bigg|_0^N \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\frac{2\sin(2N)e^{-sN}}{s^2+4} - \frac{s\cos(2N)e^{-sN}}{s^2+4} + \frac{s}{s^2+4} \right].
\end{aligned}$$

Como $\frac{2\sin(2N)e^{-sN}}{s^2+4} - \frac{s\cos(2N)e^{-sN}}{s^2+4} \to 0$ cuando $s > 0$ y $N \to \infty$, concluimos que

$$F(s) = \frac{s}{s^2+4}, \text{ para } s > 0$$

es la transformada de Laplace de $f(t) = \cos(2t)$. ☑

Ejemplo 5.4. *Determinar la transformada de Laplace de la función definida como*

$$f(x) = \begin{cases} e^{2t}, & 0 < t < 3 \\ 1, & t \geq 3 \end{cases}.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(f(t)) &= \int_0^3 e^{2t}e^{-st}dt + \int_3^\infty 1e^{-st}dt \\
&= \int_0^3 e^{2t}e^{-st}dt + \lim_{N\to\infty}\int_0^N e^{-st}dt \\
&= \left(\frac{e^{t(2-s)}}{2-s}\right)\Bigg|_0^3 + \lim_{N\to\infty}\left(\frac{e^{-st}}{-s}\right)\Bigg|_3^N \\
&= \frac{e^{3(2-s)}}{2-s} - \frac{1}{2-s} + \lim_{N\to\infty}\frac{e^{-sN}}{-s} - \frac{e^{-s3}}{-s}.
\end{aligned}$$

Como $\frac{e^{-Ns}}{-s} \to 0$ cuando $s > 0$ y $N \to \infty$, obtenemos que

$$F(s) = \frac{1 - e^{-3(2-s)}}{s-2} + \frac{e^{-3s}}{s}, \text{ para } s > 2$$

es la transformada de Laplace buscada. ☑

Ejemplo 5.5. *Determinar la transformada de Laplace de la función parte entera:*

$$[x] := \textit{ mayor entero menor o igual que } x.$$

Solución.

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\big([t]\big) &= \int_0^\infty [t]e^{-st}dt = \int_1^\infty [t]e^{-st}dt \\
&= \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} [t]e^{-st}dt = \sum_{n=1}^\infty \int_n^{n+1} ne^{-st}dt \\
&= \sum_{n=1}^\infty n\left(-\frac{1}{s}e^{-st}\right)\Bigg|_{t=n}^{t=n+1} = \frac{1}{s}\sum_{n=1}^\infty n\left(e^{-sn} - e^{-s(n+1)}\right) \\
&= \frac{1}{s}\sum_{n=1}^\infty ne^{-sn}(1 - e^{-s}) = \frac{1 - e^{-s}}{s}\sum_{n=1}^\infty n(e^{-s})^n \\
&= \frac{1 - e^{-s}}{s}\frac{e^{-s}}{\left(1 - e^{-s}\right)^2} = \frac{1}{s(e^s - 1)}, \quad \text{si } s > 0.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\mathfrak{L}\big([t]\big) = \frac{1}{s(e^s - 1)}.$$

Aquí se usó el valor de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad \text{si } |x| < 1.$$

Nótese cómo la transformada de Laplace suaviza una función como parte entera. ☑

La siguiente propiedad justifica el nombre de transformada.

Teorema 5.1. *Sean f_1 y f_2 funciones cuyas transformadas de Laplace existen para $s > \alpha$ y sea k una constante. Entonces para $s > \alpha$.*

$$\mathfrak{L}(kf_1 + f_2) = k\mathfrak{L}(f_1) + \mathfrak{L}(f_2).$$

La pregunta que sigue es ¿qué condiciones son suficientes para garantizar la existencia de la transformada de Laplace de una función? Para ello presentamos las siguientes definiciones que serán útiles para responder tal inquietud.

Definición 5.2. Una función f es continua por partes (o a trozos) en un intervalo finito $[a, b]$ si f es continua en cada punto de $[a, b]$, excepto, quizá, en un número finito de puntos donde f tiene una discontinuidad de salto (los límites laterales existen). Una función f es continua por partes en $[0, \infty)$ si f es continua por partes en $[0, N]$ para todo $N > 0$.

Por supuesto, todas las funciones continuas son continuas a trozos.

Ejemplo 5.6. *La función dada anteriormente, definida como*

$$f(x) = \begin{cases} e^{2t}, & 0 < t < 3 \\ 1, & t \geq 3 \end{cases},$$

es continua a trozos, pues en $x = 3$, que es el único punto de discontinuidad, los límites laterales existen (y son finitos):

$$\lim_{t\to 3^-} f(t) = \lim_{t\to 3^-} e^{2t} = e^6 \;\; y \;\; \lim_{t\to 3^+} f(t) = \lim_{t\to 3^+} 1 = 1.$$

☑

Definición 5.3. Una función f es de orden exponencial α si existen constantes positivas T y M tales que

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \text{ para todo } t \geq T.$$

En otras palabras, f es de orden exponencial si $|f|$ se puede acotar por encima por una función de la forma $Me^{\alpha t}$ con $M > 0$ a partir de un número positivo T en adelante.

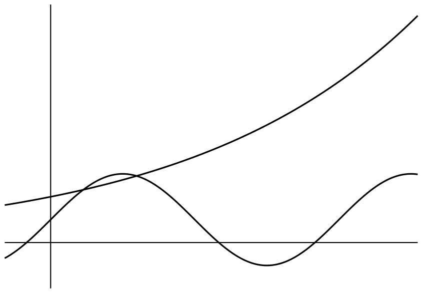


Figura 5.1: Funciones $f(t) = \sin(t) + \frac{1}{2}$ y $g(t) = e^{\frac{1}{5}t}$. La función $f(t)$ es de orden exponencial $1/5$ para todo $t \geq 2$.

Ejemplo 5.7. *Cualquier función de la forma $f(t) = Me^{\alpha t}$ claramente es de orden exponencial con $t > 0$.* ☑

Ejemplo 5.8. *Toda función f acotada con $\left|f(t)\right| \leq M$ es de orden exponencial, tomando $\alpha = 0$. En particular, las funciones $\sin(x)$ y $\cos(x)$ son de orden exponencial.* ☑

Ejemplo 5.9. *La función f definida como $f(t) = t^n$ es de orden exponencial. En efecto, se sabe que para $\alpha > 0$*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^n}{e^{\alpha t}} = 0.$$

Esto significa que dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$, tal que si $T > N$, entonces $\left|\frac{t^n}{e^{\alpha t}}\right| < \varepsilon$; en particular, tomando $\varepsilon = 1$, existirá $N_0 > 0$ tal que $\left|\frac{t^n}{e^{\alpha t}}\right| < 1$, si y solo si, $\left|t^n\right| < e^{\alpha t}$, siempre que $t > N_0$. Como consecuencia de esto, puede verse que toda función polinómica es de orden exponencial. ☑

Ejemplo 5.10. *La función parte entera es de orden exponencial. Esto se debe al hecho que*

$$\left|[t]\right| \leq t + 1, \quad \textit{para } \ t > 0,$$

pero la función del lado derecho es de orden exponencial (pues es un polinomio), luego la función parte entera es de orden exponencial. ☑

Ejemplo 5.11. *La función definida por* $f(t) = e^{t^2}$*, no es de orden exponencial puesto que para cualquier* $\alpha > 0$*, la función*

$$\left|\frac{e^{t^2}}{e^{\alpha t}}\right| = e^{t^2-\alpha t}$$

no es acotada. ☑

Teorema 5.2. *Si* f *es continua por partes en* $[0, \infty)$ *y de orden exponencial* α*, entonces* $\mathfrak{L}(f(t))$ *existe para* $s > \alpha$*.*

Obs El teorema anterior nos da condiciones necesarias para la existencia de la transformada de Laplace de una función f. Sin embargo, estas condiciones no son suficientes. Por ejemplo, la función $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ tiene una asíntota vertical en $t = 0$ (y por tanto no es continua por partes en $t = 0$, ni de orden exponencial cerca de 0), pero

$$\mathfrak{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad \text{(ver ejemplo 5.15).}$$

La siguiente proposición nos da un criterio sencillo para saber cuándo una función F no puede ser una transformada de Laplace.

Proposición 5.3. *Si* $\lim\limits_{s\to\infty} F(s) \neq 0$*, entonces* F *no es la transformada de Laplace de ninguna función de orden exponencial.*

Ejemplo 5.12. *Una función constante* $F(s) = c \neq 0$ *no puede ser la transformada de Laplace de ninguna función de orden exponencial.* ☑

Ejemplo 5.13. *La función* $F(s) = \frac{s}{1+s}$ *no puede ser una transformada de Laplace de ninguna función de orden exponencial, pues* $\lim_{s\to\infty} F(s) = 1 \neq 0$. ☑

En la práctica estaremos trabajando siempre con funciones de orden exponencial.

Por otro lado, una función de principal importancia en diversas áreas del saber es la llamada *función gamma* que se define como $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}dt$ para $\alpha > 0$ (pues esta integral siempre converge para estos valores) y puede verse que

$$\Gamma(n+1) = n!.$$

Como un caso especial de la función gamma obtenemos la transformada de Laplace siguiente.

Ejemplo 5.14.

$$\mathfrak{L}(t^\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \textit{para} \;\; \alpha > -1.$$

Solución. Por definición tenemos

$$\mathfrak{L}(t^\alpha) = \int_0^\infty t^\alpha e^{-st} dt.$$

Hacemos el cambio de variables $u = st$, luego $du = sdt$

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}(t^\alpha) &= \int_0^\infty t^\alpha e^{-st} dt = \int_0^\infty \left(\frac{u}{s}\right)^\alpha e^{-u} \frac{du}{s} = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty u^\alpha e^{-u} du \\ &= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty u^{(\alpha+1)-1} e^{-u} du = \frac{1}{s^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha+1), \qquad \alpha+1>0.\end{aligned}$$

Lo que queríamos demostrar. ☑

En particular tenemos,

$$\mathfrak{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Ejemplo 5.15. *La función definida por*

$$h(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{2}}, & si \;\; t>0 \\ 0, & si \;\; t=0 \end{cases},$$

no es continua a trozos; de hecho, la discontinuidad en 0 es infinita; sin embargo, la transformada de Laplace existe, pues

$$\mathfrak{L}(t^{-\frac{1}{2}}) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{\frac{1}{2}}}.$$

Además, dado que la función gamma satisface la siguiente propiedad de reflexión: $\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}$, *concluimos que*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\frac{\pi}{2})} = \pi.$$

Por lo tanto, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ *y así* $\mathfrak{L}(t^{-\frac{1}{2}}) = \frac{\sqrt{\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}$. ☑

La siguiente tabla muestra la transformada de Laplace de algunas funciones básicas.

$\mathbf{f(t) = \mathfrak{L}^{-1}(F(s))}$	$\mathbf{\mathfrak{L}(f(t)) = F(s)}$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$t^n e^{at}, \quad n = 1, 2, \cdots$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \quad s > a$
$t^p, p > -1$	$\frac{\Gamma(p+1)}{s^{p+1}}, s > 0$
$\sin(bt)$	$\frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0$
$\cos(bt)$	$\frac{s}{s^2+b^2}, \quad s > 0$
$\sinh(bt)$	$\frac{b}{s^2-b^2}, \quad s > \lvert b\rvert$
$\cosh(bt)$	$\frac{s}{s^2-b^2}, \quad s > \lvert b\rvert$
$U(t-c)$	$\frac{e^{-cs}}{s}, \quad s > 0$
$f(at)$	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}, \quad s > a$
$(-t)^n f(t)$	$F^{(n)}(s)$
$\delta(t-c)$	e^{-cs}
$[t]$	$\frac{1}{s(e^s-1)}, \quad s > 1$

Tabla 5.1: Algunas transformadas de Laplace.

Ejemplo 5.16. *Determinar la transformada de Laplace de* $t^3 - te^t + e^{4t}\cos(t)$.

Solución. Sabemos que la transformada de Laplace es una transformación lineal; por lo tanto,

$$\mathfrak{L}\big(t^3 - te^t + e^{4t}\cos(t)\big) = \mathfrak{L}(t^3) - \mathfrak{L}(te^t) + \mathfrak{L}(e^{4t}\cos(t)).$$

Para hallar $\mathfrak{L}(t^3)$ utilizamos la fórmula del renglón 3 de la tabla anterior, en este caso $n = 3$, $a = 0$ y $\mathfrak{L}(t^3) = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$. Para hallar $\mathfrak{L}(te^t)$ utilizamos la fórmula del renglón 3, en este caso $n = 1$, $a = 1$ y $\mathfrak{L}(te^t) = \frac{1!}{(s-1)^{1+1}} = \frac{1}{(s-1)^2}$.

Finalmente, para hallar $\mathfrak{L}(e^{4t}\cos(t))$, utilizamos la fórmula del renglón 13 de la tabla con $a = 4$ y $b = 1$, en cuyo caso tenemos:

$$\mathfrak{L}(e^{4t}\cos(t)) = \frac{s-4}{(s-4)^2+1},$$

con lo que obtenemos,

$$\mathfrak{L}\big(t^3 - te^t + e^{4t}\cos(t)\big) = \mathfrak{L}(t^3) - \mathfrak{L}(te^t) + \mathfrak{L}(e^{4t}\cos(t))$$

así,

$$\mathfrak{L}\big(t^3 - te^t + e^{4t}\cos(t)\big) = \frac{6}{s^4} - \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{s-4}{(s-4)^2+1}.$$

Lo que queremos hallar. ☑

Ejemplo 5.17. *Determinar la transformada de Laplace de* $e^{3t}\sin(6t) - t^3 + e^t$.

Solución. Dejamos al lector que identifique las fórmulas que hemos utilizado.

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\big(e^{3t}\sin(6t) - t^3 + e^t\big) =& \mathfrak{L}(e^{3t}\sin(6t)) - \mathfrak{L}(t^3) + \mathfrak{L}(e^t)\\ =& \frac{6}{(s-3)^2+36} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{(s-1)}.\end{aligned}$$

☑

Ejemplo 5.18. *Hallar la transformada de Laplace de la función parte decimal definida por* $f(t) = t - [t]$, *conocida comúnmente como* diente de sierra.

Solución. Aplicando la linealidad de la transformada de Laplace tenemos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\big(t - [t]\big) =& \mathfrak{L}(t) - \mathfrak{L}([t])\\ =& \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s(e^s-1)},\end{aligned}$$

la transformada de Laplace de la función diente de sierra. ☑

Ejemplo 5.19. *Con los resultados que aparecen en la tabla 5.1 calcular* $\mathfrak{L}\big(\sin^2(at)\big)$.

Solución. Sabemos que $\sin^2(t) = \frac{1-\cos(2t)}{2}$, de tal forma que

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\big(\sin^2(at)\big) =& \mathfrak{L}\left(\frac{1-\cos(2at)}{2}\right)\\ =& \frac{1}{2}\mathfrak{L}(1) - \frac{1}{2}\mathfrak{L}(\cos(2at))\\ =& \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{(s^2+4a^2)}\right) = \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}.\end{aligned}$$

☑

Teorema 5.4. *Si la transformada de laplace* $\mathfrak{L}(f(t)) = F(s)$ *existe para* $s > \alpha$, *entonces*

$$\mathfrak{L}(e^{at}f(t)) = F(s-a) \text{ para } s > \alpha + a.$$

Ejemplo 5.20. *Como sabemos, la función definida como $f(t) = 1$ tiene transformada $\frac{1}{s}$. Por tanto, la función g definida como $g(t) = e^{at}1$ tiene transformada $G(s) = F(s-a) = \frac{1}{s-a}$, como se había visto antes.* ☑

Ejemplo 5.21. *Como sabemos, la función definida como $f(t) = \cos(bt)$ tiene transformada $F(s) = \frac{s}{s^2+b^2}$. Por tanto, la función g definida como $g(t) = e^{at}\cos(bt)$ tiene transformada $G(s) = F(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$, como se había visto antes.* ☑

Ejemplo 5.22. *Encontrar una función cuya transformada de Laplace sea*

$$G(s) = \frac{1}{s^2+s+1}.$$

Solución.

$$G(s) = \frac{1}{s^2+s+1} = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}.$$

Vemos que esta función corresponde a un caso particular del ejemplo anterior con $a = -\frac{1}{2}$ y $b = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, luego la función que buscamos es dada por $g(t) = \frac{2\sqrt{3}}{3}e^{-\frac{1}{2}t}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$. ☑

El siguiente teorema nos dice que la transformada de Laplace es inyectiva, lo que permite hablar de la transformada inversa y, como veremos, también es lineal. Este hecho es clave para resolver algunos problemas de ecuaciones diferenciales con valor inicial en el origen como se había mencionado al comienzo del capítulo.

Teorema 5.5. *Sean f y g funciones continuas sobre $[0,\infty)$ de orden exponencial tales que la transformada de Laplace existe para cada una y cuyas transformadas son iguales, $\mathfrak{L}(f) = \mathfrak{L}(g)$. Entonces $f(t) = g(t)$ para todo $t \geq 0$.*

Definición 5.4. Se define la transformada inversa de Laplace como $\mathfrak{L}^{-1}(F(s))$, de modo que

$$\mathfrak{L}(f(t)) = F(s), \quad \text{entonces} \quad \mathfrak{L}^{-1}(F(s)) = f(t).$$

Como es natural, mientras conozcamos transformadas de muchas funciones, será más fácil encontrar la transformada inversa de alguna función.

Teorema 5.6. *Suponga que $\mathfrak{L}^{-1}(F_1)$ y $\mathfrak{L}^{-1}(F_2)$ existen y son funciones continuas en $[0,\infty)$ y sea k una constante, entonces*

$$\mathfrak{L}^{-1}(kF_1+F_2) = k\mathfrak{L}^{-1}(F_1) + \mathfrak{L}^{-1}(F_2).$$

Podemos hallar la transformada inversa de funciones racionales de la forma

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)},$$

donde $Q(s)$ y $P(s)$ son polinomios en la variable s (con grado de P mayor que el de Q), mediante el uso de fracciones parciales; para ello, procederemos de la siguiente manera:

- Descomponemos $F(s)$ en fracciones simples, es decir:
  - » Encontramos la raíces de $P(s)$. Tomamos β una de sus raíces reales con multiplicidad m, y $a \pm ib$ a una de las raíces complejas y su conjugada (en caso de haber). De esta forma podemos expresar $P(s) = (s-\beta)^m \cdots [(s-a)^2 + b^2]$.
  - » Y así escribimos $F(s)$:

$$F(s) = \frac{Q(s)}{P(s)} = \frac{A_1}{s-\beta} + \cdots + \frac{A_m}{(s-\beta)^m} + \frac{B(s-a)+Cb}{(s-a)^2+b^2}.$$

  - » Determinamos los coeficientes $A_1, \ldots A_m$, B y C.
- Para calcular la transformada inversa $\mathfrak{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$ hacemos

$$\mathfrak{L}^{-1}(F(s)) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{A_1}{s-\beta} + \cdots + \frac{A_m}{(s-\beta)^m} + \frac{B(s-a)+Cb}{(s-a)^2+b^2}\right).$$

- Como la transformada inversa es una transformación lineal, aplicamos esta linealidad y tenemos

$$\mathfrak{L}^{-1}(F(s)) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{A_1}{s-\beta}\right) + \cdots + \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{A_m}{(s-\beta)^m}\right) + \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{B(s-a)+Cb}{(s-a)^2+b^2}\right).$$

Ejemplo 5.23. *Hallar la transformada inversa de*

$$F(s) = \frac{7s^2+23s+30}{(s-2)(s^2+2s+5)}.$$

Solución. Primero hallamos la descomposición en fracciones parciales de $F(s)$. Observamos que el factor cuadrático s^2+2s+5 tiene una raíz compleja, con su correspondiente conjugada, que es $-1 \pm 2i$ de donde podemos expresar este factor cuadrático como: $s^2+2s+5 = (s+1)^2+2^2$, por lo tanto su desarrollo en fracciones parciales queda de la forma

$$\frac{7s^2+23s+30}{(s-2)(s^2+2s+5)} = \frac{A}{(s-2)} + \frac{B(s+1)+2C}{(s+1)^2+4}. \tag{5.1}$$

Al multiplicar ambos lados por el común denominador obtenemos

$$7s^2+23s+30 = A(s^2+2s+5) + B(s+1)(s-2) + 2C(s-2). \tag{5.2}$$

En la ecuación (5.2), hacemos $s = 2$, $s = -1$ y $s = 0$. Para $s = 2$ obtenemos:

$$\begin{aligned} 28 + 46 + 30 =& A(4 + 4 + 5) \\ 104 =& A13 \\ A =& 8. \end{aligned}$$

Con $s = -1$ y $A = 8$, sustituyendo en (5.2) tenemos:

$$\begin{aligned} 7 - 23 + 30 =& 8(1 - 2 + 5) + 2C(-3) \\ 14 =& 32 - 6C \\ C =& 3. \end{aligned}$$

Por último, si $s = 0$, usamos el valor $C = 3$ y sustituimos en (5.2):

$$\begin{aligned} 30 =& 40 + B(-2) + 6(-2) \\ 30 =& 40 - 12 - 2B \\ B =& -1. \end{aligned}$$

Como $B = -1$, $C = 3$ y $A = 8$, sustituimos en (5.1):

$$\frac{7s^2 + 23s + 30}{(s-2)(s^2 + 2s + 5)} = \frac{8}{(s-2)} + \frac{-1(s+1) + 6}{(s+1)^2 + 4}$$

con lo cual podemos hallar la transformada inversa:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{7s^2 + 23s + 30}{(s-2)(s^2 + 2s + 5)}\right) \\ &= \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{8}{(s-2)}\right) + \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{-1(s+1)}{(s+1)^2 + 4}\right) + \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{6}{(s+1)^2 + 4}\right) \\ &= 8\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)}\right) - 1\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{(s+1)}{(s+1)^2 + 4}\right) + 3\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{2}{(s+1)^2 + 4}\right) \\ &= 8e^{2t} - e^{-t}\cos(2t) + 3e^{-t}\sin(2t). \end{aligned}$$

☑

Ejemplo 5.24. *Hallar la transformada inversa de*

$$F(s) = \frac{1}{(s-3)(s^2 + 2s + 2)}.$$

Solución. Primero hallamos la descomposición en fracciones parciales de $F(s)$. Observamos que el factor cuadrático $s^2 + 2s + 2$ tiene una raíz compleja, con su correspondiente conjugada, que es $-1 \pm 1i$, donde podemos expresar este factor cuadrático como: $s^2 + 2s + 2 = (s + 1)^2 + 1^2$; por lo tanto, su desarrollo en fracciones parciales queda de la forma:

$$\frac{1}{(s-3)(s^2+2s+2)} = \frac{A}{(s-3)} + \frac{B(s+1)+C}{(s+1)^2+1}. \tag{5.3}$$

Al multiplicar ambos lados por el común denominador obtenemos:

$$1 = A(s^2+2s+2) + B(s+1)(s-3) + C(s-3). \tag{5.4}$$

En la ecuación (5.4) hacemos $s = 3$, $s = -1$ y $s = 0$. Para el valor $s = 3$ obtenemos:

$$\begin{aligned} 1 =& A(9+6+2) \\ 1 =& A17 \\ A =& \frac{1}{17}. \end{aligned}$$

Con $s = -1$ y $A = \frac{1}{17}$, sustituyendo en (5.4) tenemos:

$$\begin{aligned} 1 =& \frac{1}{17}(1-2+2) + C(-4) \\ 1 =& \frac{1}{17} - 4C \\ C =& -\frac{4}{17}. \end{aligned}$$

Finalmente, si $s = 0$, $C = \frac{-4}{17}$ y $A = \frac{1}{17}$ sustituimos en (5.4) y obtenemos el valor

$$\begin{aligned} 1 =& \frac{1}{17}(2) + B(-3) - \frac{4}{17}(-3) \\ 1 =& \frac{1}{17} - 4C \\ 1 =& \frac{2}{17} - 3B + \frac{12}{17} \\ B =& -\frac{1}{17}. \end{aligned}$$

Dado que $B = -\frac{1}{17}$, $C = \frac{-4}{17}$ y $A = \frac{1}{17}$, sustituyendo en (5.3) se tiene la siguiente descomposición:

$$\frac{1}{(s-3)(s^2+2s+2)} = \frac{1/17}{(s-3)} + \frac{-1/17(s+1) - 4/17}{(s+1)^2+1}$$

con lo cual podemos hallar la transformada inversa de Laplace de $F(s)$:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)(s^2+2s+2)}\right) = \\
=&\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{17(s-3)}\right) + \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{-1(s+1)}{17\left((s+1)^2+1\right)}\right) + \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{-4}{17\left((s+1)^2+4\right)}\right) \\
=&\frac{1}{17}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)}\right) - \frac{1}{17}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{(s+1)}{\left((s+1)^2+1\right)}\right) - \frac{4}{17}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{\left((s+1)^2+1\right)}\right) \\
=&\frac{1}{17}e^{3t} - \frac{1}{17}e^{-t}\cos(t) - \frac{4}{17}e^{-t}\sin(t).
\end{aligned}$$

☑

Obs El lector habrá notado que nuestro interés siempre estuvo en fracciones propias. Esto se justifica por lo siguiente. Si F no fuera una fracción propia, $\lim_{s\to\infty} F(s) \neq 0$, luego F no sería la transformada de Laplace de ninguna función de orden exponencial (que son las de nuestro interés).

Podemos escribir cualquier función continua a trozos como combinación de la siguiente función y traslaciones de ella.

Definición 5.5 (Función escalón unitaria). Se define la función escalón como:

$$U(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1, & \text{si } t \geq 0, \end{cases}$$

y desplazando el argumento tenemos:

$$U(t-a) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < a \\ 1, & \text{si } t \geq a. \end{cases}$$

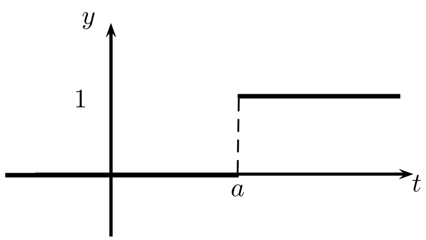


Figura 5.2: Función escalón unitaria con desplazamiento $a > 0$.

Calculemos la transformada de Laplace de la función escalón unitaria:

$$\mathfrak{L}\big(U(t-a)\big) = \int_0^\infty U(t-a)e^{-st}dt = \lim_{N\to\infty} \left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_a^N$$
$$= \lim_{N\to\infty} \frac{-e^{-sN}}{s} - \frac{-e^{-sa}}{s} = \frac{e^{-as}}{s},\ \text{si } s > 0.$$

La función escalón unitaria nos permite calcular la trasformada de Laplace de algunas funciones de una manera más sencilla. Sea $f(t)$ una función y su transformada $\mathfrak{L}\big(f(t)\big)$:

$$\mathfrak{L}\big(f(t)\big) = F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Multipliquemos la transformada $\mathfrak{L}\big(f(t)\big)$ por e^{-as}:

$$e^{-as}\mathfrak{L}\big(f(t)\big) = e^{-as}F(s) = e^{-as}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$
$$= \int_0^\infty f(t)e^{-s(a+t)}dt.$$

Si realizamos un cambio de variable $x = a + t \quad \Rightarrow t = x - a, \quad dx = dt$; por lo tanto,

$$e^{-as}\mathfrak{L}\big(f(t)\big) = e^{-as}\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$
$$e^{-as}\mathfrak{L}\big(f(x-a)\big) = \int_a^\infty f(x-a)e^{-sx}dx$$
$$= \int_0^a 0f(x-a)e^{-sx}dx + \int_a^\infty 1f(x-a)e^{-sx}dx$$
$$= \int_0^\infty U(x-a)f(x-a)e^{-sx}dx = \mathfrak{L}\big(U(x-a)f(x-a)\big).$$

Es decir, las siguientes fórmulas son válidas:

$$\mathfrak{L}\big(U(t-a)f(t-a)\big) = e^{-as}\mathfrak{L}\big(f(t)\big). \tag{5.5}$$
$$\mathfrak{L}^{-1}\left(e^{-as}\mathfrak{L}\big(f(t)\big)\right) = U(t-a)f(t-a). \tag{5.6}$$
$$\mathfrak{L}\big(g(t)U(t-a)\big) = e^{-as}\mathfrak{L}\big(g(t+a)\big). \tag{5.7}$$
$$\mathfrak{L}^{-1}\left(e^{-as}\mathfrak{L}\big(g(t+a)\big)\right) = \mathfrak{L}^{-1}\left(e^{-as}F(s)\right) = g(t)U(t-a). \tag{5.8}$$

Ejemplo 5.25. *Expresar la función dada mediante funciones escalón unitario y calcular su transformada de Laplace.*

1.

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ 2, & 1 \leq t < 2 \\ 1, & 2 \leq t < 3 \\ 3, & t \geq 3. \end{cases}$$

2. La función h dada mediante la gráfica dada en la figura 5.3

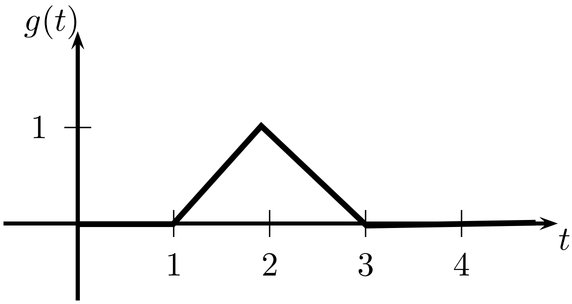
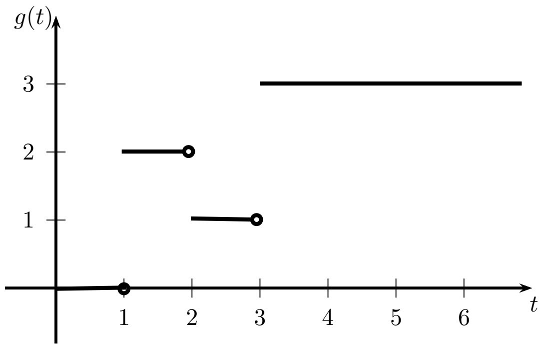


Figura 5.3: Gráfica de la función h.

Solución. 1. La gráfica de la función $g(t)$ es:



Expresemos la función $g(t)$ en términos de una escalón unitaria utilizando la expresión $p = g(t) = p\big(U(t-a) - U(t-b)\big)$ en $[a, b]$.
Por lo tanto,

$$\begin{aligned} g(t) =& 0 \cdot \big(U(t) - U(t-1)\big) + 2 \cdot \big(U(t-1) - U(t-2)\big) \\ &+ 1 \cdot \big(U(t-2) - U(t-3)\big) + 3 \cdot U(t-3). \end{aligned}$$

Es decir, $g(t) = 2U(t-1) - U(t-2) + 2U(t-3)$.
Para hallar la transformada de Laplace, usando la linealidad, la calculamos en cada uno de los términos,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\big(2U(t-1) - U(t-2) + 2U(t-3)\big) =& 2\mathfrak{L}\big(U(t-1)\big) - \mathfrak{L}\big(U(t-2)\big)\\ &+ 2\mathfrak{L}\big(U(t-3)\big)\\ =& 2\frac{e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s} + 2\frac{e^{-3s}}{s}, \quad (s > 0).\end{aligned}$$

2. La función de la gráfica dada es

$$g(t) = \begin{cases} 0, & t < 1 \\ t-1, & 1 \leq t < 2 \\ -t+3, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3. \end{cases}$$

o bien, mediante la función escalón unitaria la reescribimos como

$$\begin{aligned} g(t) =& (t-1)\big(U(t-1) - U(t-2)\big) + (-t+3)\big(U(t-2) - U(t-3)\big)\\ =& (t-1)U(t-1) - 2(t-2)U(t-2) + (t-3)U(t-3). \end{aligned}$$

Para hallar la transformada de Laplace, una vez más usando la linealidad la calculamos en cada uno de los términos:

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}\big((t-1)U(t-1) - 2(t-2)U(t-2) + (t-3)U(t-3)\big)\\ &= \mathfrak{L}\big((t-1)U(t-1)\big) - 2\mathfrak{L}\big((t-2)U(t-2)\big) + \mathfrak{L}\big((t-3)U(t-3)\big). \end{aligned}$$

Para aplicar la ecuación (5.5), hacemos $g(t) = t - 1$ y $a = 1$ en la primera transformada, entonces,

$$g(t+a) = g(t-1+1) = t.$$

La transformada de Laplace de $g(t)$ es

$$\mathfrak{L}\big(g(t)\big) = \frac{1}{s^2}.$$

Por la fórmula (5.5) tenemos:

$$\mathfrak{L}\big((t-1)U(t-1)\big) = e^{-1s}\frac{1}{s^2},$$

en la segunda hacemos $g(t) = t - 2$ y $a = 2$, luego

$$g(t+a) = g(t-2+2) = t.$$

La transformada de Laplace de $g(t+a)$ es

$$\mathfrak{L}\big(g(t)\big) = \frac{1}{s^2}.$$

De nuevo, por la fórmula (5.5) tenemos:

$$\mathfrak{L}\big((t-2)U(t-2)\big) = e^{-2s}\frac{1}{s^2}.$$

En el tercer término hacemos $g(t) = t - 3$ y $a = 3$, así

$$g(t+a) = g(t-3+3) = t.$$

La transformada de Laplace de g es

$$\mathfrak{L}\big(g(t+a)\big) = \mathfrak{L}(t) = \frac{1}{s^2}$$

y por la fórmula (5.5) tenemos:

$$\mathfrak{L}\big((t-3)U(t-3)\big) = e^{-3s}\frac{1}{s^2}.$$

Finalmente,

$$\mathfrak{L}\big((t-1)U(t-1)\big) - 2\mathfrak{L}\big((t-2)U(t-2)\big) + \mathfrak{L}\big((t-3)U(t-3)\big) =$$
$$(e^{-1s} - 2e^{-2s} + e^{-3s})\left(\frac{1}{s^2}\right)$$

es la transformada de Laplace de g. ☑

Ejemplo 5.26. *Determinar la transformada inversa de*

1. $\frac{se^{-3s}}{s^2+4s+5}$.
2. $\frac{e^{-3s}(s-5)}{(s+1)(s+2)}$.

Solución. 1. Para utilizar la ecuación (5.6) primero expresamos como el producto $e^{-as}F(s)$:

$$\frac{se^{-3s}}{s^2+4s+5}.$$

Para esto hacemos $e^{-as} = e^{-3s}$ y

$$F(s) = \frac{s}{s^2+4s+5}.$$

Así, $a = 3$ y

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4s+5}\right) = e^{-2t}\cos(t) - 2e^{-2t}\sin(t).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{se^{-3s}}{s^2+4s+5}\right) =& f(t-3)U(t-3)\\ =& U(t-3)\left(e^{-2(t-3)}\cos(t-3)-2e^{-2(t-3)}s(t-3)\right).\end{aligned}$$

2. Para utilizar la ecuación (5.6) primero expresamos

$$\frac{e^{-3s}(s-5)}{(s+1)(s+2)}$$

como el producto $e^{-as}F(s)$. Para esto hacemos $e^{-as}=e^{-3s}$ y

$$F(s)=\frac{(s-5)}{(s+1)(s+2)}.$$

Así, $a=3$ y

$$f(t)=\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{(s-5)}{(s+1)(s+2)}\right)=-6e^{-t}+7e^{-2t}.$$

Por lo tanto tenemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{(s-5)}{(s+1)(s+2)}\right) =& f(t-3)U(t-3)\\ =& U(t-3)\left(-6e^{-t+3}+7e^{-2t+6}\right).\end{aligned}$$

☑

Definición 5.6 (Función periódica). Una función f es periódica con periodo T si $f(t+T)=f(t)$ para todo t en el dominio de f.

Si f tiene periodo T y es continua por partes en $[0,T]$, entonces la trasformada de Laplace de f viene dada por

$$\mathfrak{L}(f(t))=\frac{\int_0^T e^{-st}f(t)dt}{1-e^{-sT}}. \tag{5.9}$$

Ejemplo 5.27. *Determinar la transformada de la función f cuya gráfica es dada en la figura 5.4*

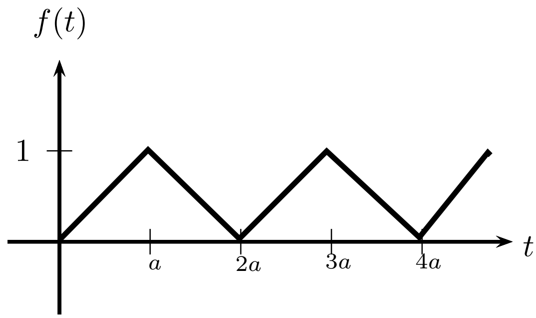


Figura 5.4: Gráfico función f

Solución. Primero escribimos la función que representa la gráfica:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{a}t, & 0 \leq t < a \\ -\frac{1}{a}t + 2, & a \leq t < 2a \end{cases},$$

donde $f(t)$ tiene periodo $T = 2a$. Por lo tanto, de la igualdad (5.9):

$$\mathfrak{L}(f(t)) = \frac{\int\limits_0^a \frac{1}{a}te^{-st}dt + \int\limits_a^{2a} \big((\frac{-1}{a}t + 2)e^{-st}\big)dt}{1 - e^{-s2a}} = \frac{\left(1 - e^{-as}\right)^2}{as^2\left(1 - e^{-2as}\right)} = \frac{\left(1 - e^{-as}\right)}{as^2\left(1 + e^{-as}\right)}.$$

☑

Algunas aplicaciones tales como circuitos eléctricos y sistemas mecánicos, entre otras, están sometidas a unas fuerzas de gran magnitud que solamente actúa durante un intervalo de tiempo muy corto. Tales fuerzas son, por ejemplo, una tensión eléctrica en el caso de un circuito eléctrico, una descarga eléctrica, el golpe de un martillo, el golpe a una pelota de tenis, etc. La función impulso unitario puede servir como un modelo para estas fuerzas.

Definición 5.7 (Impulso Unitario). Se define la función impulso unitario $\delta_\varepsilon : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, por la fórmula

$$\delta_\varepsilon(t - t_0) = \begin{cases} 0, & \text{si} \;\; 0 \leq t \leq t_0 - \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon}, & \text{si} \;\; t_0 - \varepsilon < t \leq t_0 + \varepsilon \\ 0, & \text{si} \;\; t > t_0 + \varepsilon \end{cases}$$

con $\varepsilon > 0$ y $t_0 > 0$.

El área bajo la función impulso unitario es:

$$\int_0^\infty \delta_\varepsilon(t - t_0)dt = 1.$$

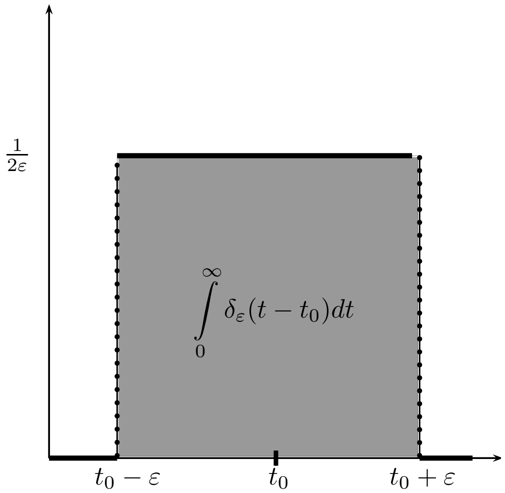


Figura 5.5: Función impulso unitario.

En la práctica es conveniente trabajar con otro tipo de impulso llamado función generalizada de Dirac.

Definición 5.8 (Función generalizada delta de Dirac)**.** La función generalizada delta de Dirac está dada por

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \delta_\varepsilon(t-t_0) = \delta(t-t_0).$$

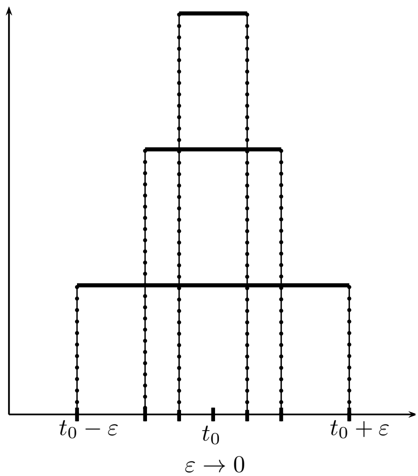


Figura 5.6: Función generalizada delta de Dirac.

De donde se tiene que la función generalizada delta de Dirac satisface las siguientes propiedades:

(1)

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, & \text{si} \quad t=t_0\\ 0, & \text{si} \quad t\neq t_0.\end{cases}$$

(2)

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1.$$

Más aún, dado que $\delta(t-t_0)\neq 0$ para t suficientemente cerca de t_0 se cumple que

$$\int_{a}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1, \quad \text{para cada } a<t_0.$$

Note que ninguna función satisface estas propiedades y por tanto $\delta(t-t_0)$ no es una función en el sentido clásico. Sin embargo, a esta se le puede hallar su transformada de Laplace para $t_0>0$.

$$\mathfrak{L}\left(\delta(t-t_0)\right)=\int_0^{\infty}e^{-st}\delta(t-t_0)dt=\int_0^{\infty}e^{-st}\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_{\varepsilon}(t-t_0)dt.$$

Como $\delta_{\varepsilon}(t-t_0)\neq 0$ solo para $t_0-\varepsilon<t<t_0+\varepsilon$, entonces $e^{-st}\delta_{\varepsilon}(t-t_0)\neq 0$ solo si $t_0-\varepsilon<t<t_0+\varepsilon$. Así,

$$\int_0^{\infty}e^{-st}\delta_{\varepsilon}(t-t_0)dt=\begin{cases}\int_0^{\infty}e^{-st}\delta_{\varepsilon}(t-t_0)dt, & t_0-\varepsilon<t<t_0+\varepsilon\\ 0, & \text{en otro caso}\end{cases}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\left(\delta(t-t_0)\right)&=\int_0^{\infty}\lim_{\varepsilon\to 0}e^{-st}\delta_{\varepsilon}(t-t_0)dt=\int_0^{\infty}e^{-st_0}\delta(t-t_0)dt\\&=e^{-st_0}\int_0^{\infty}\delta(t-t_0)dt=e^{-st_0}.\end{aligned}$$

Ejercicios

1. Usar la definición para determinar la transformada de Laplace de la función dada:
   a) $f(t)=e^{-t}\sin(2t)$.
   b) $f(t)=te^{3t}$.
   c) $f(t)=[t]e^{at}$.

d)
$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2 \\ t, & t \geq 2. \end{cases}$$

e)
$$f(t) = \begin{cases} \sin(t), & 0 \leq t < \pi \\ 0, & t \geq \pi. \end{cases}$$

f)
$$f(t) = \begin{cases} e^{2t}, & 0 \leq t < 3 \\ 1, & t \geq 3. \end{cases}$$

g) La función f cuya gráfica es dada en la figura 5.7:

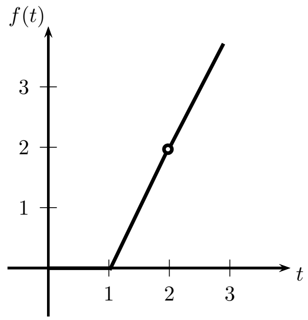


Figura 5.7: Gráfica de la función f.

h) $t(t+1)(t+2)$.

i) $\sinh(at)$.

2. Encontrar la transformada inversa de Laplace de las siguientes funciones:

a) $\frac{2s-4}{s^2-4s+9}$.

b) $\frac{s^2-4s+3}{(s^2-4s+5)^2}$.

c) $\frac{s+5}{s^2+6s+18}$.

d) $\frac{s+1}{s^2-9}$.

e) $\frac{s^3+2s^2-s-3}{(s+1)^4}$.

f) $\frac{3}{s-1} + \frac{4s+1}{s^2+9}$.

g) $\frac{7+(s+4)(18-3s)}{(s-3)(s-1)(s+4)}$.

h) $\frac{3s^2+2s+1}{(s^2+1)(s^2+2s+2)}$.

i) $\frac{3s+2}{(s-2)(s^2+2s+5)}$.

j) $\frac{-s+1}{(4s^2+1)(s^2+1)}$.

k) $\frac{3s+2}{(s^2+4)(s^2+9)}$.

l) $\frac{2s-1}{(4s^2+1)(9s^2+1)}$.

m) $\frac{17s-15}{(s^2-2s+5)(s^2+2s+10)}$.

n) $\frac{2s+1}{(s^2+1)(s-1)(s-3)}$.

ñ) $\frac{e^{-s}}{s(s+1)}$.

o) $\frac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}$.

p) $\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+4}$.

q) $\frac{1}{s^3(s+1)}$.

r) $\frac{1}{2s^2-s+1}$.

s) $\frac{s^2+1}{s^3-s^2+2s-2}$.

t) $\frac{2s+3}{s^2-4s+20}$.

u) $\frac{s^3}{(s+3)^2(s+2)^2}$.

3. Expresar cada función en términos de la función escalón unitario. Hallar la transformada de Laplace de la función respectiva:

a)

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 3 \\ -2, & t \geq 3. \end{cases}$$

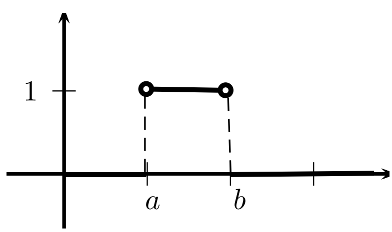
b)

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 3\pi/2 \\ \sin(t), & t > 3\pi/2. \end{cases}$$

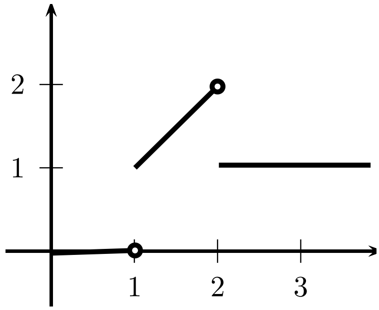
c)

$$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 4 \\ 0, & 4 \leq t < 5 \\ 1, & t \geq 5. \end{cases}$$

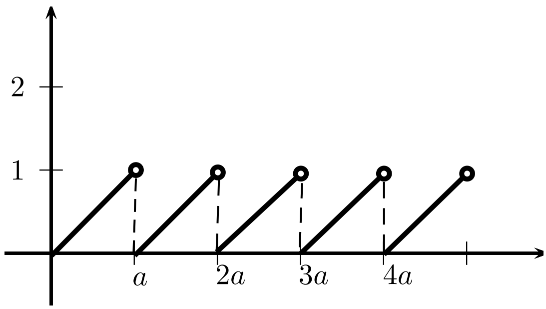
d) f con gráfica



e) f con gráfica



4. Encontrar la transformada de Laplace:
   a) $(t-1)U(t-1)$.
   b) $e^{2-t}U(t-2)$.
   c) $(3t+1)U(t-1)$.
   d) $\delta_\varepsilon(t-t_0)$.
   e) $f(t)\delta(t-t_0)$, f una función dada.
5. Determinar $\mathfrak{L}(f(t))(s)$, donde la función periódica queda descrita mediante su gráfica:



6. Demostrar las fórmulas (5.6), (5.7) y (5.8).
7. Demostrar la fórmula (5.9)
8. Demostrar el teorema 5.1.
9. Demostrar el teorema 5.2.
10. Demostrar la proposición 5.3.

Respuesta Ejercicios de seleccionados

2. *a*) $2e^{2t}\cos(\sqrt{5}t)$.
   e) $e^{-t} - te^{-t} - t^2e^{-t} - \frac{t^3e^{-t}}{6}$.
   i) $\frac{8e^{2t}}{13} - \frac{8e^{-t}\cos(2t)}{13} + \frac{15e^{-t}\sin(2t)}{26}$.
   m) $e^t\cos(2t) + e^t\sin(2t) - e^{-t}\cos(3t) - \frac{4}{3}e^{-t}\sin(3t)$.
   o) $U(t-2)(e^{t-2} - t + 1)$.

3. $b)$ $f(t) = \sin(t)U\left(t - \frac{3\pi}{2}\right)$, $\mathfrak{L}(f)(s) = -e^{\frac{-3\pi}{2}s}\frac{s}{s^2+1}$.

$e)$ $f(t) = tU(t-1) - U(t-2)(t-1)$, $\mathfrak{L}(f(t))(s) = \frac{(s+1)(-e^{-2s}+e^{-s})}{s^2}$.

4. $b)$ $e^{-2s}\frac{1}{s+1}$.

5. $\frac{1-e^{-sa}(as+1)}{as^2(1-s^{-as})}$.

1.1. La trasformada de Laplace de derivadas e integrales

Veamos ahora el comportamiento de la trasformada de Laplace cuando la aplicamos sobre derivadas e integrales de funciones. Estos resultados son los que nos permitirán resolver problemas de Cauchy lineales, con coeficientes constantes y condiciones iniciales en $x_0 = 0$, mediante el uso de esta trasformada.

Teorema 5.7. *Sean $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ funciones continuas en $[0, \infty)$ y $f^{(n)}$ continua por partes en $[0, \infty)$, todas de orden exponencial α. Entonces para $s > \alpha$ existe la transformada de Laplace de $f^{(n)}$, que es dada por*

$$\mathfrak{L}(f^{(n)}(t)) = s^n\mathfrak{L}(f(t)) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0).$$

Ejemplo 5.28. *Consideremos la función $f(t) = \sin^2(at)$, como ya vimos $F(s) = \frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}$, la función satisface las condiciones del teorema anterior; por tanto,*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(f'(t)) &= \mathfrak{L}(f(t)) - f(0)\\
\mathfrak{L}(2a\sin(at)\cos(at)) &= s\mathfrak{L}(\sin^2(at)) - \sin^2(0)\\
\mathfrak{L}(2\sin(at)\cos(at)) &= \frac{s}{a}\mathfrak{L}(\sin^2(at))\\
\mathfrak{L}(\sin(2at)) &= \frac{s}{a}\frac{2a^2}{s(s^2+4a^2)}\\
\mathfrak{L}(\sin(2at)) &= \frac{2a}{(s^2+4a^2)}.
\end{aligned}$$

En particular,

$$\mathfrak{L}(\sin(at)) = \frac{a}{(s^2+a^2)}.$$

☑

Teorema 5.8. *Sea $f(t)$ continua por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α. Entonces para $s > \alpha$:*

$$\mathfrak{L}(t^n f(t)) = (-1)^n\frac{d^nF}{ds^n}(s).$$

Ejemplo 5.29. *Calcular la transformada de la función definida por* $g(t) = t^2[t]$ *donde* $[t]$ *denota la parte entera de* t.

Solución. Aplicaremos el teorema anterior (con $n = 2$). Como sabemos, la función parte entera tiene transformada $\mathfrak{L}\big([t]\big) = F(s) = \frac{1}{s(e^s-1)}$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}\big(t^2[t]\big) =&(-1)^2F''(s)\\ =&\frac{e^{2s}\big(s^2+2s+2\big)+s\big(s^2-2s-4\big)+2}{s^3(e^s-1)^3}.\end{aligned}$$

☑

Ejemplo 5.30. *Verificar que si* $\mathfrak{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^nF}{ds^n}(s)$, *su transformada inversa es dada por*

$$\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{d^nF}{ds^n}(s)\right)= (-1)^n t^n f(t), \tag{5.10}$$

donde $f(t) = \mathfrak{L}^{-1}(F)$. *Usar esta ecuación para calcular la transformada inversa de*

$$F(s) = \ln\left|\frac{s+2}{s-5}\right|.$$

Solución. Utilizando la ecuación (5.10), primero tenemos que derivar la función $F(s) = \ln\left|\frac{s+2}{s-5}\right|$, por lo tanto tenemos:

$$\frac{dF}{ds} = \frac{-7}{(s+2)(s-5)}. \tag{5.11}$$

Como derivamos una vez, $n = 1$ en la ecuación (5.10), así, sustituyendo en la ecuación (5.10) obtenemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{dF}{ds}\right)=&(-t)f(t)\\ \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{-7}{(s+2)(s-5)}\right)=&(-t)f(t).\end{aligned}$$

Ahora hallamos la transformada inversa de (5.11), para lo cual descomponemos en fracciones parciales. Su desarrollo en fracciones parciales queda como

$$\frac{-7}{(s+2)(s-5)} = \frac{A}{(s+2)} + \frac{B}{(s-5)}. \tag{5.12}$$

Al multiplicar ambos lados por el común denominador, obtenemos:

$$-7 = A(s-5) + B(s+2). \tag{5.13}$$

En la ecuación (5.13) hacemos $s = 5$ y nos queda $-7 = 7B$, es decir, $B = -1$. Ahora hacemos $s = -2$, de manera que concluimos que, $A = 1$. Sustituyendo en (5.12) nos queda la descomposición

$$\frac{-7}{(s+2)(s-5)} = \frac{1}{(s+2)} - \frac{1}{(s-5)}.$$

Podemos hallar la transformada inversa:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)} - \frac{1}{(s-5)}\right) &= (-t)f(t) \\ \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)}\right) - \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-5)}\right) &= (-t)f(t) \\ e^{-2t} - e^{5t} &= (-t)f(t). \end{aligned}$$

Despejando f tenemos, $\frac{e^{5t}}{t} - \frac{e^{-2t}}{t} = f(t)$ y como $f(t) = \mathfrak{L}^{-1}(F)$ entonces

$$\mathfrak{L}^{-1}\left(\ln\left|\frac{s+2}{s-5}\right|\right) = \frac{e^{5t}}{t} - \frac{e^{-2t}}{t}.$$

☑

Definición 5.9 (Convolución). Sean f y g funciones continuas por partes en $[0, \infty)$. La *convolución* de f y g, que se denota $f * g$, se define como

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-v)g(v)dv.$$

La convolución de dos funciones se puede ver como una operación algebraica entre ellas la cual satisface las siguientes propiedades:

1. $f * g = g * f$ (conmutativa).
2. $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$ (distributiva respecto a la suma).
3. $(f * g) * h = f * (g * h)$ (distributiva respecto a la convolución).
4. $f * 0 = 0$ (existencia del anulador para la convolución).

La trasformada de Laplace convierte la convolución de funciones en producto como se muestra en el siguiente resultado.

Teorema 5.9 (Teorema de convolución). *Sean f y g funciones continuas por partes en $[0, \infty)$ y de orden exponencial α. Sea $F(s) = \mathfrak{L}(f(t))(s)$ y $G(s) = \mathfrak{L}(g(t))(s)$. Entonces,*

$$\mathfrak{L}(f * g) = F(s)G(s)$$

o equivalentemente,

$$\mathfrak{L}^{-1}(F(s)G(s)) = (f * g)(t).$$

Ejemplo 5.31. *Usando la convolución hallar la transformada inversa de Laplace de la función*

$$F(s) = \frac{1}{(s-2)(s-3)}.$$

Solución. Notemos que

$$\frac{1}{s-2} = \mathfrak{L}(e^{2t}) \quad \text{y} \quad \frac{1}{s-3} = \mathfrak{L}(e^{3t}).$$

Luego,

$$\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)(s-3)}\right) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\mathfrak{L}(e^{2t})\mathfrak{L}(e^{3t})\right) = e^{2t} * e^{3t}.$$

Calculemos ahora la integral de convolución

$$e^{2t} * e^{3t} = \int_0^t e^{2v}e^{3(t-v)}dv = e^{3t}\int_0^t e^{-v}dv = e^{3t}(-e^{-t}+1) = -e^{2t} + e^{3t}.$$

Tenemos así que la transformada inversa de $F(s)$ es $-e^{2t} + e^{3t}$. ☑

Ejemplo 5.32. *Hallar la solución de la ecuación integral de Volterra*

$$y(t) + \int_0^t y(s)ds = U(t-1).$$

Solución. Notemos que $\int_0^t y(s)ds$ es la convolución $(y * 1)(t)$. Así, aplicando la transformada de Laplace a la ecuación integral y el teorema de Convolución obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\left(y(t) + (y*1)(t)\right) &= \mathfrak{L}(U(t-1)) \\
\mathfrak{L}(y) + \mathfrak{L}(y)\mathfrak{L}(1) &= \frac{e^{-s}}{s} \\
\mathfrak{L}(y)\left(1 + \frac{1}{s}\right) &= \frac{e^{-s}}{s} \\
\mathfrak{L}(y) &= \frac{se^{-s}}{s(s+1)}.
\end{aligned}$$

Ahora tomamos la transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s}}{s+1}\right) = \mathfrak{L}^{-1}\left(e^{-s}\mathfrak{L}(e^{-t})\right) = U(t-1)e^{1-t}.$$

Aquí usamos la fórmula (5.6). ☑

Ejercicios

1. Sea $\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{d^nF}{ds^n}\right)(t) = (-t)^n f(t)$ donde $f(t) = \mathfrak{L}^{-1}(F)$. Usar esta ecuación para calcular $\mathfrak{L}^{-1}(F)$:
   a) $F(s) = \ln\left|\frac{s+2}{s-5}\right|$.
   b) $F(s) = \ln\left|\frac{s-4}{s-3}\right|$.
   c) $F(s) = \ln\left|\frac{s^2+29}{s^2+1}\right|$.
   d) $F(s) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)$.
2. Usar $\mathfrak{L}\big(t^n f(t)\big) = (-1)^n \frac{d^nF}{ds^n}(s)$ para demostrar que
   a) $\mathfrak{L}\left(t^2 y'(t)\right)(s) = sY''(s) + 2Y'(s)$, donde $Y(s) = \mathfrak{L}\left(y(t)\right)(s)$.
   b) $\mathfrak{L}\left(t^2 y'(t)\right)(s) = s^2Y''(s)+24sY'(s)+2Y(s)$, donde $Y(s) = \mathfrak{L}\left(y(t)\right)(s)$.
3. Usando la convolución hallar la transformada inversa de Laplace de
   a) $F(s) = \frac{s}{(s^2+1)(s-2)}$.
   b) $F(s) = \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}$.
4. Hallar la solución de la ecuación de Volterra:
   a) $y + \int_0^t (t-v)y(v)dv = \sin(2t)$.
   b) $y = t + \frac{1}{6}\int_0^t y(v)(t-v)^3 dv$.
   c) $y = 1 + \int_0^t (t-v)y(v)dv$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *b*) $\frac{-e^{4t}+e^{3t}}{t}$.
3. *a*) $\frac{2}{5}e^{2t} - \frac{1}{5}(2\cos(t) - \sin(t))$.
4. *c*) $y(t) = \cosh(t)$.

2. Soluciones de PVI mediante la transformada de Laplace

Aplicaremos la transformada de Laplace para resolver problemas de valor inicial definidos mediante ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas con coeficientes constantes. Una de las ventajas de este método es que se aborda directamente el problema de valor inicial, y se resuelve sin necesidad de calcular la solución general de la ecuación. Otra ventaja es que puede facilitar la solución de ecuaciones diferenciales con términos dados mediante integrales (llamadas ecuaciones *integro-diferenciales*). Aquí podemos apreciar el verdadero sentido de lo que se ha hecho hasta ahora.

Para resolver un problema con valor inicial usando la trasformada de Laplace se siguen los siguientes pasos:

- Suponiendo que las funciones cumplen las hipótesis de existencia de la transformada, aplicar la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación.
- Usar las propiedades de la transformada de Laplace y las condiciones iniciales para obtener una ecuación para la transformada de la eventual solución, luego despejar la transformada.
- Determinar la transformada inversa de Laplace de la solución.

Ejemplo 5.33. *Resolver el problema con valor inicial:*

$$y'' - 7y' + 10y = 9\cos(t) + 7\sin(t); \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = -4.$$

Solución. Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación, de las propiedades de la transformada,

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(y'' - 7y' + 10y) =& \mathfrak{L}\big(9\cos(t) + 7\sin(t)\big) \\ \mathfrak{L}(y'') - 7\mathfrak{L}(y') + 10\mathfrak{L}(y) =& 9\mathfrak{L}(\cos(t)) + 7\mathfrak{L}\big(\sin(t)\big) \\ s^2\mathfrak{L}(y) - sy(0) - y'(0) - 7[s\mathfrak{L}(y) - y(0)] + 10\mathfrak{L}(y) =& 9\frac{s}{s^2+1} + 7\frac{1}{s^2+1}. \end{aligned}$$

Ahora reemplazamos las condiciones iniciales

$$s^2\mathfrak{L}(y) - s5 + 4 - 7[s\mathfrak{L}(y) - 5] + 10\mathfrak{L}(y) = 9\frac{s}{s^2+1} + 7\frac{1}{s^2+1}. \tag{5.14}$$

Despejando $\mathfrak{L}(y)$ en (5.14) tenemos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(s^2 - 7s + 10) =& \frac{9s}{s^2+1} + \frac{7}{s^2+1} + 5s - 39 \\ \mathfrak{L}(y) =& \frac{9s + 7 + 5s^3 + 5s - 39s^2 - 39}{(s^2+1)(s^2 - 7s + 10)} \\ \mathfrak{L}(y) =& \frac{5s^3 - 39s^2 + 14s - 32}{(s^2+1)(s^2 - 7s + 10)}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Hallamos la transformada inversa de (5.15):

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{5s^3 - 39s^2 + 14s - 32}{(s^2+1)(s^2 - 7s + 10)}\right),$$

para lo cual primero descomponemos en fracciones parciales:

$$\frac{5s^3-39s^2+14s-32}{(s^2+1)(s^2-7s+10)} = \frac{5s^3-39s^2+14s-32}{(s^2+1)(s-5)(s-2)}$$

$$\frac{5s^3-39s^2+14s-32}{(s^2+1)(s^2-7s+10)} = \frac{As+B}{s^2+1} + \frac{C}{s-5} + \frac{D}{s-2}. \tag{5.16}$$

Al multiplicar ambos lados por el común denominador obtenemos:

$$5s^3-39s^2+14s-32 = (As+B)(s-5)(s-2)+C(s^2+1)(s-2)+D(s^2+1)(s-5). \tag{5.17}$$

En la ecuación (5.17) hacemos $s = 2$:

$$40 + 156 + 28 - 32 = D5(-3).$$

Obtenemos $D = 8$. Ahora, con $s = 5$ y $D = 8$ sustituyendo en (5.17) obtenemos el valor de C:

$$625 - 975 + 70 - 32 = 78C.$$

Este es $C = -4$. Tomemos $s = 0$ y los valores $C = -4$ y $D = 8$. Sustituyendo en (5.17) tenemos

$$-32 = 10B + 8 - 40.$$

Luego, $B = 0$. Por último, para $s = 1$ y los valores $B = 0$, $C = -4$ y $D = 8$ sustituyendo en (5.17) obtenemos

$$-52 = 4A + 8 - 64$$

Así, $A = 1$. Como $B = 0$, $C = -4$, $D = 8$ y $A = 1$, sustituyendo en (5.16) se tiene

$$\frac{5s^3-39s^2+14s-32}{(s^2+1)(s^2-7s+10)} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{-4}{s-5} + \frac{8}{s-2}.$$

Con esto podemos hallar la transformada inversa:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1} + \frac{-4}{s-5} + \frac{8}{s-2}\right)\\
&=\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{-4}{s-5}\right) + \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{8}{s-2}\right)\\
&=\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) - 4\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-5}\right) + 8\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)\\
&=\cos(t) - 4e^{5t} + 8e^{2t}.
\end{aligned}$$

Es decir, $y(t) = \cos(t) - 4e^{5t} + 8e^{2t}$. ☑

Ejemplo 5.34. *Resolver el problema con valor inicial mediante la transformada de Laplace*

$$y'' + y = t - (t-4)U(t-2); \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 1.$$

Solución. Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación diferencial $y'' + y = t - (t-4)U(t-2)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathfrak{L}(y'') + \mathfrak{L}(y) =& \mathfrak{L}(t) - \mathfrak{L}((t-4)U(t-2)) \\ s^2\mathfrak{L}(y) - sy(0) - y'(0) + \mathfrak{L}(y) =& \frac{1}{s^2} - \mathfrak{L}((t-4)U(t-2)). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Primero hallamos $\mathfrak{L}((t-4)U(t-2))$, para ello utilizamos la ecuación (5.5):

$$g(t) = t - 4, \quad a = 2$$

luego $g(t+2) = t - 2$, y

$$\mathfrak{L}\left(g(t+2)\right) = \mathfrak{L}(t-2) = \mathfrak{L}(t) - 2\mathfrak{L}(1) = \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}.$$

Por lo tanto, $\mathfrak{L}((t-4)U(t-2)) = e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}\right)$.

En la ecuación (5.18) reemplazamos las condiciones iniciales y la expresión obtenida de $\mathfrak{L}[(t-4)U(t-2)]$:

$$\begin{aligned} s^2\mathfrak{L}(y) - 1 + \mathfrak{L}(y) &= \frac{1}{s^2} - e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}\right) \\ \mathfrak{L}(y)(s^2+1) &= \frac{1}{s^2} + 1 - e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}\right) \\ y(t) &= \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2} - e^{-2s}\left(\frac{1}{s^2} - \frac{2}{s}\right)\right) \\ y(t) &= t + (4 - t - 2\cos(t-2) + \sin(t-2))U(t-2). \end{aligned}$$

Esta es la solución del problema de valor inicial. ☑

Ejemplo 5.35. *Resolver el problema de valor inicial:*

1. $y'' + 3y' + 2y = \delta(t), \;\; y(0) = 0, \;\; y'(0) = 0.$

2. $y'' + 2y' + y = \delta(t-\pi), \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 0.$

Solución. 1. Aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación de la ecuación diferencial. Utilizando la propiedad de linealidad (teorema 5.1) y las propiedades de la transformada de una derivada (teorema 5.7) tenemos que se satisfacen las siguientes igualdades:

$$\mathfrak{L}\left(y'' + 3y' + 2y\right) = \mathfrak{L}\left(\delta(t)\right)$$

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}\big(y''\big) + \mathfrak{L}\big(3y'\big) + \mathfrak{L}\big(2y\big) = \mathfrak{L}\big(\delta(t)\big)\\
&s^2\mathfrak{L}(y) - sy(0) - y'(0) + 3\big(s\mathfrak{L}(y) - y(0)\big) + 2\mathfrak{L}(y) = 1.
\end{aligned}$$

Reemplazamos las condiciones iniciales:

$$s^2\mathfrak{L}(y) + 3s\mathfrak{L}(y) + 2\mathfrak{L}(y) = 1.$$

Despejando $\mathfrak{L}(y)$ la ecuación anterior nos queda como

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(y)\big(s^2 + 3s + 2\big) &= 1\\
\mathfrak{L}(y) &= \frac{1}{s^2 + 3s + 2}.
\end{aligned}$$

Hallamos la transformada inversa:

$$\begin{aligned}
y(t) =&\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 3s + 2}\right) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)(s+1)}\right) = \mathfrak{L}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}\right)\\
y(t) =&\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) - \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) = e^{-2t} - e^{-t}.
\end{aligned}$$

2. De nuevo, aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación y utilizamos las propiedades de la transformada:

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{L}\big(y'' + 2y' + y\big) = \mathfrak{L}\big(\delta(t-\pi)\big)\\
&\mathfrak{L}\big(y''\big) + 2\mathfrak{L}\big(y'\big) + \mathfrak{L}\big(y\big) = \mathfrak{L}\big(\delta(t-\pi)\big)\\
&s^2\mathfrak{L}(y) - sy(0) - y'(0) + 2\big(s\mathfrak{L}(y) - y(0)\big) + \mathfrak{L}(y) = e^{-s\pi}.
\end{aligned}$$

Reemplazando las condiciones iniciales obtenemos que

$$s^2\mathfrak{L}(y) - s + 2\big(s\mathfrak{L}(y) - 1\big) + \mathfrak{L}(y) = e^{-s\pi}.$$

Despejamos ahora $\mathfrak{L}(y)$:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}(y)\big(s^2 + 2s + 1\big) &= e^{-s\pi} + s + 2\\
\mathfrak{L}(y) &= \frac{e^{-s\pi} + s + 2}{s^2 + 2s + 1}.
\end{aligned}$$

Hallamos la transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = \underbrace{\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s\pi}}{s^2 + 2s + 1}\right)}_{1} + \underbrace{\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2 + 2s + 1}\right)}_{2} + 2\underbrace{\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 2s + 1}\right)}_{3}.$$

Para resolver el término 1 utilizamos la ecuación (5.6), primero expresamos $\frac{e^{-s\pi}}{s^2+2s+1}$ como el producto $e^{-as}F(s)$.

Para esto hacemos $e^{-as} = e^{-\pi s}$ y $F(s) = \frac{1}{(s+1)^2}$. Así $a = \pi$ y $f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right) = e^{-t}t$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{e^{-s\pi}}{s^2+2s+1}\right) =& f(t-\pi)U(t-\pi)\\ =& U(t-\pi)\left(e^{-(t-\pi)}(t-\pi)\right).\end{aligned}$$

Utilizamos fracciones parciales para el segundo y tercer término:

$$\begin{aligned}y(t) =& U(t-\pi)\left(e^{-(t-\pi)}(t-\pi)\right) + \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+2s+1}\right) + 2\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+2s+1}\right)\\ y(t) =& U(t-\pi)\left(e^{-(t-\pi)}(t-\pi)\right) + \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right) + \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s+1)^2}\right)\\ y(t) =& U(t-\pi)\left(e^{-(t-\pi)}(t-\pi)\right) + e^{-t} + e^{-t}t.\end{aligned}$$

☑

Ejemplo 5.36. *Hallar la solución de la ecuación integro-diferencial:*

$$y'(t) + y(t) - \int_0^t y(v)\sin(t-v)dv = -\sin(t), \quad y(0) = 1.$$

Solución. Para escribir la ecuación de otra manera primero expresamos la integral en términos de convolución, es decir,

$$\int_0^t y(v)\sin(t-v)dv = (y*\sin)(t),$$

de tal manera que la ecuación la podemos escribir como

$$y'(t) + y(t) - (y*\sin)(t) = -\sin(t).$$

Ahora aplicamos transformada de Laplace a ambos lados, reemplazamos con cada una de las fórmulas:

$$\begin{aligned}&\mathfrak{L}(y'(t)) + \mathfrak{L}(y(t)) - \mathfrak{L}((y*\sin)(t)) = \mathfrak{L}(-\sin(t))\\ &s\mathfrak{L}(y(t)) - y(0) + \mathfrak{L}(y(t)) - \mathfrak{L}(y(t))\mathfrak{L}(\sin(t)) = \mathfrak{L}(-\sin(t))\\ &s\mathfrak{L}(y(t)) - 1 + \mathfrak{L}(y(t)) - \mathfrak{L}(y(t))\frac{1}{s^2+1} = -\frac{1}{s^2+1}\\ &\mathfrak{L}(y(t))\left(s+1-\frac{1}{s^2+1}\right) = 1 - \frac{1}{s^2+1}\end{aligned}$$

$$\mathfrak{L}(y(t)) = \frac{s}{s^2+s+1} = \frac{s}{s^2+s+1/4+3/4} = \frac{s}{\left(s+1/2\right)^2+3/4}.$$

Utilizando la transformada inversa de Laplace concluimos:

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{s}{\left(s+1/2\right)^2+3/4}\right)$$
$$y(t) = e^{-t/2}\cos\left(t\sqrt{3}/2\right) - \frac{\sqrt{3}}{3}e^{-t/2}\sin\left(t\sqrt{3}/2\right).$$

Esta es la solución del problema de valor inicial. ☑

Como vimos, la técnica para resolver problemas de valor inicial usando la transformada de Laplace se basa en la aplicación del teorema 5.7 y el uso de las propiedades de la transformada. Dado que el teorema 5.7 relaciona la transformada de Laplace de una función con su valor y el de sus derivadas en cero, podemos pensar que esta herramienta solo funciona para PVI en 0. El siguiente ejemplo muestra que esto no es cierto.

Ejemplo 5.37. *Usando la transformada de Laplace, hallar la solución del problema de valor inicial:*

$$y''(t)+y(t) = t\cos(t), \quad y(2\pi) = 0 \quad y'(2\pi) = 4\pi^2.$$

Solución. Como antes, aplicamos la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación y usamos las propiedades de linealidad. Obtenemos así que:

$$s^2\mathfrak{L}(y(t)) - sy(0) - y'(0) + \mathfrak{L}(y(t)) = \mathfrak{L}(t\cos(t)).$$

Ahora, del teorema 5.8 tenemos que:

$$\mathfrak{L}(t\cos(t)) = (-1)\frac{d\mathfrak{L}(\cos(t))}{ds} = -\frac{d\frac{s}{s^2+1}}{ds} = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}.$$

Despejemos $\mathfrak{L}(y(t))$:

$$\mathfrak{L}(y(t)) = \frac{s^2-1}{(s^2+1)^3} + y(0)\frac{s}{s^2+1} + y'(0)\frac{1}{s^2+1}.$$

Notemos los siguiente:

$$\frac{s^2-1}{(s^2+1)^3} = \frac{s^2+1-2}{(s^2+1)^3} = \frac{1}{(s^2+1)^2} - 2\frac{1}{(s^2+1)^3}.$$

Luego,

$$\frac{s^2-1}{(s^2+1)^3} = \frac{1}{(s^2+1)}\frac{1}{(s^2+1)} - 2\frac{1}{(s^2+1)}\frac{1}{(s^2+1)}\frac{1}{(s^2+1)}$$

$$=\mathfrak{L}(\sin(t))\mathfrak{L}(\sin(t)) - 2\mathfrak{L}(\sin(t))\mathfrak{L}(\sin(t))\mathfrak{L})(\sin(t)).$$

Usemos el teorema 5.9 y la propiedad asociativa de la convolución para concluir que

$$\frac{s^2-1}{(s^2+1)^3} = \mathfrak{L}(\sin(t) * \sin(t)) - 2\mathfrak{L}((\sin(t) * \sin(t)) * \sin(t)).$$

Así llegamos a la siguiente expresión:

$$\mathfrak{L}(y(t)) = \mathfrak{L}(\sin(t)*\sin(t)) - 2\mathfrak{L}((\sin(t)*\sin(t))*\sin(t)) + y(0)\frac{s}{s^2+1} + y'(0)\frac{1}{s^2+1},$$

aplicando transformada inversa de Laplace a la ecuación anterior concluimos que:

$$\begin{aligned} y(t) =& \sin(t) * \sin(t) - 2(\sin(t) * \sin(t)) * \sin(t) + y(0)\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) \\ &+ y'(0)\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right), \end{aligned}$$

donde,

$$\sin(t) * \sin(t) = \int_0^t \sin(t-v)\sin(v)dv = \frac{1}{2}\sin(t) - t\cos(t).$$

De modo que

$$\begin{aligned} \sin(t)*&\sin(t) - 2(\sin(t) * \sin(t)) * \sin(t) \\ &= \sin(t) * \sin(t) - 2\left(\left(\frac{1}{2}\sin(t) - t\cos(t)\right) * \sin(t)\right) \\ &= \sin(t) * \sin(t) - \sin(t) * \sin(t) + 2t\cos(t) * \sin(t) \\ &= 2t\cos(t) * \sin(t). \end{aligned}$$

Calculamos esta convolución y obtenemos:

$$2t\cos(t) * \sin(t) = 2\int_0^t v\cos(v)\sin(t-v)dv = t^2\sin(t).$$

Ahora actualizamos la expresión para $y(t)$:

$$y(t) = t^2\sin(t) + y'(0)\sin(t) + y(0)\cos(t),$$

la cual depende de los valores desconocidos $y(0)$ y $y'(0)$. Para hallar estos valores usemos las condiciones iniciales:

$$0 = y(2\pi) = (2\pi)^2\sin(2\pi) + y'(0)\sin(2\pi) + y(0)\cos(2\pi),$$

obtenemos que $y(0) = 0$. Derivamos la expresión de la solución $y(t)$ para hallar $y'(0)$:

$$4\pi^2 = y'(2\pi) = 2(2\pi)\sin(2\pi) + (2\pi)^2\cos(2\pi) + y'(0)\cos(2\pi).$$

Concluimos que $y'(0) = 0$. Finalmente obtenemos que

$$y(t) = t^2 \sin(t)$$

es la solución del problema de valor inicial. ☑

Ejercicios

1. Usar la transformada de Laplace para resolver el problema de valor inicial respectivo:
   a) $y' + 6y = e^{4t}, \quad y(0) = 2.$
   b) $y'' + 2y' + y = 6\sin(t) - 4\cos(t), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1.$
   c) $y'' + y = \sin(2t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
   d) $y'' + 3y' + 2y = e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$
   e) $y'' + 4y = 8\sin(2t) + 9\cos(t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
   f) $y'' - 5y' + 6y = 10e^t\cos(t), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1.$
   g) $y'' + 4y' + 13y = 10e^{-t} - 36e^t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -16.$
   h) $y'' + 4y = g(t), \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0$, donde

   $$g(t) = \begin{cases} t, & t \leq 2 \\ 5, & t > 2. \end{cases}$$

   i) $y''' - y'' + y' - y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 3.$
   j) $y''' + y'' + 3y' - 5y = 16e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2, \quad y''(0) = -1.$
   k) $y'' + 3y' - 6y = 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$
   l) $y'' - y' + y = 2, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1.$
   m) $y'' + y' - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$
   n) $y'' + 4y = \sin(t)u(t - 2\pi), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$
   ñ) $y'' + 4y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1$, donde

   $$f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1. \end{cases}$$

   o) $y'' + y = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$, donde

   $$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \pi \\ 1, & \pi \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

p) $y''+4y'+3y = 1-u(t-2)-u(t-4)+u(t-6),\quad y(0) = 0,\quad y'(0) = 1.$

q) $y'' - 4y' + 4y = f(t), y(0) = -2, y'(0) = 1$ donde

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 3 \\ t+2, & t \geq 3. \end{cases}$$

2. Hallar la solución de las ecuaciones integro-diferenciales:

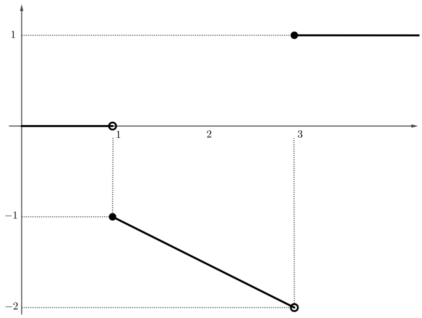
a) $y' - y + \int_0^t y(v)e^{t-v}(t-v)dv = e^t,\ y(0) = -1$

b) $y'' + \frac{e^2}{4}y + U(t+1)\int_0^{t+1} y'(v)\delta(t-v-1)e^{(t-v)^2}dv = \delta(t-2),\ y(0) = y'(0) = 0.$

c) $y' + 4\int_0^t y(v)dv = t - \sin(t),\ y(0) = 2.$

d) $y' = \int_0^t y(v)\cos(t-v)dv,\ y(0) = 1.$

e) $y'(t) + \int_0^t y(v)\cosh(t-v)dv = g(t),\quad y(0) = 0$, donde g tiene como gráfico



3. Sea $\mathfrak{L}(tf(t)) = -\frac{dF}{ds}$ donde $F(s) = \mathfrak{L}(f)$. Usar esta ecuación para resolver el problema de valor inicial:

$$y'' + 2ty' - 4y = 1,\quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *b*) $y(t) = 2e^{-t} + 5te^{-t} - 3\cos(t) - 2\sin(t).$

d) $y(t) = \frac{1}{6}e^t - \frac{2}{3}e^{-2t} + \frac{1}{2}e^{-t}.$

h) $y(t) = \frac{1}{4}t + \cos(2t) - \frac{1}{8}\sin(2t) + \frac{7}{4}U(t-2) + \frac{1}{4}(t-2)U(t-2) - \frac{7}{4}\cos(2t-4)U(t-2) - \frac{1}{8}\sin(2t-4)U(t-2)$.

g) $y(t) = e^{-t} - 2e^{t} + e^{-2t}\cos(3t) - \frac{11}{3}e^{2t}\sin(3t)$.

ñ) $y(t) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos(2t) - \frac{1}{2}\sin(2t) - \frac{1}{4}U(t-1) + \frac{1}{4}\cos(2t-2)U(t-1)$.

2. *a*) $y(t) = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3}e^{\frac{3}{2}t}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.

b) $y(t) = U(t-2)(t-2)e^{-\frac{e}{2}(t-2)}$.

d) $y(t) = 1 + \frac{1}{2}t^2$.

Capítulo

seis

Soluciones de EDO mediante series

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

En este capítulo estudiaremos un método para hallar soluciones en forma de series de infinitas de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior. Este tipo de soluciones es útil sobre todo para hallar soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales.

1. Series de potencias

Antes de comenzar a estudiar los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales veamos algunas nociones y resultados sobre series de potencias.

Definición 6.1. Una serie de potencias en $x-a$, o centrada en a, es una serie infinita de la forma

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Los índices de la suma en las series de potencias se pueden trasladar para comenzar en cualquier valor:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n(x-a)^{n-k} = \sum_{n=n_0-k}^{\infty} c_{n+k}(x-a)^n.$$

Definición 6.2 (Convergencia). Una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ es convergente en un valor determinado r, si la serie infinita de números reales $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(r-a)^n$ converge; esto es, si su sucesión de sumas parciales converge. Es decir, si existe:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(r) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n(r-a)^n.$$

Si el límite no existe, se dice que la serie diverge en $x = r$.

Nótese que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ converge para $x = a$, ya que

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(a-a)^n = c_0 + 0 + 0 + \cdots .$$

Ahora, queremos saber sobre la convergencia de una serie de potencia para valores de x diferentes al número a; esto es, queremos saber sobre el conjunto de números reales para los cuales la serie converge. Este conjunto resulta ser un intervalo, como se muestra en el teorema 6.1, cuya demostración se puede ver en [2].

Definición 6.3. Una serie de potencias se dice que converge absolutamente en un número $x = r$, si

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n||r - a|^n$$

es convergente.

Es claro que toda serie absolutamente convergente es convergente mientras que el recíproco es falso.

Teorema 6.1. *Si la serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ *converge por lo menos para un* $x \neq a$*, digamos para* $x = x_0$ *y diverge por lo menos para un* x*; por ejemplo, para* $x = x_1$*, existe un número real* $R > 0$ *tal que la serie converge absolutamente si* $|x| < R$ *y diverge si* $|x| > R$*.*

Para comprender la importancia de este teorema escribiremos sus conclusiones en forma de las siguientes definiciones.

Definición 6.4 (Intervalo de convergencia). Toda serie de potencias tiene un intervalo de convergencia. Este consiste en el conjunto de los números reales x para los cuales la serie converge.

Definición 6.5 (Radio de convergencia). Si $R > 0$, una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - a)^n$ converge para $|x - a| < R$ y diverge para $|x - a| > R$. Si la serie solo converge en su centro a, entonces $R = 0$. Si converge para todo x, se escribe $R = \infty$. Sabemos que $|x - a| < R$ equivale a $a - R < x < a + R$.

Una forma sencilla para determinar el radio de convergencia de una serie de potencia es mediante el llamado *criterio de la razón*, el cual establece que la serie

$$c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots$$

converge absolutamente si

$$\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = L < 1.$$

En este caso el radio de convergencia es dado por $R = 1/L$. Si $R \neq 0$ o $R \neq \infty$, el intervalo de convergencia puede o no incluir los extremos $a - R$ y $a + R$ y por lo tanto estos casos se deben analizar por separado.

Ejemplo 6.1. *Determinar el radio de convergencia de la serie de potencias*

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots + \frac{1}{n}x^n + \cdots .$$

Solución. En este caso $c_n = \frac{1}{n}x^n$ y $c_{n+1} = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$, luego

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n}\frac{x^{n+1}}{x^n}\right| = |x|.$$

Del criterio de la razón tenemos que la serie converge absolutamente para los valores $|x| = L < 1$. Sin embargo, el intervalo de convergencia es $[-1, 1)$ ya que para $x = -1$ la serie converge y diverge para $x = 1$. ☑

Ejemplo 6.2. *Determinar el intervalo de convergencia de la serie de potencias*

$$1 + 1!x + 2!x^2 + \cdots + n!x^n + \cdots .$$

Solución. En este caso $c_n = n!x^n$ y $c_{n+1} = (n+1)!x^{n+1}$. Por lo tanto,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{n!}\frac{x^{n+1}}{x}\right| = \lim_{n\to\infty}|(n+1)x|.$$

Para $x \neq 0$ este límite tiende a infinito cuando $n \to \infty$, por lo tanto la serie converge solo para $x = 0$. ☑

A continuación daremos algunos resultados sobre series de potencias que nos permitirán comprender y manipular estas sumas infinitas. Para ver su demostración recomendamos [2].

El siguiente teorema establece que si una serie de potencia converge entonces esta define una función continua; sin embargo, conocer tal función no es fácil, de hecho muchas series de potencias convergentes no definen funciones elementales.

Teorema 6.2. *Si una serie de potencias converge en un intervalo $|x - a| < R$ con $R > 0$, entonces la serie define una función $f(x)$ continua en todo el intervalo $|x - a| < R$.*

Ahora que sabemos que una serie de potencias convergente define una función continua, queremos conocer cómo hacer operaciones algebraicas con estas funciones. El siguiente teorema explica esto.

Teorema 6.3. *Sean $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ y $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n$ dos funciones definidas mediante series de potencias convergente en un mismo intervalo $|x - a| < R$. Entonces*

1. *$f(x) = g(x)$ si, solo si, $a_n = b_n$, para todo $n = 0, \ldots$.*
2. *$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)(x-a)^n$.*

3. *$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$, donde $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0$.*
4. *Si $g(x) \neq 0$ en $|x-a| < R$, entonces $\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n$, donde en la mayoría de los casos los coeficientes se pueden obtener con mayor facilidad al igualar los coeficientes en la relación equivalente:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(x-a)^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} d_kb_{n-k}\right)(x-a)^n.$$

El siguiente resultado muestra que una función representada por una serie de potencias tiene derivada de todos los ordenes en el intervalo de convergencia de la serie. Estas derivadas se calculan derivando término a término.

Teorema 6.4. *Una serie de potencias*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

con radio de convergencia $R > 0$ tiene derivada de todos los ordenes en su intervalo de convergencia y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x-a)^{n-1}$$

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x-a)^{n-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)(x-a)^{n-k}.$$

Además, todas estas series tienen el mismo radio de convergencia R.

Obs Note que la serie de la j-ésima derivada de una función $f(x)$, expresada en serie de potencias, puede comenzar en el índice de sumatoria $n = 0$ o cualquier valor de $n < j$ puesto que los correspondientes coeficientes son cero y por tanto no aportan valor a la sumatoria.

Ejemplo 6.3. *Dada la función*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

escriba la función $xf''(x) - f(x)$ de modo que el término general sea un múltiplo constante de $(x-a)^n$.

Solución. Tenemos que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n,$$

y, por tanto,

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x-a)^{n-2}.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
xf''(x) - f(x) &= x \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x-a)^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \\
&=(x-a+a) \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x-a)^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \\
&=(x-a) \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x-a)^{n-2} + a \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x-a)^{n-2} \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x-a)^{n-1} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) a (x-a)^{n-2} \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n.
\end{aligned}$$

Ahora usamos la traslación de los índices de la sumatoria:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x-a)^{n-1} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n(x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n(x-a)^n,
\end{aligned}$$

y

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1) a (x-a)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1) a (x-a)^n,$$

entonces

$$xf''(x) - f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n(x-a)^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1) a (x-a)^n$$

$$
\begin{aligned}
&- \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} [a_{n+2}(n+2)(n+1)a + a_{n+1}(n+1)n - a_n](x-a)^n.
\end{aligned}
$$

☑

Ejemplo 6.4. *Suponga que*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n$$

converge en un intervalo I que contiene a -2. Expresar la función

$$(x-1)f''(x) - 3(x+2)f'(x) + 3f(x)$$

como una serie de potencias en $x+2$ en I.

Solución.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+2)^n, \\
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n (x+2)^{n-1}, \\
f''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x+2)^{n-2}
\end{aligned}
$$

luego, $(x-1)f''(x)$ la reescribimos de la siguiente manera

$$
\begin{aligned}
(x-1)\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x+2)^{n-2} &= (x+2-3)\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x+2)^{n-2} \\
&=(x+2)\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x+2)^{n-2} - 3\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x+2)^{n-2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x+2)^{n-1} - 3\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x+2)^{n-2}.
\end{aligned}
$$

Balanceando los índices de las sumatorias, podemos reescribir las series anteriores como

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x+2)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n(x+2)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n(x+2)^n$$

y

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x+2)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)(x+2)^n.$$

De forma similar,

$$3(x+2)\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x+2)^{n-1} = 3\sum_{n=1}^{\infty} a_n n(x+2)^n = 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(x+2)^n.$$

Concluimos entonces:

$$\begin{aligned}
&(x-1)f''(x) - 3(x+2)f'(x) + 3f(x) \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)n(x+2)^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)(x+2)^n \\
&\qquad - 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(x+2)^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+2)^n \\
&\quad = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_{n+1}n(n+1) - 3a_{n+2}(n+2)(n+1) - 3na_n + 3a_n\right)(x+2)^n.
\end{aligned}$$

☑

Definición 6.6 (Serie de Taylor). Una serie de potencias de la forma

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0)^n + \cdots,$$

donde $|x - x_0| < R$, es llamada una *expansión de Taylor* de $f(x)$ en potencias de $(x - x_0)$. Si $x_0 = 0$, la serie es llamada *expansión en serie de Maclaurin* de $f(x)$.

El siguiente teorema nos dice cuales son los coeficientes de una función continua definida mediante una serie de potencias.

Teorema 6.5. *Si una función $f(x)$ es definida por una serie de potencias; es decir,*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \quad |x-x_0| < R;$$

entonces

$$a_0 = f(x_0),\ a_1 = f'(x_0),\ a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}, \ldots, a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}, \ldots \tag{6.1}$$

Obs El teorema 6.5 dice que si $f(x)$ es definida por una serie de potencia, entonces sus coeficientes son dados por (6.1). Sin embargo, no dice cuando una función $f(x)$ puede ser definida por una serie de potencias. Por ejemplo, consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Esta función es continua en 0 y sus derivadas en este punto son

$$f'(0) = f''(0) = f''(0) = f'''(0) = 0, \ldots$$

luego si esta función se expresa como una serie de potencias, entonces

$$f(x) = 0 + 0x + \frac{0}{2!}x + \ldots, \quad -\infty < x < \infty.$$

Sin embargo para $x_0 \neq 0$ el lado derecho de la igualdad anterior no converge a $f(x_0) = e^{-\frac{1}{x_0}} \neq 0$.

Veamos una condición necesaria para garantizar que una función continua pueda ser escrita como una serie de potencias convergente en algún intervalo.

Teorema 6.6 (Taylor). *Si una función $f(x)$ tiene derivada de todos los ordenes en un intervalo $|x - x_0| < R$, entonces:*

$$f(x) = f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

donde el término $R_n(x)$ es dado por

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!}, \quad x_0 < z < x.$$

Si $R_n(x) \to 0$ cuando $n \to \infty$, entonces, y solo entonces:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}}{n!}(x-x_0^n) + \cdots,$$

$|x - x_0| < R$; es decir, la serie infinita converge a $f(x)$.

Definición 6.7 (Función analítica). Una función $f(x)$ es analítica en un punto x_0 si se puede expresar como una expansión de Taylor en potencias de $x - x_0$ para cualquier x en una vecindad de x_0.

La tabla 6.1 muestra la expansión en series de Maclaurin de algunas funciones elementales.

Funciones	Intervalo de convergencia
$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\mathbb{R}$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$\sinh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathbb{R}$
$\cosh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$	$(-1, 1)$
$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$	$(-1, 1]$
$\tan^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$[-1, 1]$
$\sin^{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n+1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$[-1, 1]$
$(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)x^2}{2!} + \frac{r(r-1)(r-2)x^3}{3!} + \cdots$	$(-1, 1)$

Tabla 6.1: Series de Maclaurin de algunas funciones elementales.

Ejercicios

1. Determinar si cada una de las siguientes series es convergente o divergente:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n+3)(4n-1)}$.

   b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$.

   c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n)}{n\sqrt{n+1}}$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos^2(n\pi/3)}{2^n}$.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n^{1/n}-1)^n$.

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$.

2. Para cada una de las siguientes series hallar el radio de convergencia R. Si $R > 0$, hallar el intervalo de convergencia.

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n}(x-1)^n$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{7^n}{n!} x^n$.

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} 2^n n(x-2)^n$.

   d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^{n+1}(n+1)^2}(x+7)^n$.

3. Para $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, hallar la serie de potencias resultante:

   a) $(x-3)y'' + xy' - 2y$.

   b) $(x^2+1)y'' - 2y' + y$.

   c) $(1+4x^2)y'' - (2+x)y' - y$.

   d) $x(x-5)y'' - 3xy' + y$.

4. Suponga que $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x+1)^n$ converge en un intervalo abierto que contiene a $x_0 = -1$. Hallar una serie de potencias en $x+1$ para

$$(x-2)^2y'' + (3x+6)y' + y.$$

5. Suponga que $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-1)^n$ converge en un intervalo abierto que contiene a $x_0 = 1$. Hallar una serie de potencias en $x-1$ para

$$x^2y'' - (x+1)y' + (2+x)y.$$

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. a) Diverge.

c) Converge.
e) Converge.

2. a) El radio de convergencia es $R = 2$ y el intervalo de convergencia es $(-1, 3]$.
   d) El radio de convergencia es $R = 4/3$ y el intervalo de convergencia es $[-25/3, -17/3]$.

3. b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}((n+2)(n+1)a_{n+2} - 2(n+1)a_{n+1} + (n(n-1)+1)a_n)x^n.$
   d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-5(n+1)na_{n+1} + (n^2 - 4n + 1)a_n)x^n.$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(9(n+2)(n+1)a_{n+2} + (-6n^2 - 3n + 3)a_{n+1} + (n+1)^2 a_n)(x+1)^n.$

2. Soluciones en series de potencias

Estudiaremos un método para hallar soluciones de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior con coeficientes no constantes, el cual no necesita de una solución particular para hallar la solución general. Consideremos siguiente la ecuación no homogénea:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y = g(x), \quad a_n(x) \neq 0. \tag{6.2}$$

Podemos escribirla de la forma:

$$y^{(n)} + P_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_1(x)y' + P_0(x)y = Q(x), \tag{6.3}$$

donde $P_i(x) = \frac{a_i(x)}{a_n(x)}$, $i = 0, \ldots, n-1$ y $Q(x) = \frac{g(x)}{a_n(x)}$.

Definición 6.8. Se dice que un punto x_0 es punto ordinario de la ecuación (6.2) si $P_i(x)$ $i = 0, \ldots n-1$ y $Q(x)$ dados en (6.3), son funciones analíticas en x_0. Se dice que un punto que no es ordinario es punto singular de la ecuación.

Ejemplo 6.5. *Para la ecuación de Legendre:*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0 \tag{6.4}$$

$x_0 = 1$ *y* $x_0 = -1$ *son puntos singulares y los restantes son regulares. Para la ecuación de Bessel:*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu)y = 0 \tag{6.5}$$

$x_0 = 0$ *es un punto singular y los otros puntos son ordinarios. En la ecuación de Airy*

$$y'' - xy = 0 \tag{6.6}$$

todo punto es un punto ordinario. ☑

Antes de desarrollar las técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son dadas como series de potencias debemos garantizar la existencia de tales soluciones. Para ello presentamos el teorema de existencia y unicidad de soluciones mediante series de potencias cuya demostración se puede ver en [16].

Teorema 6.7 (Existencia de soluciones analíticas). *Si $x = x_0$ es un punto ordinario de la ecuación (6.1), entonces existe una única solución $y(x)$ analítica x_0; esto es, $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$, satisface las condiciones iniciales:*

$$y(x_0) = a_0,\ y'(x_0) = a_1, \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1}.$$

Una solución en serie converge al menos en un intervalo $|x - x_0| < R$, donde R es la distancia de x_0 al punto singular más cercano.

Una estrategia para hallar soluciones en series de potencias respecto al punto ordinario $x = x_0$ para una ecuación diferencial lineal es la siguiente:

- Proponer una solución de la forma $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n$.
- Derivar $y(x)$ hasta el orden de la ecuación y reemplazar.
- Hacer las operaciones algebraicas indicadas en la ecuación diferencial.
- Igualar las series resultantes y establecer una recurrencia con los coeficientes c_n.
- Resolver la recurrencia o generar algunos términos de ella.

Ejemplo 6.6. *Determinar dos soluciones en forma de serie de potencias de la ecuación diferencial dada respecto al punto ordinario $x = 0$.*

1. $y'' - 2xy' + y = 0.$
2. $y'' + \sin(x)y = 0.$

Solución. 1. Como no hay puntos singulares finitos, el teorema anterior garantiza la existencia de una solución en series de potencias centrada en 0, convergente para $|x| < \infty$. Así, al sustituir $y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$ y $y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2}$, en la ecuación diferencial, se obtiene

$$y'' - 2xy' + y = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0$$

$$y'' - 2xy' + y = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Para sumar dos series, es necesario que ambos índices de suma comiencen en el mismo número y que las potencias de estas series comiencen con la misma potencia; para lograr esto hacemos lo siguiente: para la primera serie hacemos el cambio en el índice $k = n-2$, para la segunda $k = n$ y para la tercera tomamos $k = n$; de esta manera balanceamos los exponentes de la variable x. Por lo tanto, el lado derecho se convierte en

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k}_{k=n-2} - 2\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^k}_{k=n} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k}_{k=n}.$$

Ahora queremos balancear los índices de la sumas ya que la primera serie comienza en 0 y la segunda en 1. Si se escribe el primer término de la primera serie fuera de la notación sigma, y lo mismo hacemos con la tercera serie obtenemos:

$$2\cdot 1\cdot c_2 + \sum_{k=1}^{\infty}(k+2)(k+1)c_{k+2}x^k - 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k k x^k + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^k = 0$$

lo cual podemos expresar como

$$2\cdot 1\cdot c_2 + c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[(k+2)(k+1)c_{k+2} - 2c_k k + c_k\right]x^k = 0. \tag{6.7}$$

Como la ecuación (6.7) es igual a cero es necesario que el coeficiente de cada potencia de x sea igual a cero, esto es, que $2c_2 + c_0 = 0$ (es el coeficiente de x^0)

$$c_2 = -\frac{c_0}{2},$$

para $k = 1$, $c_3 = \frac{c_1}{3!}$,

para $k = 2$, $c_4 = \frac{3c_2}{4\cdot 3}$, pero como conocemos c_2 sustituimos:

$$c_4 = -\frac{3c_0}{4!};$$

para $k = 3$, $c_5 = \frac{5c_3}{4\cdot 5}$, pero como conocemos c_3 sustituimos:

$$c_5 = -\frac{c_1}{5!}$$

para $k = 4$, $c_6 = \frac{7c_4}{5\cdot 6}$, pero como conocemos c_4 sustituimos:

$$c_6 = -\frac{21c_0}{6!}$$

para $k = 5$, $c_7 = \frac{9c_5}{6\cdot 7}$, pero como conocemos c_5 sustituimos:

$$c_7 = -\frac{45c_1}{7!}.$$

Y así sucesivamente. Por tanto,

$$\begin{aligned} y =& c_0 + c_1 x - \frac{c_0}{2!}x^2 + \frac{c_1}{3!}x^3 - \frac{3c_0}{4!}x^4 + \frac{5c_1}{5!}x^5 - \frac{21c_0}{6!}x^6 + \frac{45c_1}{7!}x^7 + \cdots \\ =& c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{21x^6}{6!} - \cdots\right) + c_1\left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{5x^5}{5!} + \frac{45x^7}{7!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

2. La función $\sin(x)$ es analítica en el punto ordinario $x = 0$. Además, $\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Sustituimos esto junto con

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2}$$

en la ecuación diferencial y obtenemos:

$$\begin{aligned} & y'' + \sin(x)y \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)x^{n-2} + \left(\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = 0. \end{aligned}$$

Expandimos las series para agrupar los coeficientes de cada término:

$$\begin{aligned} & c_2 2 + 6c_3 x + 12c_4 x^2 + 20c_5 x^3 + 30c_6 x^4 + \cdots + \\ & + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right)(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots) = 0. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} & 2c_2 + x(6c_3 + c_0) + x^2(12c_4 + c_1) + x^3(20c_5 + c_2 - \frac{c_0}{3!}) + \\ & + x^4(30c_6 + c_3 - \frac{c_1}{3!}) + \cdots = 0. \end{aligned}$$

Como $0 = \sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$, igualamos cada término de la izquierda con el correspondiente de la derecha y concluimos que

$$2c_2 = 0, \quad 6c_3 + c_0 = 0, \quad 20c_5 + c_2 + \frac{c_0}{3!} = 0, \quad 30c_6 + c_3 + \frac{c_1}{3!} = 0$$

y así sucesivamente. Esto da como resultado

$$c_2 = 0, \quad c_3 = -\frac{c_0}{6}, \quad c_4 = -\frac{c_1}{12}, \quad c_5 = \frac{c_0}{120}, \cdots$$

Al agrupar términos llegamos a la solución general

$$\begin{aligned} y =& c_0 + c_1 x - \frac{c_0}{6}x^3 - \frac{c_1}{12}x^4 + \frac{c_0}{120}x^5 + \cdots \\ =& c_0\left(1 - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots\right) + c_1\left(x - \frac{x^4}{12} + \cdots\right). \end{aligned}$$

☑

Cuando buscamos la solución en series de potencia de un problema de valor inicial, en virtud del teorema 6.5, podemos usar estas condiciones iniciales para hallar los coeficientes de la eventual solución.

Ejemplo 6.7. *Hallar la solución en serie de potencias del problema de valor inicial*

$$y'' - (x+1)y' + x^2 y = x, \quad y(0) = 1, \ y'(0) = 1. \tag{6.8}$$

Solución. Dado que las funciones $-x - 1$, x^2 y x son polinomios, entonces son funciones analíticas en todo punto. Luego, del teorema de existencia y unicidad, podemos hallar una solución en series de potencias del problema de valor inicial dado. Como conocemos el valor de la eventual solución y su derivada en 0, entonces del teorema 6.5 busquemos una solución de la forma

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \cdots . \tag{6.9}$$

Reemplazando las condiciones iniciales, $x = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$ en (6.8) obtenemos:

$$y''(0) - 1 = 0, \quad y''(0) = 1.$$

De esta forma tenemos los coeficientes $y(0)$, $y'(0)$ y $y''(0)$ de la solución (6.9). Para hallar los otros coeficientes derivamos (6.8) y usamos las condiciones iniciales.

$$\begin{aligned} &y''' - (x+1)y'' - y' + x^2 y' + 2xy = 1 \\ &y^{(4)} - (x+1)y''' - 2y'' + x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0, \end{aligned}$$

evaluando en $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$, obtenemos $y'''(0) = 3$ y $y^{(4)}(0) = 3$. Sustituyendo en la solución (6.9) tenemos:

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{8} + \cdots , \quad -\infty < x < \infty.$$

☑

Ejemplo 6.8. *Sea x_0 un punto arbitrario, hallar la serie de potencias en $x - x_0$ para la solución general de la ecuación diferencial*

$$y'' + y = 0.$$

Solución. Sea y una solución en serie de potencias de la ecuación $y'' + y = 0$. Entonces

$$\begin{aligned} y(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \\ y''(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x - x_0)^{n-2}. \end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial tenemos:

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)(x - x_0)^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = 0.$$

Ahora balanceamos los índices de las series, hacemos $k = n - 2$ para la primera serie y $k = n$ para la segunda. De allí obtenemos:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}(k+1)(k+2)(x - x_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = 0,$$

esto es,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[a_{k+2}(k+1)(k+2) + a_k \right] (x - x_0)^k = 0.$$

La serie anterior es 0 para todo x y todo $k \geq 0$ si

$$a_{k+2}(k+1)(k+2) + a_k = 0,$$

equivalentemente, si se cumple la recursión,

$$a_{k+2} = -\frac{a_k}{(k+1)(k+2)}, \quad k \geq 0$$

donde a_0 y a_1 son arbitrarios. Note que los índices en la recurrencia anterior difieren por dos, por tanto podemos considerar separadamente los casos k par ($k = 2m$) y k impar ($k = 2m + 1$), $m \geq 0$:

$$a_{2m+2} = -\frac{a_{2m}}{(2m+1)(2m+2)}, \qquad m \geq 0$$

$$a_{2m+3} = -\frac{a_{2m+1}}{(2m+2)(2m+3)}, \qquad m \geq 0.$$

Con estas recurrencias podemos calcular los coeficientes de la serie de $y(x)$. Para los coeficientes pares de $x - x_0$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{a_0}{2} \\
a_4 &= -\frac{a_2}{3\cdot 4} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4} \\
a_6 &= -\frac{a_4}{5\cdot 6} = -\frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} \\
&\vdots \\
a_{2m} &= (-1)^m \frac{a_0}{(2m)!}, \quad m \geq 0.
\end{aligned}$$

Ahora calculemos los coeficientes impares de $x - x_0$

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{a_1}{2\cdot 3} \\
a_5 &= -\frac{a_3}{4\cdot 5} = \frac{a_1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \\
a_7 &= -\frac{a_5}{6\cdot 7} = -\frac{a_1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} \\
&\vdots \\
a_{2m+1} &= (-1)^m \frac{a_1}{(2m+1)!}, \quad m \geq 0.
\end{aligned}$$

Así, la solución general viene dada por

$$\begin{aligned}
y(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m}(x-x_0)^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} a_{2m+1}(x-x_0)^{2m+1} \\
&= a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!}(x-x_0)^{2m} + c_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!}(x-x_0)^{2m+1} \\
&= a_0 \cos(x-x_0) + a_1 \sin(x-x_0).
\end{aligned}$$

☑

Soluciones de EDO de la forma $(\mathbf{1} + \alpha(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})^{\mathbf{2}})\mathbf{y}'' + \beta(\mathbf{x} - \mathbf{x_0})\mathbf{y}' + \gamma\mathbf{y} = \mathbf{0}$

Consideraremos ahora el problema de hallar las soluciones en series de potencias en $x - x_0$ para ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma

$$(1 + \alpha(x-x_0)^2)y'' + \beta(x-x_0)y' + \gamma y = 0. \tag{6.10}$$

Este tipo de ecuaciones aparece en diferentes aplicaciones con $x_0 = 0$, e incluye como casos particulares la ecuación de Legrendre (6.4), la ecuación de Airy (6.6), la ecuación de Chebyshev:

$$(1-x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0 \tag{6.11}$$

y la ecuación de Hermite:

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0. \tag{6.12}$$

Como $a_2(x) = 1 + \alpha(x-x_0)^2$ en (6.10), El teorema de existencia mediante series (teorema 6.7) garantiza que sus soluciones se pueden escribir como series de potencias en torno a $x - x_0$ convergentes en el intervalo $(x_0 - 1/\sqrt{|\alpha|}, x_0 + 1/\sqrt{|\alpha|})$ si $\alpha \neq 0$ o en $(-\infty, \infty)$ si $\alpha = 0$.

Para hallar los coeficientes de las soluciones de este tipo de ecuaciones usemos la notación

$$\prod_{j=r}^{s} b_j = b_r b_{r+1} \cdots b_s, \quad s \geq r$$

y definamos:

$$\prod_{j=r}^{s} b_j = 1, \quad s < r, \quad \text{no importa los } b_j.$$

Ejemplo 6.9. *Hallar la serie de potencias en x de la solución general de la ecuación diferencial*

$$(1+2x^2)y'' + 6xy' + 2y = 0. \tag{6.13}$$

Solución. Para una solución en serie de potencias en x tenemos que

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2}$$

y debe satisfacer la identidad:

$$(1+2x^2)\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + 6x\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0,$$

la cual reescribimos como

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + 2\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^n + 6\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0. \tag{6.14}$$

Luego, escribiendo estas series bajo un solo signo de suma, (6.14) queda en la forma:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n n(n-1)x^n + 6\sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\
\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[2n(n-1) + 6n + 2\right] a_n x^n &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1)^2 a_n x^n &= 0 \\
\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_{n+2}(n+2)(n+1) + 2(n+1)^2 a_n\right] x^n &= 0.
\end{aligned}
$$

Esta serie es cero para todo x y todo $n \geq 0$, si

$$
a_{n+2}(n+2)(n+1) + 2(n+1)^2 a_n = 0, \quad n \geq 0,
$$

que es equivalente a la recurrencia:

$$
a_{n+2} = -2\frac{(n+1)^2}{(n+2)(n+1)} a_n = -2\frac{n+1}{n+2} a_n, \quad n \geq 0.
$$

Como los índices de la recurrencia difieren por 2, podemos considerar los casos n par y n impar separadamente

$$
\begin{aligned}
a_{2m+2} &= -2\frac{2m+1}{2m+2} a_{2m} = -\frac{2m+1}{m+1} a_{2m}, \quad m \geq 0 \\
a_{2m+3} &= -2\frac{2m+2}{2m+3} a_{2m+1} = -4\frac{m+1}{2m+3} a_{2m+1}, \quad m \geq 0.
\end{aligned}
$$

Calculemos los coeficientes pares:

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{-1}{1} a_0 \\
a_4 &= -\frac{3}{2} a_2 = \left(-\frac{3}{2}\right)(-1)a_0 = \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2} a_0 \\
a_6 &= -\frac{5}{3} a_4 = -\frac{5}{3}\left(\frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 2}\right) a_0 = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} a_0 \\
a_8 &= -\frac{7}{4} a_6 = -\frac{7}{4}\left(-\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) a_0 = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} a_0 \\
&\vdots \\
a_{2m} &= (-1)^m \frac{\prod_{j=i}^{m}(2j-1)}{m!} a_0, \quad m \geq 0, \quad \prod_{j=1}^{0}(2j-1) = 1.
\end{aligned}
$$

Las potencias impares son

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\,4\frac{1}{3}a_1\\
a_5 &= -\,4\frac{2}{5}a_3 = -4\frac{2}{5}\left(-4\cdot\frac{1}{3}\right)a_1 = 4^2\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}a_1\\
a_7 &= -\,4\frac{3}{7}a_5 = -4\frac{3}{7}\left(4^2\frac{1\cdot 2}{3\cdot 5}\right)a_1 = -4^3\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}a_1\\
a_9 &= -\,4\frac{4}{9}a_7 = -4\frac{4}{9}\left(-4^3\frac{1\cdot 2\cdot 3}{3\cdot 5\cdot 7}\right)a_1 = 4^4\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}a_1\\
&\ \vdots\\
a_{2m+1} &= (-1)^m\frac{4^m m!}{\prod_{j=i}^{m}(2j+1)}a_1, \quad m\geq 0, \quad \prod_{j=1}^{0}(2j+1)=1.
\end{aligned}$$

Así, la solución general en forma de serie de potencias en x viene dada por

$$y(x) = a_0\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\prod_{j=i}^{m}(2j-1)}{m!}x^{2m} + a_1\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{4^m m!}{\prod_{j=i}^{m}(2j+1)}x^{2m+1}.$$

☑

Note que la ecuación (6.13) es un caso particular de la ecuación (6.10). El siguiente teorema, cuya demostración se puede ver en [17], muestra las recurrencias para el caso general de la ecuación (6.10).

Teorema 6.8. *Los coeficientes* $\{a_n\}$ *de cualquier solución* $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ *de la ecuación diferencial*

$$(1+\alpha(x-x_0)^2)y'' + \beta(x-x_0)y' + \gamma y = 0$$

satisfacen la relación de recurrencia

$$a_{n+2} = -\frac{p(n)}{(n+2)(n+1)}a_n, \quad n\geq 0,$$

donde $p(n) = \alpha n(n-1) + \beta n + \gamma$. *Además, los coeficientes pares e impares de las potencias de* $x - x_0$ *se calculan mediante*

$$\begin{aligned}
a_{2m+2} &= -\,\frac{p(2m)}{(2m+2)(2m+1)}a_{2m}, \quad m\geq 0\\
a_{2m+3} &= -\,\frac{p(2m+1)}{(2m+3)(2m+2)}a_{2m+1}, \quad m\geq 0,
\end{aligned}$$

donde a_0 *y* a_1 *son arbitrarios.*

Ejemplo 6.10. *Determinar la solución en serie de potencias del problema de valor inicial*

$$\frac{1}{2}\left(x^2+2x+3\right)y''+2(x+1)y'-y=0, \quad y(-1)=1, \quad y'(-1)=-1. \quad (6.15)$$

Solución. Completando cuadrados reescribimos

$$\frac{1}{2}\left(x^2+2x+3\right)=\frac{1}{2}\left((x+1)^2+2\right)=\left(1+\frac{1}{2}(x+1)^2\right).$$

Por tanto, la ecuación (6.15) queda:

$$\left(1+\frac{1}{2}(x+1)^2\right)y''+2(x+1)y'-y=0,$$

que es de la forma general (6.10) con $x_0=-1$, $\alpha=1/2$, $\beta=2$ y $\gamma=-1$. Del teorema anterior podemos calcular los coeficientes de la solución mediante el polinomio

$$p(n)=\frac{1}{2}n(n-1)+2n-1.$$

Los coeficientes se calculan de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
a_{2m+2} &=-\frac{\frac{1}{2}(2m)(2m-1)+4m-1}{(2m+2)(2m+1)}a_{2m}=-\frac{2m^2+3m-1}{(2m+2)(2m+1)}a_{2m}\\
a_{2m+3} &=-\frac{\frac{1}{2}(2m+1)(2m+1-1)+2(2m+1)-1}{(2m+2)(2m+3)}a_{2m+1}\\
&\quad-\frac{2m^2+5m+1}{(2m+2)(2m+3)}a_{2m+1}.
\end{aligned}$$

Calculemos los coeficientes pares comenzando $a_0=y(-1)=1$:

$$\begin{aligned}
a_2 &=-\frac{-1}{1\cdot 2}a_0=\frac{1}{1\cdot 2}\\
a_4 &=-\frac{4}{3\cdot 4}a_2=-\frac{4}{2\cdot 3\cdot 4}\\
a_6 &=-\frac{8+6-1}{5\cdot 6}a_4=\frac{4\cdot 13}{6!}\\
a_8 &=-\frac{18+9-1}{7\cdot 8}a_6=-\frac{4\cdot 13\cdot 26}{8!}\\
&\vdots\\
a_{2m} &=(-1)^m\frac{\prod_{j=1}^{m}2j^2+3j-1}{(2m)!}.
\end{aligned}$$

Ahora calculemos los coeficientes impares comenzando con con el término $a_1 = y'(-1) = -1$:

$$\begin{aligned}
a_3 &= -\frac{1}{2\cdot 3}(-1) = \frac{1}{2\cdot 3}\\
a_5 &= -\frac{2+5+1}{4\cdot 5}a_3 = -\frac{8}{4\cdot 5}\left(\frac{1}{2\cdot 3}\right) = -\frac{1\cdot 8}{5!}\\
a_7 &= -\frac{2\cdot 4+5\cdot 2+1}{6\cdot 7}a_5 = -\frac{19}{6\cdot 7}\left(-\frac{1\cdot 8}{5!}\right) = \frac{1\cdot 8\cdot 19}{7!}\\
a_9 &= -\frac{3^2\cdot 2+15+1}{8\cdot 9}a_7 = -\frac{34}{8\cdot 9}\left(\frac{1\cdot 8\cdot 19}{7!}\right) = \frac{1\cdot 8\cdot 19\cdot 34}{9!}\\
&\vdots\\
a_{2m+1} &= (-1)^m\frac{\prod_{j=1}^{m}(2j^2+5j+1)}{(2m+1)!}.
\end{aligned}$$

Luego la solución en serie de potencias en $x+1$ del problema de valor inicial (6.15) es

$$\begin{aligned}
y(x) = &\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\prod_{j=1}^{m}(2(j-1)(j+2)+3)}{(2m)!}(x+1)^{2m}\\
&+\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\prod_{j=1}^{m}(2j^2+5j+1)}{(2m+1)!}(x+1)^{2m+1}
\end{aligned}$$

☑

Ejercicios

1. Determinar los puntos singulares de la ecuación diferencial dada:
   a) $(x+1)y'' - x^2y' + 3y = 0$.
   b) $(x^2+x)y'' + 3y' - 6xy = 0$.
   c) $\sin(x)y'' + \cos(x)y = 0$.
2. Determinar al menos los primeros cuatro términos no nulos en un desarrollo en serie de potencias en torno de $x = 0$ para una solución general de la ecuación diferencial dada:
   a) $y'' - xy = 0$ (ecuación de Airy).
   b) $y'' + (x-1)y' + y = 0$.
   c) $y'' - 2y' + y = 0$.
   d) $(2x-3)y'' - xy' + y = 0$.
3. Determinar un desarrollo en series de potencias en torno de $x = 0$ para una solución general de la ecuación diferencial dada. Su respuesta debe incluir una fórmula general para los coeficientes.

a) $y' - 2xy = 0$.
b) $y'' - xy' + 4y = 0$.
c) $y'' - x^2y' - xy = 0$.
d) $(x^2 + 1)y'' - xy' + y = 0$.

4. Determinar al menos los primeros cuatro términos no nulos en un desarrollo en serie de potencias en torno de $x = 0$ para una solución general de la ecuación diferencial dada:
   a) $y' + \sin(x)y = 0; \quad y(0) = 1$.
   b) $y' - e^x y = 0; \quad y(0) = 1$.
   c) $(x^2 + 1)y'' - e^x y' + y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$.
   d) $y' - xy = \sin(x)$.
   e) $y'' - 2xy' + 3y = x^2$.
   f) $(1 + x^2)y'' - xy' + y = e^{-x}$.
   g) $y' + \sin(x)y = \cos(x)$.
5. Hallar la serie de potencias en x para la solución general de:
   a) $(1 + x^2)y'' + 6xy' + 6y = 0$.
   b) $(1 + x^2)y'' - 9xy' + 16y = 0$.
   c) $(1 + x^2)y'' + 7xy' - 3y = 0$.
   d) $(1 + x^2)y'' + 3xy' - 2y = 0$.
6. Hallar la serie de potencias en $x - a$ de las soluciones de las siguientes ecuaciones diferenciales:
   a) $(2x^2 - 12x + 19)y'' - 4(x - 3)y' + \frac{1}{2}y = 0$, $a = 3$.
   b) $-(6x^2 + 12x - 8)y'' - 2(x + 1)y' - y = 0$, $a = -1$.
   c) $(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{5}{4})y'' - \frac{2}{3}(x - 1)y' + 2y = 0$, $a = 1$.
   d) $(-2x^2 - 8x - 7)y'' + 3(x + 2)y' - \frac{1}{4}y = 0$, $a = -2$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *b*) $x = 0$ y $x = -1$.
   c) $x = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$.
2. *a*) $y(x) = a_0 + \frac{a_0}{6}x + \frac{a_1}{12}x^2 + \frac{a_0}{180}x^4 + \frac{a_1}{504}x^5 + \cdots$.
   c) $y(x) = a_0 + a_1x + \left(-\frac{a_0}{2} + a_1\right)x^2 + \left(-\frac{1}{3}a_0 + \frac{1}{2}a_1\right)x^3 + \left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{6}a_1\right)x^4 + \cdots$.
3. *b*) $y(x) = a_0 \sum_{m=0}^{2} \frac{2^m \prod_{j=0}^{m-1}(j-2)}{(2m)!}x^{2m} + a_1 \sum_{m=0}^{2} \frac{\prod_{j=0}^{m-1}(2j-3)}{(2m+1)}x^{2m+1}$.
   d) $y(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} \prod_{k=0}^{m}(2k-1)^2}{(2m+2)!}x^{2m+2}$
   $+a_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \prod_{k=0}^{m}(2k)^2}{(2m+3)!}x^{2m+3}$.

4. *a)* $y(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$.

b) $y(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{9}{9}x^4 + \cdots$.

e) $y(x) = a_0 - \frac{3}{2}a_0 x + \sum_{m=2}^{\infty} \left(\frac{\prod_{j=0}^{m-1}(4j-3)}{(2m)!} a_0 + 2\frac{\prod_{j=2}^{m-1}(4j-3)}{(2m)!} \right) x^{2m} +$
$a_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=0}^{m}(4j-1)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$.

5. *b)* $y(x) = a_0 - 8a_0x^2 + a_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\prod_{j=0}^{m-1}(2j-7)(2j-1)}{(2m+1)!} x^{2m+1}$.

d) $y(x) = a_0 \sum_{m=0}^{2} (-1)^m \frac{1}{(2m)!} \prod_{j=0}^{m-1} ((2j-1)^2 - 3) x^{2m} +$
$a_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} \prod_{j=0}^{m-1} ((2j)^2 - 3) x^{2m+1}$.

6. *a)* $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\prod_{k=0}^{n-1} 8k^2 - 12k + \frac{1}{2}}{(2n)!} (x-3)^{2n} +$
$a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{n} 8k^2 - 4k + \frac{9}{2}}{(2n+1)!} (x-3)^{2n+1}$.

c) $y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\prod_{k=0}^{m} k^2 + \frac{5}{6}k + 2}{(2n+2)!} (x-1)^{2n+2} +$
$a_1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\prod_{k=0}^{m} k^2 + \frac{11}{6}k + \frac{5}{3}}{(2n+3)!} (x-1)^{2n+3}$.

3. Soluciones en series infinitas en puntos singulares regulares

Ahora hallaremos la solución de ecuaciones diferenciales lineales de orden superior dada en forma de series (no necesariamente de potencias). En este caso estudiaremos la solubilidad de ecuaciones en puntos singulares regulares. Consideremos ecuaciones diferenciales de segundo orden:

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{6.16}$$

Definición 6.9. Se dice que un punto singular x_0 es punto singular regular de la ecuación, (6.16) si $p(x) = (x - x_0)P(x)$ y $q(x) = (x - x_0)^2 Q(x)$ son funciones analíticas en x_0. Se dice que un punto que no es singular regular es punto singular irregular de la ecuación.

Ejemplo 6.11. *1. Demostrar que $x = 0$ y $x = 1$ son puntos singulares regulares de la ecuación diferencial:*

$$(x-1)y'' + \frac{1}{x}y' - y = 0.$$

2. Demostrar que $x = 0$ y $x = 1$ son puntos singulares irregulares de la ecuación diferencial

$$(x-1)^2y'' + \frac{1}{x^2}y' - y = 0.$$

Solución. 1. Reescribamos la ecuación en la forma (6.16). Esto es,

$$y'' + \frac{1}{x(x-1)}y' - \frac{1}{x-1}y = 0.$$

En este caso, de la definición anterior, tenemos:

$$p(x) = (x - x_0)\frac{1}{x(x-1)}, \quad q(x) = -(x - x_0)^2\frac{1}{x-1}.$$

Para $x_0 = 0$, lo anterior queda como

$$p(x) = \frac{1}{x-1}, \quad q(x) = -\frac{x^2}{x-1}.$$

Ambas funciones son analíticas en $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x-1} &= -\left(1 + x + x^2 + \cdots\right) \\ -\frac{x^2}{x-1} &= x^2 + x^3 + x^4 + \cdots, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

En el caso $x_0 = 1$ se tiene:

$$p(x) = \frac{1}{x}, \quad q(x) = -(x-1),$$

las cuales son analíticas en $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \cdots \\ -(x-1) &= 1 - x + 0 + \cdots. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x = 0$ y $x = 1$ son puntos singulares regulares de la ecuación diferencial dada.

2. Reescribamos la ecuación:
$$y'' + \frac{1}{x^2(x-1)^2}y' - \frac{1}{(x-1)^2}y = 0.$$
De donde tenemos
$$p(x) = (x-x_0)\frac{1}{x^2(x-1)^2}, \quad q(x) = -(x-x_0)^2\frac{1}{(x-1)^2}.$$
Para $x_0 = 0$
$$p(x) = \frac{1}{x(x-1)^2}, \quad q(x) = -\frac{x^2}{(x-1)^2}.$$
La función $p(x)$ no es analítica en $x_0 = 0$. En el caso $x_0 = 1$ se tiene:
$$p(x) = \frac{1}{x^2(x-1)}, \quad q(x) = -1;$$
una vez mas, $p(x)$ no es analítica en $x_0 = 1$ Por lo tanto, $x = 0$ y $x = 1$ son puntos singulares irregulares de la ecuación diferencial dada.

☑

Queremos hallar una solución en serie de la ecuación (6.16), en torno a un punto singular regular x_0. El método que mostraremos es válido en una vecindad del punto x_0 y la serie que se obtiene, llamada serie de Frobenius, viene dada en la forma:

$$y(x) = (x-x_0)^s(a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots), \quad a_0 \neq 0. \tag{6.17}$$

Obs Note que si $s = 0$, es un entero positivo, entonces la serie de Frobenius se reduce a una serie de Taylor, mientras que para valores negativos y no enteros de s, la serie de Frobenius no es una serie de potencias. Analizaremos cada una de estas posibilidades mediante una ecuación auxiliar llamada *ecuación indicial*.

Notemos que si x_0 es un punto singular regular de (6.16), entonces $P(x)$ tiene un factor $(x-x_0)$ en su denominador y $Q(x)$ tiene a $(x-x_0)^2$ en su denominador. En cualquier caso, multiplicando (6.16) por $(x-x_0)^2$ tenemos que la ecuación se transforma en

$$(x-x_0)^2y'' + (x-x_0)p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{6.18}$$

en la cual $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas en x_0. Veamos ahora el teorema que garantiza la existencia de soluciones en forma de serie de Frobenius de una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables (para su demostración ver [16]).

Teorema 6.9 (Frobenius). *Sea x_0 un punto singular regular de la ecuación diferencial* (6.18)*. Entonces* (6.18) *tiene al menos una solución en forma de serie de Frobenius de la forma* (6.17)*. Esto es válido en el intervalo común de convergencia de $p(x)$ y $q(x)$ de* (6.18)*, excepto quizá en $x = x_0$; es decir, si cada expansión en serie de Taylor de $p(x)$ y $q(x)$ es válida en el intervalo $|x - x_0| < r$, entonces existe al menos una solución en serie de Frobenius en $|x - x_0| < r$, excepto quizá en $x = x_0$.*

Note que el teorema anterior no garantiza la existencia de dos soluciones linealmente independientes de la forma (6.17) para la ecuación diferencial (6.18).

Para hallar las soluciones de (6.17), sea $y(x)$ una solución en serie de Frobenius de la ecuación (6.18). Haciendo una traslación de eje podemos considerar $x_0 = 0$. De esta manera, la ecuación (6.18) queda en la forma

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \tag{6.19}$$

con $p(x)$ y $q(x)$ analíticas en 0.

$$\begin{aligned} p(x) =& b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots \\ q(x) =& c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots . \end{aligned}$$

En el caso particular, cuando los coeficientes $p(x)$ y $q(x)$ son funciones constantes, la ecuación diferencial (6.19) tiene la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0, \quad a, b, c \in \mathbb{R}, \ a \neq 0$$

es llamada *ecuación de Euler*.

Por otro lado, para la serie de Frobenius (6.17) tenemos:

$$\begin{aligned} y(x) =& x^s(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots) \\ y'(x) =& sa_0x^{s-1} + (s+1)a_1x^s + (s+2)a_2x^{s+1} + \cdots \\ y''(x) =& s(s-1)a_0x^{s-2} + (s+1)sa_1x^{s-1} + (s+2)(s+1)a_2x^2 + \cdots \end{aligned}$$

La función $y(x)$ es una solución de la ecuación (6.19) si la trasforma en una igualdad. Así, evaluando en (6.19), se debe satisfacer la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} & x^2\left(s(s-1)a_0x^{s-2} + (s+1)sa_1x^{s-1} + (s+2)(s+1)a_2x^2 + \cdots\right) \\ & + x\left(b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots\right)\left(sa_0x^{s-1} + (s+1)a_1x^s + (s+2)a_2x^{s+1} + \cdots\right) \\ & + \left(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots\right)\left(a_0x^s + a_1x^{s+1} + a_2x^{s+2} + \cdots\right) = 0. \end{aligned}$$

Del álgebra de las series (teorema 6.3), agrupando términos semejantes obtenemos:

$$\begin{aligned}
&a_0[s(s-1)+b_0s+c_0]x^s+[a_1((s+1)s+b_0(s+1)+c_0)+a_0(b_1s+c_1)]x^{s+1}\\
&+[a_2((s+2)(s+1)+b_0(s+2)+c_0)+a_1(b_1(s+1)+c_1)+a_0(b_2s+c_2)]x^{s+2}\\
&+[a_3((s+3)(s+2)+b_0(s+3)+c_0)+a_2(b_1(s+2)+c_1)+a_1(b_2(s+1)+c_2)\\
&+a_0(b_3s+c_3)]x^{s+3}+\cdots+[a_n((s+n)(s+n-1)+b_0(s+n)+c_0)\\
&+a_{n-1}(b_1(s+n-1)+c_1)+a_{n-2}(b_2(s+n-2)+c_2)+a_0(b_ns+c_n)]x^{s+n}\\
&+\cdots=0. \qquad (6.20)
\end{aligned}$$

Esta ecuación se convierte en identidad si para cada x, los coeficientes de x^m, para $m = s, \ldots$ son cero. Dado que hemos supuesto $a_0 \neq 0$, el primer coeficiente será 0 si se cumple

$$s(s-1)+b_0s+c_0=0. \qquad (6.21)$$

Esta ecuación cuadrática es llamada *ecuación indicial* y sus dos soluciones s_1 y s_2 satisfacen uno de los siguientes casos:

Caso I. Las soluciones son diferentes y su diferencia no es un número entero: $s_1 \neq s_2$ y $s_1 - s_2 \notin \mathbb{Z}$

Caso II. Las soluciones son diferentes y su diferencia es un número entero: $s_1 \neq s_2$ y $s_1 - s_2 \in \mathbb{Z}$,

Caso III. Las soluciones son iguales: $s_1 = s_2$.

Ahora veremos la manera de hallar las soluciones en serie de Frobenius de la ecuación diferencial (6.19) para cada uno de estos casos.

Ejercicios

1. Hallar los puntos singulares regulares de las siguientes ecuaciones diferenciales:
   a) $(x^2-1)y''-3(x+1)y'+(x^2+x)y=0.$
   b) $(x-1)^3x^2y''+8(x-1)xy'+2y=0.$
   c) $(x+3)^2x^4y''-3(x+3)xy'+y=0.$
   d) $(x+1)^2y''+xy'-(x-1)y=0.$
2. Definir punto singular regular para una ecuación diferencial lineal de tercer orden:

$$a_3(x)y'''+a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y=0.$$

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *b*) $x = 0$.
   d) No hay puntos singulares regulares.

3.1. Ecuación indicial con soluciones diferentes: diferencia no entera

En este caso existen dos soluciones para la ecuación diferencial (6.19) de la forma

$$y_1(x) = x^{s_1} \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n, \quad y_2(x) = x^{s_2} \sum_{n=0}^{\infty} z_n x^n.$$

Si sustituimos una de las soluciones de la ecuación indicial (6.21) en la ecuación diferencial (6.19) podemos obtener los valores de los coeficientes $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en términos de a_0, puesto que los coeficientes b_k y c_k ($k = 0, \ldots$) de las funciones analíticas $p(x)$ y $q(x)$ respectivamente son dados. Para este s_1 y los valores $a_1, a_2, a_3, \ldots$, cada coeficiente de (6.20) es cero. Es decir, para $s = s_1$ y los correspondientes coeficientes $a_1, a_2, a_3, \ldots$, la función $y(x)$ es una solución de la ecuación diferencial (6.19).

La segunda solución se obtiene de manera similar sustituyendo s_2 en (6.20). Sin embargo, como veremos en las secciones 3.2.2 y 3.3, no toda ecuación de la forma (6.19) tiene dos soluciones en serie linealmente independientes. En caso de existir dos soluciones linealmente independientes, el intervalo de existencia de las dos soluciones viene dado en el siguiente resultado (ver [16]).

Teorema 6.10. *Las dos soluciones en serie de Frobenius de la ecuación diferencial* (6.19) *son linealmente independientes. Cada solución existe en el intervalo común de convergencia de $p(x)$ y $q(x)$ excepto quizás en $x = 0$.*

Ejemplo 6.12. *Hallar el intervalo de convergencia de la solución en serie de la ecuación diferencial*

$$x^2 y'' + \frac{x}{1+x^2} y' + e^x y = 0.$$

Solución. Reescribamos la ecuación en la forma (6.16),

$$y'' + \frac{x}{x^2(1+x^2)} y' + \frac{e^x}{x^2} y = 0.$$

En este caso,

$$p(x) = x \frac{x}{x^2(1+x^2)} = \frac{1}{1+x^2}, \quad q(x) = x^2 \frac{e^x}{x^2} = e^x.$$

Las cuales son analíticas en 0 que es el punto singular. Además,

$$\begin{aligned} p(x) =& 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots, \ |x| < 1 \\ q(x) =& 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots, \ -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

Luego, cada solución de la ecuación diferencial existe para $|x| < 1$, excepto quizás en $x = 0$. ☑

Ejemplo 6.13. *Hallar la solución general en serie de Frobenius de la ecuación diferencial*

$$x^2 y'' + x\left(x + \frac{1}{2}\right)y' - \left(x^2 + \frac{1}{2}\right)y = 0.$$

Solución. Primero reescribimos la ecuación:

$$y'' + \frac{x(x+1/2)}{x^2}y' - \frac{x^2+1/2}{x^2}y = 0.$$

$x = 0$ es el punto singular regular. Usaremos (6.20) para hallar la solución en serie de Frobenius. Para esto, necesitaremos los coeficientes de $p(x)$ y $q(x)$:

$$\begin{aligned} p(x) =& \frac{1}{2} + x, \quad b_0 = \frac{1}{2}, \ b_1 = 1, \ b_2 = b_3 = \cdots = 0, \\ q(x) =& -\frac{1}{2} - x^2, \quad c_0 = -\frac{1}{2}, \ c_2 = -1, \ c_1 = c_3 = c_4 = \cdots = 0. \end{aligned}$$

La ecuación indicial (6.21) queda:

$$s(s-1) + \frac{1}{2}s - \frac{1}{2} = 0$$

cuyas raíces son $s_1 = 1$ y $s_2 = -1/2$. Como $s_1 - s_2 \notin \mathbb{Z}$, podemos sustituir $s_1 = 1$ en (6.20). Hagamos cero al coeficiente que acompaña a x^{s+n}, teniendo en cuenta que

$$b_2, b_3, \ldots, c_1, c_3, c_4, \cdots = 0.$$

Esto es,

$$a_n\left((1+n)n + \frac{1}{2}(1-n) - \frac{1}{2}\right) + na_{n-1} + a_{n-2}(0-1) + a_0(0) = 0.$$

Esta ecuación la podemos escribir como

$$a_n\left(n^2 + \frac{3}{2}n\right) + na_{n-1} - a_{n-2} = 0$$

o como

$$\frac{2n^2+3n}{2}a_n = -na_{n-1} + a_{n-2},$$

la cual es una recurrencia para $n \geq 2$, una vez sea conocido el coeficiente a_1. Para hallar este valor usamos el coeficiente que acompaña a x^{s+1} en (6.20), evaluando en $s_1 = 1$ y los coeficientes b_0, c_0, b_1, c_1, b_2 y c_2 como antes.

$$a_1\left(2+\frac{1}{2}2-\frac{1}{2}\right)+a_0(1+0)=0, \quad \frac{5}{2}a_1=-a_0, \quad a_1=-\frac{2}{5}a_0.$$

Utilizando la recurrencia obtenemos los siguientes términos:

$$\begin{aligned}
7a_2 &= -2a_1 + a_0 = \frac{4}{5}a_0 + a_0 = \frac{9}{5}a_0, \quad a_2 = \frac{9}{35}a_0,\\
\frac{27}{2}a_3 &= -3a_2 + a_1 = -\frac{27}{35}a_0 - \frac{2}{35}a_0, \quad a_3 = -\frac{82}{945}a_0.
\end{aligned}$$

Así,

$$y_1(x) = a_0x\left(1-\frac{2}{5}x+\frac{9}{35}x^2-\frac{82}{945}x^3+\cdots\right)$$

son los cuatro primeros términos de una solución en serie de Frobenius de la ecuación diferencial dada.

Para hallar la segunda solución en serie, evaluamos $s_2 = -1/2$ como antes. En este caso, el término que acompaña a x^{s+n} queda en la forma

$$a_n\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n-\frac{3}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\right)+a_{n-1}\left(n-\frac{3}{2}\right)+a_{n-2}(0-1)=0,$$

de la cual se obtiene la relación de recurrencia

$$\frac{2n^2-3n}{2}a_n = -\left(n-\frac{3}{2}\right)a_{n-1}+a_{n-2}, \quad n\geq 2.$$

Hallemos el valor de a_1; para ello usamos el coeficiente que acompaña a x^{s+1}:

$$a_1\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+a_0\left(-\frac{1}{2}\right)=0, \quad a_1=-a_0.$$

Así, obtenemos los siguientes términos

$$\begin{aligned}
a_2 &= -\frac{1}{2}a_1 + a_0 = \frac{1}{2}a_0 + a_0 = \frac{3}{2}a_0,\\
\frac{9}{2}a_3 &= -\frac{3}{2}a_2 + a_1 = -\frac{9}{4}a_0 - a_0 = -\frac{13}{4}a_0, \quad a_3 = -\frac{13}{18}a_0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y_2(x) = a_0 x^{-1/2}\left(1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{18}x^3 + \cdots\right)$$

es la otra solución linealmente independiente de la ecuación diferencial. La solución general es

$$\begin{aligned} y_g(x) =& c_1 x\left(1 - \frac{2}{5}x + \frac{9}{35}x^2 - \frac{82}{945}x^3 + \cdots\right) \\ &+ c_2 x^{-1/2}\left(1 - x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{18}x^3 + \cdots\right), \end{aligned}$$

donde a_0 fue incluido en los valores de c_1 y c_2. ☑

Ejemplo 6.14. *Hallar la solución general en serie de Frobenius de la ecuación diferencial*

$$3xy'' + (1 + x)y' + y = 0.$$

Solución. Reescribimos la ecuación como

$$y'' + \frac{1 + x}{3x}y' + \frac{1}{x}y = 0.$$

Sea

$$\begin{aligned} p(x) =& x\frac{1 + x}{3x} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}x + 0x^2 + \cdots, \quad -\infty < x < \infty \\ q(x) =& x^2\frac{1}{x} = x = 0 + x + 0x^2 + \cdots \end{aligned}$$

de donde $x = 0$ es el punto singular regular. La ecuación indicial en este caso viene dada por

$$s(s - 1) + \frac{s}{3} = 0,$$

cuyas raíces son $s_1 = 0$ y $s_2 = 2/3$. Buscamos una solución de la forma:

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad a_0 \neq 0.$$

Como $s_1 - s_2 \notin \mathbb{Z}$, podemos sustituir $s_1 = 0$ en (6.20) para hacer cero el coeficiente que acompaña a x^{s+n}, o podemos derivar y sustituir en la ecuación. Hagamos lo segundo:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}, \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n - 1)x^{n-2}.$$

$$
\begin{aligned}
&3x\sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} + (1+x)\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0\\
&\sum_{n=2}^{\infty} 3a_n n(n-1)x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0\\
&\sum_{n=1}^{\infty} 3a_{n+1} n(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0\\
&\sum_{n=0}^{\infty}(3a_{n+1}(n+1)n + a_{n+1}(n+1) + a_n n + a_n)x^n = 0.
\end{aligned}
$$

A partir de esto, la ecuación anterior se convierte en una identidad para todo x si se satisface la recurrencia:

$$
\begin{aligned}
(3n^2+4n+1)a_{n+1} &= -(n+1)a_n, \qquad n \geq 0\\
a_{n+1} &= -\frac{1}{3n+1}a_n.
\end{aligned}
$$

De aquí obtenemos:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{1}a_0\\
a_2 &= -\frac{1}{4}a_1 = \frac{1}{4}a_0\\
a_3 &= -\frac{1}{7}a_2 = -\frac{1}{4\cdot 7}a_0\\
a_4 &= -\frac{1}{10}a_3 = \frac{1}{4\cdot 7\cdot 10}a_0\\
&\vdots\\
a_k &= \frac{(-1)^k}{\prod_{j=0}^{k-1}(3j+1)}a_0, \qquad k \geq 0.
\end{aligned}
$$

La primera solución de la ecuación es

$$
y_1(x) = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\prod_{j=0}^{n-1}(3j+1)}x^n.
$$

Para hallar la segunda solución linealmente independiente de la ecuación es más conveniente sustituir $s_2 = 2/3$ en la ecuación (6.20) para hacer cero el coeficiente de $x^{2/3+n}$. Para esto tomemos en cuenta que

$$
b_0 = b_1 = \frac{1}{3}, \quad b_n = 0, \quad n \geq 2,
$$

$$c_0 = 0,\ c_1 = 1, \quad c_n = 0, \quad n \geq 2.$$

Esto es,

$$(a_n((2/3+n)(2/3+n-1)+1/3(2/3+n))+a_{n-1}(1/3(2/3+n-1)+1))x^{2/3+n} = 0$$

de donde tenemos que lo anterior es una igualdad para todo x si se satisface

$$a_n\left(\left(\frac{2}{3}+n\right)\left(-\frac{1}{3}+n\right)+\frac{2}{9}+\frac{n}{3}\right)+a_{n-1}\left(\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}+n\right)+1\right) = 0, \quad n \geq 1.$$

$$a_n\left(n^2+\frac{2}{3}n\right)+a_{n-1}\left(\frac{8}{9}+\frac{n}{3}\right) = 0$$

o, equivalentemente, la recurrencia:

$$a_n = -\frac{1}{3}\frac{3n+8}{3n^2+2n}a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Algunos términos de esta recurrencia son los siguientes:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -\frac{1}{3}\frac{11}{5}a_0 \\
a_2 &= -\frac{1}{3}\frac{14}{16}a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{11\cdot 14}{5\cdot 16}a_0 \\
a_3 &= -\frac{1}{3}\frac{17}{33}a_2 = \left(-\frac{1}{3}\right)^3\frac{11\cdot 14\cdot 17}{5\cdot 16\cdot 33}a_0 \\
a_4 &= -\frac{1}{3}\frac{20}{56}a_3 = \left(\frac{1}{3}\right)^4\frac{11\cdot 14\cdot 17\cdot 20}{5\cdot 16\cdot 33\cdot 56}a_0 \\
&\vdots \\
a_n &= \left(-\frac{1}{3}\right)^n\prod_{j=1}^{n}\frac{3j+8}{3j^2+2j}a_0, \qquad n \geq 1.
\end{aligned}$$

La segunda solución linealmente independiente de la ecuación diferencial es

$$y_2(x) = a_0x^{2/3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\prod_{j=1}^{n}\frac{3j+8}{3j^2+2j}x^n\right).$$

La solución general de la ecuación diferencial entonces es

$$y_g(x) = \alpha_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\prod_{j=0}^{n-1}(3j+1)}x^n+\alpha_2x^{2/3}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\prod_{j=1}^{n}\frac{3j+8}{3j^2+2j}x^n\right)$$

donde a_0 fue incluido en los valores de α_1 y α_2. ☑

Ahora podemos desarrollar un método sistemático para hallar las soluciones linealmente independientes en series de Frobenius de ecuaciones diferenciales de la forma

$$x^2(a_2x^2+a_1x+a_0)y''+x(b_2x^2+b_1x+b_0)y'+(c_2x^2+c_1x+c_0)y=0, \quad a_0\neq 0 \tag{6.22}$$

de la siguiente manera:

Sea r un número real y definamos:

$$\begin{aligned} p_0(r) &= a_0r(r-1)+b_0r+c_0 \\ p_1(r) &= a_1r(r-1)+b_1r+c_1 \\ p_2(r) &= a_2r(r-1)+b_2r+c_2. \end{aligned} \tag{6.23}$$

Para una raíz de la ecuación indicial $p_0(r)=0$, lo cual implica que $p_0(r+n)\neq 0$ para todo entero positivo n, definimos:

$$\begin{aligned} a_0(r) &= 1 \\ a_1(r) &= -\frac{p_1(r)}{p_0(r+1)} \\ &\vdots \\ a_n(r) &= -\frac{p_1(n+r-1)a_{n-1}(r)+p_2(n+r-2)a_{n-2}(r)}{p_0(r+n)}, \quad n\geq 2. \end{aligned} \tag{6.24}$$

En este sentido, sean r_1 y r_2 raíces de la ecuación indicial $p_0(r)=0$ con $r_1-r_2\notin\mathbb{Z}$. Si suponemos $r_1-r_2\geq 0$, entonces las dos soluciones en series de Frobenius linealmente independiente de la ecuación diferencial (6.22) vienen dada por las fórmulas:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r_1)x^n, \\ y_2(x) &= x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r_2)x^n. \end{aligned}$$

Aquí los coeficientes $a_n(r)$ se calculan mediante la recurrencia (6.24). La demostración de la validez de estas fórmulas se puede ver en [17].

Ejemplo 6.15. *Hallar los 6 primeros términos de las dos soluciones en serie de Frobenius linealmente independientes de la ecuación diferencial*

$$2x^2(x^2+x+1)y''+x(11x^2+11x+9)y'+(7x^2+10x+6)y=0.$$

Solución. Definamos los polinomios como en (6.23):

$$\begin{aligned}
p_0(r) =& 2r(r-1)+9r+6=(2r+3)(r+2)\\
p_1(r) =& 2r(r-1)+11r+10=(2r+5)(r+2)\\
p_2(r) =& 2r(r-1)+11r+7=(2r+7)(r+1).
\end{aligned}$$

Las raíces de la ecuación indicial $p_0(r)=0$ son $r_1=-3/2$ y $r_2=-2$. Note que $r_1-r_2=\frac{1}{2}\notin\mathbb{Z}$. Por lo tanto, las soluciones de la ecuación diferencial son

$$y_1(x)=x^{-3/2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-3/2)x^2$$

y

$$y_2(x)=x^{-2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(-2)x^n.$$

Los coeficientes de estas soluciones los podemos hallar mediante la fórmula de recurrencia (6.24):

$$\begin{aligned}
a_1(r) =& 1\\
a_1(r) =& -\frac{p_1(r)}{p_0(r+1)}=-\frac{(2r+5)(r+2)}{(2r+5)(r+3)}=-\frac{r+2}{r+3}\\
&\vdots\\
a_n(r) =& -\frac{p_1(n+r-1)a_{n-1}+p_2(n+r-2)a_{n-2}}{p_0(n+r)}\\
=& -\frac{(n+r-1)(2n+2r+3)a_{n-1}(r)-(n+r-1)(2n+2r+3)a_{n-2}(r)}{(n+r+2)(2n+2r+3)}\\
=& -\frac{(n+r+1)a_{n-1}(r)+(n+r-1)a_{n-2}(r)}{n+r+2},\quad n\geq 2.
\end{aligned}$$

Evaluando en $r=-3/2$ tenemos:

$$\begin{aligned}
a_0(-3/2) =& 1\\
a_1(-3/2) =& -\frac{1}{3}\\
&\vdots\\
a_n(-3/2) =& -\frac{(2n-1)a_{n-1}(-3/2)+(2n-5)a_{n-2}(-3/2)}{2n+1},\quad n\geq 2.
\end{aligned}$$

Evaluando en $r=-2$ obtenemos:

$$a_0(-2) = 1$$

$$
\begin{aligned}
a_1(-2) =& 0\\
&\vdots\\
a_n(-2) =& -\frac{(n-1)a_{n-1}(-2)+(n-3)a_{n-2}(-2)}{n}, \quad n \geq 2.
\end{aligned}
$$

Una vez calculado el resto de términos usando esta recurrencia, las dos soluciones de la ecuación son

$$
\begin{aligned}
y_1(x) =& x^{-3/2}\left(1-\frac{1}{3}x+\frac{2}{5}x^2-\frac{5}{21}x^3+\frac{7}{135}x^4+\frac{76}{1155}x^5+\cdots\right)\\
y_2(x) =& x^{-2}\left(1+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{30}x^5+\cdots\right),
\end{aligned}
$$

y la solución general es $y_g(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$. ☑

Obs Note que si $a_2 = b_2 = c_2 = 0$, esto es, si consideramos la ecuación

$$x^2(a_1x+a_0)y'' + x(b_1x+b_0)y' + (c_1x+c_0)y = 0, \qquad (6.25)$$

tenemos que $p_2(r) = 0$ y la recurrencia (6.24) queda en la forma

$$
\begin{aligned}
a_0(r) =& 1\\
&\vdots\\
a_n(r) =& -\frac{p_1(n+r-1)}{p_0(n+r)}a_{n-1}(r), \quad n \geq 1.
\end{aligned}
$$

A partir de o anterior, podemos hallar explícitamente los coeficientes $a_n(r)$ dependiendo solamente de $a_{n-1}(r)$. Incluso, se tiene:

$$a_n(r) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{p_1(j+r-1)}{p_0(j+r)}$$

y las dos soluciones (en serie de Frobenius) linealmente independientes de la ecuación diferencial (6.25) son

$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)x^2, \quad y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)x^2.$$

Por otro lado, si $a_1 = b_1 = c_1 = 0$, esto es, si consideramos la ecuación diferencial

$$x^2(a_2x^2+a_0)y'' + x(b_2x^2+b_0)y' + (c_2x^2+c_0)y = 0, \qquad (6.26)$$

tenemos que $p_1(r) = 0$ y la recurrencia (6.24) queda en la forma

$$a_0(r) = 1$$

$$
\begin{aligned}
a_1(r) =& 0\\
&\vdots\\
a_n(r) =& -\frac{p_2(n+r-2)}{p_0(n+r)}a_{n-2}(r), \quad n \geq 2.
\end{aligned}
$$

Como $a_n(r) = 0$ si n es impar, entonces las soluciones linealmente independientes, en serie de Frobenius, de la ecuación diferencial (6.26) son

$$
y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(r_1)x^{2n}, \quad y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(r_2)x^{2n},
$$

donde,

$$
\begin{aligned}
a_0(r) =& 1\\
a_{2n}(r) =& -\frac{p_2(2n+r-2)}{p_0(2n+r)}a_{2n-2}(r), \quad n \geq 1\\
=& (-1)^n\prod_{j=1}^{n}\frac{p_2(2j+r-2)}{p_0(2j+r)}.
\end{aligned}
$$

Ejercicios

1. Verificar que $x = 0$ es un punto singular regular de cada ecuación diferencial y que las raíces de la ecuación indicial no difieren por un entero. Usar el método de Frobenius para hallar las dos soluciones linealmente independientes y el correspondiente intervalo de convergencia:
   a) $2xy'' - y' + 2y = 0.$
   b) $3xy'' + (2 - x)y' + y = 0.$
   c) $2x^2y'' + 3xy' + (2x - 1)y = 0.$
   d) $2(x^2 + x^3)y'' + (x - 5x2)y' + y = 0.$
   e) $x^2y'' + (x - 3/4)y = 0.$
2. Hallar las dos soluciones en serie de Frobenius linealmente independientes de cada ecuación diferencial. Calcular $a_0, \ldots, a_n$ para n, al menos 7 en cada solución:
   a) $2x^2(x^2 + x + 1)y'' + x(5x^2 + 3x + 3)y' - y = 0.$
   b) $x^2(x + 8)y'' + x(3x + 2)y' + (x + 1)y = 0.$
   c) $4x^2y'' + x(4x^2 + 2x + 7)y' - (-7x^2 - 4x + 1)y = 0.$
   d) $2x^2(3x + 2)y'' + x(11x + 4)y' + (-2 + x)y = 0.$
   e) $18x^2(x + 1)y'' + 3x(x^2 + 11x + 5)y' + (5x^2 + 2x - 1)y = 0.$
   f) $x^2(x + 6)y'' + x(4x + 11)y' + (2x + 1)y = 0.$
   g) $10x^2(2x^2+x+1)y''+x(13+13x+66x^2)y'-(1+4x+10x^2)y = 0.$

3. Hallar las dos soluciones en serie de Frobenius linealmente independientes de cada ecuación diferencial. Dar la forma explícita de los coeficientes en cada una de las soluciones:
   a) $8x^2(1-x^2)y''+2x(1-13x^2)y'+(1-9x^2)y=0$.
   b) $x^2(x+3)y''+x(4x+5)y'-(-2x+1)y=0$.
   c) $2x^2(x^2+2)y''-x(-7x^2+12)y'+(3x^2+7)y=0$.
   d) $x^2(4x+3)y''+x(18x+5)y'+(12x-1)y=0$.
   e) $x^2(x^2-2)y''+x(x^2+3)y'-y=0$.
   f) $2x^2(x+3)y''+x(5x+1)y'+(x+1)y=0$.
   g) $x^2(x^2+3)y''+(2-x^2)y'-8y=0$.
4. Hallar las dos soluciones en series de Frobenius linealmente independientes de cada ecuación diferencial. Calcular $a_0,\dots,a_{2n}$ para n, al menos 7 en cada solución:
   a) $2x^2(x^2+8)y''+7x(2+x^2)y'+(9x^2-2)y=0$.
   b) $9x^2(x^2+1)y''+3x(13x^2+3)y'-(1-25x^2)y=0$.
   c) $8x^2(2x^2+1)y''+2x(34x^2+5)y'-(-30x^2+1)y=0$.
5. Demostrar que, si las raíces r_1 y r_2 de la ecuación indicial asociada a la ecuación diferencial

$$\alpha_0x^2y''+\beta_0xy'+(\gamma_1x+\gamma_0)y=0$$

son tales que r_1-r_2 no es un entero, entonces:

$$\begin{aligned}y_1(x)=&x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\prod_{j=1}^{n}(j+r_1-r_2)}\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_0}\right)^n x^n,\\ y_2(x)=&x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\prod_{j=1}^{n}(j+r_2-r_1)}\left(\frac{\gamma_1}{\alpha_0}\right)^n x^n.\end{aligned}$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial.
6. Demostrar que, si las raíces r_1 y r_2 de la ecuación indicial asociada a la ecuación diferencial

$$\alpha_0x^2y''+\beta_0xy'+(\gamma_2x^2+\gamma_0)y=0$$

son tales que r_1-r_2 no es un entero par, entonces

$$\begin{aligned}y_1(x)=&x^{r_1}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m m!\prod_{j=1}^{m}(2j+r_1-r_2)}\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_0}\right)^m x^{2m},\\ y_2(x)=&x^{r_2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m}{2^m m!\prod_{j=1}^{m}(2j+r_2-r_1)}\left(\frac{\gamma_2}{\alpha_0}\right)^m x^{2m}\end{aligned}$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial.

7. Sea la ecuación diferencial

$$x^2 q_0(x)y'' + xq_1(x)y' + q_2(x)y = 0,$$

donde

$$q_0(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j x^j, \quad q_1(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j x^j, \quad q_2(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j x^j$$

y defina

$$p_j(r) = \alpha_j r(r-1) + \beta_j r + \gamma_j, \quad j = 0, 1, \ldots$$

demostrar que si las raíces r_1 y r_2 de $p_0(r)$ son tales que $r_1 - r_2$ no es un entero, entonces

$$\begin{aligned} y_1(x) =& x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)x^n \\ y_2(x) =& x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)x^n, \end{aligned}$$

donde los coeficientes $a_n(r)$ se calcular mediante la recurrencia

$$\begin{aligned} a_0(r) =& 1 \\ a_n(r) =& -\frac{1}{p_0(n+r)} \sum_{j=1}^{n} p_j(n+r-j)a_{n-j}(r), \quad n \geq 1, \end{aligned}$$

son soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial. Sugerencia: demostrar que evaluar una serie de la forma $x^r \sum_{n=0}^{\infty} w_n x^n$ en la ecuación diferencial se obtiene una serie de la forma $x^r \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ donde

$$b_n = \sum_{j=0}^{\infty} p_j(n+r-j)a_{n-j}.$$

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. c) $y_1(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n! \prod_{j=1}^{n}(2j+3)} x^n$,
   $y_2(x) = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n! \prod_{j=1}^{n}(2j-3)} x^n$, intervalo de convergencia $0 < |x| < \infty$.
2. b) $y_1(x) = x^{1/3} \Big(-\frac{43472}{40346721}x^7 + \frac{13832}{4782969}x^6 + \frac{1456}{177147}x^5 + \frac{455}{19683}x^4$
   $-\frac{140}{2187}x^3 + \frac{14}{81}x^2 - \frac{4}{9}x + 1\Big)$, $y_2(x) = 1/x$.

g) $y_1(x) = x^{1/5}\Big(\frac{1117603448}{20589594795}x^7 - \frac{45522584}{267397335}x^6 + \frac{200432}{3991005}x^5$
$+\frac{26942}{266667}x^4 - \frac{547}{5661}x^3 - \frac{7}{153}x^2 + \frac{3}{17}x + 1\Big).$
$y_2(x) = x^{-1/2}\Big(-\frac{9602862748}{7083371295}x^7 + \frac{4445264}{337303395}x^6 + \frac{2092186}{2121405}x^5$
$-\frac{5314}{9867}x^4 - \frac{556}{897}x^3 + \frac{14}{13}x^2 + x + 1\Big).$

4. b) $y_1(x) = x^{1/3}\Big(-\frac{19683x^{14}}{43472} + \frac{6561x^{12}}{13832} - \frac{729x^{10}}{1456} + \frac{243x^8}{455} - \frac{81x^6}{140} + \frac{9x^4}{14}$
$-\frac{3x^2}{4} + 1\Big)$
$y_2(x) = x^{-1/3}\Big(-\frac{7480x^{14}}{19683} + \frac{2618x^{12}}{6561} - \frac{308x^{10}}{729} + \frac{110x^8}{243} - \frac{40x^6}{81} + \frac{5x^4}{9}$
$-\frac{2x^2}{3} + 1\Big).$

3.2. Ecuación indicial con soluciones diferentes: diferencia entera

En este caso, las raíces son tales que $s_1 - s_2 = N$, por lo que las dos raíces son

$$s_1 \text{ y } s_2 = s_1 + N, \qquad N \in \mathbb{Z}_+.$$

Luego, $s_1 + N$ es raíz de la ecuación indicial y por tanto satisface que

$$(s_1 + N)(s_1 + N - 1) + b_0(s_1 + N) + c_0 = 0.$$

Comparando esto con el término que acompaña a a_n en la ecuación (6.20), estos términos son iguales. Por esto, si usamos la raíz s_1 para hallar los coeficientes que acompañan a x^k en la representación de la solución en serie de Frobenius, no podemos determinar todos los valores de estos coeficientes ya que el término a_N es cero como acabamos de ver. Por lo tanto, si las raíces de la ecuación indicial difieren por un número entero positivo, consideraremos dos casos por separado.

3.2.1. El coeficiente de a_N y los restantes coeficientes de x^{s_1+N} son cero

Cuando esto ocurre es posible hallar una solución general de la forma

$$y_g(x) = x^s(a_0 + a_1x + x_2x^2 + \cdots).$$

En esta situación la raíz $s_1 + N$ de la ecuación indicial determina los valores de los coeficientes a_k de la solución de la ecuación diferencial en términos de a_0, mientras que la raíz s_1 determina dos conjuntos de valores para los coeficientes a_k; uno en términos de a_0 y otro en términos de a_N. Sin embargo, la solución en serie de Frobenius que se obtiene mediante la raíz $s_1 + N$ en términos de a_0 no es linealmente independiente con la solución obtenida en términos de a_0 a través de la raíz s_1. Así, en este caso, la raíz s_1 genera dos soluciones linealmente independientes cuya combinación lineal es la solución general de la ecuación diferencial.

Ejemplo 6.16. *Hallar la solución general en serie de Frobenius de la ecuación de Bessel de índice* $1/2$*:*

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1/2^2)y = 0.$$

Solución. Primero reescribimos la ecuación como

$$y'' + \frac{x}{x^2}y' + \frac{1}{x^2}(x^2 - 1/2^2)y = 0.$$

El punto $x = 0$ es el punto singular regular y

$$\begin{aligned} p(x) =& x\frac{x}{x^2} = 1 + 0x + \cdots, \; b_0 = 1, \; b_n = 0, \; n \geq 1, \; x \in (-\infty, \infty) \\ q(x) =& x^2\frac{1}{x^2}(x^2 - 1/4) = -\frac{1}{4} + 0x + x^2 + 0x^3 + \cdots, \; c_0 = -\frac{1}{4}, \; c_1 = 0, \\ & c_2 = 1, \; c_n = 0, \; n \geq 2. \end{aligned}$$

La ecuación indicial es

$$s(s-1) - \frac{1}{4} = 0,$$

cuyas raíces son $s_1 = -1/2$ y $s_2 = 1/2$, y la diferencia entre ellas es $N = 1$. Usando la menor de las raíces, $s_1 = -1/2$ en el término que acompaña a x^{s_1+N},

$$a_1((s+1)s + b_0(s+1) + c_0) + a_0(b_1s + c_1)$$

de la ecuación (6.20) obtenemos:

$$a_1\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + a_0(0) = 0.$$

De aquí tenemos que el coeficiente que acompaña a a_1 es cero, así como el resto de términos en esta ecuación (es decir, el que acompaña a a_0), de manera que ecuación

$$(a_1((s+1)s + b_0(s+1) + c_0) + a_0(b_1s + c_1))x^{s+1} = 0 \quad (s = -1/2)$$

es una identidad, no importa los valores de a_0 y a_1.

Ahora podemos determinar el valor de los coeficientes de los restantes $x^{-1/2+n}$ en términos de a_0 y a_1, lo que nos dará dos soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel de índice $1/2$. Para esto veamos la recurrencia que hace cero al término que acompaña a $x^{-1/2+n}$:

$$a_n\left(\left(-\frac{1}{2}+n\right)\left(-\frac{3}{2}+n\right)+b_0\left(-\frac{1}{2}+n\right)+c_0\right)+a_{n-1}\left(b_1\left(-\frac{3}{2}+n\right)+c_1\right)$$
$$+a_{n-2}\left(b_2\left(-\frac{5}{2}+n\right)+c_2\right)+a_0\left(-\frac{1}{2}b_n+c_n\right)=0.$$

Simplificando tenemos:

$$a_n\left(\left(-\frac{1}{2}+n\right)\left(-\frac{3}{2}+n\right)+\left(-\frac{1}{2}+n\right)-\frac{1}{4}\right)+a_{n-1}(0)+a_{n-2}(1)=0.$$

Luego,

$$a_n(n^2-n)=-a_{n-2},$$

y así obtenemos:

$$a_n=-\frac{a_{n-2}}{n^2-n},\qquad n\geq 2.$$

Hallemos los primeros términos de esta recurrencia. Note que en lo que sigue a_0 y a_1 son arbitrarios:

$$\begin{aligned}
a_2&=-\frac{1}{2}a_0\\
a_3&=-\frac{1}{6}a_1\\
a_4&=-\frac{a_2}{12}=\frac{a_0}{24}\\
a_5&=-\frac{a_3}{20}=\frac{a_1}{120}\\
a_6&=-\frac{a_4}{30}=-\frac{a_0}{720}\\
a_7&=-\frac{a_5}{42}=-\frac{a_1}{5040}.
\end{aligned}$$

De aquí tenemos que los primeros siete términos de las soluciones linealmente independientes son

$$\begin{aligned}
y_1(x)=&a_0x^{-1/2}\left(1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{720}x^6+\cdots\right)\\
y_2(x)=&a_1x^{-1/2}\left(x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\cdots\right).
\end{aligned}$$

La solución general es

$$y_g(x) = a_0 x^{-1/2}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{720}x^6 + \cdots\right)$$
$$+ a_1 x^{1/2}\left(1 - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{120}x^4 - \frac{1}{5040}x^6 + \cdots\right).$$

Dado que $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas en todo $\mathbb{R}$, estas series convergen para todo x quizás en $x = 0$. La primera serie converge en todo $\mathbb{R}$ menos en 0, mientras que la segunda converge en todo $\mathbb{R}$. Por lo tanto, la solución general converge para $0 < |x| < \infty$. Note que para $x < 0$ la serie es compleja así que podemos escoger su parte imaginaria tomando $a_0 = ic$ con c un número real. ☑

3.2.2. El coeficiente de a_N es cero y los restantes coeficientes de x^{s_1+N} no lo son

En este caso solo la raíz $s_1 + N$ de la ecuación indicial determina un conjunto de valores para los coeficientes a_k en términos de a_0 para la solución en serie de Frobenius de la ecuación diferencial

$$y_1(x) = x^s(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots).$$

Una segunda solución linealmente independiente en este caso viene dada por

$$y_2(x) = u(x) - \alpha_N y_1(x)\ln(x), \quad x > 0, \tag{6.27}$$

donde N es la diferencia entre las dos raíces de la ecuación indicial, $y_1(x)$ es una solución en serie de Frobenius que se obtiene mediante la raíz $s_1 + N$ y $u(x)$ es una serie de Frobenius

$$u(x) = x^{s_1}(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots).$$

Sustituyendo estas funciones en la ecuación diferencial tenemos que $y_2(x)$ es una solución si se satisface que

$$x^2 u'' + xp(x)u' + q(x)u = \alpha_N(2xy_1' + (p(x) - 1)y_1). \tag{6.28}$$

En efecto, reemplazando $y_2(x)$ y sus derivadas en la ecuación (6.19), tenemos:

$$\begin{aligned} 0 =& x^2 y_2'' + xp(x)y_2' + q(x)y_2 \\ =& x^2\left(u'' - \alpha_N\left(\ln(x)y_1'' + 2\frac{1}{x}y_1' - \frac{1}{x^2}y_1\right)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+xp(x)\left(u'-\alpha_N\left(\ln(x)y_1'+\frac{1}{x}y_1'+\frac{1}{x}y_1\right)\right)+q(x)(u-\alpha_N\ln(x)y_1)\\
=&x^2u''+xp(x)u'+q(x)u-\alpha_N\ln(x)(x^2y_1''+xp(x)y_1'+q(x)y_1)\\
&-\alpha_N(2xy_1'-y_1+p(x)y_1).
\end{aligned}$$

Como y_1 es una solución de la ecuación (6.19), concluimos que (6.28) se satisface.

Para hallar los coeficientes α_k de u, sustituimos u, y_1 y sus derivadas en la ecuación (6.28). Soluciones como y_2 son llamadas *soluciones logarítmicas* de la ecuación diferencial.

Ejemplo 6.17. *Hallar una solución en serie de Frobenius de la ecuación*

$$xy''-y=0.$$

Solución. Reescribimos la ecuación como

$$y''-\frac{1}{x}y=0.$$

En este caso,

$$\begin{aligned}
p(x)=&0+0\cdots,\ b_n=0,\ n\geq 0,\ x\in\mathbb{R}\\
q(x)=&-x^2\frac{1}{x}=0-x+0x^2+\cdots,\ c_0=0,\ c_1=-1,\ c_n=0,\ n\geq 2.
\end{aligned}$$

El punto singular regular es $x=0$. La ecuación indicial es $s(s-1)=0$ con raíces $s_1=0$ y $s_2=1$, con diferencia $N=1$. Usamos la raíz $s_1=0$ en el término que acompaña a x^{0+1}. Esto es,

$$(a_1(0)+a_0(-1))x.$$

Así, el término que acompaña a a_1 es cero pero no así el que acompaña a a_0. Por lo tanto $s_1=0$ no proporciona una solución de la ecuación. Para hallar una solución en serie de Frobenius usemos la raíz $s_2=1$. Veamos la recurrencia que anula al término que acompaña a x^{1+n}.

$$\begin{aligned}
&a_nn(n-1)+a_{n-1}(1)+a_{n-2}(0)+a_0(0)=0\\
&a_n=\frac{a_{n-1}}{n(n-1)},\quad n\geq 2.
\end{aligned}$$

Hallemos el valor de a_1; para esto usemos (6.20):

$$a_1(2)+a_0(-1)=0,\qquad a_1=\frac{1}{2}a_0.$$

La recurrencia genera los siguientes términos:

$$
\begin{aligned}
a_2 =& \frac{a_1}{2} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}a_0 \\
a_3 =& \frac{a_2}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}\frac{a_0}{2 \cdot 2 \cdot 3} \\
a_4 =& \frac{a_3}{3 \cdot 4} = \frac{1}{2}\frac{a_0}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4} \\
&\vdots \\
a_k =& \frac{1}{2(n+1)!n!}a_0, \qquad n \geq 1.
\end{aligned}
$$

En este caso tenemos solo una solución en serie de Frobenius de la ecuación diferencial que viene dada por

$$
\begin{aligned}
y(x) =& a_0 + \frac{a_0 x}{2} + \frac{a_0}{2 \cdot 2}x^2 + \frac{a_0}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \cdots \\
=& a_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2(n+1)!n!}x^n \right).
\end{aligned}
$$

Esta serie converge en $(-\infty, \infty)$. ☑

Consideremos el caso particular de la ecuación diferencial

$$
x^2(a_1 x + a_0)y'' + x(b_1 x + b_0)y' + (c_2 x + c_0)y = 0, \qquad a_0 \neq 0. \tag{6.29}
$$

Sean los polinomios p_0 y p_1 dados en (6.23):

$$
\begin{aligned}
p_0(r) =& a_0 r(r-1) + b_0 r + c_0, \\
p_1(r) =& a_1 r(r-1) + b_1 r + c_1, \\
p_2(r) =& 0
\end{aligned}
$$

y para r tal que $p_0(r+n) \neq 0$ para todo entero positivo n definamos la recurrencia

$$
\begin{aligned}
a_0(r) =& 1, \\
a_n(r) =& -\frac{p_1(n+r-1)}{p_0(n+r)}a_{n-1}(r).
\end{aligned}
$$

Si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación indicial $p_0(r) = 0$ y son tales que $r_1 = r_2 + N$, donde N es un número entero positivo, entonces la función

$$
y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)x^n
$$

es una solución en serie de Frobenius de (6.29). Una segunda solución linealmente independiente con y_1 se obtiene de la siguiente manera:

Consideremos la siguiente recurrencia.

$$\begin{aligned} a_0(r_2) =& 1, \\ a_n(r_2) =& -\frac{p_1(n+r_2-1)}{p_0(n+r_2)}a_{n-1}(r_2), \quad 1 \leq n \leq N-1 \\ \alpha_N =& -\frac{p_1(r_1-1)}{Na_0}a_{N-1}(r_2). \end{aligned}$$

La segunda solución de (6.29) es

$$y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{N-1} a_n(r_2)x^n + \alpha_N\left(y_1(x)\ln(x) + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n\right)$$

donde $a_n'(r_1) = \frac{da_n(r)}{dr}\ |_{r=r_1}$. La demostración de la validez estas fórmulas se puede ver en [17].

Ejemplo 6.18. *Hallar dos soluciones en series de Frobenius linealmente independientes de la ecuación diferencial*

$$2x^2(x+2)y'' + x(7x-4)y' + (3x-5)y = 0.$$

Solución. Usemos los polinomios (6.23) y la recurrencia anterior para obtener los coeficientes de las soluciones:

$$\begin{aligned} p_0(r) =& 4r(r-1) - 4r - 5 = (2r+1)(2r-5) \\ p_1(r) =& -2r(r-1) + 7r + 3 = (r+1)(2r+3) \end{aligned}$$

las raíces de $p_0(r)$ son $r_1 = 5/2$ y $r_2 = -1/2$, así $N = r_1 - r_2 = 3$. Ahora calculemos los coeficientes $a_n(r)$ de las soluciones. Usamos la recurrencia anterior.

$$\begin{aligned} a_0(r) =& 1 \\ a_n(r) =& -\frac{p_1(n+r-1)}{p_0(n+r)}a_{n-1}(r) \\ =& -\frac{(n+r)(2n+2r+1)}{(2n+2r+1)(2n+2r-5)}a_{n-1}(r) \\ =& -\frac{n+r}{2n+2r-5}a_{n-1}(r), \qquad n \geq 1 \end{aligned}$$

a partir de lo anterior concluimos que

$$a_n(r) = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{k+r}{2k+2r-5}, \qquad n \geq 0.$$

Evaluamos en la raíz $r_1 = 5/2$ y obtenemos:

$$
\begin{aligned}
a_n(5/2) =&(-1)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{k+5/2}{2k+5-5},\\
=&(-1)^n \prod_{k=1}^{n} \frac{2k+5}{4k},\\
=&\frac{(-1)^n}{4^n n!} \prod_{k=1}^{n}(2k+5), \qquad n \geq 0.
\end{aligned}
$$

Luego, la primera solución de la ecuación diferencial es

$$
y_1(x) = x^{5/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n!} \prod_{k=1}^{n}(2k+5)x^n.
$$

Para hallar la segunda solución primero calculemos α_N, pues si este término es cero entonces no requerimos calcular los términos $a_n'(r)$. En este caso tenemos que $N = 3$, de manera que podemos calcular $a_0(r_2)$, $a_1(r_2)$ y $a_2(r_2)$ donde $r_2 = -1/2$.

$$
\begin{aligned}
a_0(-1/2) =&1,\\
a_1\left(-\frac{1}{2}\right) =&-\frac{p_1(1-1/2-1)}{p_0(1-1/2)} a_0\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{p_1\left(-\frac{1}{2}\right)}{p_0\left(\frac{1}{2}\right)} = -\frac{(-1/2+1)(-1+3)}{(1+1)(1-5)}\\
=&\frac{1}{8}\\
a_2\left(-\frac{1}{2}\right) =&-\frac{p_1(2-1/2-1)}{p_0(2-1/2)} a_1\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}\frac{p_1\left(\frac{1}{2}\right)}{p_0\left(\frac{3}{2}\right)} = -\frac{1}{8}\frac{(1/2+1)(1+3)}{(3+1)(3-5)}\\
=&\frac{1}{8}\frac{6}{8} = \frac{3}{32}.
\end{aligned}
$$

Ahora calculamos α_3:

$$
\alpha_3 = -\frac{p_1(r_1-1)}{3 \cdot 4} a_2(r_2) = -\frac{p_1(3/2)}{12}\frac{3}{32} = -\frac{15}{12}\frac{3}{32} = -\frac{15}{128}.
$$

Como $\alpha_3 \neq 0$ entonces calculemos $a_n'(r)$. Usemos diferenciación logarítmica para simplificar los cálculos:

$$
|a_n(r)| = \prod_{k=1}^{n} \frac{|k+r|}{|2k+2r-5|}.
$$

Así, tomando logaritmo y derivando respecto a r obtenemos

$$
\begin{aligned}
\ln|a_n(r)| &= \sum_{k=1}^{n}(\ln|k+r| - \ln|2k+2r-5|)\\
\frac{a_n'(r)}{a_n(r)} &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+r} - \frac{2}{2k+2r-5}\right)\\
a_n'(r) &= a_n(r)\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{-5}{(2k+2r-5)(k+r)}\right).
\end{aligned}
$$

Evaluamos estos términos en $r_1 = 5/2$:

$$
\begin{aligned}
a_n'(5/2) &= a_n(5/2)\sum_{k=1}^{n}\frac{-5}{2k(k+5/2)}\\
&= -5\frac{(-1)^n}{4^n n!}\prod_{k=1}^{n}(2k+5)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(2k+5)}.
\end{aligned}
$$

La segunda solución linealmente independiente entonces es,

$$
\begin{aligned}
y_2(x) &= x^{-1/2}\sum_{n=0}^{2}a_n(r_2)x^n - \frac{15}{128}\left(y_1(x)\ln(x) + x^{5/2}\sum_{n=1}a_n'(5/2)x^n\right)\\
&= x^{-1/2}\left(1+\frac{1}{8}x+\frac{3}{32}x^2\right) - \frac{15}{128}\,(y_1(x)\ln(x)\\
&\quad -5x^{5/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n n!}\prod_{k=1}^{n}(2k+5)\sum_{k=1}^{n}\frac{x^n}{k(2k+5)}\Bigg).
\end{aligned}
$$

☑

Ahora analicemos el caso de ecuaciones diferenciales de la forma

$$
x^2(a_2x^2+a_0)y'' + x(b_2x^2+b_0)y' + (c_2x^2+c_0)y = 0. \tag{6.30}
$$

En este caso los polinomios (6.23) son

$$
\begin{aligned}
p_0(r) &= a_0x(x-1) + b_0r + c_0,\\
p_1(r) &= 0,\\
p_2(r) &= a_2r(r-1) + b_2r + c_2.
\end{aligned}
$$

Definimos la recurrencia como en (6.24), pero dado que $p_1(r) = 0$, entonces tenemos que $a_n(r) = 0$ para todo número n impar, por esto, en todo n entero positivo, la recurrencia queda definida para cada r tal que $p_0(2n+r) \neq 0$ de la forma:

$$\begin{aligned} a_0(r) =& 1, \\ a_{2n}(r) =& -\frac{p_2(2n+r-2)}{p_0(2n+r)} a_{2n-2}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación indicial $p_0(r)$ y son tales que $r_1 = r_2 + 2N$, donde N es un entero positivo, una solución de la ecuación diferencial (6.30) es dada por la fórmula

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(r_1) x^{2n}.$$

Definiendo

$$\begin{aligned} a_0(r_2) =& 1 \\ a_{2n}(r_2) =& -\frac{p_2(2n+r_2-2)}{p_0(2n+r_2)} a_{2n-2}(r_2), \qquad 1 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

y

$$\alpha_N = -\frac{p_2(r_1-2)}{2N a_0} a_{2N-2}(r_2).$$

Una segunda solución de (6.30), la cual es linealmente independiente con y_1, es dada por

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{N-1} a_{2n}(r_2) x^{2n} + \alpha_N \left(y_1(x) \ln(x) + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a'_{2n}(r_1) x^{2n} \right),$$

donde $a'_n(r_1) = \frac{da_n(r)}{dr} \mid_{r=r_1}$ (ver [17]).

Ejemplo 6.19. *Hallar dos soluciones en series de Frobenius linealmente independientes de la ecuación diferencial*

$$-x^2(x^2-1)y'' + x(-13x^2+7)y' - 14xy = 0.$$

Solución. En este caso, los polinomios (6.23) y la recurrencia anterior son dados por:

$$\begin{aligned} p_0(r) =& r(r-1) + 7r = r(r+6), \\ p_2(r) =& -2r(r-1) - 13r - 14 = -(r+2)(2r+7). \end{aligned}$$

Las raíces de $p_0(r)$ son $r_1 = 0$ y $r_2 = -6$, de modo que $N = \frac{r_1 - r_2}{2} = 3$. Ahora calculemos los coeficientes $a_n(r)$ de las soluciones. Usamos la recurrencia anterior:

$$\begin{aligned}
a_0(r) =& 1\\
a_{2n}(r) =& -\frac{p_1(2n+r-2)}{p_0(2n+r)} a_{2n-2}(r)\\
=& \frac{(2n+r)(4n+2r+3)}{(2n+r)(2n+r+6)} a_{2n-2}(r)\\
=& \frac{4n+2r+3}{2n+r+6} a_{2n-2}(r), \qquad n \geq 1;
\end{aligned}$$

de aquí concluimos que

$$a_{2n}(r) = \prod_{k=1}^{n} \frac{4k+2r+3}{2k+r+6}, \qquad n \geq 0.$$

Evaluamos en la raíz $r_1 = 0$ y obtenemos

$$\begin{aligned}
a_n(0) =& \prod_{k=1}^{n} \frac{4k+3}{2k+6},\\
=& \frac{6}{2^n (n+3)!} \prod_{k=1}^{n} (4k+3).
\end{aligned}$$

La primera solución de la ecuación diferencial es

$$y_1(x) = 6 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{6}{2^n (n+3)!} \prod_{k=1}^{n} (4k+3) x^{2n}.$$

Para hallar la segunda solución, primero calculemos α_N. En este caso $N = 3$, entonces calculemos $a_0(-6)$, $a_1(r-6)$ y $a_2(-6)$:

$$\begin{aligned}
a_0(-6) =& 1,\\
a_{2n}(-6) =& -\frac{4n-9}{2n} a_{2n-2}(-6), \qquad n = 1, 2.
\end{aligned}$$

De aquí tenemos:

$$a_2(-6) = -\frac{5}{2}, \qquad a_4(-6) = \frac{5}{8.}$$

Ahora calculamos α_3:

$$\alpha_3 = -\frac{p_2(r_1 - 2)}{3 \cdot 1} a_4(-6) = -\frac{p_2(-2)}{3} \frac{5}{8} = 0.$$

Como $\alpha_3 = 0$, entonces la segunda solución de la ecuación diferencial es

$$y_2(x) = x^{-6}\left(1 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{8}x^4\right).$$

☑

Ejercicios

1. Verificar que $x = 0$ es un punto singular regular de cada ecuación diferencial y que las raíces de la ecuación indicial difieren por un entero. Usar el método de Frobenius para hallar al menos una solución en serie de Frobenius y el correspondiente intervalo de convergencia:
   a) $x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$.
   b) $xy'' + xy' + (x^2 - 1/4)y = 0$.
   c) $y'' + \frac{3}{x}y' - 2y = 0$.
   d) $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$.
   e) $xy'' + y' + y = 0$.
2. Hallar las dos soluciones en serie de Frobenius linealmente independientes de la ecuación diferencial. Dar las fórmulas explícitas de los coeficientes:
   a) $xy'' + xy' + y = 0$.
   b) $xy'' - 5y' + xy = 0$.
   c) $x^2y'' + x(x + 1)y' - 3(x + 3)y = 0$.
   d) $x^2y'' + x(1 - 2x)y' - (x + 4)y = 0$.
   e) $x^2y'' - 3(7 - x^2)y' + 12y = 0$.
   f) $4x^2y'' + 2x(x^2 + 8)y' + (3x^2 + 5)y = 0$.
3. Demostrar que para la ecuación diferencial (6.29), $\alpha_N = 0$, si y solo si $p_1(r_2 + \eta) = 0$ para algún entero η en $\{0, 1, \ldots, N - 1\}$.
4. Demostrar que para la ecuación diferencial (6.30), $\alpha_N = 0$, si y solo si $p_2(r_2 + 2\xi) = 0$ para algún entero ξ en $\{0, 1, \ldots, N - 1\}$.
5. Demostrar que si la ecuación diferencial

$$a_0x^2y'' + b_0xy' + (c_1x + c_0)y = 0$$

es tal que, si la ecuación indicial $p_0(r) = a_0r(r - 1) + b_0r + c_0 = 0$ tiene raíces r_1 y r_2 tales que $r_1 - r_2 = N$ (un entero positivo) entonces sus soluciones son dadas por

$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\prod_{j=1}^{n}(j + N)}\left(\frac{c_1}{a_0}\right)^n x^n$$

y

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{n! \prod_{j=1}^{n}(j-N)} \left(\frac{c_1}{a_0}\right)^n x^n - \frac{1}{N!(N-1)!} \left(\frac{c_1}{a_0}\right)^N$$
$$\times \left(y_1(x)\ln(x) - x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \prod_{j=1}^{n}(j+N)} \left(\frac{c_1}{a_0}\right)^n \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{2j+N}{j(j+M)}\right) x^n \right).$$

6. Demostrar que, si la ecuación diferencial

$$a_0x^2y'' + b_0xy' + (c_2x^2 + c_0)y = 0$$

es tal que si la ecuación indicial $p_0(r) = a_0r(r-1) + b_0r + c_0 = 0$ tiene raíces r_1 y r_2 tales que $r_1 - r_2 = 2N$ (un entero positivo par) entonces sus soluciones son dadas por

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0} \infty \frac{(-1)^n}{4^n n! \prod_{j=1}^{n}(j+N)} \left(\frac{c_2}{a_0}\right)^n x^{2n}$$

y

$y_2(x) =$
$$x^{r_2} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{4^n n! \prod_{j=1}^{n}(j-N)} \left(\frac{c_2}{a_0}\right)^n x^{2n} - \frac{2}{4^N N!(N-1)!} \left(\frac{c_2}{a_0}\right)^N \left(\frac{c_2}{a_0}\right)^N$$
$$\times \left(y_1(x)\ln(x) - \frac{x^{r_1}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n n! \prod_{j=1}^{n}(j+N)} \left(\frac{c_2}{a_0}\right)^n \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{2j+N}{j(j+N)}\right) x^{2n} \right).$$

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *b*) $y_1(x) = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\prod_{j=1}^{n}(4j-1)}{4^n (n+1)! n!} x^n$, intervalo de convergencia $-\infty < x < \infty$.

   d) $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!} x^n$, intervalo de convergencia $-\infty < x < \infty$.

3.3. Las raíces de la ecuación indicial se repiten

En este caso, al tener una sola raíz de la ecuación indicial, solo podemos obtener un único conjunto de valores para los coeficientes a_k de la solución en serie de Frobenius; la otra solución se obtiene mediante (6.27).

Ejemplo 6.20. *Hallar una solución en serie de Frobenius para la ecuación de Bessel de índice cero*

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

Solución. Reescribimos la ecuación

$$y'' + \frac{x}{x^2}y' + y = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} p(x) =& x\frac{x}{x^2} = 1 + 0x + \cdots, b_n = 0,\ n \geq 1,\ x \in (-\infty, \infty) \\ q(x) =& x^2 = 0 + 0x + x^2 + 0x^3 + \cdots,\ c_0 = c_1 = 0,\ c_2 = 1,\ c_n =,\ n \geq 3. \end{aligned}$$

$x = 0$ es el punto singular. La ecuación indicial es $s(s-1) + 1s = 0$ con raíz $s = 0$ de multiplicidad 2. Hallemos la recurrencia que anula el coeficiente de x^{0+n} usando (6.20).

$$\begin{aligned} & a_n(n(n-1) + n) + a_{n-1}(0) + a_{n-2}(1) + a_0(0) = 0 \\ & a_n n^n + a_{n-2} = 0 \\ & 5a_n = -\frac{1}{n^2}a_{n-2}. \end{aligned}$$

Hallemos el valor de a_1,

$$a_1(1) + a_0(0) = 0, \qquad a_1 = 0.$$

Ahora hallamos el término general de la recurrencia

$$\begin{aligned} a_2 =& -\frac{1}{2^2}a_0 \\ a_3 =& -\frac{1}{3^2}a_1 = 0 \\ a_4 =& -\frac{1}{4^2}a_2 = \frac{1}{2^2 \cdot 4^2}a_0 \\ a_5 =& -\frac{1}{25}a_3 = 0 \\ a_6 =& -\frac{1}{6^2}a_4 = -\frac{1}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}a_0 \\ & \vdots \\ a_{2k} =& \frac{(-1)^k}{\prod_{j=1}^{k}(2j)^2}a_0 \\ a_{2k+1} =& 0, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

La solución en serie de Frobenius de la ecuación de Bessel de índice cero es

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\prod_{j=1}^{n}(2j)^2} x^{2n}.$$

☑

Calculemos ahora las soluciones de ecuaciones diferenciales de la forma

$$x^2(a_2x^2+a_1x+a_0)y''+x(b_2x^2+b_1x+b_0)y'+(c_2x^2+c_1x+c_0)y = 0, \quad a_0 \neq 0 \tag{6.31}$$

en el caso en que $p_0(r) = a_0r(r-1)+b_0r+c_0 = 0$ tiene una raíz repetida r_1. Sabemos que en este caso la ecuación (6.31) tiene una solución de la forma

$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Sin embargo, la otra solución viene dada por una solución logarítmica. Para hallar esta usemos los polinomios (6.23) y los coeficientes (6.24). Tenemos que las soluciones linealmente independientes de (6.31) son

$$\begin{aligned} y_1(x) =& x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \\ y_2(x) =& y_1(x)\ln(x) + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n, \quad x > 0 \end{aligned}$$

donde $a_n'(r_1) = \frac{da_n(r)}{dr}\mid_{r=r_1}$ [17].

Ejemplo 6.21. *Hallar las dos soluciones linealmente independientes de la siguiente ecuación diferencial:*

$$2x^2(x+2)y'' + 5x^2y' + (x+1)y = 0.$$

Dar las fórmulas explícitas de los coeficientes en las soluciones.

Solución. Calculemos los polinomios dados en (6.23) para este caso:

$$\begin{aligned} p_0(r) =& 4r(r-1)+1 = (2r-1)^2 \\ p_1(r) =& 2r(r-1)+5r+1 = (r+1)(2r+1) \\ p_2(r) =& 0. \end{aligned}$$

Tenemos que $r_1 = \frac{1}{2}$ es una raíz repetida del polinomio indicial $p_0(r)$; por lo tanto, las soluciones de la ecuación vienen dadas por

$$y_1(x) = x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{2}\right)x^n$$

y

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + x^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'\left(\frac{1}{2}\right)x^n.$$

Las fórmulas de recurrencia (6.24) en este caso quedan como

$$\begin{aligned}
a_0(r) =&1\\
a_n(r) =&-\frac{p_1(n+r-1)}{p_0(n+r)}a_{n-1}(r)\\
=&-\frac{(n+r)(2n+2r-1)}{(2n+2r-1)^2}a_{n-1}(r)\\
=&-\frac{n+r}{2n+2r-1}a_{n-1}(r), \quad n \geq 0.
\end{aligned}$$

De aquí se obtiene:

$$a_n(r) = (-1)^n\prod_{j=1}^{n}\frac{j+r}{2j+2r-1}, \quad n \geq 0.$$

Evaluamos en $r = 1/2$:

$$a_n(1/2) = (-1)^n\prod_{j=1}^{n}\frac{j+\frac{1}{2}}{2j} = (-1)^n\prod_{j=1}^{n}\frac{2j+1}{4j} = (-1)^n\frac{\prod_{j=1}^{n}(2j+1)}{4^n n!}, \ n \geq 0.$$

Así, la primera solución de la ecuación es

$$y_1(x) = x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\prod_{j=1}^{n}(2j+1)}{4^n n!}x^n.$$

Para calcular la segunda solución calculamos $a_n'(1/2)$, $n = 1, 2, \ldots$ Para esto usemos diferenciación logarítmica

$$\begin{aligned}
|a_n(r)| =& \prod_{j=1}^{n}\frac{|j+r|}{|2j+2r-1|}, \quad n \geq 1\\
\ln|a_n(r)| =& \sum_{j=1}^{n}\left(\ln|j+r| - \ln|2j+2r-1|\right).
\end{aligned}$$

Derivamos respecto a r:

$$\frac{a_n'(r)}{a_n(r)} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j+r} - \frac{2}{2j+2r-1}\right)$$

$$a_n'(r) = a_n(r)\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j+r} - \frac{2}{2j+2r-1}\right).$$

Evaluamos en $r = 1/2$:

$$\begin{aligned} a_n'(1/2) &= (-1)^n \frac{\prod_{j=1}^{n}(2j+1)}{4^n n!}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{j}\right) \\ &= -(-1)^n \frac{\prod_{j=1}^{n}(2j+1)}{4^n n!}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(2j+1)}. \end{aligned}$$

Luego, la segunda solución es

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) - x^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{\prod_{j=1}^{n}(2j+1)}{4^n n!}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(2j+1)}\right)x^n.$$

☑

Obs

En los casos en que la solución $y_1(x)$ sea una suma finita, el usar diferenciación logarítmica para hallar los coeficientes $a_n'(r)$ en la segunda solución $y_2(x)$ trae algunas dificultades. Veamos cómo solventar esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 6.22. *Hallar las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial*

$$x^2y'' - x(5-x)y' + (9-4x)y = 0.$$

Solución. Calculemos los polinomios (6.23):

$$\begin{aligned} p_0(r) &= r(r-1) - 5r + 9 = (r-3)^2 \\ p_1(r) &= r - 4 \\ p_2(r) &= 0. \end{aligned}$$

Tenemos que $r_1 = 3$ es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio indicial $p_0(r)$. Así, la primera solución es

$$y_1(x) = x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_n(3)x^n.$$

De (6.24):

$$a_0(r) = 1$$

$$
\begin{aligned}
a_n(r) &= -\frac{p_1(n+r-1)}{p_0(n+r)} a_{n-1} \\
&= -\frac{n+r-5}{(n+r-3)^2} a_{n-1}(r) \\
&= (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{j+r-5}{(j+r-3)^2}, \quad n \geq 1. \qquad (6.32)
\end{aligned}
$$

Evaluamos en $r = 3$:

$$a_n(3) = (-1)^n \prod_{j=1}^{n} \frac{j-2}{j^2}.$$

De aquí obtenemos:

$$a_1(3) = 1, \quad a_n(3) = 0, \quad n \geq 2.$$

Por lo tanto, la solución $y_1(x)$ es

$$y_1(x) = x^3(1+x).$$

La segunda solución viene dada por

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + x^3 \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(3) x^3.$$

Usemos diferenciación logarítmica:

$$|a_n(r)| = \prod_{j=1}^{n} \frac{|j+r-5|}{|j+r-3|^2}, \quad n \geq 1$$

de forma que

$$\ln|a_n(r)| = \sum_{j=1}^{n} \left(\ln|j+r-5| - 2\ln|j+r-3|\right).$$

Derivamos respecto a r:

$$
\begin{aligned}
\frac{a_n'(r)}{a_n(r)} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j+r-5} - \frac{2}{j+r-3}\right) \\
a_n'(r) &= a_n(r) \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{j+r-5} - \frac{2}{j+r-3}\right).
\end{aligned}
$$

Si evaluamos $r = 3$ en esta expresión tenemos que $j = 2$ nos da una indeterminación. Por esto, en estos casos podemos resolver este inconveniente haciendo el siguiente procedimiento:

De (6.32) para $n = 1$ tenemos

$$a_1(r) = -\frac{r-4}{(r-2)^2},$$

luego

$$\begin{aligned} a_1'(r) =& \frac{r-6}{(r-2)^2} \\ a_1'(3) =& -3 \end{aligned}$$

y para $n \geq 2$:

$$a_n(r) = (-1)^n (r-4)(r-3) \frac{\prod_{j=3}^{n}(j+r-5)}{\prod_{j=1}^{n}(j+r-3)^2} = (r-3)c_n(r),$$

donde

$$c_n(r) = (-1)^n (r-4) \frac{\prod_{j=3}^{n}(j+r-5)}{\prod_{j=1}^{n}(j+r-3)^2}, \quad n \geq 2.$$

De esta manera

$$a_n'(r) = c_n(r) + (r-3)c_n'(r), \quad n \geq 2$$

lo que implica que $a_n'(3) = c_n(3)$ si $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} a_n'(3) =& c_n(3) = -(-1)^n \frac{\prod_{j=3}^{n}(j-2)}{\prod_{j=1}^{n} j^2} \\ =& \frac{(-1)^{n+1}}{2^2} \cdot \frac{1}{3^2} \cdot \frac{2}{4^2} \cdot \frac{3}{5^2} \cdots \\ =& \frac{(-1)^{n+1}}{n(n-1)n!}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Luego, la segunda solución es

$$y_2(x) = x^3(1+x)\ln(x) - 3x^4 - x^3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n-1)n!} x^n.$$

☑

Ejercicios

1. Verificar que $x = 0$ es un punto singular regular de cada ecuación diferencial y que la ecuación indicial tiene una única raíz. Usar el método de Frobenius para hallar la única solución en serie de Frobenius y el correspondiente intervalo de convergencia:
   a) $x^2y'' - 3xy' + 4(x+1)y = 0$.
   b) $xy'' + (1-x)y' + \frac{1}{2}y = 0$.
2. Hallar las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial. Dar las fórmulas explícitas de las soluciones:
   a) $4x^2y'' + (4x+1)y = 0$.
   b) $x^2y'' + x(x^2-1)y' + (x^2+1)y = 0$.
   c) $x^2(2-x^2)y'' - 2(1+2x^2)y' + (2-2x)y = 0$.
   d) $36x^2(-2x+1)y'' + 24x(-9x+1)y' - (70x-1)y = 0$.
   e) $x^2(x^2+1)y'' + 3x(x^2-1)y' + 4y = 0$.
   f) $x(x+1)y'' + (1-x)y' + y = 0$.
   g) $2x^2(x+1)y'' - x(6-x)y' + (8-x)y = 0$.
3. Hallar los primeros cuatro términos de las dos soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial:
   a) $x^2(2x^2+x+1)y'' + x(7x^2+6x+3)y' + (-3x^2+6x+1)y = 0$.
   b) $4x^2(2x^2+x+1)y'' + 12x^2(x+1)y' + (3x^2+3x+1)y = 0$.
   c) $x^2(-2x+1)y'' - x(4x+5)y' + (4x+9)y = 0$.
   d) $x^2(4x+1)y'' - x(-4x+1)y' + (x+1)y = 0$.
   e) $x^2y'' - x(-x^2+1)y' + (x^2+1)y = 0$.
   f) $x^2(x^2+2)y'' + x(-x^2+14)y' + 2(x^2+9)y = 0$.
4. Una ecuación diferencial de la forma

$$x(1-x)y'' + (c-(a+b+1)x)y' - aby = 0, \quad (a,\ b,\ c \text{ constantes})$$

   es llamada *ecuación de Gauss* o *ecuación hipergeométrica*. Verificar que
   a) $x = 0$ es un punto singular regular.
   b) Las raíces de la ecuación indicial son $s_1 = 0$ y $s_2 = 1-c$.
   c)

$$a_{n+1} = \frac{(n+s+a)(n+s+b)}{(n+s+1)(n+s+c)}a_n, \quad n \geq 0,$$

   donde $a_0, a_1, \ldots$ son los coeficientes de la serie de Frobenius $x^s(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots)$, $a_0 \neq 0$.
   d) Las soluciones para $s_1 = 0$ y $s_2 = 1-c$ son respectivamente

$$y_1(x) = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2!} + \cdots$$

$$+\frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{c(c+1)\cdots(c+n-1)}\frac{x^n}{n!}+\cdots,$$

$$c \neq 0,-1,-2,-3,\ldots$$

$$y_2(x) = x^{1-c}\left(1+\frac{(a-c+1)(b-c+1)}{2-c}x+\cdots\right),\quad c \neq 2,3,4,\ldots$$

e) Ambas soluciones son iguales si $c = 1$.

f) Si c no es entero la solución general es

$$\alpha y_1 + \beta y_2$$

y converge si $|x| < 1$, excepto quizás en $x = 0$. Si c es entero solo una de estas funciones es una solución.

La serie y_1 es llamada *serie hipergeométrica* y la función que define se denomina *función hipergeométrica*. Cuando a o b es cero, la función hipergeométrica es un polinomio.

5. Usando el ejercicio anterior hallar la solución en serie de las siguientes ecuaciones diferenciales.

a) $x(1-x)y'' + (3/2-2x)y' - \frac{1}{4}y = 0$.

b) $x(1-x)y'' + (2-4x)y' - 2y = 0$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. a) $y_1(x) = x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{4^n}{(n^2)!}x^n$, intervalo de convergencia $-\infty < x < \infty$.

2. c) $y_1(x) = x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n}(2j+1)}{4^n n!}x^{2n}$,

$$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) - \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\prod_{j=1}^{n}(2j+1)}{4^n n!}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j(2j+1)}\right)x^{2n}.$$

3. a) $y_1(x) = x^{-1}\left(\frac{173}{24}x^4 - \frac{20}{3}x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 2x + 1\right)$,

$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + x^{-1}\left(-\frac{141}{128}x^4 - \frac{31}{48}x^3 + \frac{13}{8}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right)$.

c) $y_1(x) = x^3\left(625x^4 + \frac{175616}{729}x^3 + 812x^2 + 20x + 1\right)$,

$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + \left(\frac{28561}{256}x^4 + \frac{1331}{27}x^3 + \frac{81}{4}x^2 + 7x + 1\right)$.

f) $y_1(x) = x^{-3}\left(\frac{625}{168435456}x^8 - \frac{1}{373248}x^6 + \frac{25}{1024}x^4 - \frac{17}{8}x^2 + 1\right)$,

$y_2(x) = y_1(x)\ln(x) + x^{-3}\left(\frac{1}{4096}x^8 + \frac{1}{16}x^4 + 2x + 1\right)$.

4. Truncamiento de soluciones en Maxima

Maxima no tiene implementado métodos para hallar la solución truncada de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones vienen dadas por series infinitas. Sin embargo, mediante las técnicas de resolución dadas en este capítulo podemos obtener soluciones de orden finito para ecuaciones diferenciales con soluciones expresadas por series infinitas.

4.1. Soluciones truncadas de series de potencias

Maxima puede manipular series infinitas; esto es, calcula y simplifica simbólicamente las operaciones dadas en el teorema 6.3. Por lo tanto, podemos usar esto para poder conseguir algunas soluciones truncadas, es decir, polinomios de orden finito, para ecuaciones diferenciales lineales con funciones analíticas como soluciones.

Ejemplo 6.23. *Hallemos una solución aproximada en serie de potencias alrededor de 0 de la ecuación diferencial*

$$y'' - 2xy' - 2y = 0.$$

Queremos hallar una solución de la forma $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Definamos en Maxima esta función y sus derivadas:

```
(%i1) f(x):=sum(a(k)*x^(k),k,0,inf);
```

(%o1) $\mathtt{f(x)} := \sum_{k=0}^{\infty} \mathtt{a(k)x^k}$

Del teorema 6.4 sabemos la forma de las derivadas de $f(x)$.

```
(%i2) df(x):=sum(k*a(k)*x^(k-1),k,1,inf);
```

(%o2) $\mathtt{df(x)} := \sum_{k=1}^{\infty} \mathtt{ka(k)x^{k-1}}$

```
(%i3) d2f(x):=sum(k*(k-1)*a(k)*x^(k-2),k,2,inf);
```

(%o3) $\mathtt{d2f(x)} := \sum_{k=2}^{\infty} \mathtt{k(k-1)a(k)x^{k-2}}$

Reemplazamos esto en la ecuación diferencial:

```
(%i4) d2f(x)-2*x*df(x)-2*f(x)=0;
```

(%o4) $-2\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathtt{a(k)x^k}\right) - 2\mathtt{x}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathtt{ka(k)x^{k-1}}\right) + \sum_{k=2}^{\infty} \mathtt{k(k-1)a(k)x^{k-2}} = 0$

Usemos ahora la función `intosum(expr)` *la cual mueve los factores que multiplican las series dentro de estas.*

```
(%i5) intosum(%);
```

(%o5) $\left(\sum_{k=0}^{\infty} -2a(k)x^k\right) - \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2ka(k)x^k\right) + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a(k)x^{k-2} = 0$

Con esta expresión podemos balancear los índices de las sumas adecuadamente teniendo en cuenta la observación dada en la página 232. Para esto usaremos la función

```
changevar(expr, f(x,y), y, x)
```

que hace el cambio de variable `f(x,y) = 0` *en todas las expresiones* `expr` *que dependan de* `x`.

Para la segunda derivada hacemos:

```
(%i6) d2f1:changevar(sum((k-1)*k*a(k)*x^(k-2),k,2,inf),k-2-n,
n,k);
```

(%o6) $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 2)a(n+2)x^n$

Para la primera derivada comenzamos la serie en $k = 0$ y hacemos el cambio $n = k$, mientras que para f hacemos $n = k$:

```
(%i7) df1: intosum(sum(-2*n*a(n)*x^(n),n,0,inf));
```

(%o7) $\sum_{n=0}^{\infty} -2na(n)x^n$

```
(%i8) f1: intosum(sum(-2*a(n)*x^(n),n,0,inf));
```

(%o8) $\sum_{n=0}^{\infty} -2a(n)x^n$

Evaluamos esto en la ecuación diferencial para ver la recurrencia que forman los coeficientes. Usaremos la función `sumcontract(expr)`, *la cual escribe las expresiones* `expr` *bajo un único signo de suma.*

```
(%i9) sumcontract(d2f1+df1+f1=0);
```

(%o9) $\sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 3n + 2)a(n+2)x^n - 2na(n)x^n - 2a(n)x^n = 0$

Tenemos entonces que resolver la recurrencia

$$(n^2 + 3n + 2)a(n+2) - 2na(n) - 2a(n) = 0.$$

```
(%i10) solve((n^(2)+3*n+2)*a(n+2)-2*n*a(n)-2*a(n)=0,a(n+2));
```

(%o10) $[a(n+2)=\frac{2a(n)}{n+2}]$

Hallemos los términos de esta recurrencia la cual depende de dos coeficientes. Para esto definamos la recurrencia equivalente:

```
(%i11) an[0]:a;an[1]:b; an[n]:=2/(n)*an[n-2];
```

(%o11) a

(%o12) b

(%o13) $an_n := \frac{2}{n}an_n[n-2]$

Finalmente para mostrar la solución de la ecuación para un número finito de términos definimos la siguiente función:

```
(%i14) sol(x,p):=sum(an[n]*x^(n),n,0,p);
```

(%o14) $sol(x,p) := \sum_{n=0}^{p} an_n x^n$

Veamos los primeros ocho términos de la expansión en serie de la solución:

```
(%i15) sol(x,8);
```

(%o15) $\frac{ax^8}{24}+\frac{8bx^7}{105}+\frac{ax^6}{6}+\frac{4bx^5}{15}+\frac{ax^4}{2}+\frac{2bx^3}{3}+ax^2+bx+a$

Hallemos la solución del problema de valor inicial $y(0)=1$, $y'(0)=0$. Hallemos la derivada de esta solución:

```
(%i16) diff(%,x);
```

(%o16) $\frac{ax^7}{3}+\frac{8bx^6}{15}+ax^5+\frac{4bx^4}{3}+2ax^3+2bx^2+2ax+b$

Ahora definimos estas soluciones aproximadas y resolvemos en $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

```
(%i17) solaprox(x):=(a*x^(8))/24+(8*b*x^(7))/105+(a*x^(6))/6
+(4*b*x^(5))/15 +(a*x^(4))/2+(2*b*x^(3))/3+a*x^(2)+b*x+a;
```

(%o17) $solaprox(x) := \frac{ax^8}{24}+\frac{8bx^7}{105}+\frac{ax^6}{6}+\frac{4bx^5}{15}+\frac{ax^4}{2}+\frac{2bx^3}{3}+ax^2+bx+a$

```
(%i18) solaprox(0)=1;
```

(%o18) $a=1$

```
(%i19) difsolaprox(x):=(a*x^(7))/3+(8*b*x^(6))/15+a*x^(5)
+(4*b*x^(4))/3+2*a*x^(3)+2*b*x^(2)+2*a*x+b;
```

(%o19) $difsolaprox(x) := \frac{ax^7}{3}+\frac{8bx^6}{15}+ax^5+\frac{4bx^4}{3}+2ax^3+2bx^2+2ax+b$

```
(%i20) difsolaprox(0)=1;
```

(%o20) b = 0
con estos valores iniciales podemos reescribir la recurrencia para obtener la solución del problema de valor inicial.

```
(%i21) bn[0]:1;an[1]:0; bn[n]:=2/(n)*bn[n-2];
```
(%o21) 1
(%o22) 0
(%o23) $\mathrm{bn}_n := \frac{2}{n}\mathrm{bn}_n[n-2]$

obtenemos así la solución del problema de valor inicial:
```
(%i24) solPVI(x,p):=sum(bn[n]*x^(n),n,0,p);
```
(%o24) $\mathrm{solPVI}(x,p) := \sum_{n=0}^{p} \mathrm{bn}_n x^n$
```
(%i25) solPVI(x,8);
```
(%o25) $\frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 + 1$

Comparemos esta solución aproximada con la solución dada por `ode2`*:*
```
(%i26) ode2('diff(y,x,2)-2*x*'diff(y,x)-2*y=0,y,x);
ic2(%,x=0,y=1,'diff(y,x)=0);
```
(%o26) $y = \frac{\sqrt{\pi}\,\%k1\,\%e^{x^2}\mathrm{erf}(x))}{2} + \%k2\,\%e^{x^2}$
(%o27) $y = \%e^{x^2}$
Gráficamente tenemos:

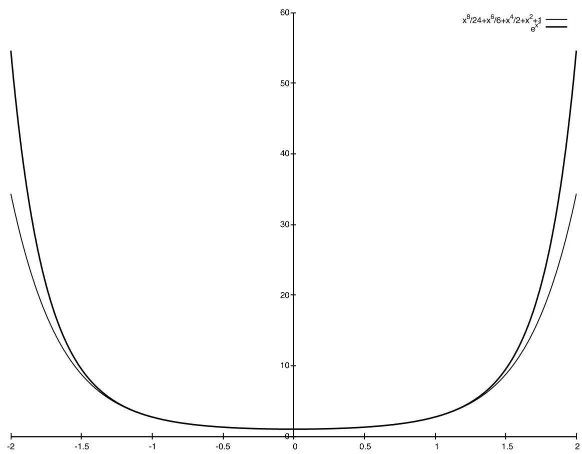


Figura 6.1: La solución aproximada $\frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 + 1$ y la solución e^{x^2} del problema de valor inicial.

La solución aproximada aquí calculada es en realidad la expansión de orden ocho de la serie de Maclaurin de la función e^{x^2}. Para ver esto usemos la función

```
taylor(expr, x, a, n)
```

que expande la expresión `expr` *en un desarrollo de Taylor respecto de la variable* `x` *alrededor del punto* `a`*, hasta el orden* `n`.

```
(%i28) taylor(e^(x^(2)),x,0,8);
```
(%i28) $\frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{2} + x^2 + 1$ ☑

Obs Note que en el ejemplo anterior, para cualquier condición inicial en cero, digamos $y(x) = x_0$, $y'(0) = y_0$, podemos definir la recurrencia directamente como `an[0];x_0; an[1]=y_0; an[n]=2/(n)*an[n-2]`, ya que los dos primeros términos de la recurrecia son precisamente las condiciones iniciales. Esto en general ocurre para cualquier recurrencia que se obtenga de un problema de valor inicial en el origen.

El teorema 6.8 nos da una fórmula para los coeficientes pares e impares de una ecuación diferencial de la forma $(1 - \alpha(x - x_0)^2)y'' + \beta(x - x_0)y' + \gamma y = 0$. podemos usar estas fórmulas para hallar soluciones aproximadas de ecuaciones de este tipo con Maxima.

Ejemplo 6.24. *Vamos a hallar los primeros términos de la solución en series de potencia alrededor de 0 de la ecuación diferencial*

$$(1 - 3x^2)y'' + \frac{1}{2}xy' - y = 0.$$

En este caso $\alpha = 3$, $\beta = 1/2$, $\gamma = -1$ y el polinomio $p(n)$ en el teorema 6.8 es $p(n) = 3n(n-1)+\frac{1}{2}n-1$. Escribamos esto en Maxima en forma de una recurrencia:

```
(%i1) p[n]:=3*n*(n-1)+1/2*n-1;
```
(%o1) $p[n] := 3n(n-1) + \frac{1}{2}n - 1$

Para definir los coeficientes pares de la solución como en el teorema 6.8, hagamos $a_0 = a$ y $a_1 = 0$ y el cambio de variable $n = 2m + 2$, de donde nos queda:

```
(%i2) apn[0]:a; apn[1]:0; apn[n]:=p[n-2]/(n*(n-3))*apn[n-2];
```
(%o2) a

(%o3) 0

(%o4) $apn_n := \frac{p_{n-2}}{n(n-3)} apn_{n-2}$

La solución de términos pares de orden p entonces viene dada por la siguiente función:

```
(%i5) solp(x,p):=sum(apn[n]*x^( n),n,0,p);
```

(%o5) $\text{solp}(x,p) := \sum_{n=0}^{p} \text{apn}_n x^n$

repetimos este procedimiento para obtener la solución de términos impares. En este caso haremos el cambio de variable $n = 2m + 3$:

```
(%i6) bpn[0]:0; bpn[1]:b; bpn[n]:=p[n-2]/(n*(n-1))*bpn[n-2];
```

(%o6) 0

(%o7) b

(%o8) $\text{bpn}_n := \frac{p_{n-2}}{n(n-1)} \text{bpn}_{n-2}$

La solución de términos impares de orden p entonces viene dada por la siguiente función,

```
(%i9) soli(x,p):=sum(bpn[n]*x^(n),n,0,p);
```

(%o9) $\text{soli}(x,p) := \sum_{n=0}^{p} \text{bpn}_n x^n$

Finalmente, la solución aproximada de orden p de la ecuación diferencial viene dada por

```
(%i10) sol(x,p):=solp(x,p)+soli(x,p);
```

(%o10) $\text{sol}(x,p) := \text{solp}(x,p) + \text{soli}(x,p)$

Calculemos la solución de orden 7 de la ecuación diferencial:

```
(%i11) sol(x,7);
```

(%o11) $-\frac{1517bx^7}{13440} + \frac{851ax^6}{840} - \frac{37bx^5}{480} + \frac{37ax^4}{60} - \frac{bx^3}{12} + \frac{ax^2}{2} + bx + a$ ☑

4.2. Soluciones truncadas de series de Frobenius

Queremos ahora hallar soluciones truncadas en puntos singulares regulares de ecuaciones diferenciales lineales de la forma

$$x^2(a_2x^2+a_1x+a_0)y''+x(b_2x^2+b_1x+b_0)y'+(c_2x^2+c_1x+c_0)y = 0, \quad a_0 \neq 0.$$

Para esto utilizaremos las recurrencias generadas por este tipo de ecuaciones diferenciales, para los diferentes casos de las raíces de la ecuación indicial (6.21).

Como en la página 263, sea r un número real y definamos:

$$\begin{aligned} p_0(r) &= a_0 r(r-1) + b_0 r + c_0 \\ p_1(r) &= a_1 r(r-1) + b_1 r + c_1 \\ p_2(r) &= a_2 r(r-1) + b_2 r + c_2. \end{aligned}$$

Para una raíz de la ecuación indicial $p_0(r) = 0$, lo cual implica que para todo entero positivo n, $p_0(r+n) \neq 0$, entonces definimos:

$$\begin{aligned} a_0(r) &= 1 \\ a_1(r) &= -\frac{p_1(r)}{p_0(r+1)} \\ &\vdots \\ a_n(r) &= -\frac{p_1(n+r-1)a_{n-1}(r) + p_2(n+r-2)a_{n-2}(r)}{p_0(r+n)}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \tag{6.33}$$

Caso I. Las soluciones son diferentes y su diferencia no es un número entero: $s_1 \neq s_2$ y $s_1 - s_2 \notin \mathbb{Z}$

Sean r_1 y r_2 raíces de la ecuación indicial $p_0(r) = 0$ con $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$. Supongamos $r_1 - r_2 \geq 0$, las dos soluciones en series de Frobenius linealmente independiente de la ecuación diferencial vienen dada por las fórmulas:

$$\begin{aligned} y_1(x) &= x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1) x^n, \\ y_2(x) &= x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2) x^n. \end{aligned}$$

En esta los coeficientes $a_n(r)$ se calculan mediante la recurrencia (6.33).

Ejemplo 6.25. *Hallemos los primeros siete términos de la solución en serie de Frobenius de la ecuación diferencial*

$$x^2(x^2 + 3x + 1)y'' + x(x^2 + x - 5/2)y' + (-x^2 + 2x + 3)y = 0.$$

Para los coeficientes a_i, b_i y c_i, $i = 0, 1, 2$:

$$a_2 = 1 \quad a_1 = 3 \quad a_0 = 1$$

$$b_2 = 1 \quad b_1 = 1 \quad b_0 = -5/2$$
$$c_2 = -1 \quad c_2 = 2 \quad c_0 = 3,$$

definamos los polinomios $p_i(r)$, $i = 0, 1, 2$.

```
(%i1) p0n[r]:=r*(r-1)-5/2*r+3;
```
(%o1) $\mathrm{p0n}_r := r(r-1) - \frac{5r}{2} + 3$
```
(%i2) p1n[r]:=3*r*(r-1)+r-2;
```
(%o2) $\mathrm{p1n}_r := 3r(r-1) + r - 2$
```
(%i3) p2n[r]:=r*(r-1)+r-1;
```
(%o3) $\mathrm{p2n}_r := r(r-1) + r - 1$

Veamos las raíces de la ecuación indicial:

```
(%i4) solve(p0n[r]=0,r);
```
(%o4) $[r = \frac{3}{2}, r = 2]$

para la raíz $r_1 = 2$ *definamos la siguiente recurrencia.*

```
(%i5) an[0]:1; an[1]:-p1n[2]/p0n[2+1];
an[r]:=-((p1n[r+2-1]*an[r-1]+p2n[r+2-2]*an[r-2])/p0n[2+r]);
```
(%o5) 1
(%o6) -4
(%o7) $\mathrm{an}_r := -\frac{\mathrm{p1n}_{r+2-1}\mathrm{an}_{r-1} + \mathrm{p2n}_{r+2-2}\mathrm{an}_{r-2}}{\mathrm{p0n}_{2+r}}$

Ahora definamos la primera solución truncada de orden p.

```
(%i8) sol1(x,p):=sum(an[r]*x^(r+2),r,0,p);
```
(%o8) $\mathrm{sol1}(x,p) := \sum_{r=0}^{p} \mathrm{an}_r x^{r+2}$

para la segunda solución definimos la recurrencia anterior en $r_2 = 3/2$

```
(%i9) bn[0]:1; bn[1]:-p1n[3/2]/p0n[3/2+1];
bn[r]:=-((p1n[r+3/2-1]*bn[r-1]+p2n[r+3/2-2]*bn[r-2])/p0n[3/2
+r]);
```
(%o9) 1
(%o10) $-\frac{7}{2}$
(%o11) $\mathrm{bn}_r := -\frac{\mathrm{p1n}_{r+\frac{3}{2}-1}\mathrm{bn}_{r-1} + \mathrm{p2n}_{r+\frac{3}{2}-2}\mathrm{bn}_{r-2})}{\mathrm{p0n}_{3/2+r}}$

definimos la segunda solución linealmente de orden p

```
(%i12) sol2(x,p):=sum(bn[r]*x^(r+3/2),r,0,p);
```

(%o12) $\mathrm{sol2}(x,p) := \sum_{r=0}^{p} bn_r x^{r+3/2}$

Las dos soluciones linealmente independientes de orden siete de la ecuación diferencial son

```
(%i13) sol1(x,7);
```

(%o13) $-\frac{75415594x^9}{15925}+\frac{15713011x^8}{10010}-\frac{196594x^7}{385}+\frac{1621x^6}{10}-\frac{5228x^5}{105}+\frac{73x^4}{5}-4x^3+x^2$

```
(%i14) sol2(x,7);
```

(%o14) $-\frac{9110134715593x^{17/2}}{1937295360}+\frac{16446302779x^{15/2}}{10644480}-\frac{120216401x^{13/2}}{241920}+\frac{417647x^{11/2}}{2688}$
$-\frac{2243x^{9/2}}{48}+\frac{319x^{7/2}}{24}-\frac{7x^{5/2}}{2}+x^{3/2}$ ☑

En el caso particular de una ecuación diferencial de la forma

$$x^2(a_1x+a_0)y''+x(b_1x+b_0)y'+(c_1x+c_0)y=0,$$

la recurrencia que se obtiene es más simple y es dada por

$$a_n(r)=(-1)^n\prod_{j=1}^{n}\frac{p_1(j+r-1)}{p_0(j+r)} \tag{6.34}$$

y las dos soluciones (en serie de Frobenius) linealmente independientes de la ecuación diferencial son

$$y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r_1)x^n, \quad y_2(x)=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(r_2)x^n.$$

Ejemplo 6.26. *Hallemos los primeros siete términos de las soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial*

$$x^2(x+2)y''-x(2x+3/2)y'+(x+3/2)y=0.$$

En este caso tenemos:

$$a_1=1,\ a_0=3,\ b_1=-2,\ b_0=-3/2,\ c_1=1,\ c_0=3/2.$$

Definamos los polinomios y la recurrencia en Maxima.

```
(%i1) p0n[r]:=3*r*(r-1)-3/2*r+3/2;
```

(%o1) $p0n_r := 3r(r-1)-\frac{3}{2}r+\frac{3}{2}$

```
(%i2) p1n[r]:=r*(r-1)-2*r+1;
```
(%o2) $p1n_r := r(r-1) - 2r + 1$

las raíces de la ecuación indicial son

```
(%i3) solve(p0n[r]=0,r);
```
(%o3) $[r = \frac{1}{2}, r = 1]$

Para la raíz $r_1 = 1$ definamos la siguiente recurrencia.

```
(%i4) an[0]:1; an[r]:=(-1)^(r)*product(p1n[j+1-1]/p0n[j+1], j,1,
r);
```
(%o4) 1

(%o5) $an_r := (-1)^r \prod_{j=1}^{r} \frac{p1n_{j+1-1}}{p0n_{j+1}}$

ahora definamos la primera solución truncada de orden p.

```
(%i6) sol1(x,p):=x*sum(an[r]*x^(r),r,0,p);
```
(%o6) $sol1(x, p) := x \sum_{r=0}^{p} an_r x^r$

Para la segunda solución definimos la recurrencia anterior en $r_2 = 1/2$

```
(%i7) bn[0]:1;bn[r]:=(-1)^(r)*product(p1n[j+1/2-1]/p0n[j+1/2], j,
1,r);
```
(%o7) 1

(%o8) $bn_r := (-1)^r \prod_{j=1}^{r} \frac{p1n_{j+\frac{1}{2}-1}}{p0n_{j+\frac{1}{2}}}$

Definimos la segunda solución linealmente de orden p:

```
(%i9) sol2(x,p):=x^(1/2)*sum(bn[r]*x^(r),r,0,p);
```
(%o9) $sol2(x, p) := x^{1/2} \sum_{r=0}^{p} bn_r x^r$

Las dos soluciones linealmente independientes de orden siete de la ecuación diferencial son

```
(%i10) sol1(x,7);
```
(%o10) $x \left(-\frac{4408x^7}{25389593775} + \frac{76x^6}{80601885} - \frac{4x^5}{688905} + \frac{2x^4}{45927} - \frac{4x^3}{8505} + \frac{2x^2}{135} + \frac{2x}{9} + 1\right)$

(%i11) sol2(x,7);

(%o11) $\sqrt{x}\left(\frac{34751x^7}{693305174016}-\frac{1829x^6}{6348948480}+\frac{341x^5}{176359680}-\frac{11x^4}{653184}+\frac{x^3}{3888}+\frac{5x^2}{216}+\frac{x}{6}+1\right)$ ☑

Para ecuaciones diferenciales de la forma

$$x^2(a_2x^2+a_0)y''+x(b_2x^2+b_0)y'+(c_2x^2+c_0)y=0,$$

tenemos que $p_1(r)=0$ y la recurrencia asociada a esta ecuación queda en la forma

$$\begin{aligned}a_0(r)=&1\\ a_1(r)=&0\\ &\vdots\\ a_n(r)=&-\frac{p_2(n+r-2)}{p_0(n+r)}a_{n-2}(r),\quad n\geq 2.\end{aligned}$$

Como $a_n(r)=0$ si n es impar, entonces las soluciones linealmente independientes, en serie de Frobenius, de esta ecuación diferencial son

$$y_1(x)=x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}(r_1)x^{2n},\quad y_2(x)=x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n}(r_2)x^{2n},$$

donde

$$\begin{aligned}a_0(r)=&1\\ a_{2n}(r)=&-\frac{p_2(2n+r-2)}{p_0(2n+r)}a_{2n-2}(r),\quad n\geq 1\\ =&(-1)^n\prod_{j=1}^{n}\frac{p_2(2j+r-2)}{p_0(2j+r)}.\end{aligned}\tag{6.35}$$

Ejemplo 6.27. *Hallemos los cuatro primeros términos de las soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial*

$$x^2(\sqrt{2}x^2+1/2)y''+x(x^2+\sqrt{2}/2)y'+(x-\sqrt{2}/2)y=0.$$

Definamos los polinomios y la recurrencia asociada en Maxima:

(%i1) p0n[r]:=1/2*r*(r-1)+sqrt(2)/2*r-sqrt(2)/2;

(%o1) $p0n_r := \frac{1}{2}r(r-1)+\frac{\sqrt{2}}{2}r-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(%i2) p2n[r]:=sqrt(2)*r*(r-1)+r+1;

(%o2) $p2n_r := \sqrt{2}r(r-1)+r+1$

Las raíces de la ecuación indicial son

```
(%i3) solve(p0n[r]=0,r);
```
(%o3) $[r=-\sqrt{2}, r=1]$

para la raíz $r_1 = 1$ *definamos la siguiente recurrencia:*

```
(%i4) an[0]:1; an[r]:=(-1)^(r)*product(p2n[2*j+1-2]/p0n[2*j+1],j,
1,r);
```
(%o4) 1

(%o5) $an_r := (-1)^r \prod_{j=1}^{r} \frac{p2n_{2j+1-2}}{p0n_{2j+1}}$

la primera solución truncada de orden p es

```
(%i6) sol1(x,p):=x*sum(an[r]*x^(2*r),r,0,p);
```
(%o6) $sol1(x,p) := x \sum_{r=0}^{p} an_r x^{2r}$

Como antes, para la segunda solución definimos la recurrencia anterior en el valor $r_2 = 1/2$*:*

```
(%i7) bn[0]:1;bn[r]:=(-1)^(r)*product(p2n[2*j+sqrt(2)-2]/p0n[2*j
-sqrt(2)], j,1,r);
```
(%o7) 1

(%o8) $bn_r := (-1)^r \prod_{j=1}^{r} \frac{p2n_{2j-\sqrt{2}-2}}{p0n_{2j-\sqrt{2}}}$

Definimos la segunda solución linealmente de orden p

```
(%i9) sol2(x,p):=x^(-sqrt(2))*sum(bn[r]*x^(2*r),r,0,p);
```
(%o9) $sol2(x,p) := x^{-\sqrt{2}} \sum_{r=0}^{p} bn_r x^{2r}$

De modo que las dos soluciones linealmente independientes de orden cuatro de la ecuación diferencial son

```
(%i10) sol1(x,4);
```
(%o10) $\frac{(19013947\cdot 2^{5/2}+107191292)x^9+(-11712889\cdot 2^{5/2}-66475264)x^7+(17304939\cdot 2^{3/2}+48782460)x^5}{39141507\cdot 2^{3/2}+110915925}$
$+\frac{(-17704731\cdot 2^{3/2}-50337642)x^3+(39141507\cdot 2^{3/2}+110915925)x}{39141507\cdot 2^{3/2}+110915925}$

```
(%i11) sol2(x,4);
```

(%o11) $-\frac{(1917769\cdot 2^{3/2}-5424587)x^8+(68565\cdot 2^{11/2}-3102652)x^6+(24087\cdot 2^{13/2}-2180388)x^4}{(178807\cdot 2^{9/2}-4046008)x^{\sqrt{2}}}$
$+\frac{(117467\cdot 2^{9/2}-2657256)x^2-178807\cdot 2^{9/2}+4046008}{(178807\cdot 2^{9/2}-4046008)x^{\sqrt{2}}}$ ☑

Caso II. Las soluciones son diferentes y su diferencia es un número entero: $s_1 \neq s_2$ y $s_1 - s_2 \in \mathbb{Z}$

Consideremos el caso particular de la ecuación diferencial:

$$x^2(a_1x + a_0)y'' + x(b_1x + b_0)y' + (c_2x + c_0)y = 0, \qquad a_0 \neq 0.$$

Definimos los polinomios p_0 y p_1 dados en (6.23):

$$\begin{aligned} p_0(r) =& a_0r(r-1) + b_0r + c_0, \\ p_1(r) =& a_1r(r-1) + b_1r + c_1, \\ p_2(r) =& 0 \end{aligned}$$

y la recurrencia

$$\begin{aligned} a_0(r) =& 1, \\ a_n(r) =& -\frac{p_1(n+r-1)}{p_0(n+r)}a_{n-1}(r). \end{aligned}$$

Si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación indicial $p_0 = (r)$ y son tales que $r_1 = r_2 + N$, donde N es un número entero positivo, entonces:

$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)x^n$$

es una solución en serie de Frobenius de esta ecuación y la segunda solución (linealmente independiente con y_1) se obtiene mediante la recurrencia

$$\begin{aligned} a_0(r_2) =& 1, \\ a_n(r_2) =& -\frac{p_1(n+r_2-1)}{p_0(n+r_2)}a_{n-1}(r_2), \quad 1 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

y sea

$$\alpha_N = -\frac{p_1(r_1-1)}{Na_0}a_{N-1}(r_2).$$

La segunda solución es

$$y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{N-1} a_n(r_2)x^n + \alpha_N\left(y_1(x)\ln(x) + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n\right)$$

donde $a_n'(r_1) = \frac{da_n(r)}{dr}\,|_{r=r_1}$.

Usemos esto para obtener en Maxima soluciones de orden finito para este tipo de ecuaciones.

Ejemplo 6.28. *Hallemos los cuatro primeros términos de las soluciones de la ecuación diferencial*

$$x^2(2x+1)y'' + x(3x+2)y' + (x-2)y = 0.$$

Definamos los polinomios, sus derivadas y las recurrencias asociadas a estos polinomios y sus derivadas en Maxima.

(%i1) `p0n[r]:=r*(r-1)+2*r-2;`
(%o1) $p0n_r := r(r-1) + 2r - 2$
(%i2) `diff(p0n[r],r);`
(%o2) $2r + 1$
(%i3) `dp0n[r]:=2*r+1;`
(%o3) $dp0n_r := 2r + 1$
(%i4) `p1n[r]:=2*r*(r-1)+3*r+1;`
(%o4) $p1n_r := 2r(r-1) + 3r + 1$
(%i5) `diff(p1n[r],r);`
(%o5) $2r + 2(r-1) + 3$
(%i6) `dp1n[r]:=2*r+2*(r-1)+3;`
(%o6) $dp1n_r := 2r + 2(r-1) + 3$

Las raíces de la ecuación indicial son

(%i7) `solve(p0n[r]=0,r);`
(%o7) $[r = 1, r = -2]$

definamos la recurrencia de la primera solución.

(%i8) `an[0]:1; an[r]:=-(p1n[r+1-1]/p0n[1+r])*an[r-1];`
(%o8) 1
(%o9) $an_r := -\left(\frac{p1n_{r+1-1}}{p0n_{1+r}}\right) an_{r-1}$

la primera solución truncada de orden p es

(%i10) `sol1(x,p):=x^(1)*sum(an[r]*x^(r),r,0,p);`
(%o10) $sol1(x,p) := x^1 \sum_{r=0}^{p} an_r x^r$

Hallemos el valor de α_N, ($N = 3$) para esto definamos la siguiente recurrencia:

```
(%i11) bn[0]:1; bn[r]:=-(p1n[r-2-1]/p0n[-2+r])*bn[r-1];
```

(%o11) 1

(%o12) $\mathrm{bn}_r := -\left(\frac{\mathrm{p1n}_{r-2-1}}{\mathrm{p0n}_{-2+r}}\right)\mathrm{bn}_{r-1}$

```
(%i13) alphaN:-(p1n[1-1]/(3*1))*bn[2];
```

(%o13) $-\frac{7}{6}$

Para la segunda solución definimos la recurrencia usando la derivada de los polinomios y como esta solución es logarítmica suponemos $x > 0$.

```
(%i14) cn[0]:1; cn[r]:=-(dp1n[r+1-1]/dp0n[1+r])*cn[r-1];
```

(%o14) 1

(%o15) $\mathrm{cn}_r := -\left(\frac{\mathrm{dp1n}_{r+1-1}}{\mathrm{dp0n}_{1+r}}\right)\mathrm{cn}_{r-1}$

```
(%i16) assume(x>0);
```

(%o16) $[x > 0]$

Definimos la segunda solución linealmente de orden p

```
(%i17) sol2(x,p):=x^(-2)*sum(bn[r]*x^(r),r,0,2)+alphaN*(log(x)*
sol1(x,p)+x^(1)*sum(cn[r]*x^(r),r,0,p));
```

(%o17) $\mathrm{sol2}(x,p) = x^{-2}\sum_{r=0}^{2}\mathrm{bn}_r x^r + \mathrm{alphaN}\left(\log(x)\mathrm{sol1}(x,p) + x^1\sum_{r=1}^{p}\mathrm{cn}_r x^r\right)$

Las dos soluciones linealmente independientes de orden siete de la ecuación diferencial son

```
(%i18) sol1(x,4);
```

(%o18) $x\left(\frac{4477x^4}{2520} - \frac{121x^3}{90} + \frac{11x^2}{10} - x + 1\right)$

```
(%i19) sol2(x,4);
```

(%o19) $\frac{\frac{7x^2}{2}+\frac{7x}{2}+1}{x^2} - \frac{7\left(x\left(\frac{4477x^4}{2520}-\frac{121x^3}{90}+\frac{11x^2}{10}-x+1\right)\log(x)+x\left(\frac{221x^4}{77}-\frac{13x^3}{7}+\frac{9x^2}{7}-x\right)\right)}{6}$ ☑

Ahora usemos Maxima para hallar soluciones de orden finito para ecuaciones diferenciales de la forma

$$x^2(a_2x^2 + a_0)y'' + x(b_2x^2 + b_0)y' + (c_2x^2 + c_0)y = 0.$$

En este caso los polinomios (6.23) son

$$\begin{aligned} p_0(r) &= a_0x(x-1) + b_0r + c_0, \\ p_1(r) &= 0, \\ p_2(r) &= a_2r(r-1) + b_2r + c_2. \end{aligned}$$

Definimos la recurrencia como en (6.33), pero dado que $p_1(r) = 0$, entonces $a_n(r) = 0$ para n impar por lo que la recurrencia queda definida, para cada r tal que $p_0(2n+r) \neq 0$ para todo n entero positivo, de la forma

$$\begin{aligned} a_0(r) =&1, \\ a_{2n}(r) =&-\frac{p_2(2n+r-2)}{p_0(2n+r)}a_{2n-2}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación indicial $p_0(r)$ y son tales que $r_1 = r_2 + 2N$, donde N es un entero positivo, una primera solución de la ecuación diferencial es dada por la fórmula

$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_{2n}(r_1)x^{2n}.$$

Definiendo

$$\begin{aligned} a_0(r_2) =&1 \\ a_{2n}(r_2) =&-\frac{p_2(2n+r_2-2)}{p_0(2n+r_2)}a_{2n-2}(r_2), \qquad 1 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

y

$$\alpha_N = -\frac{p_2(r_1-2)}{2Na_0}a_{2N-2}(r_2);$$

una segunda solución, la cual es linealmente independiente con y_1, es dada por

$$y_2(x) = x^{r_2}\sum_{n=0}^{N-1} a_{2n}(r_2)x^{2n} + \alpha_N\left(y_1(x)\ln(x) + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a'_{2n}(r_1)x^{2n}\right),$$

donde $a'_n(r_1) = \frac{da_n(r)}{dr}\mid_{r=r_1}$.

Ejemplo 6.29. *Hallemos los cuatro primeros términos de las soluciones de la ecuación diferencial*

$$x^2(x^2+1)y'' + x(x^2+1)y' - (2x^2+9)y = 0.$$

Definamos los polinomios, sus derivadas y las recurrencias asociadas a estos polinomios y sus derivadas en Maxima:

```
(%i1) p0n[r]:=r*(r-1)+r-9;
(%o1) p0n_r := r(r − 1) + r − 9
(%i2) diff(p0n[r],r);
```

(%o2) $2r$
(%i3) `dp0n[r]:=2*r;`
(%o3) $\mathrm{dp0n}_r := 2r$
(%i4) `p2n[r]:=r*(r-1)+r-2;`
(%o4) $\mathrm{p2n}_r := r(r-1)+r-2$
(%i5) `diff(p2n[r],r);`
(%o5) $2r$
(%i6) `dp2n[r]:=2*r;`
(%o6) $\mathrm{dp2n}_r := 2r$

Las raíces de la ecuación indicial son
(%i7) `solve(p0n[r]=0,r);`
(%o7) $[r=-3, r=3]$

Definamos la recurrencia de la primera solución:
(%i8) `an[0]:1; an[r]:=-(p2n[2*r+3-2]/p0n[3+2*r])*an[r-1];`
(%o8) 1
(%o9) $\mathrm{an}_r := -\left(\frac{\mathrm{p2n}_{2r+3-2}}{\mathrm{p0n}_{3+2r}}\right)\mathrm{an}_{r-1}$

La primera solución truncada de orden p es
(%i10) `sol1(x,p):=x^(3)*sum(an[r]*x^(2*r),r,0,p);`
(%o10) $\mathrm{sol1}(x,p) := x^3\sum_{r=0}^{p}\mathrm{an}_r x^{2r}$

Hallemos el valor de α_N, ($N=3$); para esto definamos la siguiente recurrencia:
(%i11) `bn[0]:1; bn[r]:=-(p2n[2*r-3-2]/p0n[-3+2*r])*bn[r-1];`
(%o11) 1
(%o12) $\mathrm{bn}_r := -\left(\frac{\mathrm{p2n}_{2r-3-2}}{\mathrm{p0n}_{-3+2r}}\right)\mathrm{bn}_{r-1}$
(%i13) `alphaN:-(p2n[3-2]/(3*2*1))*bn[2];`
(%o13) $-\frac{7}{384}$

Para la segunda solución definimos la recurrencia usando la derivada de los polinomios y como esta solución es logarítmica suponemos $x>0$.
(%i14) `cn[0]:1; cn[r]:=-(dp2n[2*r+3-2]/dp0n[3+2*r])*cn[r-1];`
(%o14) 1
(%o15) $\mathrm{cn}_r := -\left(\frac{\mathrm{dp2n}_{2r+3-2}}{\mathrm{dp0n}_{3+2r}}\right)\mathrm{cn}_{r-1}$
(%i16) `assume(x>0);`
(%o16) $[x>0]$

definimos la segunda solución linealmente de orden p:

```
(%i17) sol2(x,p):=x^(-3)*sum(bn[r]*x^(2*r),r,0,2)+alphaN*(log(x)*
sol1(x,p)+x^(3)*sum(cn[r]*x^(2*r),r,1,p));
```

(%o17) $\mathtt{sol2}(x,p) := x^{-3}\sum_{r=0}^{2} bn_r x^{2r} + alphaN\left(\log(x)\mathtt{sol1}(x,p) + x^3\sum_{r=1}^{p} cn_r x^{2r}\right)$

Las dos soluciones linealmente independientes de orden siete de la ecuación diferencial son

```
(%i18) sol1(x,4);
```

(%o18) $x\left(\frac{85399x^8}{737280} - \frac{7567x^6}{46080} + \frac{161x^4}{640} - \frac{7x^2}{16} + 1\right)$

```
(%i19) sol2(x,4);
```

(%o19) $\frac{-\frac{7x^4}{64}+\frac{7x^2}{8}+1}{x^3} - \frac{7\left(x^3\left(\frac{85399x^8}{737280}-\frac{7567x^6}{46080}+\frac{161x^4}{640}-\frac{7x^2}{16}+1\right)\log(x)+x^3\left(\frac{3x^8}{11}-\frac{x^6}{3}+\frac{3x^4}{7}-\frac{3x^2}{5}\right)\right)}{384}$ ☑

Caso III. Las soluciones son iguales: $s_1 = s_2$

Queremos ahora usar Maxima para hallar soluciones de orden finito de ecuaciones diferenciales:

$$x^2(a_2x^2+a_1x+a_0)y''+x(b_2x^2+b_1x+b_0)y'+(c_2x^2+c_1x+c_0)y = 0, \quad a_0 \neq 0$$

en el caso en que $p_0(r) = a_0r(r-1)+b_0r+c_0 = 0$ tiene una raíz repetida r_1. Sabemos que en este caso la ecuación diferencial tiene una solución de la forma

$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

y la otra solución viene dada por una solución logarítmica. Como en los casos anteriores usamos la recurrencia (6.33) para obtener los coeficientes de las dos soluciones linealmente independientes:

$$\begin{aligned} y_1(x) =& x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r)x^n \\ y_2(x) =& y_1(x)\ln(x) + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n, \quad x > 0, \end{aligned}$$

donde $a_n'(r_1) = \frac{da_n(r)}{dr}\,|_{r=r_1}$.

Ejemplo 6.30. *Hallemos los siete primeros términos de las soluciones de la ecuación diferencial*

$$x^2(x^2+3x+1)y''+x(x^2+x-3)y''+(x^2+1/2x+4)y=0.$$

Definamos los polinomios, sus derivadas y las recurrencias asociadas a estos polinomios y sus derivadas en Maxima.

(%i1) `p0n[r]:=r*(r-1)-3*r+4;`
(%o1) $\mathrm{p0n}_r := r(r-1)-3r+4$
(%i2) `diff(p0n[r],r);`
(%o2) $2r-4$
(%i3) `dp0n[r]:=2*r-4;`
(%o3) $\mathrm{dp0n}_r := 2r-4$
(%i4) `p1n[r]:=3*r*(r-1)+r+1/2;`
(%o4) $\mathrm{p1n}_r := 3r(r-1)+r+\frac{1}{2}$
(%i5) `diff(p1n[r],r);`
(%o5) $3r+3(r-1)+1$
(%i6) `dp1n[r]:=3*r+3*(r-1)+1;`
(%o6) $\mathrm{dp1n}_r := 3r+3(r-1)+1$
(%i7) `p2n[r]:=r*(r-1)+r+1;`
(%o7) $\mathrm{p2n}_r := r(r-1)+r+1$
(%i8) `diff(p2n[r],r);`
(%o8) $2r$
(%i9) `dp2n[r]:=2*r;`
(%o9) $\mathrm{dp2n}_r := 2r$

Las raíces de la ecuación indicial son

(%i10) `solve(p0n[r]=0,r);`
(%o10) $[r=2]$

Definamos la recurrencia de la primera solución.

(%i11) `an[0]:1; an[1]:-p1n[2]/p0n[2+1]; an[r]:=-((p1n[r+2-1]* an[r-1]+p2n[r+2-2]*an[r-2])/p0n[2+r]);`
(%o11) 1
(%o12) $-\frac{17}{2}$
(%o13) $\mathrm{an}_r := -\frac{\mathrm{p1n}_{r+2-1}\,\mathrm{an}_{r-1}+\mathrm{p2n}_{r+2-2}\,\mathrm{an}_{r-2}}{\mathrm{p0n}_{2+r}}$

La primera solución truncada de orden p es

```
(%i14) sol1(x,p):=x^(2)*sum(an[r]*x^(r),r,0,p)
```

(%o14) $\mathrm{sol1}(x, p) := x^2 \sum_{r=0}^{p} an_r x^r$

para la segunda solución definimos la recurrencia usando la derivada de los polinomios y, como esta solución es logarítmica, suponemos $x > 0$.

```
(%i15) bn[0]:1; bn[1]:-dp1n[2]/dp0n[2+1]; bn[r]:=-((dp1n[r+2-1]*
bn[r-1]+dp2n[r+2-2]*bn[r-2])/dp0n[2+r]);
```

(%o15) 1

(%o16) -5

(%o17) $bn_r := -\frac{dp1n_{r+2-1} bn_{r-1} + dp2n_{r+2-2} bn_{r-2}}{dp0n_{2+r}}$

```
(%i18) assume(x>0);
```

(%o18) $[x > 0]$

Definimos la segunda solución linealmente de orden p:

```
(%i19) sol2(x,p):=sol1(x,p)*log(x)+x^(2)*sum(bn[r]*x^(r),r,0,p);
```

(%o19) $\mathrm{sol2}(x, p) := \mathrm{sol1}(x, p) \log(x) + x^2 \sum_{r=0}^{p} bn_r x^r$

las dos soluciones linealmente independientes de orden siete de la ecuación diferencial son

```
(%i20) sol1(x,7);
```

(%o20) $x^2 \left(-\frac{96687297641423x^7}{3251404800} + \frac{298622733391x^6}{33177600} - \frac{404005891x^5}{153600} + \frac{6752969x^4}{9216} - \frac{54871x^3}{288} + \frac{711x^2}{16} - \frac{17x}{2} + 1\right)$

```
(%i21) sol2(x,7);
```

(%o21) $\mathrm{sol1}(x, 4) \log(x) + x^2 (-\frac{1792646x^7}{315} + \frac{17342x^6}{9} - \frac{9604x^5}{15} + \frac{622x^4}{3} - \frac{194x^3}{3} + 19x^2 - 5x + 1)$ ☑

Obs En los casos particulares de ecuaciones diferenciales dadas por

$$x^2(a_1x + a_0)y'' + x(b_1x + b_0)y' + (c_1x + c_0)y = 0$$

y

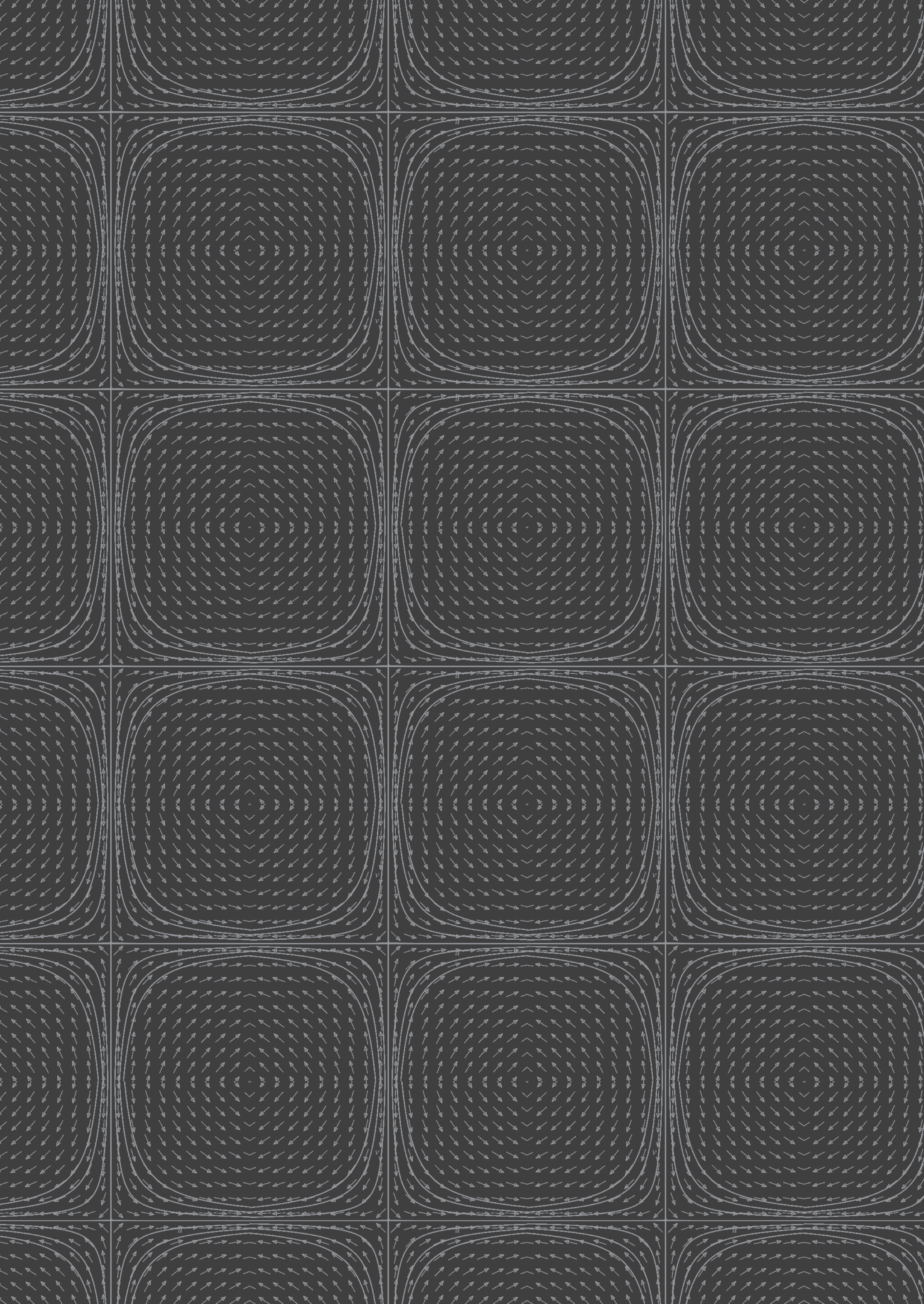
$$x^2(a_2x^2 + a_0)y'' + x(b_2x^2 + b_0)y' + (c_2x^2 + c_0)y = 0,$$

seguimos el mismo procedimiento, calculando las derivadas de los términos $a_n(r)$ en (6.34) y $a_{2n}(r)$ en (6.35) respectivamente.

Capítulo

siete

Sistemas de ecuaciones diferenciales lineales



Algunas aplicaciones requieren de más de una ecuación diferencial para ser modeladas de manera correcta, por lo que se hace necesario usar más de una ecuación diferencial para ello. Es por esto que en este capítulo nos dedicaremos al estudio de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Ejemplos de estos son los llamados *sistemas acoplados*, como los sistemas de resortes-masa y los circuitos eléctricos, entre otros.

1. Definiciones y el método de sustitución

Definición 7.1. Un sistema de ecuaciones diferenciales de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1, \ldots, y_n) \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1, \ldots, y_n) \\ &\vdots \\ \frac{dy_n}{dt} &= f_n(t, y_1, \ldots, y_n), \end{aligned} \tag{7.1}$$

donde cada f_i está definida en un conjunto común J, es llamado sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Definición 7.2. Una solución del sistema (7.1) es un conjunto de funciones $\{y_1, \ldots, y_n\}$ definidas en un intervalo $I \subset J$ que hacen de cada ecuación del sistema una identidad.

Un problema de valor inicial consiste de un sistema de ecuaciones diferenciales junto con unas ciertas condiciones sobre cada una de las funciones $y_i(t)$, $i = 1, \ldots, n$ en un valor dado t_0. Esto es:

$$y_1(t_0) = y_1^0, \ldots, y_n(t_0) = y_n^0. \tag{7.2}$$

Antes de comenzar a estudiar los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales, veamos el teorema de existencia y unicidad de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Su demostración aparece, por ejemplo, en [11].

Teorema 7.1 (Existencia y unicidad). *Si las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ y sus derivadas parciales $\partial f_1/\partial y_1, \ldots, \partial f_1/\partial y_n, \ldots, \partial f_n/\partial y_1, \ldots, \partial f_n/\partial y_n$ son continuas en una región R del espacio $(ty_1 \cdots y_n)$ que contiene al punto $(t_0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$, entonces existe un intervalo $|t - t_0| < h$ en el cual existe una única solución $y_1 = \psi(t), \ldots y_n = \psi(t)$ del sistema de ecuaciones* (7.1) *junto con las condiciones iniciales* (7.2)*.*

De forma similar se puede definir un sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior. Sin embargo, estos se pueden reducir a sistemas de primer orden agregando variables dependientes de t desconocidas. Por ejemplo, consideremos el sistema

$$\begin{aligned} x''' &= f_1(t, x, x', x'') \\ y'' &= f_2(t, y, y'). \end{aligned}$$

Definiendo las nuevas variable de la siguiente forma

$$x = x_1, \quad x' = x_2, \quad x'' = x_3, \quad y = y_1, \quad y_1' = y_2,$$

reescribimos el sistema como sigue:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ x_3' &= f_1(t, x_1, x_2, x_3) \\ y_1' &= y_2 \\ y_2' &= f_2(t, y_1, y_2). \end{aligned}$$

Incluso, podemos reescribir ecuaciones diferenciales de orden superior como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Ejemplo 7.1. *Reescribir la ecuación diferencial*

$$y^{(4)} + 3y^{(3)} - 2y'' + y' - 5y = e^t$$

como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Solución. Definamos las nuevas variables:

$$y = y_1, \quad y' = y_2, \quad y'' = y_3, \quad y^{(3)} = y_4.$$

De esta manera reescribimos la ecuación:

$$y_4' + 3y_4 - 2y_3 + y_2 - 5y_1 = e^t.$$

Por lo tanto una función y satisface la ecuación diferencial si $\{y, y_2, y_3, y_4\}$ satisface el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= e^t - 3y_4 + 2y_3 - y_2 + 5y_1. \end{aligned}$$

☑

Cuando las funciones $f_i(t, y_1, \ldots, y_n)$, $i = 1, \ldots, n$ son lineales, el sistema es llamado sistema de n ecuaciones diferenciales lineales de primer orden.

Definición 7.3. Un sistema de n ecuaciones es llamado *lineal de primer orden* si es de la forma

$$\begin{aligned} y_1' &= f_{11}(t)y_1 + f_{12}(t)y_2 + \cdots + f_{1n}(t)y_n + q_1(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= f_{n1}(t)y_1 + f_{n2}(t)y_2 + \cdots + f_{nn}(t)y_n + q_n(t). \end{aligned}$$

Podemos escribir este sistema en notación matricial de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{n1}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix},$$

o así

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + Q(t),$$

donde

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad A(t) = \begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{n1}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(t) & f_{n2}(t) & \cdots & f_{nn}(t) \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad Q(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{pmatrix}.$$

La función matriz-valuada $A(t)$ es llamada la matriz de coeficientes del sistema. Diremos que la función matriz-valuada A y la función vector-valuada Q son continuas, si sus entradas son funciones continuas. Si $Q \equiv \mathbf{0}$ el sistema se llama homogéneo, en otro caso es llamado no homogéneo.

Con esta notación, un problema de valor inicial consiste de un sistema de ecuaciones diferenciales junto a un vector constante $\mathbf{k} = (k_1, \ldots, k_n)^T$ de condiciones iniciales en algún punto inicial t_0. Escribimos el problema de valor inicial como

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + Q(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{k}.$$

Las condiciones para la existencia de soluciones de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales son más simples que las dadas en el caso general (teorema 7.1). En [16] se puede ver una demostración de este resultado.

Teorema 7.2 (Existencia y unicidad para sistemas lineales). *Supongamos que la función matriz-valuada A y la función vector-valuada Q son continuas en un intervalo (a, b) y sea $t_0 \in (a, b)$ y $\mathbf{k}$ un vector constante. Entonces el problema de valor inicial*

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y} + Q(t), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{k}$$

tiene una única solución en (a, b).

Obs Similar a lo que ocurre con las ecuaciones diferenciales, en general no existe un método para hallar la solución de un sistema de ecuaciones diferenciales en término de funciones elementales. Sin embargo, podemos usar las técnicas de resolución para ecuaciones diferenciales dadas en los capítulos anteriores para hallar las soluciones de estos sistemas.

Ejemplo 7.2. *Verificar que la función*

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{6t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

es una solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= 4y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

para cualquier valor de c_1 y c_2.

Solución. Reescribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

la función y y su derivada tienen la forma vectorial

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 e^{6t} + c_2 e^{-2t} \\ c_1 e^{6t} - c_2 e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}'(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6c_1 e^{6t} - 2c_2 e^{-2t} \\ 6c_1 e^{6t} + 2c_2 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Luego,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 e^{6t} + c_2 e^{-2t} \\ c_1 e^{6t} - c_2 e^{-2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6c_1 e^{6t} - 2c_2 e^{-2t} \\ 6c_1 e^{6t} + 2c_2 e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Es decir, $\mathbf{y}$ es solución del sistema de ecuaciones diferenciales. ☑

Ejemplo 7.3. *Resolver el sistema de ecuaciones de primer orden:*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2e^{2t} \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{x^2 - y}{t}, \quad t \neq 0. \end{aligned}$$

Solución. Resolvamos la ecuación $x' = 2e^{2t}$, la cual es de variables separables: tenemos que $x(t) = e^{2t} + c_1$. Sustituimos esta solución en la segunda ecuación y tenemos la ecuación lineal

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y}{t} = \frac{e^{4t} + 2c_1 e^{2t} + c_1^2}{t},$$

cuya solución es

$$y(t) = \frac{\frac{1}{4}e^{4t} + c_1 e^{2t} + c_1^2 t + c_2}{t}, \quad t \neq 0.$$

Así la solución del sistema es el par $\{x(t), y(t)\}$. ☑

Por otro lado, usando el operador diferencial lineal de orden n, L (p. 141) definimos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

Definición 7.4. El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} L_{11}y_1 + L_{12}y_2 + \cdots + L_{1n}y_n &= f_1(t) \\ L_{21}y_1 + L_{22}y_2 + \cdots + L_{2n}y_n &= f_2(t) \\ &\vdots \\ L_{n1}y_1 + L_{n2}y_2 + \cdots + L_{nn}y_n &= f_n(t), \end{aligned}$$

donde L_{ij} son operadores diferenciales lineales, es llamado un sistema de n ecuaciones diferenciales lineales.

Definición 7.5. Una solución del sistema de n ecuaciones diferenciales lineales es un conjunto de funciones $\{y_1, \ldots, y_n\}$, cada una definida en un intervalo común I, que satisfacen todas las ecuaciones del sistema. La solución se dice general si este conjunto contiene además un número de constantes arbitrarias.

El número preciso de constantes arbitrarias en el conjunto fundamental de soluciones de la definición anterior viene dado en el siguiente resultado que aparece demostrado en [16].

Proposición 7.3. *El número de constantes arbitrarias en la solución general del sistema de n ecuaciones diferenciales lineales es igual al orden del polinomio dado por el determinante*

$$\begin{vmatrix} L_{11} & \cdots & L_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{1n} & \ldots & L_{nn} \end{vmatrix},$$

siempre que este determinante sea diferente de cero. En este caso el sistema es llamado no degenerado, *en caso contrario se llama* degenerado.

Obs De forma análoga al caso de ecuaciones algebraicas, un sistema de ecuaciones diferenciales degenerado puede no tener solución o tener infinitas.

Usar el operador diferencial nos permite resolver sistemas de ecuaciones diferenciales mediante técnicas algebraicas como ocurre con los sistemas de ecuaciones lineales.

Ejemplo 7.4. *Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales*

$$\begin{aligned} 4\frac{dy_1}{dt} + y_1 + \frac{dy_2}{dt} - 2y_2 &= 1 \\ \frac{dy_1}{dt} + \frac{dy_2}{dt} &= t. \end{aligned}$$

Solución. Primero escribimos el sistema usando el operador diferencial $D = \frac{d}{dt}$

$$\begin{aligned} 4Dy_1 + y_1 + Dy_2 - 2y_2 &= 1 \\ Dy_1 + Dy_2 &= t, \end{aligned}$$

equivalentemente,

$$\begin{aligned} (4D+1)y_1 + (D-2)y_2 &= 1 \\ Dy_1 + Dy_2 &= t. \end{aligned}$$

Este sistema es equivalente al siguiente, en el cual aplicamos D a la primera ecuación y $-(D-2)$ a la segunda:

$$\begin{aligned} (4D^2 + D)y_1 + (D^2 - 2D)y_2 &= D1 \\ -(D^2 - 2D)y_1 - (D^2 - 2D)y_2 &= -(D-2)t; \end{aligned}$$

sumando la primera ecuación a la segunda obtenemos la siguiente ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$3y_1'' + 3y_1' = 2t - 1.$$

Esta ecuación tiene por solución $y_1(t) = \frac{1}{3}t^2 - c_1e^{-t} - t + c_2$. Ahora sustituimos y_1' en la segunda ecuación del sistema:

$$y_2' = \frac{1}{3}t - c_1e^{-t} + 1.$$

Obtenemos la segunda solución $y_2(t) = \frac{1}{6}t^2 + c_1e^{-t} + t + c_3$. Para hallar la solución general usamos la proposición anterior:

$$\begin{vmatrix} 4D+1 & D-2 \\ D & D \end{vmatrix} = 3D^2 + 3D \neq 0,$$

el cual es un polinomio de orden 2; es decir, la solución general contiene dos constantes arbitrarias, pero obtuvimos tres constantes c_1, c_2 y c_3. Veamos la relación entre ellas. Como la función y_2 se obtuvo de sustituir y_1 en la segunda ecuación, evaluamos ambas funciones en la primera ecuación, de donde obtenemos, luego de simplificar,

$$c_2 - 2c_3 - 3 = 1, \qquad c_3 = \frac{c_2 - 4}{2}.$$

De esta manera tenemos que la segunda solución del sistema es

$$y_2(t) = \frac{1}{6}t^2 + c_1 e^{-t} + t + \frac{c_2 - 4}{2}$$

y la solución general del sistema es el conjunto $\{y_1, y_2\}$. ☑

Podemos resolver problemas de valor inicial para sistemas de ecuaciones diferenciales de orden n mediante la trasformada de Laplace, aplicando esta transformada en cada ecuación y resolviendo el sistema mediante las técnica de resolución de sistemas de ecuaciones algebraicos.

Ejemplo 7.5. *Usando la trasformada de Laplace, resolver el problema de valor inicial:*

$$\begin{aligned}
\frac{d^2y_2}{dt^2} - 4y_2 + \frac{dy_1}{dt} &= 0, \qquad y_2(0) = 0,\ y_2'(0) = 1\\
2y_1 - 4\frac{dy_2}{dt} + \frac{d^2y_1}{dt^2} &= 0, \qquad y_1(0) = -1,\ y_1'(0) = 2.
\end{aligned}$$

Solución. Aplicamos la transformada de Laplace a cada ecuación, usamos sus propiedades de linealidad y el teorema 5.7. El sistema queda equivalentemente:

$$\begin{aligned}
&s^2\mathfrak{L}(y_2) - sy_2(0) - y_2'(0) - 4\mathfrak{L}(y_2) + s\mathfrak{L}(y_1) - y_1(0) = 0\\
&-4s\mathfrak{L}(y_2) + 4y_2(0) + s^2\mathfrak{L}(y_1) - sy_1(0) - y_1'(0) + 2\mathfrak{L}(y_1) = 0.
\end{aligned}$$

Simplificando, a partir de las condiciones iniciales obtenemos:

$$\begin{aligned}
&(s^2 - 4)\mathfrak{L}(y_2) + s\mathfrak{L}(y_1) = 0\\
&-4s\mathfrak{L}(y_2) + (s^2 + 2)\mathfrak{L}(y_1) = 2 - s.
\end{aligned} \tag{7.3}$$

Ahora multiplicamos la primera ecuación del sistema anterior por $4s$ y la segunda por $s^2 - 4$ y sumamos, de donde obtenemos la siguiente ecuación:

$$(s^4 + 2s^2 - 8)\mathfrak{L}(y_1) = -s^3 + 2s^2 + 4s - 8,$$

la cual reescribimos de la siguiente manera:

$$\mathfrak{L}(y_1) = \frac{-s^3 + 2s^2 + 4s - 8}{(s^2 + 4)(s^2 - 2)} = \frac{1}{6}\left[\frac{1+\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}} + \frac{1-\sqrt{2}}{s-\sqrt{2}} - 8\frac{s-2}{s^2+4}\right].$$

Aplicamos trasformada de Laplace inversa y obtenemos la primera solución del problema de valor inicial:

$$\begin{aligned} y_1(t) =& \frac{1+\sqrt{2}}{6}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+\sqrt{2}}\right) + \frac{1-\sqrt{2}}{6}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-\sqrt{2}}\right) \\ &- \frac{8}{6}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4}\right) + \frac{8}{6}\mathfrak{L}^{-1}\left(\frac{2}{s^2+4}\right) \\ y_1(t) =& \frac{1}{6}\left[(1+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} + (1-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} - 8\cos(2t) + 8\sin(2t)\right]. \end{aligned}$$

Para hallar y_2, sustituimos $\mathfrak{L}(y_1)$ en la primera ecuación de (7.3) y obtenemos:

$$(s^2 - 4)\mathfrak{L}(y_2) + s\left(\frac{-s^3 + 2s^2 + 4s - 8}{(s^2+4)(s^2-2)}\right) = 0$$

despejando tenemos:

$$\mathfrak{L}(y_2) = \frac{s(s-2)}{(s^2+4)(s^2-2)} = -\frac{1}{12}\left[\frac{2-\sqrt{2}}{s-\sqrt{2}} + \frac{2+\sqrt{2}}{s+\sqrt{2}} - 4\frac{s+2}{s^2+4}\right].$$

Aplicando la trasformada inversa de Laplace obtenemos la segunda solución del problema de valor inicial

$$y_2(t) = -\frac{1}{12}\left[(2-\sqrt{2})e^{\sqrt{2}t} + (2+\sqrt{2})e^{-\sqrt{2}t} - 4\cos(2t) - 4\sin(2t)\right].$$

☑

Ejercicios

1. Reescribir el sistema en forma matricial y verificar que la función vectorial dada satisface el sistema para cualquier valor de las constantes c_1 y c_2:

   a) $y_1' = -2y_1 - 2y_2,\ y_2' = -5y_1 + y_2,\ \mathbf{y} = c_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}e^{-4t} + c_2\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}e^{3t}.$

   b) $y_1' = -4y_1 - 10y_2,\ y_2' = 3y_1 + 7y_2,\ \mathbf{y} = c_1\begin{pmatrix}-5\\3\end{pmatrix}e^{2t} + c_2\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}e^{t}.$

   c) $y_1' = -3y_1 + 2y_2 + 3 - 2t,\ y_2' = -5y_1 + 3y_2 + 6 - 3t,$

   $\mathbf{y} = c_1\begin{pmatrix}2\cos(t)\\3\cos(t)-\sin(t)\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}2\sin(t)\\3\sin(t)+\cos(t)\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\t\end{pmatrix}.$

d) $y_1' = -6y_1 - 3y_2 + 14e^{2t} + 12e^t, y_2' = y_1 - 2y_2 + 7e^{2t} - 12e^t$,
$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + \begin{pmatrix} e^{2t} + 3e^t \\ 2e^{2t} - 3e^t \end{pmatrix}$.

e) $y_1' = 2y_2 + 2y_3, y_2' = 2y_1 + 2y_3, y_3' = 2y_1 + 2y_2$,
$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$.

f) $y_1' = -y_1 + 2y_2 + 2y_3, y_2' = 2y_1 - y_2 + 2y_3, y_3' = 2y_1 + 2y_2 - y_3$,
$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$.

2. Reescribir la ecuación diferencial lineal de orden n en un sistema $n \times n$ de ecuaciones de primer orden equivalente

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + a_0(x)y = g(x).$$

3. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:
   a) $\frac{dy_2}{dt} = -y_2^2, \ \frac{dy_1}{dt} = -y_1$.
   b) $\frac{dy_2}{dt} = y_2^2 t, \ \frac{dy_1}{dt} = y_1 t$.
   c) $\frac{dy_3}{dt} = 2t, \ \frac{dy_2}{dt} = 3y_3 + 2t, \ \frac{dy_1}{dt} = y_3 + 4y_2 + t$.
   d) $\frac{dy_2}{dt} = y_2 + \sin(t), \ \frac{dy_1}{dt} = t - y_1$.
   e) $\frac{d^2y_2}{dt^2} + 4y_2 = 3\sin(t), \ \frac{dy_2}{dt} - \frac{d^2y_1}{dt^2} + y = 2\cos(t)$.
   f) $\frac{d^2y_2}{dt^2} + y_2 - \frac{d^2y_1}{dt^2} - y_1 = -\cos(2t), \ 2\frac{dy_2}{dt} - \frac{dy_1}{dt} - y_1 = 0$.
   g) $\frac{dy_2}{dt} = \pi y_2^2, \ \frac{dy_1}{dt} = 5y_1$.
4. Resolver los siguientes problemas de valor inicial usando la trasformada de Laplace:
   a) $\frac{dy_2}{dt} - y_1 = t, y_2 - \frac{dy_1}{dt} = 1, y_2(0) = 2, y_1(0) = 1$.
   b) $3\frac{dy_2}{dt} + 3y_2 + 2y_1 = e^t, 4y_2 - 3\frac{dy_1}{dt} + 3y_1 = 3t, y_2(0) = 1, t_1(0) = -1$.
   c) $\frac{d^2y_2}{dt^2} - \frac{dy_1}{dt} = 1 - t, \ \frac{dy_2}{dt} + \frac{dy_1}{dt} = 4e^t + y_2, y_2(0) = 0, y_1(0) = 0, y_2'(0) = 1$.
   d) $\frac{dy_2}{dt} - y_2 - 2y_1\frac{dy_1}{dt} = 0, y_2 - \frac{dy_1}{dt} = 15\cos(t)U(t-\pi), y_2(0) = x_0, y_1(0) = y_0$.
   e) $\frac{dy_2}{dt} - y_2 + y_1 = 2\sin(t)(1 - U(t-\pi)), 2y_2 - \frac{dy_1}{dt} - y_1 = 0, y_2(0) = y_1(0) = 0$.
   f) $2\frac{dy_2}{dt} + y_2 - 5\frac{dy_1}{dt} - 4y_1 = 28e^tU(t-2), 3\frac{dy_2}{dt} - 2y_2 - 4\frac{dy_1}{dt} + y_1 = 0, y_2(0) = 2, y_1(0) = 0$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

3. a) $y_2^{-1} = t + c_1, y_1 = c_2 e^{-t}$.
   c) $y_3 = t^2 + c_1, y_2 = t^3 + t^2 + 3c_1 t + c_2, y_1 = t^4 + \frac{5}{3}t^3 + (6c_1 + \frac{1}{2})t^2 + (c_1 + 4c_2)t + c_3$.
   d) $y_2 = c_1 e^t - \frac{1}{2}(\sin(t) + \cos(t)), y_1 = t - 1 + c_2 e^{-t}$.
   f) $y_2 = c_1 e^t + c_2 \sin(t) + c_3 \cos(t) - \frac{1}{15}(3\cos(2t) + 4\sin(2t)), y_1 = c_1 e^t + (c_2 - c_3)\sin(t) + (c_2 + c_3)\cos(t) - \frac{4}{15}(2\cos(2t) + \sin(2t))$.
4. a) $y_2 = \frac{3}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-t}, y_1 = \frac{3}{2}e^t - \frac{1}{2}e^{-t} - t$.
   c) $y_2 = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{t/2} + 2e^t + 2t, y_1 = -\frac{4}{3}e^{-t} - \frac{5}{3}e^{t/2} + 2e^t + \frac{t^2}{2} - t + 1$.
   e) $y_2 = (t+1)\sin(t) - t\cos(t) + (-(t-\pi+1)\sin(t) + (t-\pi)\cos(t))U(t-\pi), y_1 = 2(\sin(t) - t\cos(t)) + 2(-\sin(t) + (t-\pi)\cos(t))U(t-\pi)$.
   f) $y_2 = -e^{-t} + 3e^t + (5e^{4-t} - (6t+7)e^t)U(t-2), y_1 = -e^{-t} + e^t + (5e^{4-t} - (2t+1)e^t)U(t-2)$.

2. Sistemas homogéneos: teoría preliminar

En esta sección mostraremos que la teoría fundamental de los sistemas lineales homogéneos; sistemas de la forma

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}, \quad A(t) \text{ continua en } (a, b)$$

coincide con la de las ecuaciones diferenciales lineales de orden superior estudiada en el capítulo 4. Las demostraciones de estos resultados se pueden consultar en [17].

Si $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \ldots, \mathbf{y}_n$ son soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneo, entonces se demuestra que toda combinación lineal

$$\mathbf{y} = a_1\mathbf{y}_1 + \cdots + c_n\mathbf{y}_n, \quad (c_1, \ldots, c_n \text{ constantes})$$

también lo es. Diremos que un conjunto $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ es un *conjunto fundamental de soluciones* de un sistema de ecuaciones diferenciales si toda solución de este es combinación lineal de elementos de $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ y esta combinación es la solución general.

De forma similar al caso de ecuación lineales de orden superior, el siguiente teorema caracteriza al conjunto fundamental de soluciones de un sistema de ecuaciones.

Teorema 7.4. *Sea $A(t)$ una matriz $n \times n$ continua en un intervalo (a, b). Un conjunto $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ de n soluciones de*

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$$

es un conjunto fundamental de soluciones, si y solo si es linealmente independiente en (a, b).

Sean $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ n soluciones de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas, digamos

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}, \ldots, \mathbf{y}_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}.$$

Construimos la matriz $Y(t)$ cuyas columnas se forman con estas funciones; es decir,

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \cdots & y_{n1}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{pmatrix}, \tag{7.4}$$

al ser formada con las soluciones del sistema se satisface que

$$\mathbf{y}' \equiv Y(t)\mathbf{y}.$$

Se define el wronskiano de $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ como el determinante de Y.

$$W[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](t) = \begin{vmatrix} y_{11}(t) & y_{12}(t) & \cdots & y_{n1}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{n1}(t) & y_{n2}(t) & \cdots & y_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

Dado que toda ecuación diferencial de orden n se reduce a (o se puede escribir equivalentemente como) un sistema de ecuaciones de primer orden, esta definición de wronskiano es equivalente a la dada en el capitulo 4. Podemos calcular este wronskiano mediante la fórmula de Abel que en este caso viene dada por el siguiente resultado.

Teorema 7.5 (Fórmula de Abel). *Sea* $A(t)$ *una matriz* $n \times n$ *continua en un intervalo* (a, b) *y sean* $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ *soluciones en* (a, b) *del sistema*

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}.$$

Entonces el wronskiano de $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ *es dado por*

$$\begin{aligned} W[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](t) &= W[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](t_0) \\ &\quad \times \exp\left(\int_{t_0}^{t} [a_{11}(s) + a_{22}(s) + \cdots + a_{nn}(s)]ds \right), \quad a < t < b. \end{aligned}$$

Note de la fórmula de Abel que $W[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](t)$ no tiene ceros en (a, b) o $W[\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n](t) \equiv 0$ en (a, b).

Teorema 7.6. *Sea $A(t)$ una matriz $n \times n$ continua en un intervalo (a, b) y sean $\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n$ soluciones en (a, b) del sistema*

$$\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}.$$

Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. *La solución general en (a, b) del sistema sistema es $\mathbf{y} = a_n\mathbf{y}_n + \cdots + a_1\mathbf{y}_1$, con $a_1, \ldots, a_n$ constantes.*
2. *$\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema.*
3. *$\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ es linealmente independiente.*
4. *El wronskiano de $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ es diferente de cero en algún punto de (a, b).*
5. *El wronskiano de $\{\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_n\}$ es diferente de cero en todo punto de (a, b).*

La matriz $Y(t)$ dada en (7.4) es llamada una *matriz fundamental* para $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$ si una (y por tanto todas) afirmación del teorema anterior es válida para las columnas de Y. En este caso la solución general del sistema se escribe como $\mathbf{y} = Y\mathbf{c}$, donde $\mathbf{c}$ es un vector constante.

Ejemplo 7.6. *Sea el sistema de ecuaciones*

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

1. *Verificar que las funciones $\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t}$ y $\mathbf{y}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t}$ son soluciones en $(-\infty, \infty)$ del sistema.*
2. *Calcular el wronskiano de $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$.*
3. *Verificar la fórmula de Abel.*
4. *Hallar la solución general del sistema.*
5. *Resolver el problema de valor inicial para $\mathbf{y}(0) = (10, -4)^T$.*

Solución. 1. $\mathbf{y}_1 = (e^{-4t}, e^{-4t})^T$, $\mathbf{y}_1' = (-4e^{-4t}, -4e^{-4t})^T$. Por otro lado,

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-4t} \\ e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{-4t} - 2e^{-4t} \\ -5e^{-4t} + e^{-4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4e^{-4t} \\ -4e^{-4t} \end{pmatrix} = \mathbf{y}_1'.$$

Para $\mathbf{y}_2 = (-2e^{3t}, 5e^{3t})^T$ tenemos, $\mathbf{y}_2' = (-6e^{3t}, 15e^{3t})^T$ y además

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^{3t} \\ 5e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^{3t} - 10e^{3t} \\ 10e^{3t} + 5e^{3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6e^{3t} \\ 15e^{3t} \end{pmatrix} = \mathbf{y}_2'.$$

Estas igualdades son válidas para todo $t \in (-\infty, \infty)$.

2.
$$W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2](t) = \begin{vmatrix} e^{-4t} & -2e^{3t} \\ e^{-4t} & 5e^{3t} \end{vmatrix} = 7e^{-t}.$$

3. La suma de la diagonal de la matriz (llamada traza de la matriz) es $-2+1=-1$. Luego,
$$W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2](t_0)e^{\int_{t_0}^{t} -1 ds} = 7e^{-t_0}e^{-(t-t_0)} = 7e^{-t} = W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2](t).$$

4. Como el wronskiano es diferente de cero, entonces $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema y
$$Y = \begin{pmatrix} e^{-4t} & -2e^{3t} \\ e^{-4t} & 5e^{3t} \end{pmatrix}$$
es una matriz fundamental del sistema. Por lo tanto, la solución general es
$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-4t} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} e^{-4t} & -2e^{3t} \\ e^{-4t} & 5e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

5. Usando las condiciones iniciales tenemos
$$\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix} = \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 2c_2 \\ c_1 + 5c_2 \end{pmatrix}.$$
Debemos resolver el sistema de ecuaciones algebraicas
$$\begin{pmatrix} 10 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - 2c_2 \\ c_1 + 5c_2 \end{pmatrix},$$
cuya solución es $c_1 = 6$ y $c_2 = -2$. La solución del problema de valor inicial entonces es
$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{-4t} & -2e^{3t} \\ e^{-4t} & 5e^{3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

☑

Ejercicios

1. Sea V el conjunto de soluciones $\mathbf{y} = (y_1(t), y_2(y), y_3(t))^T$ del sistema
$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{y},$$

demostrar que

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} e^t, \quad \mathbf{y}_2(t) = \begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} e^{2t}, \quad \mathbf{y}_3(t) = \begin{pmatrix}1\\3\\9\end{pmatrix} e^{3t}$$

forman una base para V.

2. Suponga que $\mathbf{y}_1$ y $\mathbf{y}_2$ son soluciones del sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Verificar que si $\mathbf{y}_1(0)$ y $\mathbf{y}_2(0)$ son linealmente independientes entonces $\mathbf{y}_1(t)$ y $\mathbf{y}_2(t)$ son linealmente independientes para todo t.
3. Considere las funciones vector-valuadas $\mathbf{f}_1(t) = (\sqrt{2}t, \cos(t))^T$ y $\mathbf{f}_2(t) = (\sqrt{2}t^2, \sin(t))^T$ y $\mathbf{f}_3(t) = (t - t^2, \cos(t - \pi/4))^T$. ¿Son linealmente independientes en $(-\infty, \infty)$?
4. Verificar que $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ para $\mathbf{y}_1(t) = (\cos(t), -\sin(t))^T$ y $\mathbf{y}_2(t) = (\sin(t), \cos(t))^T$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1. \end{aligned}$$

3. Sistemas homogéneos con coeficientes constantes

En esta sección consideraremos sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneos con coeficientes constantes; es decir, sistemas definidos como

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \qquad A \text{ matriz } n \times n \text{ constante.} \tag{7.5}$$

Como vimos, toda ecuación diferencial lineal homogénea de orden n con coeficientes constantes se puede escribir equivalentemente como un sistema de la forma (7.5). Así, análogamente al caso escalar, buscamos soluciones de la forma $\mathbf{y}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{v}$, donde $\mathbf{v}$ es un vector constante. Ahora, sustituyendo esta función vectorial en (7.5) obtenemos $\lambda e^{\lambda t}\mathbf{v} = Ae^{\lambda t}$. Como $e^{\lambda t} \neq 0$ la ecuación anterior es equivalente a

$$(A - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{7.6}$$

Aquí I es la matriz identidad. Esta ecuación vectorial tiene solución no trivial si el determinante de la matriz $A - \lambda I$ es cero. Esto es,

$$|A - \lambda I| = 0. \tag{7.7}$$

La ecuación (7.7) es la llamada *ecuación característica* y los escalares λ son los *autovalores* de la matriz A. Las soluciones de (7.7) son las raíces del *polinomio característico* $p(\lambda) = |A - \lambda I|$; por lo tanto, los autovalores de la matriz son de tres tipos.

3.1. Autovalores reales diferentes

Si todas las soluciones de la ecuación característica son reales y diferentes, digamos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, una solución no cero $\mathbf{v}_k$ del sistema (7.6) con λ_k i.e,

$$(A - \lambda_k I)\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$$

es llamado el *autovector* asociado al autovalor λ_k y en este caso los autovectores $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ son linealmente independientes. Por lo tanto, para los n autovalores y los correspondientes n autovectores se obtienen n soluciones linealmente independientes para el sistema (7.5) como muestra el siguiente teorema.

Teorema 7.7. *Supongamos que la matriz constante $n \times n$ A tiene n autovalores reales diferentes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ con autovectores asociados $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ (los cuales son linealmente independientes). Entonces las funciones*

$$\mathbf{y}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \mathbf{y}_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \ldots, \; \mathbf{y}_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}$$

forman un conjunto fundamental de soluciones del sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Así, la solución general del sistema es

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}.$$

Usando la matriz fundamental Y podemos escribir la solución un problema de valor inicial $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$ como $\mathbf{y}(t) = Y(t)Y^{-1}(t_0)\mathbf{y}_0$.

Ejemplo 7.7. *Resolver el sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} y_1' - y_2' - 6y_2 &= 0 \\ y_1' + 2y_2' - 3y_1 &= 0. \end{aligned}$$

Solución. Reescribamos el sistema como un sistema lineal homogéneo de coeficientes constantes. Para ello multiplicamos la primera ecuación por 2 y la sumamos a la segunda, de donde obtenemos:

$$3y_1' - 12y_2 - 3y_1 = 0.$$

Ahora restamos la primera ecuación a la segunda y obtenemos:

$$3y_2' + 6y_2 - 3y_1 = 0.$$

De esta manera tenemos el sistema equivalente:

$$\begin{cases} 3y_1' - 12y_2 - 3y_1 = 0 \\ 3y_2' + 6y_2 - 3y_1 = 0 \end{cases}, \qquad \begin{cases} y_1' = & y_1 + 4y_2 \\ y_2' = & y_1 - 2y_2, \end{cases}$$

el cual se escribe en forma matricial como

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Calculemos los autovalores de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-2-\lambda) - 4 = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda+3)(\lambda-2) = 0.$$

Los autovalores son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = 2$. Calculemos los correspondientes autovectores.

Para $\lambda_1 = -3$:

$$(A + 3I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de aquí tenemos $v_1 + v_2 = 0$, así tomando $v_1 = 1$ obtenemos el autovector $\mathbf{v}_1 = (1, -1)^T$.

Para $\lambda_2 = 2$:

$$(A - 2I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de aquí tenemos $v_1 - 4v_2 = 0$, así tomando $v_2 = 1$ obtenemos el autovector $\mathbf{v}_2 = (4, 1)^T$. Por lo tanto la solución general del sistema es

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

o,

$$y_1(t) = c_1 e^{-3t} - 4c_2 e^{2t}, \qquad y_2(t) = -c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}.$$

☑

Ejemplo 7.8. *Resolver el problema de valor inicial*

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \qquad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Calculemos los autovalores de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 1 & -2-\lambda & -3 \\ -4 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2+\lambda)(1+\lambda)+4\lambda+4 = (\lambda-2)(\lambda+3)(\lambda+1).$$

Los autovalores son $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -1$ y $\lambda_3 = 2$. Hallemos los autovectores correspondientes.

Para $\lambda_1 = -3$:

$$(A+3I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Debemos resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} 4v_1 - v_2 - 2v_3 &= 0 \\ v_1 + v_2 - 3v_3 &= 0 \\ -4v_1 + v_2 + 2v_3 &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)^T$.

Para $\lambda_2 = -1$:

$$(A+I)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -3 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Debemos resolver el siguiente sistema lineal:

$$\begin{aligned} 2v_1 - v_2 - 2v_3 &= 0 \\ v_1 - v_2 - 3v_3 &= 0 \\ -4v_1 + v_2 &= 0, \end{aligned}$$

cuya solución es $\mathbf{v}_2 = (-1, -4, 1)^T$.

Para $\lambda_3 = 2$:

$$(A-2I)\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & -4 & -3 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

En este caso debemos resolver el sistema lineal:

$$-v_1 - v_2 - 2v_3 = 0$$

$$\begin{aligned} v_1 - 4v_2 - 3v_3 &= 0 \\ -4v_1 + v_2 - 3v_3 &= 0, \end{aligned}$$

la solución del sistema es $\mathbf{v}_1 = (-1, -1, 1)^T$. La solución general del sistema es

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-3t} & -e^{-t} & -e^{2t} \\ 2e^{-3t} & -4e^{-t} & -e^{2t} \\ e^{-3t} & e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Usando las condiciones iniciales, la matriz fundamental queda como

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad Y^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/3 & 1/6 \\ -1 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Así, la solución del problema de valor inicial es

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) &= \begin{pmatrix} e^{-3t} & -e^{-t} & -e^{2t} \\ 2e^{-3t} & -4e^{-t} & -e^{2t} \\ e^{-3t} & e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/3 & 1/6 \\ -1 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \\ & \begin{pmatrix} e^{-3t} & -e^{-t} & -e^{2t} \\ 2e^{-3t} & -4e^{-t} & -e^{2t} \\ e^{-3t} & e^{-t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

☑

Ejercicios

1. Demostrar que todos los autovalores de la matriz de coeficientes de los siguientes sistemas son reales y diferentes. Resolver el sistema:

   a) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$

   b) $\mathbf{y}' = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -11 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$

   c) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$

d) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -6 & -4 & -8 \\ -4 & 0 & -4 \\ -8 & -4 & -6 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$

e) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -4 \\ 4 & -3 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$

f) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 1 \\ -6 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$

2. Demostrar que todos los autovalores de la matriz de coeficientes de los siguientes sistemas son reales y diferentes. Resolver el problema de valor inicial:

a) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$

b) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$

c) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 21 & -12 \\ 24 & -15 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}.$

d) $\mathbf{y}' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -4 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

e) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 11 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$

f) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & -5 & -1 \\ -4 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix}.$

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. a) $\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-8t}.$

c) $\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-3t} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}.$

e) $\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} \frac{11}{7} \\ 1 \\ \frac{1}{7} \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-2t}.$

2. b) $\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} e^{3t} + \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} e^{6t}.$

d) $\mathbf{y}(t) = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}e^{t} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}e^{2t} + \frac{5}{6}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}e^{-t}.$

e) $\mathbf{y}(t) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}e^{4t} + \frac{5}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}e^{2t}.$

3.2. Autovalores complejos

Supongamos ahora que la matriz constante A de coeficientes del sistema lineal homogéneo

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y},$$

con entradas reales, tiene un autovalor $\lambda = \alpha + i\beta$. En este caso tenemos que $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ también es un autovalor de A y además el autovector $\mathbf{x}$ asociado a λ tiene valores complejos, digamos $\mathbf{x} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$, donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{u}$ son vectores con entradas reales. Para hallar el autovector asociado con $\overline{\lambda}$ tomamos conjugada a la ecuación característica:

$$\overline{(A - \lambda I)\mathbf{x}} = (A - \overline{\lambda} I)\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0},$$

lo que implica que $\overline{\mathbf{x}}$ es el autovector asociado al autovalor $\overline{\lambda}$. De esta manera , las funciones

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{\lambda}\mathbf{x} \quad \text{y} \quad \mathbf{y}_2(t) = e^{\overline{\lambda}}\overline{\mathbf{x}}$$

son soluciones del sistema de ecuaciones. Usando la fórmula de Euler podemos reescribir la solución generada por estas dos soluciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) =&C_1e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t))(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) + C_2e^{\alpha t}(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t))(\mathbf{u} - i\mathbf{v})\\ =&e^{\alpha t}((C_1 + C_2)(\cos(\beta t)\mathbf{u} - \sin(\beta t)\mathbf{v}) + i(C_1 - C_2)(\sin(\beta t)\mathbf{u} + \cos(\beta t)\mathbf{v})).\end{aligned}$$

Como estamos interesados en soluciones reales del sistema de ecuaciones diferenciales, debemos tener que $C_1 + C_2 = A$, $i(C_1 - C_2) = B$ sean constantes reales; esto se cumple si $\overline{C}_1 = C_2$. En resumen tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.8. *Supongamos que la matriz de coeficientes A tiene entradas reales y sea $\lambda = \alpha + i\beta$ un autovalor complejo de A con autovector asociado $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$, donde $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores reales. Entonces los vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son diferentes de $\mathbf{0}$ y las funciones*

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{\alpha t}(\cos(\beta t)\mathbf{u} - \sin(\beta t)\mathbf{v}) \quad y \quad \mathbf{y}_2(t) = e^{\alpha t}(\sin(\beta t)\mathbf{u} + \cos(\beta t)\mathbf{v}))$$

son dos soluciones linealmente independientes del sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Ejemplo 7.9. *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned} y_1' + y_1 - 5y_2 &= 0 \\ 4y_1 + y_2' + 5y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Solución. Reescribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -4 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Calculemos los autovalores de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 5 \\ -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda + 25 = (\lambda+3)^2 + 16 = 0.$$

Tenemos que $\lambda = -3 + 4i$ es un autovalor de A. Hallemos el autovector asociado. Resolvamos la ecuación característica

$$(A - (-3+4i)I)\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2-4i & 5 \\ -4 & -2-4i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o, equivalentemente, el sistema

$$\begin{aligned} (2-4i)v_1 + 5v_2 &= 0 \\ -4v_1 - (2+4i)v_2 &= 0. \end{aligned}$$

Note que la primera ecuación es múltiplo de la segunda, (con múltiplo $-\frac{2+4i}{5}$) por lo tanto fijando $v_1 = 5$ obtenemos $v_2 = -2 + 4i$; así el autovector es $\mathbf{x} = (5, -2+4i)^T = (5, -2)^T + i(0, 4)^T$. Por lo tanto, del teorema anterior la solución general de sistema es

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(t) =& Ae^{-3t}\left(\cos(4t)\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \sin(4t)\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right) \\ &+ Be^{-3t}\left(\sin(4t)\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \cos(4t)\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$

☑

Puede ocurrir que la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes tenga autovalores tanto reales como complejos; en esta situación podemos hallar soluciones del sistema para cada caso y verificar que el conjunto de soluciones que se obtiene para todos los casos es un conjunto fundamental de soluciones.

Ejemplo 7.10. *Resolver el problema de valor inicial*

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 4 \\ -8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}, \qquad \mathbf{y}(2\pi) = \begin{pmatrix} e^{4\pi} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Solución. Calculemos los autovalores de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 5 & 4 \\ -8 & 7-\lambda & 6 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (5+\lambda)(7-\lambda)\lambda+30-(4(7-\lambda)+40\lambda) = (2-\lambda)(\lambda^2+1).$$

Los autovalores son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = i$ y $\lambda_3 = -i$. Calculemos los autovectores asociados.

Para $\lambda_1 = 2$:

$$(A-2I)\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 4 \\ -8 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Equivalentemente debemos resolver el sistema

$$\begin{aligned} -7v_1 + 5v_2 + 4v_3 &= 0 \\ -8v_1 + 5v_2 + 6v_3 &= 0 \\ v_1 - 2v_3 &= 0. \end{aligned}$$

Tomando $v_3 = 1$ tenemos $v_1 = 2$ y también $v_2 = 2$, por lo tanto el autovector asociado es $\mathbf{x}_1 = (2, 2, 1)^T$ y

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

es una solución del sistema. Para hallar el autovector asociado con el autovalor $\lambda_2 = i$ resolvemos el sistema

$$(A-iI)\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -5-i & 5 & 4 \\ -8 & 7-i & 6 \\ 1 & 0 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tomamos $v_3 = 1$ y tenemos $v_1 = i$ y $v_2 = -1+i$, donde el autovector asociado es $\mathbf{x}_2 = (i, -1+i, 1)^T = (0, -1, 1)^T + i(1, 1, 0)^T$. Además las funciones

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{0\cdot t}\left(\cos(t)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \sin(t)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t)-\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_3(t) = e^{0\cdot t}\left(\sin(t)\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix} + \cos(t)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\cos(t)\\-\sin(t)+\cos(t)\\\sin(t)\end{pmatrix}$$

son dos soluciones linealmente independientes del sistema. Para hallar la solución general del sistema veamos que $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$ es un conjunto fundamental de soluciones; para ello, calculemos es suficiente calcular el wronskiano en $t = 0$.

$$W[\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3](0) = \begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\2 & -1 & 1\\1 & 1 & 0\end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Por lo tanto, $\{\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3\}$ es un conjunto fundamental de soluciones del sistema, de manera que la solución general es

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix}2e^{2t} & -\sin(t) & \cos(t)\\2e^{2t} & -\cos(t)-\sin(t) & -\sin(t)+\cos(t)\\e^{2t} & \cos(t) & \sin(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}.$$

Usando el vector de condiciones iniciales la matriz fundamental y su inversa son

$$Y(2\pi) = \begin{pmatrix}2e^{4\pi} & 0 & 1\\2e^{4\pi} & -1 & 1\\e^{4\pi} & 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad Y^{-1}(2\pi) = \begin{pmatrix}-e^{-4\pi} & e^{-4\pi} & e^{-4\pi}\\1 & -1 & 0\\3 & -2 & -2\end{pmatrix}.$$

La solución del sistema es

$$\begin{aligned}\mathbf{y}(t) &= \begin{pmatrix}2e^{2t} & -\sin(t) & \cos(t)\\2e^{2t} & -\cos(t)-\sin(t) & -\sin(t)+\cos(t)\\e^{2t} & \cos(t) & \sin(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-e^{-4\pi} & e^{-4\pi} & e^{-4\pi}\\1 & -1 & 0\\3 & -2 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{4\pi}\\-1\\1\end{pmatrix}\\&= \begin{pmatrix}2e^{2t} & -\sin(t) & \cos(t)\\2e^{2t} & -\cos(t)-\sin(t) & -\sin(t)+\cos(t)\\e^{2t} & \cos(t) & \sin(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\e^{4\pi}+1\\3e^{4\pi}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

☑

Ejercicios

1. Demostrar que la matriz de coeficientes de los siguientes sistemas tiene al menos un autovalor complejo. Resolver el sistema:

   a) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix}-1 & 2\\-5 & 5\end{pmatrix}\mathbf{y}.$

b) $\mathbf{y}' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}\mathbf{y}$.

c) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{y}$.

d) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{y}$.

e) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{y}$.

2. Demostrar que la matriz de coeficientes de los siguientes sistemas tiene al menos un autovalor complejo. Resolver el problema de valor inicial:

a) $\mathbf{y}' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

c) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

d) $\mathbf{y}' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

e) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 8 & 10 & -20 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

f) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 4 \\ -10 & 3 & 15 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 16 \\ 14 \\ 6 \end{pmatrix}$.

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *a*) $$\mathbf{y}(t) = Ae^{2t}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\cos(t) + \begin{pmatrix} \frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix}\sin(t)\right) + Be^{2t}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix}\cos(t) + \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ 1 \end{pmatrix}\sin(t)\right).$$

c) $$\mathbf{y}(t) = Ae^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(3t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(3t)\right) + Be^{2t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(3t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin(3t)\right).$$

d) $\mathbf{y}(t) = Ae^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + Be^{t}\begin{pmatrix}-\sin(t)\\ \sin(t)\\ \cos(t)\end{pmatrix} + Ce^{t}\begin{pmatrix}\cos(t)\\ -\cos(t)\\ \sin(t)\end{pmatrix}.$

2. *a*) $\mathbf{y} = e^{\frac{1}{2}t}\left(\begin{pmatrix}\frac{7}{5}\\1\end{pmatrix}\cos\left(\frac{t}{2}\right) + \begin{pmatrix}-\frac{1}{5}\\1\end{pmatrix}\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right).$

c) $\mathbf{y} = e^{4t}\left(\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}\cos(6t) + \begin{pmatrix}8\\1\end{pmatrix}\sin(6t)\right).$

e) $\mathbf{y} = e^{2t}\left(\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}\cos(2t) + \begin{pmatrix}-1\\0\\-\frac{1}{2}\end{pmatrix}\sin(2t)\right).$

3.3. Autovalores reales repetidos

Si una matriz A tiene un autovalor de multiplicidad $m > 1$ es posible que este autovalor tenga asociado m autovectores linealmente independientes; sin embargo, es posible que existan menos de m autovectores asociados linealmente independientes. Este es el caso de las llamadas *matrices deficientes*; es decir, una matriz $n \times n$ es deficiente si y solo si no tiene n autovectores linealmente independientes.

Para formar una base de autovectores de una matriz deficiente se completa el número de autovectores mediante los llamados *autovectores generalizados* de la siguiente manera: supongamos que λ es un autovalor de multiplicidad m y que existen solo $k < m$ autovectores linealmente independientes asociados al autovalor λ. La base de autovectores se completa agregando $m - k$ autovectores generalizados siguiendo este proceso:

$$\begin{aligned}
(A - \lambda I)\mathbf{v}_i &= \mathbf{0} \text{ de donde se obtiene } \mathbf{v}_i,\ i = 1, \ldots, k\\
&\quad \text{linealmente independientes.}\\
&\quad \text{Completamos ahora con autovectores generalizados:}\\
(A - \lambda I)\mathbf{v}_{k+1} &= \mathbf{v}_k \text{ de donde se tiene } (A - \lambda I)^2\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0},\\
(A - \lambda I)\mathbf{v}_{k+2} &= \mathbf{v}_{k+1} \text{ de donde se tiene } (A - \lambda I)^3\mathbf{v}_{k+2} = \mathbf{0},\\
&\vdots\\
(A - \lambda I)\mathbf{v}_m &= \mathbf{v}_{m-1} \text{ de donde se tiene } (A - \lambda I)^{m-k+1}\mathbf{v}_m = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

De esta forma, si la matriz de coeficientes del sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ es no deficiente, entonces el teorema 7.7 es aplicable y obtenemos las n soluciones linealmente independientes mediante los autovectores de la matriz.

Ejemplo 7.11. *Hallar la solución general de*

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Solución. Calculemos los autovalores de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & -3-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (-3-\lambda)^3 + 16 + 12(3+\lambda) = -(\lambda-1)(\lambda+5)^2.$$

Los autovalores son $\lambda_1 = 1$ de multiplicidad 1 y $\lambda_2 = -5$ de multiplicidad 2. Calculemos los autovectores asociados.

Para $\lambda_1 = 1$:

$$(A - I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hacemos reducción por filas a la matriz anterior

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} (R_i : \frac{1}{2}R_i) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} (R_3 : -R_2 + R_3) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(R_2 : 2R_2 + R_1) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} (R_3 : R_2 + R_3) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(R_2 : \frac{1}{3}R_2) \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (R_1 : \frac{1}{2}(R_1 + R_2)) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí tenemos $v_1 = v_2 = v_3$; tomamos $v_1 = 1$ y obtenemos el autovalor $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)^T$ y una primera solución del sistema

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Para $\lambda_2 = -5$:

$$(A + 5I)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De donde tenemos la ecuación $v_1+v_2+v_3 = 0$; podemos fijar dos valores, digamos $v_1 = 1$, $v_2 = -1$ y así $v_3 = 0$, obtenemos el autovector $(1, -1, 0)^T$. Otro vector linealmente independiente se forma tomando $v_1 = 0$, $v_2 = 1$ y $v_3 = 1$; esto es, $\mathbf{v}_3 = (0, 1, -1)^T$. Las dos soluciones linealmente independientes son

$$\mathbf{y}_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-5t}, \qquad \mathbf{y}_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-5t}.$$

La solución general del sistema es

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-5t} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-5t}.$$

☑

En el caso en que la matriz de coeficientes del sistema $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ es deficiente las soluciones del sistema son dadas en el siguiente teorema.

Teorema 7.9. *Supongamos que la matriz de coeficientes de* $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ *tiene un autovalor de multiplicidad* $m > 1$ *y una sucesión de autovectores generalizados correspondientes a* λ, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$. *Entonces las soluciones linealmente independientes correspondientes al autovalor* λ *con multiplicidad* m *del sistema son*

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_i(t) =& e^{\lambda t}\mathbf{v}_i, \quad i = 1, \ldots, k \quad (\mathbf{v}_i \textit{ autovalores})\\
\mathbf{y}_{k+1}(t) =& e^{\lambda t}(\mathbf{v}_k t + \mathbf{v}_{k+1})\\
\mathbf{y}_{k+2}(t) =& e^{\lambda t}\left(\mathbf{v}_k \frac{t^2}{2} + \mathbf{v}_{k+1}t + \mathbf{v}_{k+2}\right)\\
&\vdots\\
\mathbf{y}_m(t) =& e^{\lambda t}\left(\mathbf{v}_k \frac{t^{m-k}}{(m-k)!} + \mathbf{v}_{k+1}\frac{t^{m-k-1}}{(m-k-1)!} + \cdots + \mathbf{v}_{m-2}\frac{t^2}{2} + \mathbf{v}_{m-1}t + \mathbf{v}_m\right).
\end{aligned}$$

Ejemplo 7.12. *Resolver el sistema*

$$\begin{aligned}
y_1' - 4y_1 + y_2 =& 0\\
3y_1 - y_2' + y_2 - y_3 =& 0\\
y_1 - y_3' + y_3 =& 0.
\end{aligned}$$

Solución. Reescribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Hallamos los autovalores de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8) = -(\lambda - 2)^3.$$

El autovalor es $\lambda = 2$ de multiplicidad 3. Calculemos los autovectores asociados:

$$(A-2I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Resolvamos el sistema:

$$\begin{aligned} 2v_1 - v_2 &= 0 \\ 3v_1 - v_2 - v_3 &= 0 \\ v_1 - v_3 &= 0. \end{aligned}$$

De la primera ecuación tenemos que $v_2 = 2v_1$ y de la tercera $v_1 = v_3$; luego, tomando $v_1 = 1$, obtenemos el autovector $\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)$. Note que cualquier otro vector que satisfaga estas ecuaciones es múltiplo de $\mathbf{v}_1$, por lo que no existen mas autovectores linealmente independientes. Construyamos dos autovectores generalizados para completar la base de autovectores de la matriz de coeficientes:

$$(A-2I)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Tenemos de aquí $v_1 = 1 + v_3$ y $2v_1 = 1 + v_2$. Tomando $v_1 = 1$ tenemos $v_3 = 0$ y $v_2 = 1$, el primer autovector generalizado es $\mathbf{v}_2 = (1, 1, 0)^T$. Para hallar el segundo autovector resolvemos el sistema:

$$(A-2I)\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tomando $v_2 = 1$ obtenemos $v_1 = 1$ y $v_3 = 1$, el autovector generalizado $\mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)^T$. Las soluciones linelamente independientes del sistema son:

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{2t}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$\mathbf{y}_3(t) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\frac{t^2}{2} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}t + \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

☑

Ejercicios

1. Demostrar que todos los autovalores de la matriz de coeficientes de los siguientes sistemas son reales con multiplicidad mayor a 1. Resolver el sistema:
   a) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix}3 & 4\\ -1 & 7\end{pmatrix}\mathbf{y}.$
   b) $\mathbf{y}' = \frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\mathbf{y}.$
   c) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix}-10 & 9\\ -4 & 2\end{pmatrix}\mathbf{y}.$
   d) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix}0 & 2 & 1\\ -4 & 6 & 1\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}\mathbf{y}.$
   e) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix}-6 & -4 & -4\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}\mathbf{y}.$
   f) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix}-1 & -12 & 8\\ 1 & -9 & 4\\ 1 & -6 & 1\end{pmatrix}\mathbf{y}.$
2. Demostrar que todos los autovalores de la matriz de coeficientes de los siguientes sistemas son reales con multiplicidad mayor a 1. Resolver el problema de valor inicial:
   a) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix}-11 & 8\\ -2 & -3\end{pmatrix}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix}6\\2\end{pmatrix}.$
   b) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix}-3 & -4\\ 1 & -7\end{pmatrix}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}.$
   c) $\mathbf{y}' = \begin{pmatrix}-7 & -3\\ -3 & -1\end{pmatrix}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}.$

$$d)\ \mathbf{y}' = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$e)\ \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$f)\ \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 4 \\ 4 & 5 & -8 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. $a)$ $\mathbf{y} = c_1 e^{5t}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{5t}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$

   $c)$ $\mathbf{y} = c_1 e^{-4t}\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-4t}\left(\begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix}\right).$

   $e)$ $\mathbf{y} = c_1 e^{-2t}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$

   $+c_3 e^{-2t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\right).$

2. $b)$ $\mathbf{y} = e^{-5t}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$

   $d)$ $\mathbf{y} = e^{\frac{1}{3}t}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ -12 \end{pmatrix} + e^{-\frac{2}{3}t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}\right).$

   $f)$ $\mathbf{y} = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 19 \\ 38 \\ 19 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$

4. Sistemas no homogéneos con coeficientes constantes

Podemos usar el método de variación de parámetros para hallar una solución particular del sistema no homogéneo

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y} + Q(t).$$

Para esto hallamos la solución del sistema homogéneo $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$, la cual queda en la forma $\mathbf{y}(t) = Y(t)\mathbf{c}$, donde $Y(t)$ es la matriz fundamental (7.4) y $\mathbf{c}$ es un vector constante. Aplicamos el método de variación de parámetros considerando el vector $\mathbf{c}$ como una función a valores vectoriales; esto es, $\mathbf{c} = \mathbf{c}(t)$ y proponemos una solución particular de la forma

$$\mathbf{y} = Y(t)\mathbf{c}(t).$$

Derivamos con respecto a t y tenemos:

$$\mathbf{y}' = Y'(t)\mathbf{c}(t) + Y(t)\mathbf{c}'(t) = A\mathbf{y} + Q(t).$$

Sustituimos $Y'(t) = AY(t)$ y $\mathbf{y} = Y(t)\mathbf{c}(t)$ para obtener:

$$\begin{aligned}
&AY(t)\mathbf{c}(t) + Y(t)\mathbf{c}'(t) = AY(t)\mathbf{c}(t) + Q(t)\\
&Y(t)\mathbf{c}'(t) = Q(t)\\
&\mathbf{c}'(t) = Y^{-1}(t)Q(t).
\end{aligned}$$

Integramos ahora con respecto a t:

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{c} + \int Y^{-1}(t)Q(t)dt.$$

Así, la solución general viene dada por

$$\mathbf{y} = Y(t)\mathbf{c}(t) = Y(t)\left[\mathbf{c} + \int Y^{-1}(t)Q(t)dt\right].$$

Para el sistema no homogéneo con condición inicial $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0$, la solución se puede escribir como

$$\mathbf{y} = Y(t)\mathbf{c}(t) = Y(t)\left[\mathbf{c} + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)Q(s)ds\right]$$

con $\mathbf{y}(t_0) = Y(t_0)\mathbf{c}$, lo que implica que $\mathbf{c} = Y^{-1}(t_0)\mathbf{y}(t_0)$, con lo cual la solución es

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)\left[Y^{-1}(t_0)\mathbf{y}(t_0) + \int_{t_0}^{t} Y^{-1}(s)Q(s)ds\right].$$

Ejemplo 7.13. *Resolver el sistema de ecuaciones*

$$\begin{aligned}
y_1' + 3y_1 + 4y_2 &= 2e^{-t}\\
y_1 - y_2' + y_2 &= 0.
\end{aligned}$$

Solución. Reescribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hallemos la solución del sistema homogéneo. Para esto, calculemos los autovalores de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)(1-\lambda) + 4 = (\lambda+1)^2 = 0.$$

Tenemos que $\lambda = -1$ es el único autovalor con multiplicidad 2. Calculemos el autovector correspondiente:

$$(A+I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

De aquí tenemos que $v_1 + 2v_2 = 0$ y tomando $v_2 = 1$ hallamos $v_1 = -2$. Eso es $\mathbf{v}_1 = (-2, 1)^T$. Esta matriz es deficiente ya que no podemos obtener otro vector linealmente independiente con $\mathbf{v}_1$. Completamos la base con un autovector generalizado:

$$(A+I)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De aquí tenemos que $v_1 + 2v_2 = 1$, tomando $v_1 = -1$ obtenemos $v_1 = 3$ y el autovector generalizado es $\mathbf{v}_2 = (3, -1)^T$.

Las dos soluciones linealmente independientes son

$$\mathbf{y}_1(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y}_2(t) = e^{-t} \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right).$$

Una matriz fundamental es

$$Y(t) = \begin{pmatrix} -2e^{-t} & (-2t+3)e^{-t} \\ e^{-t} & (t-1)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Hallamos la inversa de esta matriz:

$$\begin{aligned} Y^{-1}(t) &= \frac{1}{|Y(t)|} \begin{pmatrix} (t-1)e^{-t} & (2t-3)e^{-t} \\ -e^{-t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} = \frac{1}{-e^{-2t}} \begin{pmatrix} (t-1)e^{-t} & (2t-3)e^{-t} \\ -e^{-t} & -2e^{-t} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-t)e^{t} & (-2t+3)e^{t} \\ e^{t} & 2e^{t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora:

$$\int Y^{-1}Q(t)dt = \int \begin{pmatrix} (1-t)e^t & (-2t+3)e^t \\ e^t & 2e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int \begin{pmatrix} 2(1-t) \\ 2 \end{pmatrix} dt$$
$$= \begin{pmatrix} 2t - t^2 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

De esta forma, la solución general es

$$\mathbf{y}(t) = Y(t)\left[\mathbf{c} + \int Y^{-1}(t)Q(t)dt\right] = \begin{pmatrix} -2e^{-t} & (-2t+3)e^{-t} \\ e^{-t} & (t-1)e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 + 2t - t^2 \\ c_2 + 2t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (-2t^2 + 2(1-c_2)t - 2c_1 + 3c_2)e^{-t} \\ (t^2 + c_2 t + c_1 - c_2)e^{-t} \end{pmatrix}.$$

☑

Ejemplo 7.14. *Resolver el sistema de ecuaciones con condiciones iniciales*

$$\begin{aligned} y_1' &= 3y_1 - 3y_2 + y_3 + 2e^t \\ y_2' &= 3y_1 - 2y_2' + 2y_3 \\ y_3' &= -y_1 + 2y_2, \qquad y_1(0) = 3,\ y_2(0) = 2,\ y_3(0) = 1. \end{aligned}$$

Solución. Reescribimos el sistema en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2e^t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Hallamos la solución del sistema homogéneo. Para esto calculemos los autovalores de la matriz de coeficientes

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & -2-\lambda & 2 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda(2+\lambda)(3-\lambda)+12-(14+6\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda^2-2\lambda+2).$$

Los autovalores son $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_{1,2} = 1 \pm i$. Calculemos los correspondientes autovectores.

Para $\lambda_1 = -1$:

$$(A+I)\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Consideremos el siguiente subsistema:

$$\begin{cases} 4v_1 - 3v_2 + v_3 = & 0 \\ -v_1 + 2v_2 + v_3 = & 0 \end{cases}$$

del cual, restando la segunda ecuación a la primera, obtenemos que $5v_1 - 5v_2 = 0$, luego para $v_1 = 1$, hallamos $v_2 = 1$ y $v_3 = -1$. Así un autovalor correspondiente es $v_1 = (1, 1, -1)^T$ y una primera solución del sistema es

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t}.$$

Para $\lambda_2 = 1 + i$:

$$(A + (1+i)I)\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 - 1 - i & -3 & 1 \\ 3 & -2 - 1 - i & 2 \\ -1 & 2 & -1 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tomemos el subsistema

$$\begin{cases} 3v_1 - (3+i)v_2 + 2v_3 = & 0 \\ -v_1 + 2v_2 - (1+i)v_3 = & 0. \end{cases}$$

Sumamos la primera ecuación con 3 veces la segunda y obtenemos $(3 - i)v_2 - (1 + 3i)v_3 = 0$. Hacemos $v_3 = 1$ y así $(3 - i)v_2 = 1 + 3i$, de donde $v_2 = \frac{1+3i}{3-i} = \frac{(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = i$. Ahora usamos la segunda ecuación del subsistema anterior para hallar v_1. Esto es, $v_1 = 2v_2 - (1+i)v_3 = i - 1$ y el autovalor es $(-1+i, i, 1)^T = (-1, 0, 1)^T + i(1, 1, 0)^T$. Las dos soluciones vienen dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2(t) =& e^t \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) \right), \\ \mathbf{y}_3(t) =& e^t \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(t) \right). \end{aligned}$$

Una matriz fundamental es

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^t(\cos(t) + \sin(t)) & e^t(\cos(t) - \sin(t)) \\ e^{-t} & -e^t \sin(t) & e^t \cos(t) \\ -e^{-t} & e^t \cos(t) & e^t \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Usemos el método de Gauss-Jordan para hallar la inversa de esta matriz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} e^{-t} & -e^{t}(\cos(t)+\sin(t)) & e^{t}(\cos(t)-\sin(t)) & 1 & 0 & 0 \\ e^{-t} & -e^{t}\sin(t) & e^{t}\cos(t) & 0 & 1 & 0 \\ -e^{-t} & e^{t}\cos(t) & e^{t}\sin(t) & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(R_3 : R_1 + R_3)\left(\begin{array}{ccc|ccc} e^{-t} & -e^{t}(\cos(t)+\sin(t)) & e^{t}(\cos(t)-\sin(t)) & 1 & 0 & 0 \\ e^{-t} & -e^{t}\sin(t) & e^{t}\cos(t) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -e^{t}\sin(t) & e^{t}\cos(t) & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(R_2 : R_1 - R_2)\left(\begin{array}{ccc|ccc} e^{-t} & -e^{t}(\cos(t)+\sin(t)) & e^{t}(\cos(t)-\sin(t)) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{t}\cos(t) & -e^{t}\sin(t) & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -e^{t}\sin(t) & e^{t}\cos(t) & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$(R_1 : R_1 - (R_2 + R_3))\left(\begin{array}{ccc|ccc} e^{-t} & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -e^{t}\cos(t) & -e^{t}\sin(t) & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -e^{t}\sin(t) & e^{t}\cos(t) & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$(R_3 : \sin(t)R_2 - \cos(t)R_3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} e^{-t} & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -e^{t}\cos(t) & -e^{t}\sin(t) & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{t} & \sin(t)-\cos(t) & -\sin(t) & -\cos(t) \end{array}\right)$$

$R_2 : -\sin(t)R_3 + R_2)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} e^{-t} & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -e^{t}\cos(t) & 0 & 1-\sin^2(t)+\sin(t)\cos(t) & -1+\sin^2(t) & \sin(t)\cos(t) \\ 0 & 0 & -e^{t} & \sin(t)-\cos(t) & -\sin(t) & -\cos(t) \end{array}\right)$$

$R_1 : e^{t}R_1,\ R_2 : \dfrac{-e^{-t}}{\cos(t)},\ R_3 : -e^{-t}R_3)$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -e^{t} & e^{t} & -e^{t} \\ 0 & 1 & 0 & -e^{-t}(\sin(t)+\cos(t)) & e^{-t}\cos(t) & -e^{-t}\sin(t) \\ 0 & 0 & 1 & e^{-t}(\cos(t)-\sin(t)) & e^{-t}\sin(t) & e^{-t}\cos(t) \end{array}\right).$$

Evaluamos ahora la integral:

$$\begin{aligned}\int Y^{-1}(t)Q(t)dt &= \int \begin{pmatrix} -e^{t} & e^{t} & -e^{t} \\ -e^{-t}(\sin(t)+\cos(t)) & e^{-t}\cos(t) & -e^{-t}\sin(t) \\ e^{-t}(\cos(t)-\sin(t)) & e^{-t}\sin(t) & e^{-t}\cos(t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2e^{t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}dt \\ &= \int \begin{pmatrix} -2e^{2t} \\ -2(\cos(t)+\sin(t)) \\ 2(\cos(t)-\sin(t)) \end{pmatrix}dt\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 2(\cos(t) - \sin(t)) \\ 2(\cos(t) + \sin(t)) \end{pmatrix}.$$

Ahora usamos la condición inicial:

$$Y^{-1}(0)\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

y evaluamos la integral definida

$$\int_0^t Y^{-1}(s)Q(s)ds = \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 2(\cos(t) - \sin(t)) \\ 2(\cos(t) + \sin(t)) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}(t) &= \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^t(\cos(t) + \sin(t)) & e^t(\cos(t) - \sin(t)) \\ e^{-t} & -e^t \sin(t) & e^t \cos(t) \\ -e^{-t} & e^t \cos(t) & e^t \sin(t) \end{pmatrix} \\
&\times \left[\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -e^{2t} \\ 2(\cos(t) - \sin(t)) \\ 2(\cos(t) + \sin(t)) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^t(\cos(t) + \sin(t)) & e^t(\cos(t) - \sin(t)) \\ e^{-t} & -e^t \sin(t) & e^t \cos(t) \\ -e^{-t} & e^t \cos(t) & e^t \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 - e^{2t} \\ -3 - 2(\sin(t) - \cos(t)) \\ 2 + 2(\cos(t) + \sin(t)) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} e^{-t} + e^t(5\cos(t) + \sin(t) - 1) \\ -e^{-t} + e^t(3\sin(t) + 2\cos(t) + 1) \\ -e^{-t} + e^t(-3\cos(t) + 2\sin(t) + 3) \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

es la solución del sistema. ☑

Ejercicios

1. Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones no homogéneos:
   a) $y_1' = 2y_1 + y_2 + 26\sin(t),\ y_2' = 3y_1 + 4y_2$.
   b) $y_1' = -y_1 + 8y_2 + 9t,\ y_2' = y_1 + y_2 + 3e^{-t}$.
   c) $y_1' = -y_1 + 2y_2,\ y_2' = -3y_1 + 4y_2 + \frac{e^{3t}}{e^{2t}+1}$.
   d) $y_1' = y_1 + y_2 + e^{2t},\ y_2' = -2y_1 + 3y_2$.
   e) $y_1' = y_1 - 2y_2 - y_3,\ y_2' = -y_1 + y_2 + y_3 + 12t,\ y_3' = y_1 - y_3$.

f) $y_1' = 2y_1 - y_2 + 2y_3,\ y_2' = y_1 + 2y_3,\ y_3' = -2y_1 + y_2 - y_3 + 4\sin(t).$
g) $y_1' = 4y_1 - y_2 - y_3 + e^{3t},\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3,\ y_3' = y_1 + y_2 + 2y_3,$
$y_1(0) = 1,\ y_2(0) = 2,\ y_3(0) = 3.$

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *a)* $$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} c_1e^t + c_2e^{5t} - 10\cos(t) - 11\sin(t) \\ -c_1e^t + 3c_2e^{5t} + 9\cos(t) + 6\sin(t) \end{pmatrix}.$$

c) $$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} c_1e^t + 2c_2e^{2t} - e^t\ln(e^{2t}+1) + 2e^{2t}\tan^{-1}(e^t) \\ c_1e^t + 3c_2e^{2t} - e^t\ln(e^{2t}+1) + 3e^{2t}\tan^{-1}(e^t) \end{pmatrix}.$$

d) $$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} e^{2t}(c_1\cos(t) + c_2\sin(t) - 1) \\ e^{2t}((c_1 + c_2)\cos(t) + (c_1 - c_2)\sin(t) - 2) \end{pmatrix}.$$

f) $$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} -2(c_2 + 2t)\cos(t) - 2(c_3 - 1)\sin(t) \\ 2c_1e^t - 2(c_2 + 2t)\cos(t) - 2(c_3 - 1)\sin(t) \\ c_1e^t + (c_2 - c_3 + 2t - 1)\cos(t) + (c_2 + c_3 + 2t - 1)\sin(t) \end{pmatrix}.$$

g) $$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 5e^{2t} + 2(t-2)e^{3t} \\ 5e^t + (t-3)e^{3t} \\ 5e^{2t} + (t-2)e^{3t} \end{pmatrix}.$$

5. Análisis cualitativo de sistemas de ecuaciones autónomas

Un sistemas de ecuaciones diferenciales es autónomo si sus ecuaciones componentes no dependen explícitamente de la variable independiente t; esto es, sistemas de la forma

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2) \\[2ex] \dfrac{dy_2}{dt} = f_2(y_1, y_2). \end{cases} \tag{7.8}$$

Geométricamente podemos interpretar la solución $\{y_1(t), y_2(t)\}$ de nos maneras: primero podemos graficar $y_1(t), y_2(t)$ con respecto a t en el mismo plano como muestra la figura 7.1.

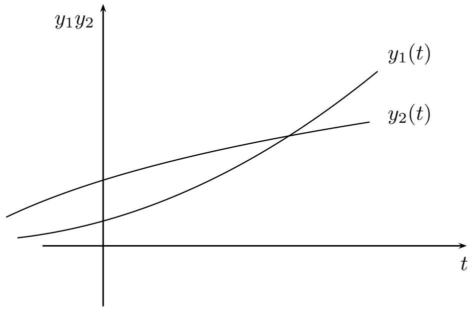


Figura 7.1: Gráficos de y_1, y_2 respecto a t.

Esta representación nos permite conocer cómo varían las soluciones respecto a t. En segundo lugar, podemos considerar a $y_1(t), y_2(t)$ como ecuaciones paramétricas de una curva en el plano y_1y_2, con t como parámetro a lo largo de la curva (figura 7.2):

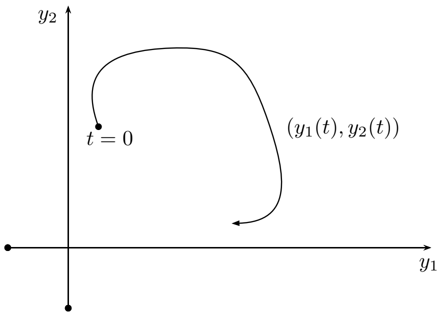


Figura 7.2: Plano fase.

En este contexto, la representación paramétrica de la solución es llamada una *órbita*, *trayectoria* o *curva solución* y el plano y_1y_2 es llamado *plano fase*. Las ecuaciones del sistema (7.8) nos dan información sobre la dirección de las curvas solución en plano fase tal como el campo de pendientes de una ecuación diferencial nos da información sobre la tangente de una curva solución.

Ejemplo 7.15. *La curva*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\sin(t) \\ a\cos(t) \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}$$

es una solución del sistema

$$y_1' = y_2, \quad y_2' = -y_1,$$

puesto que

$$y_1' = a\cos(t) = y_2, \quad y_2' = -a\sin(t) = -y_1.$$

En forma paramétrica estas curvas definen circunferencias de radio $|a|$ en el plano fase (figura 7.3)

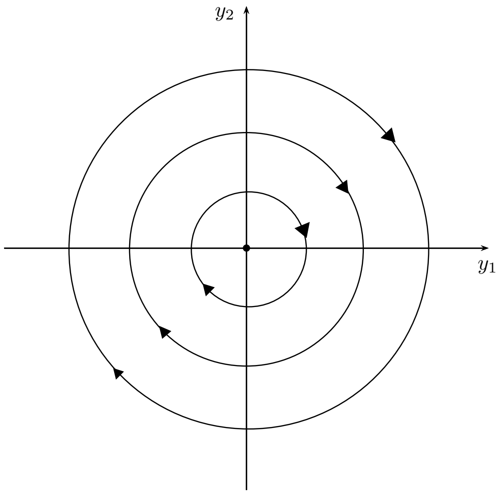


Figura 7.3: Plano fase para $y_1' = y_2, y_2' = -y_1$.

Mientras que en el mismo plano son las funciones dadas en la figura 7.4

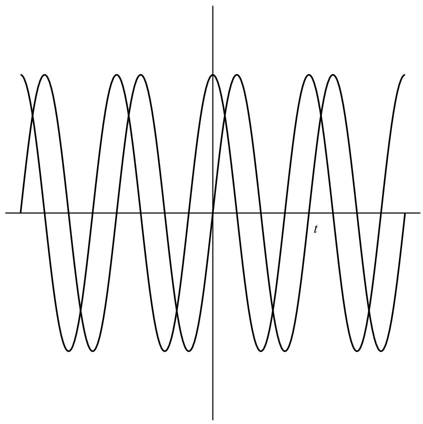


Figura 7.4: Gráficas de las soluciones de $y_1' = y_2, y_2' = -y_1$, respecto a t.

☑

Si f y g son funciones continuas en una región Ω del plano euclideano $\mathbb{R}^2$, el teorema de existencia y unicidad garantiza que el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = f_1(y_1, y_2) \\ \frac{dy_2}{dt} = g(y_1, y_2) \\ y_1(t_0) = y_0^1, \quad y_2(t_0) = y_0^2 \end{cases}$$

con t_0 en el dominio de y_1, y_2 y $(y_0^1, y_0^2) \in \Omega$, tiene una única solución $y_1 = y_1(t)$, $y_2 = y_2(t)$, definida en cierto intervalo real (a, b) que contiene el punto t_0. Para cada punto en el plano fase Ω existe una y solo una trayectoria que contiene al punto.

Definición 7.6 (Punto de equilibrio). Un punto de equilibrio, o equilibrio, es una solución (y_1^∞, y_2^∞) del par de ecuaciones $f_1(y_1^\infty, y_2^\infty) = 0$, $f_2(y_1^\infty, y_2^\infty) = 0$. Así un equilibrio es una solución constante del sistema de ecuaciones diferenciales.

Obs Geométricamente un equilibrio es un punto en el plano fase que es la órbita de una solución constante. Tal solución constante se denomina una *solución de equilibrio del sistema*. Observe que la trayectoria de una solución del equilibrio consta un único punto (y_1^∞, y_2^∞).

Ejemplo 7.16. *Hallar los puntos de equilibrio para el sistema depredador-presa*

$$\begin{aligned} N' =& rN\left(1 - \frac{N}{k}\right) - aNP \\ P' =& bNP - cP \end{aligned}$$

donde r, k, a, b, c son constantes.

Solución. Primero notemos que para $P' = P(bN - c) = 0$ tenemos dos posibilidades: $P = 0$ o $N = \frac{c}{b}$. Si $P = 0$, entonces la primera ecuación nos queda:

$$rN\left(1 - \frac{N}{k}\right) = 0,$$

de manera que $N = 0$ o $N = k$. En el caso $N = \frac{c}{b}$, la primera ecuación queda en la forma

$$r\frac{c}{b}\left(1 - \frac{c}{bk}\right) - \frac{ac}{b}P = 0.$$

Así,

$$P = \frac{r}{a}\left(1 - \frac{c}{bk}\right).$$

En consecuencia, el sistema tiene tres puntos de equilibrio

$$(0,0), \quad (k,0) \quad \text{y} \quad \left(\frac{c}{b}, \frac{r}{a}\left(1-\frac{c}{bk}\right)\right).$$

Note que si $c = bk$, el segundo punto de equilibrio es igual al tercero. ☑

Reescribiendo el sistema (7.8) en notación vectorial

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} f_1(y_1, y_2) \\ f_2(y_1, y_2) \end{pmatrix} \tag{7.9}$$

tenemos que para cualquier punto (y_1, y_2) en el plano y_1y_2, el lado derecho de (7.9) define un vector tangente a la curva solución que atraviesa este punto. Podemos esbozar este vector en un conjunto de puntos en el plano para obtener un campo de vectores que nos indica el flujo, o la dirección, de las curvas solución como indica la figura 7.5.

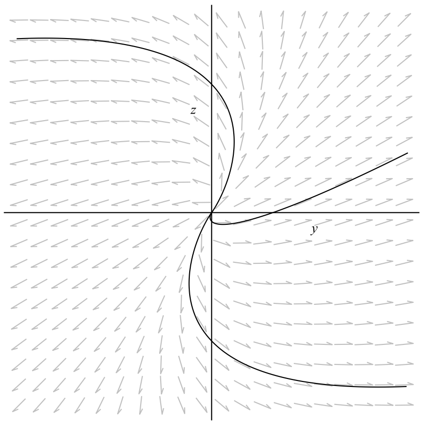


Figura 7.5: En el plano fase el campo de vectores $(3y - z, y + z)^T$ asociado al sistema $y' = 3y - z$, $z' = y + z$ y varias curvas $y(t)$, $z(t)$ las cuales se alejan del origen. El campo de vectores es tangente a las curvas solución. Las órbitas se aproximan al infinito cuando $t \to \pm\infty$.

Las órbitas encajan de tal manera que los vectores tangentes coinciden con el campo de vectores. Un *retrato de fase* es un bosquejo del plano fase y unas pocas trayectorias típicas, junto con sus puntos de equilibrio. El diagrama de fase puede, o no, tener al campo de vectores.

Una forma para hallar el retrato de fase del sistema (7.8) es suponer que y_1 y y_2 son soluciones del sistema, entonces para los valores de t para los cuales $f_1(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$, de la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{\frac{dy_2}{dt}}{\frac{dy_1}{dt}} = \frac{f_2(y_1(y), y_2(t))}{f_1(y_1(t), y_2(t))}.$$

Así, para hallar las órbitas debemos resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy_2}{dy_1} = \frac{f_2(y_1, y_2)}{f_1(y_1, y_2)}.$$

Ejemplo 7.17. *Esbozar el retrato de fase para la ecuación diferencial*

$$y'' = y - y^3.$$

Solución. Primero reescribimos la ecuación como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} y_1' =& y \\ y' =& y_1 - y_1^3. \end{aligned}$$

Para hallar las órbitas debemos resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dy_1} = \frac{y_1 - y_1^3}{y}.$$

Esta ecuación es de variables separables; resolviéndola tenemos las órbitas:

$$y^2 = y_1^2 - \frac{y_1^4}{2} + c.$$

Los puntos de equilibrio son $y_1 - y_1^3 = 0$, de donde tenemos $y_1 = 0$ o $y_1 = \pm 1$ y $y = 0$. Así los puntos de equilibrio son

$$(-1, 0),\ \ (0, 0)\ (1, 0).$$

Un retrato de fase que contiene algunas curvas viene dado en la figura 7.6.

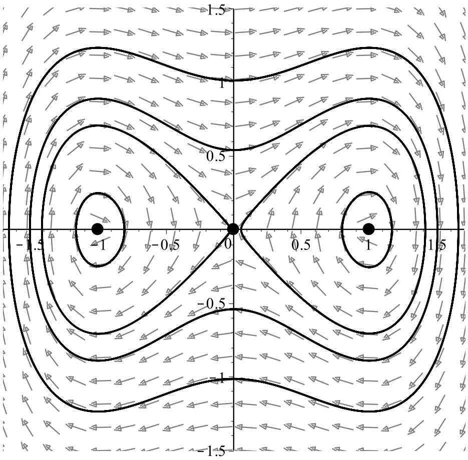


Figura 7.6: Retrato fase para $y'' = y - y^3$

☑

Ejemplo 7.18 (Péndulo). *Un peso con masa m está suspendido al final de una barra de longitud L. Sea θ medido en el sentido positivo como indica la figura 7.7*

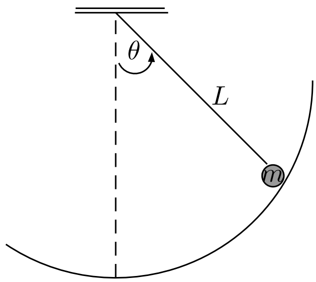


Figura 7.7: Péndulo simple.

Como la barra es rígida, la masa viaja a lo largo de una circunferencia de radio L. Ignorando la resistencia del aire y la masa de la barra, aplicamos la segunda ley de Newton en la dirección tangencial a la circunferencia:

$$mL\theta''(t) = -mg\sin(\theta(t)),$$

donde g es la aceleración dada por la gravedad. Simplificando tenemos

$$\theta''(t) + \frac{g}{L}\sin(\theta(t)) = 0.$$

Ahora supongamos que θ es una solución de esta última ecuación y sea

$$y(t) = \theta\left(\sqrt{\frac{L}{g}}t\right).$$

Entonces y es una solución de la ecuación del péndulo

$$y'' + \sin(y) = 0. \tag{7.10}$$

Ahora el retrato de fase para la ecuación (7.10) *es más sencillo de esbozar pues no tiene parámetros extra. Además, note que la ecuación* (7.10)*, al no depender explícitamente del parámetro g, es válida en cualquier sistema de referencia (diferentes valores de la gravedad g). Escribamos ahora la ecuación* (7.10) *en forma de un sistema de ecuaciones:*

$$\begin{aligned} y' &= x \\ x' &= -\sin(y). \end{aligned} \tag{7.11}$$

Para hallar las órbitas debemos resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dy} = \frac{-\sin(y)}{x}.$$

Esta ecuación es de variables separables cuya solución es

$$x^2 = 2\cos(y) + c.$$

Los puntos de equilibrio de este sistema son $(-\pi, 0)$ *y* $(\pi, 0)$*. El retrato de fase es dado en la figura 7.8.*

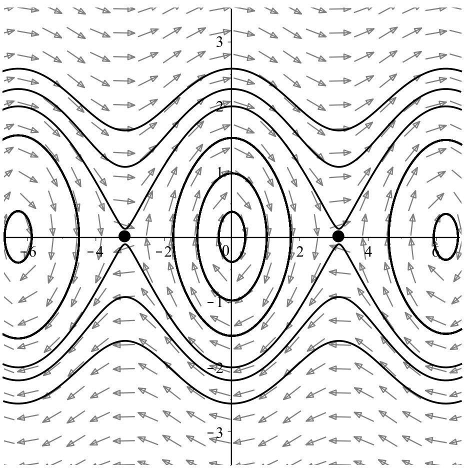


Figura 7.8: Diagrama del plano fase para la ecuación del péndulo simple.

Los ejemplos 7.15 y 7.18 son casos especiales de los llamados sistemas hamiltonianos.

Definición 7.7. Un sistema bidimensional de la forma

$$\begin{aligned} y_1' &= \frac{\partial h}{\partial y_2} \\ y_2' &= -\frac{\partial h}{\partial y_1} \end{aligned}$$

donde $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y sus derivadas parciales de primer orden son continuas, es llamado un sistema hamiltoniano.

Por ejemplo, en el problema del péndulo $h(x, y) = \frac{x^2}{2} - \cos(y)$. Llamamos a tal función h una *función hamiltoniana* para el sistema (7.11).

Obs Note que una condición necesaria para que el sistema (7.8) sea hamiltoniano es que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y_1} = -\frac{\partial f_2}{\partial y_2}.$$

Ejemplo 7.19. *Hallar todas la funciones hamiltonianas (funciones de energía) para el sistema*

$$\begin{aligned} y_1' =& 3y_2^2 - 2y_1^3 y_2 \\ y_2' =& 3y_1^2 y_2^2 - 2y_1. \end{aligned}$$

Solución. Para hallar las funciones Hamiltonianas para este sistema consideremos

$$\frac{\partial h}{\partial y_2}(y_1, y_2) = 3y_2^2 - 2y_1^3 y_2.$$

Integrando respecto a y_2 tenemos que $h(y_1, y_2) = y_2^3 - y_1^3 y_2^2 + k(y_1)$. Como $\frac{\partial h}{\partial y_1} = -(3y_1^2 y_2^2 - 2y_1)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} -3y_1^2 y_2^2 + k'(y_1) =& 2y_1 - 3y_1^2 y_2^2 \\ k'(y_1) =& 2y_1 \end{aligned}$$

y así,

$$k(y_1) = y_1^2 + c.$$

Finalmente, $h(y_1, y_2) = y_2^2 - y_1^3 y_2^2 + y_1^2 + c$ son las funciones hamiltonianas. ☑

Queremos conocer ahora como se comportan las soluciones de un sistema ecuaciones alrededor de los puntos de equilibrio.

Definición 7.8 (Estabilidad). Un equilibrio (y_1^∞, y_2^∞) se dice estable si toda solución $(y_1(t), y_2(t))$ con $(y_1(t_0), y_2(t_0))$ suficientemente cerca al equilibrio, permanece cerca al equilibrio para todo t. Formalmente un equilibrio (y_1^∞, y_2^∞) es estable si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$, tal que si $|y_1^\infty - y_1(t_0)| < \delta$, $|y_2^\infty - y_2(t_0)| < \delta$, entonces la solución $\big(y_1(t), y_2(t)\big)$ satisface que $|y_1(t) - y_1^\infty| < \epsilon$, $|y_2(t) - y_2^\infty| < \epsilon$, para todo punto t.

Un equilibrio (y_1^∞, y_2^∞) se llama asintóticamente estable si es un equilibrio estable y las soluciones con $(y_1(t_0), y_2(t_0))$ suficientemente cerca al equilibrio tienden al equilibrio cuando $t \to \infty$. Esto es, si para algún $\delta > 0$ se tiene:

$$|y_1(t_0) - y_1^\infty| < \delta, \quad |y_2(t_0) - y_2^\infty| < \delta \;\text{ entonces }\; y_1(t) \to y_1^\infty, \quad y_2(t) \to y_2^\infty,$$

cuando $t \to \infty$.

En general los sistemas de ecuaciones diferenciales no lineales describen de manera más precisa los fenómenos físicos y naturales; ejemplo de ello son los llamados sistemas de tipo *Lotka-Volterra* y de *Kolmogorov* usados en el modelo matemático de poblaciones biológicas y epidemiología. Sin embargo, estudiar el comportamiento de las soluciones de un sistema de ecuaciones no lineal en general requiere de herramientas que escapan del objetivo de este texto.

No obstante, podemos analizar el comportamiento de las soluciones de un sistema no lineal que estén cerca de los puntos de equilibrio. Para esto podemos "linealizar" este sistema en los puntos de equilibro, puesto que podemos caracterizar el comportamiento de las soluciones de un sistema lineal.

Para *linealizar* un sistema de ecuaciones en un punto de equilibrio procedemos de la siguiente manera:

Consideremos el sistema

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2), \end{aligned} \tag{7.12}$$

y sea (y_1^∞, y_2^∞) un equilibrio. Hagamos la sustitución

$$u = y_1 - y_1^\infty \quad \text{y} \quad v = y_2 - y_2^\infty.$$

Obtenemos así el sistema

$$\begin{aligned} u' &= f_1(u + y_1^\infty, v + y_2^\infty) \\ v' &= f_2(u + y_1^\infty, v + y_2^\infty), \end{aligned}$$

usamos una expansión de Taylor para funciones de dos variables y obtenemos:

$$\begin{aligned} f_1(u + y_1^\infty, v + y_2^\infty) &= f_1(y_1^\infty, y_2^\infty) + \frac{\partial}{\partial y_1} f_1(y_1^\infty, y_2^\infty)u + \frac{\partial}{\partial y_2} f_1(y_1^\infty, y_2^\infty)v + h_1 \\ f_2(u + y_1^\infty, v + y_2^\infty) &= f_2(y_1^\infty, y_2^\infty) + \frac{\partial}{\partial y_1} f_2(y_1^\infty, y_2^\infty)u + \frac{\partial}{\partial y_2} f_2(y_1^\infty, y_2^\infty)v + h_2, \end{aligned}$$

donde h_1 y h_2 son funciones pequeñas para u y v pequeños,

$$\lim_{\substack{u \to 0 \\ v \to 0}} \frac{h_1(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \lim_{\substack{u \to 0 \\ v \to 0}} \frac{h_2(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0.$$

Dado que (y_1^∞, y_2^∞) es un equilibrio, $f_1(y_1^\infty, y_2^\infty) = f_2(y_1^\infty, y_2^\infty) = 0$ y obviando los términos de orden superior $h_1(u, v)$ y $h_2(u, v)$ obtenemos el sistema lineal

$$\begin{aligned} u' =& \frac{\partial}{\partial y_1} f_1(y_1^\infty, y_2^\infty) u + \frac{\partial}{\partial y_2} f_1(y_1^\infty, y_2^\infty) v \\ v' =& \frac{\partial}{\partial y_1} f_2(y_1^\infty, y_2^\infty) u + \frac{\partial}{\partial y_2} f_2(y_1^\infty, y_2^\infty) v, \end{aligned} \tag{7.13}$$

o equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} f_1(y_1^\infty, y_2^\infty) & \frac{\partial}{\partial y_2} f_1(y_1^\infty, y_2^\infty) \\ \frac{\partial}{\partial y_1} f_2(y_1^\infty, y_2^\infty) & \frac{\partial}{\partial y_2} f_2(y_1^\infty, y_2^\infty) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

Podemos estudiar la naturaleza de un punto de equilibrio del sistema (7.12) mediante el comportamiento de las soluciones del sistema "linealizado" (7.13) como indica el siguiente teorema (ver [5, 10]).

Teorema 7.10. *Si (y_1^∞, y_2^∞) es un equilibrio del sistema* (7.12) *y si todas las soluciones de la* linealización *en el equilibrio* (7.13) *tienden a cero cuando $t \to \infty$, entonces el equilibrio (y_1^∞, y_2^∞) es asintóticamente estable.*

El siguiente resultado muestra que un equilibrio asintóticamente estable tiene la propiedad de ser invariante a cambios en la condición inicial y a pequeñas perturbaciones del sistema.

Teorema 7.11. *Bajo las hipótesis del teorema 7.10, tenemos que*

1. *Si*

$$\frac{g_1(y_1, y_2)}{\sqrt{(y_1 - y_1^\infty)^2 + (y_2 - y_2^\infty)^2}}$$

y

$$\frac{g_2(y_1, y_2)}{\sqrt{(y_1 - y_1^\infty)^2 + (y_2 - y_2^\infty)^2}}$$

tienden a cero cuando $(y_1, y_2) \to (y_1^\infty, y_2^\infty)$, entonces las soluciones del sistema perturbado

$$\begin{aligned} y_1' =& f_1(y_1, y_2) + g_1(y_1, y_2) \\ y_2' =& f_2(y_1, y_2) + g_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

que comienzan cerca a (y_1^∞, y_2^∞) tienden a (y_1^∞, y_2^∞) cuando $t \to \infty$.

2. *Si $|g_1(y_1, y_2)| \leq A$, $|g_2(y_1, y_2)| \leq A$ para todo y_2 y A suficientemente pequeño, entonces las soluciones del sistema perturbado se mantienen a una distancia KA, para alguna constante K, de las soluciones del sistema no perturbado*

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(y_1, y_2) \\ y_2' &= f_2(y_1, y_2) \end{aligned}$$

para $t \geq 0$.

Ejemplo 7.20. *Hallar la* linealización *en cada equilibrio del sistema de Lotka-Volterra*

$$\frac{dx}{dt} = x(\lambda - by), \quad \frac{dy}{dt} = y(-\mu + cx).$$

Solución. Calculemos los puntos de equilibrio. Estos son $x(\lambda - by) = 0$ y $y(-\mu + cx) = 0$. Para la primera ecuación tenemos como solución $x = 0$ y $y = \frac{\lambda}{b}$. Usando $x = 0$ en la segunda ecuación obtenemos que $y = 0$ y para $y = \frac{\lambda}{b}$ tenemos que $x = \frac{\mu}{c}$. Así los equilibrios son

$$(0, 0) \quad \text{y} \quad \left(\frac{\mu}{c}, \frac{\lambda}{b}\right).$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}[x(\lambda - by)] = \lambda - by, \qquad \frac{\partial}{\partial y}[x(\lambda - by)] = -bx \\ &\frac{\partial}{\partial x}[y(-\mu + cx)] = cy, \qquad \frac{\partial}{\partial x}[y(-\mu + cx)] = -\mu + cx. \end{aligned}$$

La *linealización* en un equilibrio viene dada por

$$u' = (\lambda - by^{\infty})u - bx^{\infty}v, \quad v' = cy^{\infty}u + (-\mu + cx^{\infty})v.$$

En el equilibrio $(0, 0)$ la *linealización* es

$$u' = \lambda u, \qquad v' = -\mu v$$

y en el equilibrio $\left(\frac{\mu}{c}, \frac{\lambda}{b}\right)$ tenemos

$$u' = \frac{b\mu}{c}v, \qquad v' = \frac{c\lambda}{b}u.$$

Estas son las *linealizaciones* del sistema. ☑

Ejercicios

1. Dibujar el retrato del plano fase para cada ecuación diferencial:
   a) $x'' - 2xx' = 0$.
   b) $x'' + |x| = 0$.
   c) $x'' + e^x = 1\cdot$
2. Demostrar que los sistemas son hamiltonianos y hallar las ecuaciones para las órbitas. Dibujar el plano fase:
   a) $y_1' = y_1 + 16y_2,\ y_2' = -8y_1 - y_2$.
   b) $y_1' = \frac{1-y_1^2+y_2^2}{y_2^2},\ y_2' = -\frac{2y_1}{y_2}, \quad y_2 \neq 0$.
3. Para cada uno de los sistemas que sean hamiltonianos, hallar la función hamiltoniana. Si el sistema no es hamiltoniano decirlo:
   a) $y_1' = e^{y_2} - 2y_1,\ y_2' = 2y_2 - 2y_1$.
   b) $y_1' = y_1 + y_2,\ y_2' = -y_1 + y_2$.
   c) $y_1' = -y_1^3 - 4y_2^3,\ y_2' = 3y_1^2y_2 + 2$.
   d) $y_1' = y_1^2\cos(y_1y_2) - y_2^2,\ y_2' = 2y_1y_2 - \sin(y_1y_2) - y_1y_2\cos(y_1y_2)$.
4. Hallar la *linealización* de cada sistema en cada punto de equilibrio:
   a) $y_1' = y_1 - y_2,\ y_2' = y_1 + y_2 - 2$.
   b) $y_1' = y_2,\ y_2' = y_1 + y_2 - 1$.
   c) $y_1' = y_1 + 1,\ y_2' = y_1^2 + y_2$.
   d) $y_1' = y_2^2 - 8y_1,\ y_2' = y_1 - 2$.
   e) $y_1' = e^{-y_2},\ y_2' = e^{-y_1}$.
   f) $y_1' = \sin(y_2),\ y_2' = 2y_1$.
   g) $y_1' = y_1(\lambda - ay_1 - by_2),\ y_2' = y_2(\mu - cy_1 - dy_2)$.
   h) $y_1' = y_1(\lambda - ay_1 + by_2),\ y_2' = y_2(\mu + cy_1 - dy_2)$.
5. El siguiente sistema de ecuaciones diferenciales no lineales ha sido propuesto como modelo de diferenciación celular:

$$\frac{dx}{dt} = y - x, \qquad \frac{dy}{dt} = \frac{5x^2}{4+x^2} - y.$$

   a) Dibujar las curvas $y = x$ y $y = 5x^2/(4+x^2)$ en el cuadrante positivo del plano xy.
   b) Determinar los puntos de equilibrio.
   c) *Linealizar* el sistema en cada punto de equilibrio.
   d) Determinar la estabilidad local de cada punto de equilibrio positivo y clasificar los puntos de equilibrio.
6. Sea $S(t)$ el número de individuos susceptibles en un tiempo t, $I(t)$ el número de individuos infectados en un tiempo t, $V(t)$ el número de individuos vacunados o recuperados en un tiempo t y

$$N(t) = S(t) + I(t) + V(t).$$

Considere el modelo

$$
\begin{aligned}
S'(t) =& \mu N - \beta S \frac{I}{N} - \mu S \\
I'(t) =& \beta S \frac{I}{N} - (\mu + \gamma) I \\
V'(t) =& \gamma I - \mu V
\end{aligned}
$$

donde μ es la tasa per capital de muertes, γ es la tasa per capital de recuperación, $\beta = pc$ con c el promedio de contacto por unidad de tiempo y p es la probabilidad de trasmisión por contacto por un individuo susceptible o infectado.

a) Hallar los equilibrios.

b) Calcular la estabilidad de cada equilibrio.

Respuesta de ejercicios seleccionados

3. *b*) El sistema no es halmitoniano.

   c) $h(y_1, y_2) = -y_1^3 y_2 - y_2^4 + 2y_1 + c$.

4. *b*) $u' = v,\ v' = u + v$, $(0, 1)$ equilibrio.

   d) $u' = -8u - 8v,\ v' = u$ con equilibrio $(2, -4)$ y $u' = -8u + 8v$, $v' = u$ con equilibrio $(2, 4)$.

   f) $u' = -v,\ v' = 2u$ con equilibrio $(0, \pm n\pi)$ para n impar y $u' = v$, $v' = 2u$ con equilibrio $(0, \pm n\pi)$ para n par.

5.1. Comportamiento cualitativo de soluciones de sistemas lineales

El teorema 7.10 nos permite reducir el análisis de la estabilidad de un punto de equilibrio de un sistema general de ecuaciones diferenciales

$$
y_1' = f_1(y_1, y_2), \qquad y_2' = f_2(y_1, y_2) \tag{7.14}
$$

a determinar el comportamiento de las soluciones de la *linealización* en el equilibrio, siempre que las funciones f_1 y f_2 sean suficientemente suaves en el sentido que se puedan expandir mediante una serie de Taylor alrededor del equilibrio.

En esta sección veremos que para sistemas lineales bidimensionales homogéneos con coeficientes constantes podemos caracterizar todos los posibles comportamientos de sus soluciones. Para esto consideremos el sistema lineal con coeficientes constantes

$$
y_1' = a y_1 + b y_2
$$

$$y_2' = cy_1 + dy_2 \tag{7.15}$$

o en notación matricial:

$$\mathbf{y}' = A\mathbf{y}, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

y supongamos que la matriz de coeficientes es invertible; esto es, $ad - bc \neq 0$. Esto implica que el origen es el único equilibrio de este sistema. Así, si (7.15) es la *linealización* en un punto de equilibrio de algún sistema no lineal, entonces este equilibrio es *aislado*, lo que quiere decir que existe un disco centrado en el equilibrio que no contiene otro equilibrio del sistema no lineal.

Sea P una matriz 2×2 invertible, la cual representa una rotación de ejes y un cambio de escala en los ejes y hagamos el cambio de variables $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$ el cual transforma el sistema (7.15) en $P\mathbf{u}' = AP\mathbf{u}$, o

$$\mathbf{u}' = P^{-1}AP\mathbf{u} = B\mathbf{u}.$$

Este sistema es del mismo tipo que el original.

- Dos matrices A y B se dicen semejantes si existe una matriz invertible P tal que $B = P^{-1}AP$. Entre otras propiedades, dos matrices semejantes tienen el mismo determinante y por tanto ambas son invertibles o no lo son y además tienen los mismos autovalores.

Así, si podemos resolver el sistema para $\mathbf{u}$, podemos reconstruir la solución en términos de $\mathbf{y}$ mediante $\mathbf{y} = P\mathbf{u}$ y las propiedades cualitativas de las soluciones $\mathbf{u}$ se preservan en esta reconstrucción. El siguiente teorema enumera todas las posibles formas de una matriz B que sea semejante a una matriz A de dimensión 2×2.

Teorema 7.12. *La matriz*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

con $ad - bc \neq 0$*, es semejante bajo transformaciones reales a una de las siguientes matrices*

1. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda > \mu > 0$ o $\lambda < \mu < 0$.
2. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda > 0$ o $\lambda < 0$.
3. $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, $\lambda > 0$ o $\lambda < 0$.

4. $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $\lambda > 0 > \mu$.
5. $\begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix}$, $\beta \neq 0$.
6. $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, $\alpha > 0, \beta \neq 0$ o $\alpha < 0, \beta \neq 0$.

Describamos ahora los retratos de fase para los sistemas lineales cuyas matrices de coeficientes sean de una de las formas dadas en el teorema anterior.

Caso I. El sistema trasformado es $u' = \lambda u$, $v' = \mu v$, cuya solución es $u = u_0 e^{\lambda t}$, $v = v_0 e^{\mu t}$. Si $\lambda < \mu < 0$, entonces ambas soluciones tienden a cero cuando $t \to +\infty$ y $\frac{v}{u} = \frac{v_0}{u_0} e^{(\mu-\lambda)t} \to +\infty$. Luego, toda órbita tiende al origen con pendiente infinita (excepto cuando $v_0 = 0$, en cuyo caso las órbita está en el eje u). El retrato de fase se muestra en la figura 7.9. Si $\lambda > \mu > 0$, el retrato de fase es el mismo excepto que las flechas están en sentido contrario.

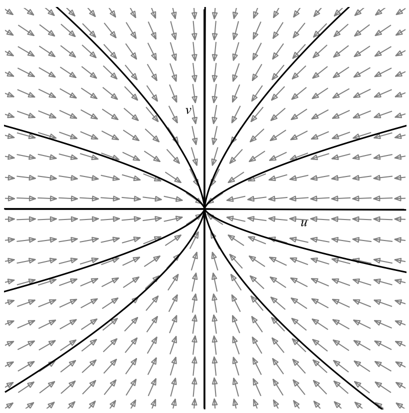


Figura 7.9: Retrato de fase caso I.

Caso II. El sistema es $u' = \lambda u$, $v' = \lambda v$, con solución $u = u_0 e^{\lambda t}$, $v = v_0 e^{\lambda t}$. Si $\lambda < 0$, u y v tienden a cero cuando $t \to +\infty$ y $\frac{v}{u} = \frac{v_0}{u_0}$. Así, toda órbita es una linea recta que alrededor del origen y todas las posibles pendientes, así como las órbitas, se aproximan al origen. El retrato de fase se muestra en la figura 7.10. Si $\lambda > 0$, el retrato de fase es el mismo pero las flechas están invertidas.

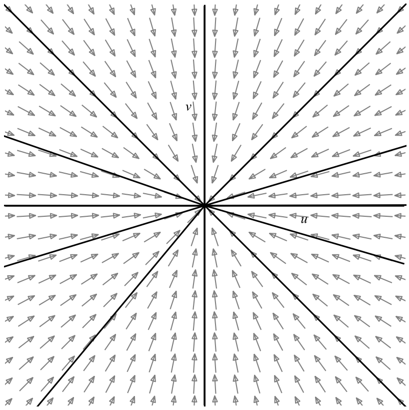


Figura 7.10: Retrato de fase caso II.

Caso III. El sistema es $u' = \lambda u + v$, $v' = \lambda v$. La solución de la segunda ecuación es $v = v_0 e^{\lambda t}$, y sustituyendo esta en la primera ecuación obtenemos la ecuación lineal de primer orden $u' = \lambda u + v_0 e^{\lambda t}$ cuya solución es $u = (u_0 + v_0 t)e^{\lambda t}$. si $\lambda < 0$, las soluciones u y v tienden a cero cuando $t \to +\infty$ y $\frac{v}{u} = \frac{v_0}{u_0 + v_0 t}$ que tiende a cero a menos que $v_0 = 0$, en cuyo caso la órbita es el eje u. Como $u = (u_0 + v_0 t)e^{\lambda t}$ tenemos que $\frac{du}{dt} = ((u_0 \lambda + v_0) + \lambda v_0 t)t^{\lambda t}$ y por lo tanto $\frac{du}{dt} = 0$ cuando $t = -\frac{v_0 + u_0 \lambda}{\lambda v_0}$. Luego, excepto para las órbitas en el eje u, toda órbita tiene un máximo y un mínimo en términos de la variable u por lo que se vuelve al origen. El retrato de fase se muestra en la figura 7.11. Si $\lambda > 0$, el retrato de fase es el mismo pero con las flechas en dirección opuesta.

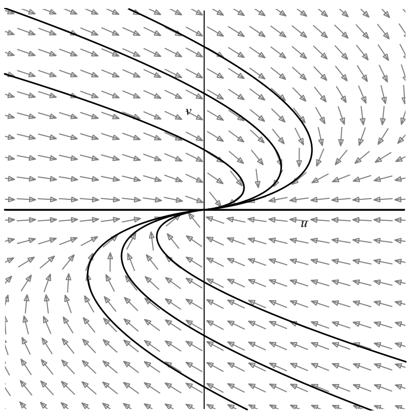


Figura 7.11: Retrato de fase caso III.

Caso IV. La solución es $u = u_0 e^{\lambda t}$, $v = v_0 e^{\mu t}$ como en el caso I pero ahora u es no acotado y $v \to 0$ cuando $t \to +\infty$, en cuyo caso la órbita está en el eje v. el retrato de fase se muestra en la figura 7.12.

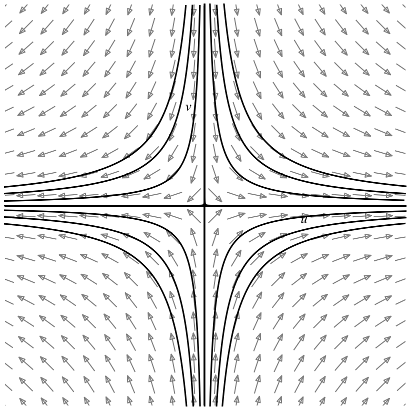


Figura 7.12: Retrato de fase caso IV.

Caso V. El sistema es $u' = \beta v$, $v' = -\beta v$. Entonces tenemos $u'' = \beta v' = -\beta^2 u$ así $u = A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t)$ para algunos A y B. Así, $v = \frac{u'}{\beta} = -A\sin(\beta t) + B\cos(\beta t)$ y $u^2 + v^2 = A^2 + B^2$. Toda órbita es un círculo que gira en sentido horario si $\beta > 0$ y en sentido anti horario si $\beta < 0$. El retrato de fase para $\beta > 0$ se muestra en la figura 7.13.

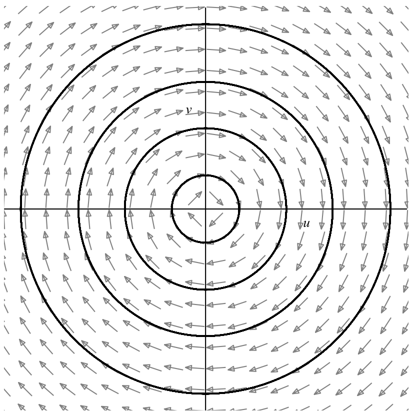


Figura 7.13: Retrato de fase caso V.

Caso VI. El sistema es $u' = \alpha u + \beta v$, $v' = -\beta u + \alpha v$. Haciendo el cambio de variables $u = e^{\alpha t} p$, $v = e^{\alpha t} q$ tal que $u' = \alpha e^{\alpha t} p + e^{\alpha t} p'$, $v' = \alpha e^{\alpha t} q + e^{\alpha t} q'$ se reduce el sistema a $p' = \beta q$, $q' = -\beta p$, el cual se resolvió en el caso

v. Así $u = e^{\alpha t}(A\cos(\beta t) + B\sin(\beta t))$, $v = e^{\alpha t}(B\cos(\beta t) - A\sin(\beta t))$ y $u^2 + v^2 = e^{2\alpha t}(A^2 + B^2)$. Si $\alpha < 0$, $u^2 + v^2$ decrece exponencialmente y las órbitas son espirares hacia el origen en sentido horario si $\beta > 0$ y en sentido anti horario si $\beta < 0$. El retrato de fase se muestra en la figura 7.14. si $\alpha > 0$, el retrato de fase es el mismo con la excepción de que las fechas están al contrario.

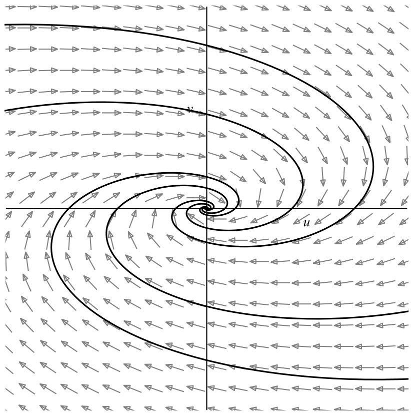


Figura 7.14: Retrato de fase caso VI.

Estos seis casos se pueden clasificar como de cuatro tipos distintos dependiendo del comportamiento de las órbitas:

Nodo. En los casos I a III todas las órbitas se aproximan al origen cuando $t \to +\infty$ (o cuando $t \to -\infty$ dependiendo de los signos de λ y μ) con una dirección límite y el origen se llama un *nodo* del sistema.

Silla. En el caso IV solo dos órbitas se aproximan al origen cuando $t \to \pm\infty$ y las otras órbitas se alejan del origen. En este caso el origen se llama un *punto de silla*.

Foco. En el caso VI toda órbita gira en forma espiral alrededor del origen en el sentido que su argumento angular tiende a $+\infty$ o $-\infty$. El origen en este caso se llama *foco*, *vórtice* o *punto espiral*.

Centro. En el caso V toda órbita es periódica y el origen se llama *centro*.

Ahora, podemos describir el comportamiento asintótico de las soluciones cerca del equilibrio $(0, 0)$ en cada uno de los seis casos anteriores mediante los autovalores de las matrices de coeficiente de estos sistemas. Para el caso general de un sistema 2×2 podemos utilizar esta información para describir el comportamiento de las órbitas de la matriz de coeficientes de un sistema lineal, ya que las matrices semejantes tienen los mismos autovalores.

Comencemos por notar las siguientes características de los autovalores de una matriz A de orden 2×2:

$$\left| \begin{pmatrix} a & b \\ c & b \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = 0.$$

La suma de los autovalores es llamada la *traza* de la matriz, esto es, $a + d$ y el producto de los autovalores es el determinante de la matriz $ad - bc$. Así,

- Los autovalores de A son λ y μ en los casos I y IV.
- λ es un autovalor repetido en los casos II y III.
- Los autovalores son conjugados complejos $\pm i\beta$ en el caso V.
- Los autovalores son $\alpha \pm i\beta$ en el caso VI.

Examinando los retratos de fase en cada uno de estos casos obtenemos la siguiente información sobre el equilibrio $(0, 0)$:

Asintóticamente estable: en el caso I si $\lambda < \mu < 0$, en los casos II y III si $\lambda < 0$ y en el caso VI si $\alpha < 0$.

Asintóticamente inestable: en el caso I si $\lambda > \mu > 0$, en los casos II y III si $\lambda > 0$, en el caso IV y el caso VI si $\alpha > 0$.

Estable pero no asintóticamente estable: caso V.

Obs Una descripción más simple es que el origen es asintóticamente estable si ambos autovalores tienen parte real negativa y es inestable si al menos un autovalor tiene parte real positiva. Si ambos autovalores tiene parte real cero, el origen es estable pero no asintóticamente estable. Como A es invertible, $ad - bc \neq 0$ descarta la posibilidad de que $\lambda = 0$ sea un autovalor, por lo tanto, autovalores con parte real cero solo ocurre si los autovalores son imaginarios puros como en el caso V.

Podemos ser más específicos sobre la naturaleza de las órbitas cerca de un equilibrio. En términos de los elementos de la matriz A podemos caracterizar los casos anteriores de la siguiente manera, teniendo en cuenta que los autovalores son complejos si

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a-d)^2 + 4bc < 0.$$

- Si $|A| = ad - bc < 0$, el origen es un punto de silla.
- Si $|A| > 0$ y la traza $\mathrm{Tr}A = a + d < 0$, el origen es asintóticamente estable, un nodo si $\Delta \geq 0$ y un foco si $\Delta < 0$.
- Si $|A| > 0$ y la traza $a + d > 0$, el origen es inestable, un nodo si $\Delta \geq 0$ y un foco si $\Delta < 0$.
- Si $|A| > 0$ y $\mathrm{Tr}A = a + d = 0$, el origen es un centro.

Usando este análisis podemos establecer la estabilidad de un sistema no lineal mediante su *linealización*.

Teorema 7.13. *Si* (y_1^∞, y_2^∞) *es un equilibrio del sistema* (7.12) *y si todos los autovalores de la matriz de coeficientes de su* linealización *en este equilibrio tienen parte real negativa, de manera más precisa, si*

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(y_1^\infty, y_2^\infty) &= \frac{\partial}{\partial y_1} f_1(y_1^\infty, y_2^\infty) + \frac{\partial}{\partial y_2} f_2(y_1^\infty, y_2^\infty) < 0,\\ |A(y_1^\infty, y_2^\infty)| &= \frac{\partial}{\partial y_1} f_1(y_1^\infty, y_2^\infty) \frac{\partial}{\partial y_2} f_2(y_1^\infty, y_2^\infty) - \frac{\partial}{\partial y_2} f_1(y_1^\infty, y_2^\infty)\\ &\qquad \times \frac{\partial}{\partial y_1} f_2(y_1^\infty, y_2^\infty) > 0,\end{aligned}$$

entonces el equilibrio (y_1^∞, y_2^∞) *es asintóticamente estable.*

Se demuestra que en general el retrato fase en un equilibrio de un sistema no lineal, como (7.14), es semejante al retrato de fase de su *linealización* en el equilibrio, excepto posiblemente si la *linealización* tiene un centro. Esto es válido bajo la suposición que las funciones f_1 y f_2 del sistema (7.14) son suficientemente suaves para poder ser expandidas en polinomios de Taylor y omitir los términos de orden superior.

Si la *linealización* tiene un nodo en un equilibrio, entonces el equilibrio del sistema no lineal también es un nodo definido para significar que toda órbita tiende al equilibrio cuando $t \to \pm\infty$ con una dirección límite. Si la *linealización* tiene un punto foco en un equilibrio, entonces el equilibrio del sistema no lineal también tiene un foco, definido para significar que toda órbita tiende al equilibrio ($t \to \pm\infty$) con su variable angular tendiendo al infinito.

Cuando la *linealización* tiene un punto de silla en un equilibrio, el sistema no lineal también tendrá un punto de silla en el equilibrio. Un punto de silla se define como una curva alrededor del equilibrio tal que las órbitas que comienzan en esta curva tienden al equilibrio, pero las órbitas que comienzan fuera de esta curva no pueden estar cercas del equilibrio. Otra característica es que hay dos órbitas tendiendo al equilibrio cuando $t \to +\infty$ y hay dos órbitas alejándose desde el equilibrio o tendiendo al equilibrio cuando $t \to -\infty$. Estas órbitas se llaman *separatrices*, las dos órbitas que tienden al punto de silla son separatrices estables mientras que las dos órbitas que se alejan del punto de silla son separatrices inestables, las otras órbitas parecen hipérbolas.

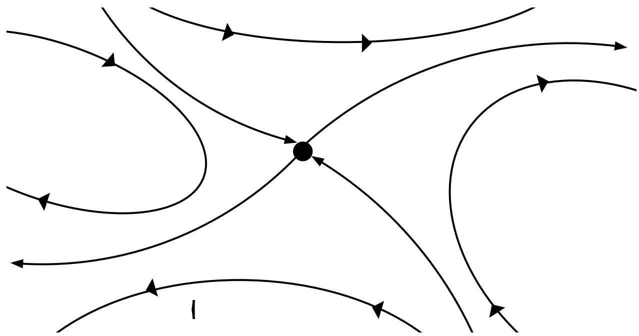


Figura 7.15: Separatrices en un punto de silla.

Un centro se define como un equilibrio para el cual existe una sucesión infinita de órbitas periódicas alrededor del equilibrio con las órbitas acercándose a este equilibrio. Si la *linealización* tiene un centro en el equilibrio, entonces el equilibrio del sistema no lineal no necesariamente es un centro, también puede ser un foco asintóticamente estable o un foco inestable.

Ejemplo 7.21. *Bosquejar el retrato fase de los siguientes sistemas lineales de ecuaciones diferenciales:*

$$1. \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -8y \\ \dfrac{dy}{dt} = 18x \end{cases}. \qquad 2. \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2y \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x \end{cases}.$$

$$3. \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -2x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -5x - 4y \end{cases}. \qquad 4. \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y - 2 \\ \dfrac{dy}{dt} = 4x - 3y - 1 \end{cases}.$$

Solución. 1. Los puntos críticos son $-8y = 0, \quad 18x = 0$ es decir $x = 0$, $y = 0$; por lo tanto $(0, 0)$ es el equilibrio. En la figura 7.16 aparece el campo de direcciones para la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{18x}{-8y}$$

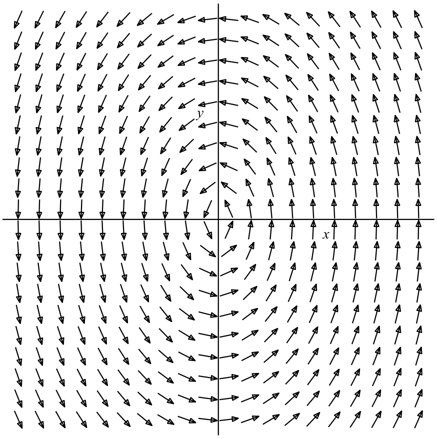


Figura 7.16: Campo de de direcciones de $dy/dx = -18x/8y$.

Como $f(x, y) = -8y$, las trayectorias del semiplano superior ($y > 0$) fluyen hacia la izquierda y viceversa. El determinante de la matriz de coeficiente es $144 > 0$ y la traza es cero, por lo tanto el equilibrio es un centro estable pero no asintóticamente estable. Al resolver la ecuación obtenemos $9x^2 + 4y^2 = c$ lo cual indica que sus trayectorias son elipses que encierran el equilibrio.

2. Los puntos críticos son $2y = 0, \quad 2x = 0$ es decir $x = 0, y = 0$, por lo tanto $(0, 0)$ el único equilibrio del sistema. En la figura 7.17 aparece el campo de direcciones para la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2y} = \frac{x}{y}$$

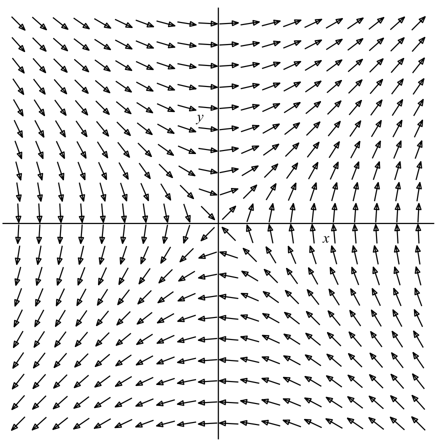


Figura 7.17: Campo de de direcciones de $dy/dx = x/y$.

Como $f(x, y) = 2y$, las trayectorias del semiplano superior ($y > 0$) fluyen hacia la derecha y viceversa. Al resolver la ecuación obtenemos $y^2 - x^2 = k$ lo cual indica que sus trayectorias son hipérbolas, que encierran al equilibrio. El determinante de la matriz de coeficientes es $-4 < 0$ y así el origen es un punto de silla inestable pues los autovalores de la matriz de coeficientes son ± 2.

3. Los equilibrios se hallan resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} -2x + y = 0 \\ -5x - 4y = 0 \end{cases}$$

de donde $x = 0$, $y = 0$, son el conjunto de puntos críticos, por lo tanto $(0, 0)$ es el punto crítico. En la figura 7.18 aparece el campo de direcciones para la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-5x - 4y}{-2x + y}. \tag{7.16}$$

Observe que las soluciones fluyen hacia la derecha para el semiplano $-5x - 4y > 0$; es decir, para todos los puntos debajo de la recta $-5x - 4y = 0$. El determinante de la matriz de coeficientes de este sistema es $3 > 0$, la traza $-6 < 0$ y $\Delta = 24 > 0$, por lo tanto el origen es un nodo asintóticamente estable.

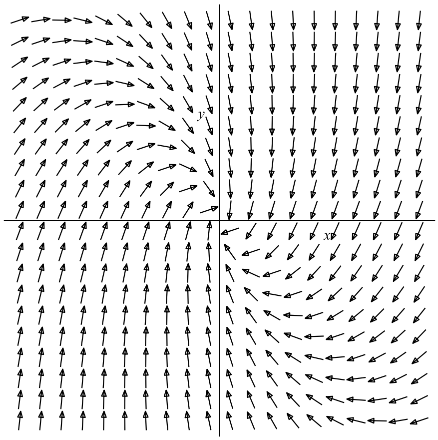


Figura 7.18: Campo de de direcciones de (7.16).

4. Los equilibrios se hallan resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 5x - 3y - 2 = 0 \\ 4x - 3y - 1 = 0 \end{cases}$$

de donde $x = 1$ y $y = 1$ son los puntos críticos, por lo tanto $(1, 1)$ es el único equilibrio. El campo de direcciones para la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 3y - 1}{5x - 3y - 2} \tag{7.17}$$

aparece en la figura 7.19, en donde se dibujaron algunas órbitas separatrices del sistema.

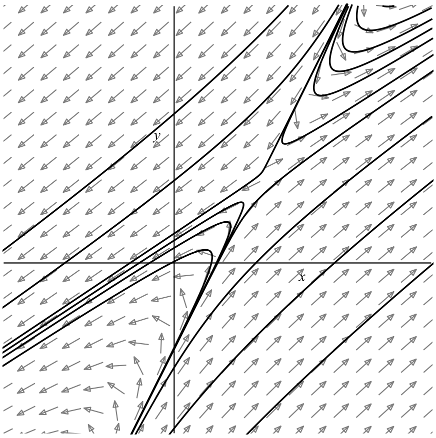


Figura 7.19: Campo de direcciones de (7.17) y órbitas del sistema.

Observe que las soluciones del sistema fluyen hacia la derecha para el semiplano $4x - 3y - 1 > 0$, es decir para todos los puntos debajo de la recta $4x - 3y - 1 = 0$.

☑

Ejemplo 7.22. *Determinar si los equilibrios del sistema son estables o inestables*

$$x' = y, \qquad y' = 2(x^2 - 1)y + x.$$

Solución. Los puntos críticos son las soluciones de $y = 0$ y $2(x^2 - 1)y + x = 0$. El equilibrio así es $(x^\infty, y^\infty) = (0, 0)$. La matriz de coeficientes del sistema en el equilibrio es

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2((x^\infty)^2 - 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

El determinante es negativo, luego el origen es un punto de silla inestable. La figura 7.20 muestra el retrato de fase del sistema con algunas separatrices.

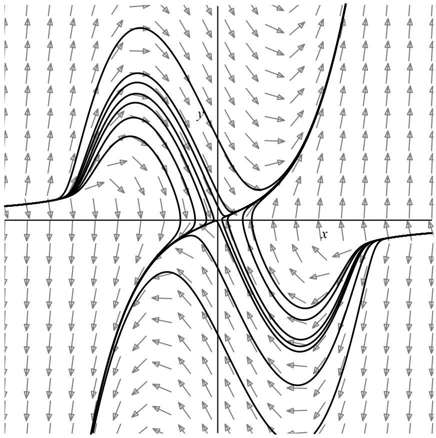


Figura 7.20: Retrato de fase del sistema no lineal y algunas separatrices.

☑

Ejemplo 7.23. *Determinar si los equilibrios del sistema de Lotka-Volterra dado en el ejemplo 7.20 son estables o inestables.*

Solución. En el ejemplo 7.20 vimos que los equilibrios son $(0, 0)$ cuya matriz de coeficientes de la *linealización* es

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix}.$$

Como el determinante es negativo, $(0, 0)$ es inestable. Para el equilibrio $\left(\frac{\mu}{c}, \frac{\lambda}{b}\right)$, la matriz de la "linealización" es

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{b\mu}{c} \\ \frac{c\lambda}{b} & 0 \end{pmatrix}$$

con traza cero, es decir, el equilibrio es un centro. Este caso no lo contempla el teorema 7.13. Sin embargo, resolviendo la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-\mu + cx)}{x(\lambda - by)}$$

obtenemos la solución $-\mu \ln |x| - \lambda \ln |y| + cx + by = k$ y todas las órbitas son dadas implícitamente por esta ecuación. Hacemos el cambio de variable $x = \mu/c + u, y = \lambda/b + v$ obtenemos:

$$-\mu \ln \left|\frac{\mu}{c} + v\right| - \lambda \ln \left|\frac{\lambda}{b} + v\right| + c\left(\frac{\mu}{c} + u\right) + b\left(\frac{\lambda}{b} + v\right) = k.$$

Note:

$$\ln\left|\frac{\mu}{c}+u\right| = \ln\left|\frac{\mu}{c}\right| + \ln\left|1+\frac{cu}{\mu}\right|$$

y si $k-k_0$ es pequeño podemos usar la expresión $\ln(1+x) \approx x - x^2/2$ para aproximar esta expresión por

$$\ln\left|\frac{\mu}{c}\right| + \frac{cu}{\mu} - \frac{c^2u^2}{\mu^2}.$$

De igual manera, podemos aproximar $\ln|\lambda/b+v|$ por $\ln|\lambda/b| + bv/\lambda - b^2v^2/\lambda^2$. De esta forma las órbitas se pueden aproximar por

$$-\ln\left|\frac{\mu}{c}\right| - cu + \frac{c^2}{\mu}u^2 - \lambda\ln\left|\frac{\lambda}{b}\right| - bv + \frac{b^2}{\lambda}v^2 + \mu + cu + \lambda + bv = h,$$

o equivalentemente

$$\frac{c^2}{\mu}u^2 + \frac{b^2}{\lambda}v^2 = h + \mu\ln\left|\frac{\mu}{c}\right| + \lambda\ln\left|\frac{\lambda}{b}\right| - \mu - \lambda = h - h_0,$$

lo cual representa una elipse si $h > h_0$ con el equilibrio (x^∞, y^∞) como su centro. Esto muestra que para $h-h_0$ pequeño y positivo las órbitas son curvas cerradas alrededor del equilibrio; como las soluciones viajan a través de una curva cerrada, están deben ser periódicas. Así este equilibrio no es asintóticamente estable ni inestable. Este tipo de equilibrio es llamado *neutralmente estable*. ☑

Ejercicios

1. Determinar si los equilibrios de los sistemas dados son asintóticamente estables o inestables:
   a) $y_1' = y_1 - y_2,\ y_2' = y_1 + y_2 - 2.$
   b) $y_1' = y_2,\ y_2' = y_1 + y_2 - 1.$
   c) $y_1' = e^{-y_2},\ y_2' = e^{-y_1}.$
2. Determinar el comportamiento de las órbitas de los siguientes sistemas:
   a) $x' = x(\lambda - ax - by),\ y' = y(\mu - cx - dy).$
   b) $x' = x(\lambda - ax - by),\ y' = y(\mu + cx).$
   c) $x' = y,\ y' = -x - y^3.$
3. La dinámica de un sistema biológico de lapas y algas marinas es dada por el siguiente sistema:

$$\frac{ds}{dt} = s - s^2 - sl$$

$$\frac{dl}{dt} = sl - \frac{l}{s} - \frac{l^2}{s}$$

donde las densidades de las algas y las lapas son dadas por $l \leq 0$ y $s \geq 0$ respectivamente.

a) Determinar los equilibrios del sistema.

b) Para cada equilibrio diferente de cero, evaluar su estabilidad. y clasificarla como un nodo, foco o punto de silla.

c) Dibujar el retrato de fase.

4. Discutir el comportamiento cualitativo de los siguientes modelos epidemiológicos:

a)

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta S\frac{1}{N} + \gamma I\\ \frac{dI}{dt} &= \beta S\frac{1}{N} - \gamma I\\ N &= S + I.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta S\frac{1}{N}\\ \frac{dI}{dt} &= \beta S\frac{1}{N} - \gamma I\\ \frac{dR}{dI} &= \gamma I\\ N &= S + I + R.\end{aligned}$$

5. Una modificación de la ecuación logística que modela dos especies interactuando en mutualismo es dada por el sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= rx\left(1 - \frac{x}{k_1 + ay}\right)\\ \frac{dy}{dt} &= ry\left(1 - \frac{y}{k_2 + bx}\right)\end{aligned}$$

con a, b, k_1, k_2 constantes positivas. Demostrar que el equilibrio de las poblaciones es positivo si $ab < 1$ y que si esta condición se satisface, el equilibrio es localmente asintóticamente estable.

6. Dibujar el retrato de fase de los siguientes sistemas de ecuaciones y clasificar la estabilidad del equilibrio $(0, 0)$:

a) $x' = 3x - 2y,\ \ y' = 4x + y.$

b) $x' = 5x + 2y,\ \ y' = -13x - 5y.$
c) $x' = -x - y,\ \ y' = \frac{8}{5}x - y.$
d) $x' = -5x + 3y,\ \ y' = x + y.$
e) $x' = 2x + 2y,\ \ y' = 6x + 3y.$

7. Determinar el comportamiento de las soluciones cerca del origen del sistema para diferentes valores del parámetro a

$$\frac{dx}{dt} = 3x + ay, \qquad \frac{dy}{dt} = x + y.$$

Respuesta de ejercicios seleccionados

1. *a*) (1, 1) inestable.
   c) no hay equilibrios.
2. Las órbitas dependen de los valores de los parámetros.
6. *a*) El retrato fase se muestra en la siguiente figura:

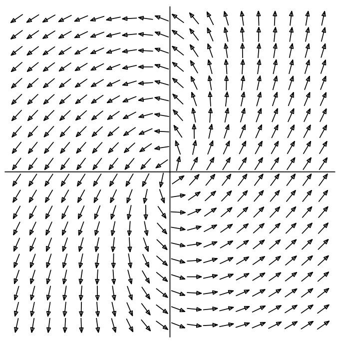


Figura 7.21: Retrato de fase de $x' = 3x - 2y$, $y' = 4x + y$.

d) El retrato fase se muestra en la siguiente figura:

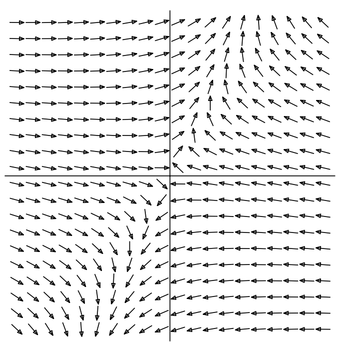


Figura 7.22: Retrato de fase de $x' = -5x + 3y$, $y' = x + y$.

6. Estabilidad de soluciones en Maxima

Maxima dibuja el campo de direcciones de una ecuación diferencial de primer orden así como el plano fase de un sistema de dos ecuaciones autónomas de primer orden. Podemos usar esto para analizar el comportamiento asintótico de las soluciones de equilibrio de una ecuación o sistema. Las funciones para dibujar esto son

```
plotdf(dydx, . . .  opciones . . . )
plotdf(dvdu, [u,v], . . .  opciones . . . )
plotdf([dxdt, dydt], . . .  opciones . . . )
plotdf([dudt, dvdt], [u, v], . . .  opciones . . . )
```

`plotdf` puede usado desde la consola o cualquier otra interfaz para Maxima, pero utiliza Xmaxima para hacer el gráfico; por lo tanto, se requiere tener instalado Xmaxima para poder usar esta función.

`drawdf` es otra función que dibuja campos de direcciones, esta función es parte del paquete adicional `drawdf` y por tanto este se debe cargar:

```
load(drawdf)$
drawdf(dydx, ...opciones y objetos...)
drawdf(dvdu, [u,v], ...opciones y objetos...)
drawdf(dvdu, [u,umin,umax], [v,vmin,vmax], ...opciones y objetos
...)
drawdf([dxdt,dydt], ...opciones y objetos...)
drawdf([dudt,dvdt], [u,v], ...opciones y objetos...)
drawdf([dudt,dvdt],[u,umin,umax],[v,vmin,vmax],...opciones y
 objetos)
```

Para hacer el campo de direcciones de una ecuación diferencial de primer orden esta debe estar escrita de la forma

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

y un sistema de ecuaciones debe ser escrito como

$$\frac{dx}{dt} = G_1(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = G_2(x, y).$$

Si las dos variables no son x y y, entonces el segundo argumento de estas funciones debe ser una lista `[var_ind,var_dep]` indicando las variables, la primera en el eje horizontal y la segunda en el eje vertical. Para el caso de sistemas de ecuaciones diferenciales el primer argumento debe ser una lista con las dos funciones G_1 y G_2, la primera expresión en esta lista se tomará como la variable representada en el eje horizontal y la segunda en el eje vertical.

Los otros argumentos en estas funciones son opciones gráficas: aquellas implementadas por Xmaxima para la función `plotdf` y las implementadas por `draw2d` y `gr2d` del paquete `draw` para la función `drawdf`.

Los objetos gráficos permiten, entre otras cosa, graficar soluciones particulares que pasen por algún punto predeterminado, puntos estables y definir el valor inicial de la variable independiente .

Ejemplo 7.24. *Veamos el campo de direcciones de la ecuación diferencial:*

$$\frac{dy}{dx} = xy^2 - x^2y.$$

Para esto usemos `plotdf`

```
(%i1) plotdf(x*y^(2)-x^(2)*y,[y, -3, 3],[x,-3,3],[nsteps,3000],
[tstep,0.001] ,[box,false])$
```

Usamos `Plot Setup` *para obtener algunas curvas trayectorias:*

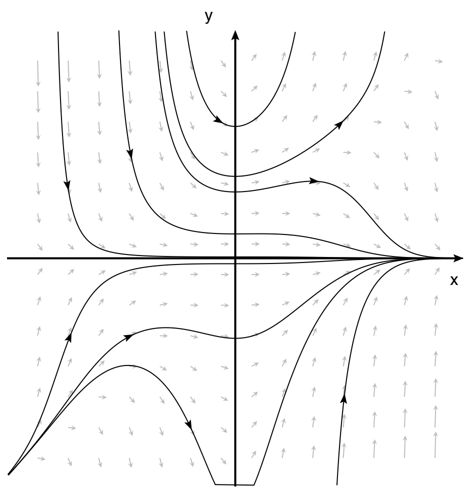


Figura 7.23: Campo de pendientes de $dy/dx = xy^2 - x^2y$ junto con algunas trayectorias.

☑

Ejemplo 7.25. *Veamos el comportamiento asintótico de los equilibrio de la ecuación diferencial autónoma*

$$\frac{dy}{dx} = 3y^2 + 2y - 1.$$

De la definición de solución de equilibrio de una ecuación diferencial autónoma, debemos hallar las soluciones de la ecuación $3y^2 + 2y - 1 = 0$*,*

```
(%i1) solve(3*y^(2)+2*y-1=0,y);
(%o1) [y=1/3, y=-1]
```

los equilibrios son $y_1^\infty = -1$ *y* $y_2^\infty = 1/3$*. Veamos el campo de direcciones de la ecuación diferencial:*

```
(%i2)plotdf(3*y^(2)+2*y-1,[y, -2, 2],[x,-2,2],[nsteps,3000],
[tstep,0.001], [box,false])$
```

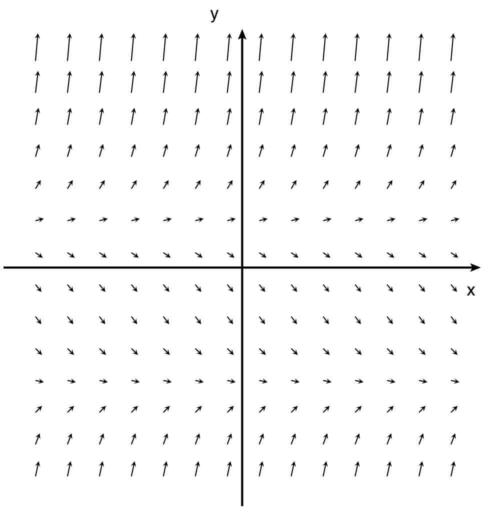


Figura 7.24: Campo de pendientes de $dy/dx = 3y^2 + 2y - 1$.

Vemos que las soluciones cercanas a $1/3$ *se alejan de esta cuando* $x \to \infty$*, mientras que las soluciones cerca* -1 *se mantienen cerca de ella para* $x \to \infty$*. Podemos verificar esto mediante el teorema 2.4.*

```
(%i3) diff(3*y^(2)+2*y-1,y);
(%o3) 6y+2
```

Evaluando en $y = 1/3$ *tenemos que la derivada vale* $4 > 0$ *y para* $y = -1$ *toma el valor de* $-4 < 0$*, es decir, el equilibrio* $1/3$ *es una fuente y el equilibrio* -1 *es un pozo.* ☑

Por el análisis hecho en la sección 5, podemos conocer el comportamiento asintótico de las órbitas de sistemas lineales 2×2 en el origen mediante el valor de los autovalores de la matriz de coeficientes. El teorema 7.12 nos da la forma de todas las posibles matrices semejantes a una matriz 2×2 dada; así describimos todos los posibles retratos de fase de este tipo de matriz y el correspondiente comportamiento asintótico de sus órbitas. En Maxima la función `plotdf` representa estas órbitas.

Ejemplo 7.26. *Analicemos el comportamiento asintótico de las órbitas del sistema*

$$\begin{cases} x' = & 2x - 3y \\ y' = & 2x \end{cases}.$$

Usando `plotdf` *vemos el retrato de fase de este sistema*

```
(%i1) load(plotdf)$

(%i2) plotdf([2*x-3*y,2*x]);
```

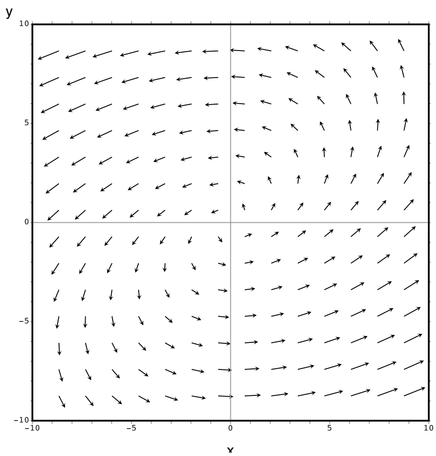


Figura 7.25: Retrato de fase de $x' = 2x - 3y$, $y' = 2x$.

Vemos que estamos en el caso VI *descrito en la página 367, luego el origen es un foco. Calculemos los autovalores de la matriz de coeficientes*

```
(%i2) eigenvalues(matrix([2,-3],[2,0]));
```
(%o2) $[[1 - \sqrt{5} * \%i, \sqrt{5} * \%i + 1], [1, 1]]$

como la parte real del autovalor es positiva, concluimos que el equilibrio $(0, 0)$ *es asintóticamente inestable.* ☑

Consideremos ahora un sistema no lineal.

Ejemplo 7.27. *Sea el sistema no lineal*

$$\begin{cases} x' = & -4xy + y \\ y' = & 2x - 3y^2 \end{cases}.$$

Maxima dibuja el retrato de fase de sistemas de este tipo: `(%i1) load(plotdf)$`

```
(%i2) plotdf([-4*x*y+y,2*x-3*y^(2)]);
```

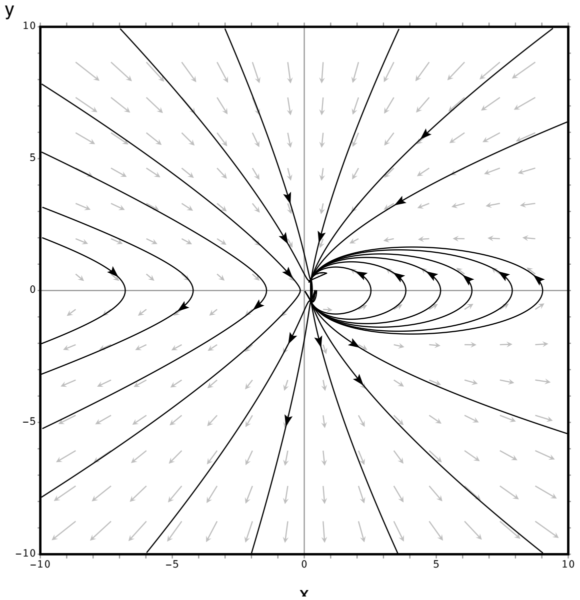


Figura 7.26: Retrato de fase del sistema no lineal $x' = -4xy+y$, $y' = 2x-3y^2$.

El origen $(0, 0)$ *es un equilibrio de este sistema. Sabemos que los equilibrios de la "linealización" y los equilibrios del sistema no lineal tienen el mismo comportamiento (con la posible excepción de los centros, ver p. 369). Veamos las características del origen en el sistema* linealizado.

El sistema lineal, en el origen, asociado a este sistema es (verificarlo)

$$\begin{cases} x' = & y \\ y' = & 2x \end{cases}.$$

```
(%i3) plotdf([y,2*x]);
```

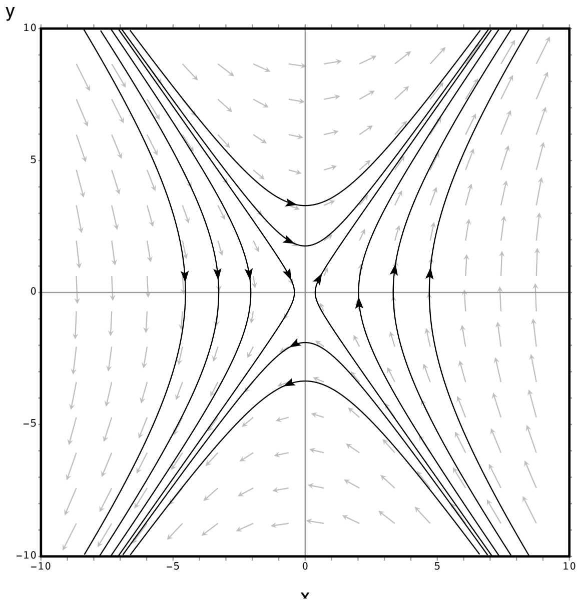


Figura 7.27: Retrato de fase del sistema lineal $x' = y$, $y' = 2x$.

El origen es un punto de silla (caso IV*), así la figura 7.26 muestra algunas separatrices estables y otras inestables.* ☑

7. Algunos métodos numéricos en Maxima

Como hemos visto, muchas ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales no tienen una solución analítica sencilla; por esto, los métodos cualitativos, que permiten conocer el comportamiento de las soluciones de estas ecuaciones (y sistemas) son de gran utilidad en el estudio de ecuaciones diferenciales. Otra técnica que permite conocer el comportamiento de las eventuales soluciones de una ecuación o sistema de ecuaciones diferenciales son los llamados *métodos numéricos* con los cuales podemos dar algún tipo de soluciones aproximadas del problema en estudio, aprovechando la capacidad de cómputo de las computadoras. Los fundamentos matemáticos de estos métodos escapan del objetivo de este texto puesto que nuestro interés en esta sección es implementar en Maxima dos de los métodos más conocidos para hallar soluciones aproximadas de ecuaciones diferenciales. Para una mayor exposición sobre el tema recomendamos [6, 7, 9].

Consideremos el problema de valor inicial

$$y' = f(t, y), \qquad t \geq t_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

La idea principal de los métodos numéricos consiste en hallar un valor aproximado de la eventual solución $y(t)$ para algunos valores $t_0, y_1, \ldots, t_n$ en $[t_0, T]$ y luego aproximar el valor de $y(t)$ mediante una función interpolante entre estos puntos. Si queremos calcular la solución en un intervalo $[t_0, T]$, lo más sencillo es dividir este intervalo en n subintervalos uniformes

$$T = t_0 + nh,$$

donde h es la longitud de cada subintervalo $h = \frac{T - t_0}{n}$. Queremos hallar los valores $y_i := y(t_i) = y(t_0 + ih)$, $i = 1, \ldots, n$ partiendo de la condición inicial y_0 en t_0. Así, dividimos el problema de valor inicial global en problemas locales de valor inicial definidos en los subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$

$$y_i' = f(t, y_i), \qquad t \geq t_i, \quad y_i(t_i) = y_i.$$

Cada uno de estos problemas locales determina una solución aproximada $y_i(t)$ que pasa por y_i en el punto t_i y que puede seguirse hasta el punto t_{i+1}, donde toma el valor $y_i(t_{i+1})$. De esta forma, para calcular una aproximación y_i, $i = 1, \ldots, n$ del problema de valor inicial global debemos resolver aproximadamente cada uno de los problemas locales mediante algún algoritmo o fórmula que nos de un valor aproximado de $y_i(t_{i+1}) = y_{i+1}$ a partir del valor y_i o de varios valores previos y_k con $k \leq i$. Queremos hacer notar que estos problemas locales no son independientes en el sentido que la solución de cada uno de ellos depende de la solución hallada en los problemas anteriores con la condición inicial y_i, y todos dependen de la condición inicial y_0 y de la fórmula o algoritmo utilizado. Por esto, cada aproximación o cada paso introduce un error y termina en una trayectoria diferente, así que también se quiere conocer como se acumulan estos errores.

Un método numérico para un problema de valor inicial consiste en una fórmula que asigna un valor a y_{i+1} a partir de y_i, o de varios y_k con $k \leq i$, de tal manera que estos valores y_{i+1} aproximen la solución exacta del problema local, es decir, $y_{i+1} \approx y_i(t_{i+1})$.

Definición 7.9 (Error global). Dado un problema de valor inicial $y' = f(t, y)$ con $y(0) = y_0$ y aproximaciones numéricas $y_n \approx y(t_n)$. La diferencia

$$e_n = y_n - y(t_n)$$

es llamada error global. La diferencia

$$\hat{e}_{n+1} = y_{n+1} - \hat{y}(t_{n+1})$$

es llamada error local, donde $\hat{y}$ es la solución de $d\hat{y}/dt = f(t, \hat{y})$ con la condición inicial $\hat{y}(t_n) = y_n$.

Obs

Note que el error local es un error en la aproximación numérica, que se introduce en un único paso; digamos en t_n, los valores e_n y $\hat{y}(t_n)$ son idénticos. El error global, sin embargo, es un error en t_n que se ha acumulado durante n pasos de integración. Este es el error natural que se observa cuando se hacen cálculos numéricos. Para estimar el error global, primero se analiza el error local y luego se estudia como los errores locales se acumulan durante muchos pasos de integración. Los errores locales se pueden analizar mediante la expansión de Taylor.

Definición 7.10 (Orden de convergencia). El orden de convergencia de un método es p, si el error global satisface que

$$|e_n| = O(h^p), \quad h \to 0;$$

esto significa que existe una constante $M > 0$ tal que $|e_n| \leq M|h^p|$ cuando $h \to 0$.

7.1. El método de aproximación de Euler

En esta sección estudiaremos un primer método numérico para aproximar las soluciones de problemas de valores iniciales de primer orden. El método de Euler, también llamado método de las tangentes, que hace uso del significado geométrico de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden para aproximar la solución del problema de valor inicial mediante curvas poligonales.

Consideremos el problema de valor inicial en el intervalo $[t_0, T]$:

$$y' = f(t, y), \qquad t \geq t_0, \quad y(t_0) = y_0.$$

Dividimos el intervalo $[t_0, T]$ en subintervalos $[t_i, t_{i+1}]$ de igual longitud h y consideremos la ecuación diferencial en $[t_i, t_{i+1}]$

$$y' = f(t, y),$$

integrando esta ecuación y usando el teorema fundamental del cálculo tenemos que

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_i+1} f(t, y(t))dt. \tag{7.18}$$

Ahora aproximamos esta integral por el rectángulo de base la longitud del intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ la cual es h y altura el punto $f(t_i, y(t_i))$,

$$\int_{t_i}^{t_i+1} f(t, y(t))dt \approx hf(t_i, y(t_i)).$$

De aquí concluimos:

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) - y(t_i) &\approx hf(t_i, y(t_i)) \\ y(t_{i+1}) &\approx y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)). \end{aligned}$$

Denotando por y_i esta aproximación de la solución $y(t_i)$ en el punto t_i, reescribimos la fórmula anterior como la recurrencia

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \tag{7.19}$$

usando la condición inicial $y_0 = y(t_0)$. La recurrencia anterior nos da un algoritmo para calcular las aproximaciones $y_1, y_2, \ldots$ en $t_1, t_2, \ldots$ La aproximación discreta $y_0, y_1, \ldots$ es llamada una solución numérica del problema de valor inicial y los segmentos que unen estos puntos aproximan al gráfico de la solución exacta. Note que a mayor número de aproximaciones (esto es, para h cada vez pequeño) obtenemos una mejor aproximación.

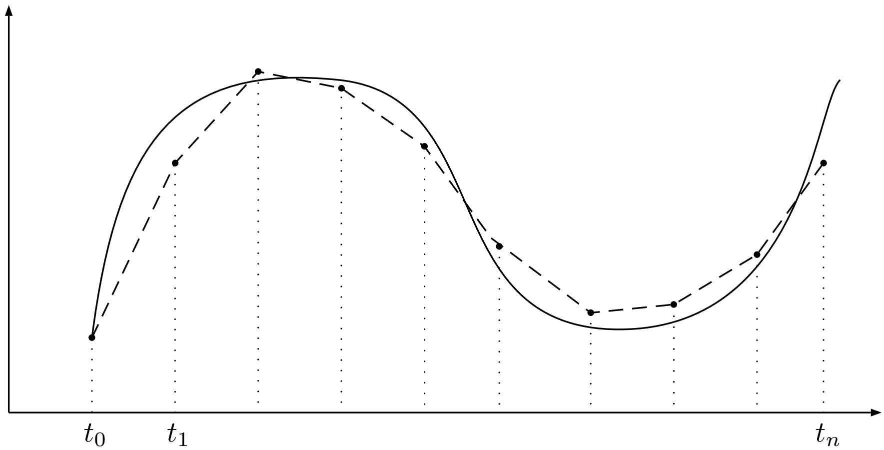


Figura 7.28: La curva muestra la solución exacta de una ecuación diferencial y los puntos son las aproximaciones numéricas para un conjunto discreto de valores de t.

Queremos ver cuán buena es esta aproximación al hacer la aproximación $y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + hf(t_i, y(t_i))$. Consideremos la ecuación diferencial

$$y' = -100y.$$

La solución de esta ecuación es $y(t) = y_0 e^{-100t}$. Con una condición inicial y_0 positiva tenemos que esta función decrece rápidamente a cero cuando $t \to +\infty$. Si aplicamos el método de Euler a esta ecuación tenemos:

$$y_{i+1} = (1 - 100h)y_i.$$

Con un tamaño del paso $h = 0,1$ la "aproximación" numérica nos queda como $y_{i+1} = -9y_i$ y obtenemos la recurrencia

$$y_i = (-9)^i y_0$$

la cual oscila con una amplitud exponencialmente creciente. Esta solución numérica no se aproxima a la solución $y(t)$. Si reducimos el tamaño del paso $h = 0,001$, el método de Euler queda como $y_{i+1} = 0,9y_i$ y obtenemos la recurrencia

$$y_i = (0,9)^i y_0$$

la cual decae suavemente y aproxima mejor. Esto muestra que para obtener aproximaciones razonables, el tamaño del paso en el método de Euler se debe escoger suficientemente pequeño -que tan pequeño depende de la ecuación diferencial.

Queremos cuantificar la condición en el tamaño del paso. A modo de motivación consideremos la ecuación diferencial

$$y' = \lambda y, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

La solución de esta ecuación es $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ la cual se mantiene acotada si $\lambda < 0$

$$|y(t)| = |y_0||e^{\lambda t}|.$$

En este caso es razonable pedir que la solución numérica también se mantenga acotada. El método de Euler en este caso produce la recurrencia

$$y_{i+1} = (1 + h\lambda)y_i$$

o

$$y_i = (1 + h\lambda)^i y_0$$

como queremos que esté acotada, entonces es necesario que $|1 + h\lambda| \leq 1$. El método de Euler es llamado estable para esta ecuación si el tamaño de h satisface que $|1 + h\lambda| \leq 1$; es decir, si $h \leq -2/\lambda$. El conjunto

$$S = \{\lambda \in \mathbb{R} \ : \ |1 + h\lambda| \leq 1\}$$

es llamado la región de estabilidad del método de Euler.

Analicemos ahora el error global del método de Euler. Consideremos:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i).$$

Introducimos la condición inicial para $\hat{y}$:

$$y_{i+1} = \hat{y}(t_i) + hf(t_i, \hat{y}(t_i)). \tag{7.20}$$

Hacemos una expansión de Taylor para $\hat{y}$:

$$\hat{y}(t_{i+1}) = \hat{y}(t_i) + h\frac{d\hat{y}(t_i)}{dt} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2\hat{y}(t_i)}{dt^2} + \cdots .$$

Usando la ecuación diferencial para $\hat{y}$ obtenemos:

$$\hat{y}(t_{i+1}) = \hat{y}(t_i) + hf(t_i, \hat{y}(t_i)) + \frac{h^2}{2}\frac{d^2\hat{y}(t_i)}{dt^2} + \cdots \tag{7.21}$$

Restando la ecuación (7.21) de (7.20) tenemos el error global para el método de Euler

$$\hat{e}_{i+1} = -\frac{h^2}{2}\frac{d^2\hat{y}(t_i)}{d^2t} + \cdots$$

La acumulación de todos los errores globales durante cada paso determina el error global, que se observa después de muchas iteraciones. Para investigar el error global restamos la expansión de Taylor de la solución exacta:

$$\begin{aligned} y(t_{i+1}) =& y(t_i) + hy' + \frac{h^2}{2}y''(t_i) + \cdots \\ =& y(y_i) + hf(t_i, y(t_i)) + \frac{h^2}{2}y''(t_i) + \cdots , \end{aligned}$$

del método de Euler hacemos:

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$$

esto nos da la recursión del error:

$$e_{i+1} = e_i + hf(t_i, y(t_i) + e_i) - hf(t_i, y(t_i)) - \varepsilon_{i+1}$$

donde $\varepsilon_{i+1} = \frac{h^2}{2}y''(t_i) + \cdots$ es llamado el incremento del error global. Note que $\hat{e}_{i+1} \neq \varepsilon_{i+1}$; sin embargo, ambos tienen el mismo orden $|\hat{e}_{i+1}| = | = O(h^2) = |\varepsilon_{i+1}|$, ya que para cualquier serie de potencias convergente $\sum_{s=0}^{\infty} a_s x^s$ en un intervalo $|x| < r$, entonces para cualquier n fijo se cumple que $\sum_{s=n}^{\infty} a_s x^s = | = O(x^n)$ en algún intervalo $|x| < \rho$, con $\rho < r$ (ver, [13]).

Ahora, recordemos que del teorema de existencia y unicidad (teorema 2.1) la función $f(t,y)$ cumple que $\frac{\partial f}{\partial y}$ es continua, esto es equivalente a decir que existe $K > 0$ tal que

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leq K|y_1 - y_2|, \quad \text{para todo } y_1, y_2.$$

Esta condición es llamada la *condición de Lipschitz* en la segunda variable, y una cualquier función que la cumpla es llamada *función lipschiziana*, (ver [16]).

Así:

$$\begin{aligned} |e_{i+1}| =& |e_i + hf(t_i, y(t_i) + e_i) - hf(t_i, y(t_i)) - \varepsilon_{i+1}| \\ \leq& |e_i| + h|f(t_i, y(t_i) + e_i) - f(t_i, y(t_i))| + |\varepsilon_{i+1}| \\ \leq& |e_i| + Kh|e_i| + |\varepsilon_{i+1}|. \end{aligned}$$

Para obtener una cota explícita para $|e_n|$ aplicamos el siguiente resultado.

Lema 7.14 (Lema de Gronwall discreto). *Sea* $a_{n+1} \leq (1 + h\mu)a_n + b$ *con* $h > 0$*,* $\mu > 0$*,* $b > 0$ *y* $a_0 = 0$*. Entonces*

$$a_n \leq \frac{b}{h}\frac{e^{t_n \mu} - 1}{\mu}, \quad t_n = nh.$$

Para el error global del método de Euler tenemos la cota:

$$|e_n| \leq \frac{h \max|y''|}{2}\frac{e^{t_n K} - 1}{K}.$$

Para cualquier nivel fijo $t_n = nh$, el error global decrece linealmente con h:

$$|e_n| = | = O(h), \quad h \to 0.$$

Esto es, el método de Euler es convergente de orden 1.

Note que el incremento del error global para el método de Euler es de segundo orden $|\varepsilon_n| = | = O(h^2)$. La acumulación de este incremento sobre $n = | = O(h^{-1})$ pasos causa que el orden de convergencia del error global decrezca en 1.

Veamos un programa en Maxima para calcular la solución aproximada de un problema de valor inicial mediante el método de Euler. La fórmula de recurrencia (7.19) se puede escribir en Maxima como

```
t[k]:t[0]+k*h,y[k]:y[k-1]+h*f(t[k-1],y[k-1]))$
```

donde `k` es el número de pasos o divisiones del intervalo $[t_0, T]$, y `t[0]` es t_0.

Ejemplo 7.28. *Hallemos una solución aproximada del problema de valor inicial*

$$y' = \sin(t), \quad y(0) = 1, \quad en\ [0, \pi].$$

Haremos una partición del intervalo $[0, \pi]$ *en 10 subintervalos:*

```
(%i1) numer: true$ T: %pi$ N:10$ h:T/N$ t[0]:0$
define(f(t,y),sin(t))$ y[0]:1$ for k:1 thru 10 do
(t[k]:t[0]+k*h,y[k]:y[k-1]+h*f(t[k-1],y[k-1]))$
```

generamos la lista de estos valores y mostramos el resultado mediante la siguiente orden

```
(%i2) print(”sol aproximada: ”, sol:makelist([t[j],y[j]],j,0,N
))$ sol aproximada: [[0,1],[0.3141592653589793,1.0],
[0.6283185307179586,1.097080551936273],
[0.9424777960769379, 1.281738734985319],
[1.256637061435917,1.535898919601082],
[1.570796326794897,1.834682136075237],
[1.884955592153876, 2.148841401434217],
[2.199114857512855,2.447624617908372],
[2.513274122871834,2.701784802524135],
[2.827433388230814, 2.886442985573181],
[3.141592653589793,2.983523537509454]]
```

hacemos el gráfico de estos puntos que representa la solución aproximada de la ecuación

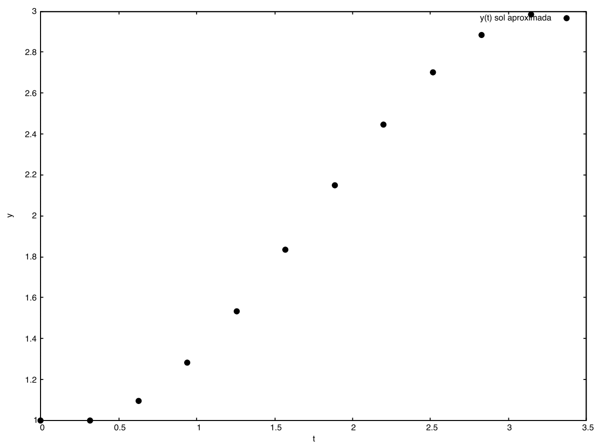


Figura 7.29: Los 10 valores aproximados de la solución del PVI $y' = \sin(t)$, $y(0) = 1$.

```
(%i2) plot2d([discrete,sol],[style,[points,2,2]],[color,black],
[axes,true],[xlabel,"t"],[ylabel,"y"],[legend,"y(t) sol
aproximada"])$
```

Sabemos que la solución de este problema de valor inicial es $y(t) = -\cos(t) + 2$. Comparemos los gráficos de la solución exacta y la solución aproximada.

```
(%i3) plot2d([[discrete,sol],-cos(t)+2],[t,0, %pi],[color, black]
,[style,[points,2,2], [lines,1,1]],[legend,"sol aproximada",
"sol exacta"], [xlabel,"t"], [ylabel,"y"]);
```

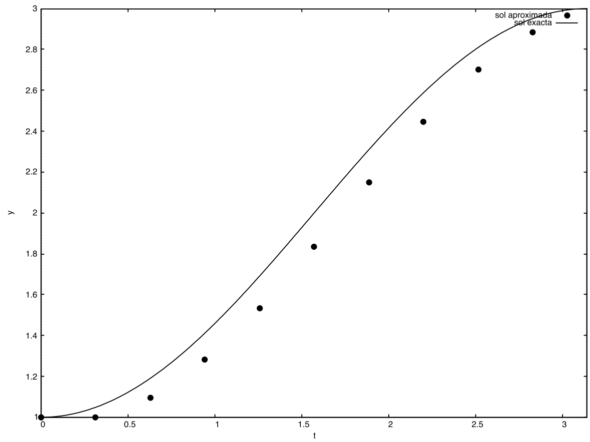


Figura 7.30: La solución exacta y la aproximada del PVI $y' = \sin(t), y(0) = 1$.

☑

Obs La siguiente función muestra la solución aproximada de un problema de valor inicial mediante el método de Euler.

```
SolAproxEuler(N,t,T,y,f)
N=número de puntos de la solución aproximada.
t=punto inicial del intervalo
T=punto final del intervalo
y=valor de la condición inicial (y(t)=y)
f=la función f(t,y) en la ecuación diferencial

SolAproxEuler(N,t,T,y,f):=block(numer:true, h:(T-t)/N, t[0]:t,
y[0]:y, for k:1 thru N do
(t[k]:t[0]+k*h,y[k]:y[k-1]+h*f(t[k-1],y[k-1])),
sol:makelist([t[j],y[j]],j,0,N),
plot2d([discrete,sol],[style,[points,1,1]],[color,black],
[axes,true], [xlabel,"t"], [ylabel,"y"],
[legend,"y(t) sol aproximada"]))$
```

Ejemplo 7.29. *Hallemos la solución aproximada del problema de valor inicial*

$$y' = \sin(y^2 + t), \quad y(1) = \pi/2, \quad \textit{en el intervalo } [1, 50].$$

Usaremos 1000 puntos para el gráfico de esta solución aproximada:

```
(%i1) f(t,y):=sin(y(ˆ2)+t)$ SolAproxEuler(1000,1,50, %pi/2,f)$
```

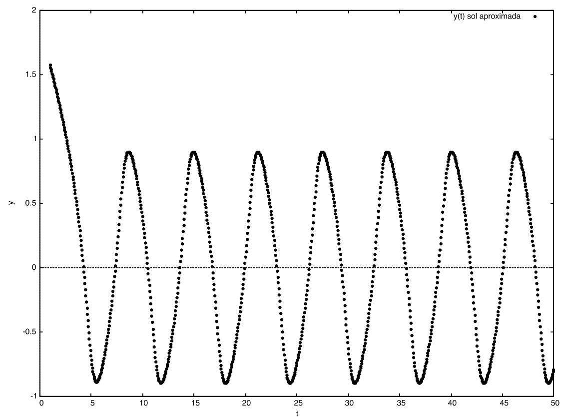
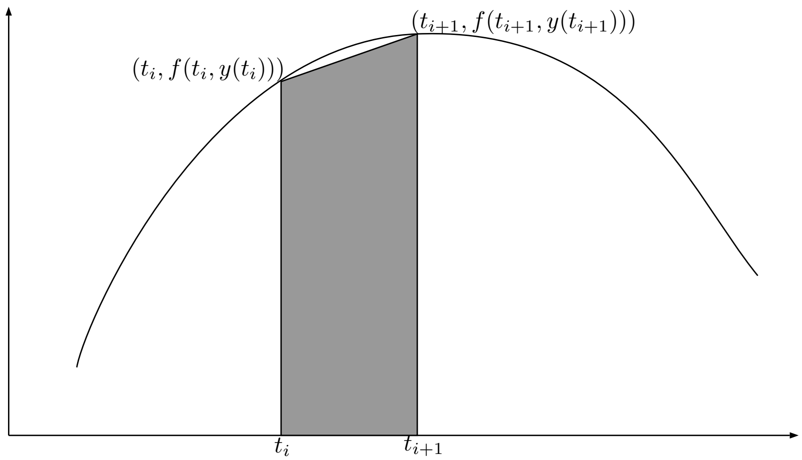


Figura 7.31: Solución aproximada del PVI $y' = \sin(y^2 + t)$, $y(1) = \pi/2$.

7.2. El método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta mejora la aproximación de la integral (7.18) hecha por el método de Euler, al considerar un trapecio determinado por las alturas $f(t_i, y(t_i))$ y $f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))$.



Podemos definir entonces un método numérico por la fórmula trapezoidal

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})). \tag{7.22}$$

Los métodos de Runge-Kutta consisten en la composición del método de Euler con formas trapezoidales. Así, el método de Runge-Kutta de orden dos (también llamado método de Heun) se basa en tomar en la fórmula (7.22) la aproximación y_{i+1} de la fórmula de Euler $y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i)$ y, para

$$\begin{aligned} K_1 =& hf(t_i, y_i) \\ K_2 =& hf(t_{i+1}, y_i + K_1); \end{aligned}$$

definimos la recurrencia:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(K_1 + K_2).$$

De manera similar se definen los métodos de Runge-Kutta de orden superior. En particular, el método de Runge-Kutta de orden cuatro, llamado RK4, se construye mediante cuatro incrementos de Euler que requieren la evaluación de f otras cuatro veces:

$$\begin{aligned} K_1 =& hf(t_1, y_1) \\ K_2 =& hf\left(t_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{1}{2}K_1\right) \\ K_3 =& hf\left(t_{i+\frac{1}{2}}, y_i + \frac{1}{2}K_2\right) \\ K_4 =& hf\left(t_{i+1}, y_i + K_3\right), \end{aligned}$$

donde $t_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(t_{i+1} - t_i)$. Planteamos entonces la recurrencia:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4). \tag{7.23}$$

La ventaja de este método está en que numéricamente se puede calcular dy/dt como

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y(t+h) - y(t)}{h} + O(h);$$

sin embargo hay procedimientos numéricos mas precisos para calcular la derivada; por ejemplo:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4}{3h}\left(y(t+h/2) - y(t-h/2)\right) - \frac{1}{6h}(y(t+h) - y(t)) + O(h^4).$$

Luego, de la recurrencia (7.23) tenemos:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) + O(h^5).$$

Por lo tanto, el error local satisface que $|\hat{e}_{i+1}| = O(|h|^5)$; esto es, $|\hat{e}_{i+1}| \leq M|h^5|$. Para estimar M, sea y_i la solución aproximada de y en t_i que se obtiene al hacer un paso en la aproximación de Runge-Kutta de orden cuatro

$$y(t) = y_i + M|h^5|.$$

Sea $\widetilde{y}_i$ la solución aproximada de y en t_i que se obtiene al hacer la aproximación de dos pasos (con tamaño $h/2$) del procedimiento de Runge-Kutta de orden cuatro:

$$y(t) = \widetilde{y}_i + 2M\left|\left(\frac{h}{2}\right)^5\right|.$$

Restando estas dos igualdades tenemos:

$$0 = y_i - \widetilde{y}_i + M(1 - 2^{-4})|h^5|,$$

luego

$$|\hat{e}_{i+1}| \leq M|h^5| = \frac{|y_i - \widetilde{y}_i|}{1 - 2^{-4}} \approx |y_i - \widetilde{y}_i|.$$

Este error local se puede monitorear al calcular ocasionalmente $|y_i - \widetilde{y}_i|$ mientras el programa corre sus iteraciones. Mas aun, si este error aparece mayor a un cierto umbral de tolerancia podemos reajustar el tamaño del paso h sobre la marcha para restaurar un grado tolerable de precisión. Los programas que usan algoritmos de este tipo son llamados *métodos de Runge-Kutta adaptativos*.

Para métodos de Runge-Kutta de orden mayor a cuatro se demostró que estos tienen el mismo orden que RK4 pero con una complejidad de cálculo mucho más elevada, lo que hace de RK4 el método con una relación entre precisión y complejidad óptima, por lo que es el más usado.

Maxima tiene implementado el algoritmo RK4, para hacer uso de él cargamos el paquete `diffeq` que tiene el comando `rk` con este algoritmo.

```
load(diffeq)$
```

```
rk(expr,y,y0,[t,t0,T,h])
```

cuyos parámetros son

```
expr: la función f(t,y),
y:  variable dependiente,
y0: el valor inicial y(t0)=y0,
t: variable independiente,
t0: inicio del intervalo dominio,
T: final del intervalo dominio,
h: tamaño de los subintervalos.
```

Este comando calcula numéricamente soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden.

```
rk([expr_1,...,expr_m],[y_1,...,y_m], [y_10,...,y_m0],[t,t0,T
,h]).
```

Donde los parámetros son:

```
expr_i: las funciones f_i(t,y),
y_i:  variables dependientes,
y_i0:  valores iniciales y_i(t0)=y_i0,
t: variable independiente,
t0: inicio del intervalo dominio,
T: final del intervalo dominio,
h: tamaño de los subintervalos.
```

Es importante que las derivadas <expr_1>,...,<expr_m> sean colocadas en la lista en el mismo orden en que fueron agrupadas las variables dependientes; por ejemplo, el tercer elemento de la lista será interpretado como la derivada de la tercera variable dependiente. El programa intenta integrar las ecuaciones desde el valor inicial de la variable independiente, hasta el valor final, usando incrementos fijos. Si en algún paso una de las variables dependientes toma un valor absoluto muy grande, la integración será suspendida en ese punto. El resultado será una lista con un número de elementos igual al número de iteraciones realizadas. Cada elemento en la lista de resultados es también una lista con <m>+1 elementos: el valor de la variable independiente, seguido de los valores de las variables dependientes correspondientes a ese punto.

Ejemplo 7.30. *Hallemos mediante el método de Runge-Kutta la solución numérica del problema de valor inicial:*

$$y' = y + e^t, \quad y(0) = 1, \qquad \textit{en el dominio } [0, 1].$$

Usaremos intervalos de tamaño 0.1:

```
(%i1) load(diffeq)$
(%i2) f(t,y):=y+exp(t)$
(%i3) SolNum:rk(f(t,y),y,1,[t,0,1,0.1]);
(%o3) [[0.0,1.0],[0.1,1.215687764638947],[0.2,1.46568275835309
1], [0.3,1.754815520171459],[0.4,2.088553183883313],
[0.5,2.473079950322546], [0.6000000000000001,2.91538744501399
7], [0.7000000000000001,3.423376150389082],[0.8, 4.00596924257
697], [0.9,4.673240320038525],[1.0,5.436556686938717]]
```

Veamos el gráfico de esta solución:

```
(%i4) plot2d([discrete,SolNum],[style,[points, 1,1]],[color,
black], [axes,true],[xlabel,"t"],[ylabel,"y"],[legend,"
y(t) sol aproximada"])$
```

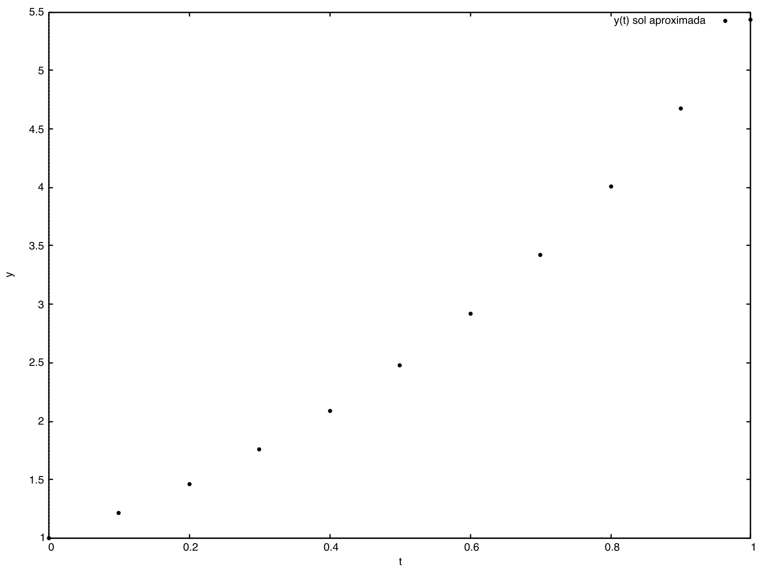


Figura 7.32: Solución aproximada del PVI $y' = y + e^t$, $y(0) = 1$ en el dominio $[0, 1]$ mediante el método de Runge-Kutta.

Este problema de valor inicial se puede resolver analíticamente y su solución es $y(t) = e^t(t+1)$. *Comparemos la solución exacta con esta dada por* RK4*:*

```
(%i4) plot2d([[discrete,SolNum],exp(t)*(t+1)],[t,0,1],[style,
[points, 2,2],[lines,1,1]], [color,black],[axes, true],[xlabel,
"t"], [ylabel,"y"],[legend, "sol aproximada","sol exacta"])$
```

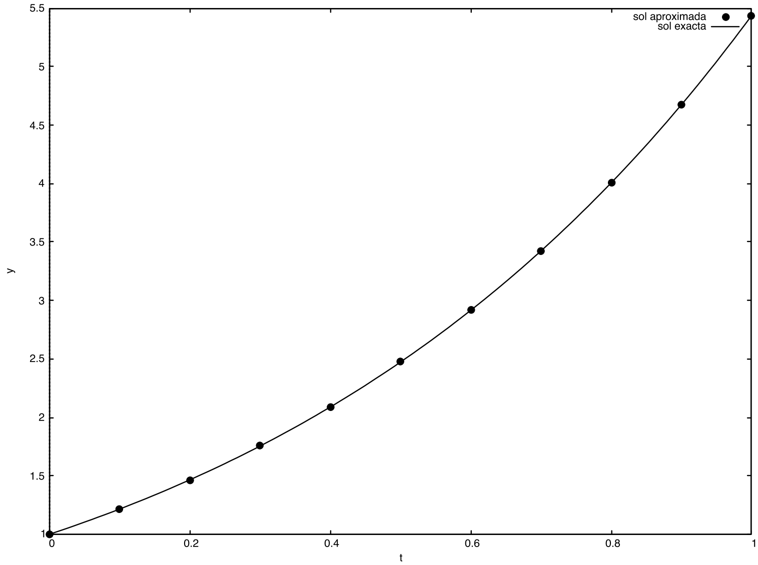


Figura 7.33: Soluciones exacta y aproximada del PVI $y' = y + e^t$, $y(0) = 1$ en el dominio $[0, 1]$ mediante el método de Runge-Kutta.

☑

Ejemplo 7.31. *Hallemos la solución aproximada del problema de valor inicial de segundo orden*

$$y'' + e^y = \sin(t), \quad y(0) = 1, \; y'(0) = 0, \; \textit{en el dominio } [0, 2].$$

Reescribamos el problema como un sistema de ecuaciones de primer orden:

$$\begin{aligned} w' &= z \\ z' &= -e^w + \sin(t). \end{aligned}$$

Ahora usemos `rk` *para hallar la solución aproximada de este sistema. Consideremos subintervalos de tamaño 0.1:*

```
(%i1) rk([z, -exp(w)+sin(t)],[w,z],[1,0],[t,0,2,0.1]);
(%o1) [[0.0,1.0,0.0],[0.1,0.9866058714467502,-0.26561826172372
39], [0.2,0.9474443208926897,-0.5142535912819126],
[0.3,0.8845223004414227,-0.7399579392264335],
[0.4,0.8003667364794528,-0.9383381442953254],
[0.5,0.6978564112848521,-1.106760658787719],
[0.6000000000000001,0.58004716528236,-1.244289166650751],
[0.7000000000000001,0.4500136449229194,- 1.351431406477838],
```

```
[0.8,0.3107218781946069,-1.429791397645722],
[0.9,0.1649377604078535,-1.481710739728851],
[1.0, 0.01516953223308667,-1.509954040109835],
[1.1,-0.1363616547477605,-1.517463866077339],
[1.2,-0.2877303397302031,-1.50718836254423],
[1.3,-0.4373013762280206,-1.481971885037666],
[1.4,-0.5837161638130692,-1.444493997725773],
[1.5,-0.7258745770403253,-1.39724213379701],
[1.6,-0.8629153167503871,-1.34250558399802],
[1.7,-0.9941963286851736,- 1.282381568697065],
[1.8,-1.119276158274775,-1.218787042354279],
[1.9,-1.237896596909534,-1.153472205876793],
[2.0,- 1.349966662510604,-1.088033401773715]]
```

Esta lista nos da los valores de las ternas (t_i, y_i, y_i')*, si queremos ver el gráfico de la solución solo necesitamos los dos primeros valores de esta lista, es decir, los pares* (t_i, y_i)*. Para obtener esto creamos una tabla de valores con estos pares y graficamos:*

```
(%i2) RKval:rk([z,-exp(w)+sin(t)],[w,z],[1,0],[t,0,2,0.1])$
(%i3) grafic:makelist([ RKval[i][1], RKval[i][2]],i,1,length(
RKval))$
(%i4) plot2d([discrete,grafic],[style,[points,1,1]],[color,
black], [axes, true],[xlabel, ”t”],[ylabel,”y”],[legend,
”sol aproximada”] )$
```

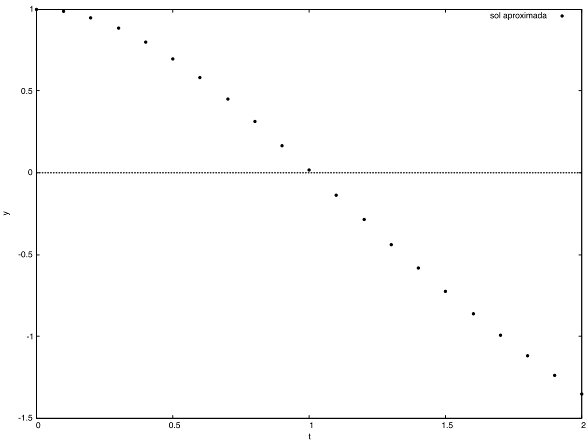


Figura 7.34: Solución aproximada del PVI $y''+e^y = \sin(t),\ y(0) = 1, y'(0) = 0$ en el dominio $[0, 2]$ mediante el método de Runge-Kutta.

Apéndice

A

Ecuaciones y sistemas de EDO en Maxima

Aquí describiremos cómo resolver ecuaciones diferenciales ordinarias mediante el uso del *software* Maxima, un sistema de cómputo algebraico implementado en Lisp. Consiste en un paquete de programas que permiten hacer cálculos numéricos y cálculos literales, simbólicos, con variables que no tienen ningún valor asignado.

Usamos Maxima ya que produce buenos resultados y puede ser compilado en varios sistemas operativos bajo la licencia de *software* libre GPL. Entre otras ventajas de esto último, existe una enorme comunidad de desarrolladores y usuarios con los que se puede tener manuales de uso y otras informaciones de carácter más técnico. Aquí supondremos que el lector está familiarizado con el uso básico de este *software*; sin embargo, recomendamos [1, 14, 18, 19] como una guía práctica para iniciar el uso de Maxima orientada al estudio de las ecuaciones diferenciales, y a su vez para comparar este *software* con otros comúnmente usados.

1. Comandos principales

Podemos trabajar en Maxima en modo `terminal`, pero aquí utilizaremos la interfaz gráfica wxmaxima, puesto que permite que las expresiones algebraicas luzcan como tales.

Los comandos principales para resolver ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden, así como sistemas lineales en Maxima es `ode2` y `desolve`

```
ode2(eqn,dvar,ivar)
desolve(eqn,x)
desolve([eqn_1,...,eqn_n], [x_1, ..., x_n])
```

Cuyos parámetros son

```
dvar:  variable dependiente.
ivar:  variable independiente.
eqn o eqn_1,...,eqn_n:  EDO o lista de EDOS.
x_1,...,x_n: variables dependientes.
```

Estos comandos requieren que `eqn`, la ecuación ecuación diferencial, esté escrita en la forma $f(x, y, y', y'') = 0$. Así, por ejemplo, las ecuaciones dadas como $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ se deben escribir en la forma $\frac{dy}{dx} + \frac{M(x,y)}{N(x,y)} = 0$.

- Para definir derivadas usamos los comandos:

```
'diff(y,x)
'diff(y,x,2)
'diff(y(x),x)
'diff(y(x), x,2)
```

- El apóstrofo ' delante de la instrucción `diff(y,x)` le indica a Maxima que no evalúe la derivada.

En la solución de una EDO de primer orden, `%c` representa la constante de la solución general mono paramétrica, mientras que para una EDO de segundo orden las constantes de la familia bi paramétrica son: `%k1` y `%k2`.

La función `ic1` define las condiciones iniciales de un problema de Cauchy de primer orden

```
ic1(eqn,x = x0,y = y0);
```

donde `eqn` es la solución dada por `ode2` y `x = x0,y = y0` son las condiciones iniciales.

Para especificar las condiciones iniciales de una ecuación diferencial de segundo orden usamos la función `ic2`:

```
ic2(eqn, x=x0, y=y0, 'diff(y,x)=y1);
```

donde `eqn` es la solución dada por `ode2` o `desolve` y `x=x0, y=y0, 'diff(y,x)=y1` son las condiciones iniciales sobre x, y e y' (en x) respectivamente.

Para dar condiciones de frontera a una ecuación diferencial de segundo orden usamos la función `bc2`:

```
bc2(eqn, x=x0, y=y0, x=x1, y=y1);
```

con `eqn` una solución de la ecuación general y `x=x0, y=y0, x=x1, y=y1` son las condiciones de frontera.

Además, podemos conocer el método de resolución empleado por Maxima mediante la instrucción:

```
method;
```

1.1. ode2

Esta instrucción permite calcular soluciones de algunas ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden.

- `ode2` halla soluciones de ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo:
  - » De variables separables.
  - » Exactas.
  - » Lineales.
  - » Homogéneas.
  - » De Bernoulli.
- `ode2` halla las soluciones de ecuaciones diferenciales de segundo orden del tipo:
  - » Lineales con coeficientes constantes.
  - » Cauchy-Euler.
  - » Bessel.
  - » Lineales homogéneas con coeficientes no constantes que se puedan reducir a ecuaciones homogéneas con coeficiente constante.
  - » Autónomas.
- `ode2` no halla soluciones de ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden del tipo:
  - » Clairaut.
  - » Ricatti.
  - » Lagrange.
  - » Lineales de segundo orden con coeficientes no constantes en general.

Ejemplo A.1. *Consideremos la ecuación diferencial de primer orden*

$$2xydx + (x^2 + y^2)dy = 0.$$

Primero la reescribimos como

$$(x^2 + y^2)\frac{dy}{dx} + 2xy = 0.$$

La cual en Maxima se escribe como:

```
(%i1) eq1:(x*x +y*y)*'diff(y,x)+2*x*y=0;
```

(%o1) $(x^2 + y^2)\left(\frac{d}{dx}y\right) + 2xy = 0$

Resolvemos la ecuación:

```
(%i1) ode2(eq1,y,x);
```

(%o1) $\frac{y^3+3x^2y}{3} = \%c$

Resolvamos ahora el problema de valor inicial para $y(1) = 2$:

```
(%i2) ic1(%o1,x=2,y=1);
```

(%o2) $\frac{y^3+3x^2y}{3} = \frac{13}{3}$
(%i3) method;
(%o3) exact ☑

Para ecuaciones diferenciales de primer orden $M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0$ que se puedan reducir a una ecuación exacta mediante la multiplicación de un factor integrante que dependa solo de la variable x o solo de la variable y, Maxima calcula este tipo de ecuaciones y la función `intfactor;` muestra el factor integrante utilizado.

Ejemplo A.2. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$(e^x - \sin(y))dx + \cos(x)dy = 0,$$

la cual reescribimos como

$$\cos(y)\frac{dy}{dx} + e^x - \sin(y) = 0.$$

En Maxima escribimos:
(%i1) eq1: (cos(y))*'diff(y,x)+e^(x)-sin(y)=0;
(%o1) $\cos(y)\left(\frac{d}{dx}y\right) - \sin(y) + e^x = 0$

Resolvemos la ecuación:
(%i2) ode2(eq1,y,x);
(%o2) $\%e^{-x}(\sin(y) + x\,\%e^x) = \%c$
(%i3) method;
(%o3) exact
(%i4) intfactor;
(%o4) $\%e^{-x}$ ☑

Ejemplo A.3. *Consideremos la ecuación diferencial*

$$y(2x^2y^3 + 3)dx + x(x^2y^3 - 1)dy = 0.$$

Podemos reescribirla así:

$$x(x^2y^3 - 1)\frac{dy}{dx} + y(2x^2y^3 + 3) = 0.$$

En Maxima se escribe como:

(%i1) eq1: (x*(x^(2)y^(3)-1))*'diff(y,x)+y*(2*x^(2)*y^(3)+3)=0;
(%o1) $x(x^2y^3 - 1)\left(\frac{d}{dx}y\right) + y(2x^2y^3 + 3) = 0$

Resolvemos la ecuación:
(%i1) `ode2(eq1,y,x);`
(%o1) $x = \%c\,\%e^{-\frac{15\log(4x^2y^3+11)-12\log(x^{2/3}y)}{44}}$

La función `logcontract` *aplica las identidades logarítmicas de sumas y productos para simplificar expresiones:* (%i2) `logcontract(%o1);`
(%o2) $x = \%c\,\%e^{\frac{\log\left(\frac{x^8y^{12}}{(4x^2y^3+11)^{15}}\right)}{44}}$

Note que la propiedad $a\log(b) = \log(b^a)$ *se ejecuta para números enteros a. Para números racionales podemos usar las siguientes instrucciones:*
(%i3) `logconcoeffp:'logconfun$;`
(%i4) `logconfun(m):=featurep(m,integer) or ratnump(m)$;`
(%i5) `logcontract(%o1);`
(%o5) $x = \frac{\%c x^{2/11}|y|^{3/11}}{(4x^2y^3+11)^{15/44}}$

Sabemos del ejercicio 4 en la página 36 que esta ecuación tiene un factor integrante de la forma $\mu(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta}$*, (verifique que en este caso* $\alpha = 7/5$ *y* $\beta = -9/5$*). Sin embargo Maxima no calcula factores integrantes de este tipo*
(%i6) `intfactor;`
(%o6) `false`
(%i7) `method;`
(%o7) `genhom`
Este es un método de resolución para las llamadas ecuaciones homogéneas generalizadas. ☑

Veamos ahora el caso de ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes.

Ejemplo A.4. *Consideremos las ecuación diferencial lineal de segundo orden*

$$2y'' + 4y' - 2y = \sin(x) + x.$$

En Maxima tenemos:
(%i1) `eq1: 2*'diff(y,x,2)+4*'diff(y,x)-2*y=sin(x)+x;`
(%o1) $2\left(\frac{d^2}{dx^2}y\right) + 4\left(\frac{d}{dx}y\right) - 2y = \sin(x) + x$
cuya solución es
(%i2) `ode2(eq1,y,x);`
(%o2) $y = -\frac{\sin(x)+\cos(x)+4x+8}{8} + \%k1\,\%e^{\frac{(2^{3/2}-2)x}{2}} + \%k2\,\%e^{\frac{(-2^{3/2}-2)x}{2}}$
(%i3) `method;`
(%o3) `variationofparameters`

Si ponemos las condiciones iniciales $y(-1) = 1$ y $y'(-1) = 3$, Maxima calcula esto mediante la instrucción: `(%i4) ic2( %o2, x=0, y=1,'diff(y,x)=3);`

(%o4) $y = -\frac{\sin(x)+\cos(x)+4x+8}{8} + \frac{(23\sqrt{2}+17)\,\%e^{\frac{(2^{3/2}-2)x}{2}}}{16} + \frac{(23\sqrt{2}-17)\,\%e^{\frac{(-2^{3/2}-2)x}{2}}}{16}$ ☑

Podemos usar `ode2` para hallar la solución de una ecuación diferencial de segundo orden del tipo Cauchy-Euler.

Ejemplo A.5. *Hallemos la solución general de la ecuación de Cauchy-Euler*

$$-3x^2y'' + 7xy' - 2y = 0.$$

En Maxima tenemos:

```
(%i1) eq1: -3x^(2)*'diff(y,x,2)+7*x*'diff(y,x)-2*y=0;
```

(%o1) $-3x^2\left(\frac{d^2}{dx^2}y\right) + 7x\left(\frac{d}{dx}y\right) - 2y = 0$

cuya solución es

```
(%i2) ode2(eq1,y,x);
```

(%o2) $y = \%k1\,x^{\frac{\sqrt{19}}{3}+\frac{5}{3}} + \%k2\,x^{5/3-\frac{\sqrt{19}}{3}}$

```
(%i3) method;
(%o3) euler
```

☑

1.2. desolve

El comando `desolve` resuelve ecuaciones lineales y sistemas de ecuaciones lineales mediante el uso de la transformada de Laplace, por lo tanto esta función se limita al caso de problemas con condiciones iniciales en 0.

Una diferencia en la sintaxis con respecto a `ode2` es que al usar esta instrucción la variable dependiente se debe escribir de la forma `y(x)` donde `x` es la variable independiente.

Ejemplo A.6. *Consideremos el problema de valor inicial*

$$2y'' - 3y' + 4y = \delta(t+1), \quad y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

```
(%i1) eq1: 2*'diff(y(t),t,2)-3*diff(y(t),t)+4*y(t)=delta(t+1);
```

(%o1) $2\left(\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right) - 3\left(\frac{d}{dt}y(t)\right) + 4y(t) = \delta(t+1)$

Resolvemos esta ecuación y obtenemos `(%i2) desolve(eq1,y(t));`

(%o2) $y(t) = \frac{\%e^{\frac{3t}{4}}\left(\frac{\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{4}\right)\left(4\left(2\left(\frac{d}{dt}y(t)\big|_{t=0}\right)-3y(0)\right)+6y(0)\right)}{\sqrt{23}}+2y(0)\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{4}\right)\right)}{2}$

Note que Maxima expresa la solución en términos de las condiciones iniciales. Podemos dar estas condiciones antes de resolver la ecuación mediante la instrucción

```
atvalue(expr,t=a,b)
```

que asigna el valor `b` *a la expresión* `expr` *cuando* `t` *toma el valor de* `a`*:*

```
(%i3) atvalue(y(t),t=0,1);
(%o3) 1
(%i4) atvalue('diff(y(t),t),t=0,-1);
(%o4) -1
(%i5) desolve(eq1,y(t));
```

(%o5) $y(t) = \dfrac{\%e^{\frac{3t}{4}}\left(2\cos\left(\frac{\sqrt{23}t}{4}\right) - \dfrac{14\sin\left(\frac{\sqrt{23}t}{4}\right)}{\sqrt{23}}\right)}{2}$ ☑

Obs Maxima guarda la asignación dada a `expr` en la función `atvalue`. Así, con respecto al ejemplo anterior, cualquier otro cálculo que se haga en la misma sesión, el valor de `y(t)` y su derivada en `t=0` será `1` y `-1` respectivamente. Podemos eliminar esta asignación mediante la instrucción:

```
remove(y,atvalue);
```

Veamos cómo calcular la solución de un sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo A.7. *Consideremos el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin(t) \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para usar `desolve` *escribimos el sistema en tres ecuaciones diferentes:*

```
(%i1) eq1: 'diff(x(t),t)=2*x(t)+y(t)+z(t)-sin(t);
```
(%o1) $\frac{d}{dt}x(t) = -\sin(t) + z(t) + y(t) + 2x(t)$
```
(%i2) eq2: 'diff(y(t),t)=-x(t)+2*z(t)-t;
```
(%o2) $\frac{d}{dt}y(t) = 2z(t) - x(t) - t$
```
(%i3) eq3: 'diff(z(t),t)=2*x(t)-y(t)+3*z(t);
```
(%o3) $\frac{d}{dt}z(t) = 3z(t) - y(t) + 2x(t)$

Ahora damos las condiciones iniciales:

```
(%i4) atvalue(x(t),t=0,-1);
(%o4) -1
(%i5) atvalue(y(t),t=0,0);
```

```
(%o5) 0
(%i6) atvalue(z(t),t=0,1);
(%o6) 1
```

Calculamos la ecuación y obtenemos:

```
(%i7) desolve([eq1,eq2,eq3],[x(t),y(t),z(t)]);
```

(%o7) $[x(t) = \%e^{t/2}\left(-\frac{47\sin\left(\frac{\sqrt{11}t}{2}\right)}{45\sqrt{11}} - \frac{31\cos\left(\frac{\sqrt{11}t}{2}\right)}{45}\right) + \frac{5\sin(t)}{17} - \frac{3\cos(t)}{17} - \frac{2\%e^{4t}}{85} - \frac{t}{3} - \frac{1}{9},$

$y(t) = \%e^{t/2}\left(\frac{194\sin\left(\frac{\sqrt{11}t}{2}\right)}{45\sqrt{11}} - \frac{8\cos\left(\frac{\sqrt{11}t}{2}\right)}{45}\right) + \frac{11\sin(t)}{17} + \frac{7\cos(t)}{17} - \frac{\%e^{4t}}{85} + \frac{t}{3} - \frac{2}{9},$

$z(t) = \%e^{t/2}\left(\frac{47\sin\left(\frac{\sqrt{11}t}{2}\right)}{45\sqrt{11}} + \frac{31\cos\left(\frac{\sqrt{11}t}{2}\right)}{45}\right) - \frac{\sin(t)}{17} + \frac{4\cos(t)}{17} - \frac{3\%e^{4t}}{85} + \frac{t}{3} + \frac{1}{9}]$ ☑

Debido a que `desolve` utiliza la transformada de Laplace para resolver sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, en algunos caso se obtienen soluciones parciales dado que algunas propiedades de la transformada de Laplace pueden aún no estar implementadas.

Ejemplo A.8. *Consideremos el sistema de ecuaciones*

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

```
(%i1) eq1: 'diff(x(t),t)=2*x(t)+y(t)+z(t);
```
(%o1) $\frac{d}{dt}x(t) = z(t) + y(t) + 2x(t)$
```
(%i2) eq2: 'diff(y(t),t)=-x(t)+2*z(t);
```
(%o2) $\frac{d}{dt}y(t) = 2z(t) - x(t)$
```
(%i3) eq3: 'diff(z(t),t)=2*x(t)-y(t)+z(t);
```
(%o3) $\frac{d}{dt}z(t) = z(t) - y(t) + 2x(t)$

Ahora damos las condiciones iniciales:

```
(%i4) atvalue(x(t),t=0,-1);
(%o4) -1
(%i5) atvalue(y(t),t=0,0);
(%o5) 0
(%i6) atvalue(z(t),t=0,1);
(%o6) 1
```

Calculamos la ecuación y obtenemos:

(%i7) `desolve([eq1,eq2,eq3],[x(t),y(t),z(t)]);`

(%o7) $[\mathtt{x(t)} = \mathrm{ilt}\left(\frac{2\ g7445-g7445^2}{g7445^3-3\ g7445^2+3\ g7445-10}, g7445, t\right),$

$\mathtt{y(t)} = \mathrm{ilt}\left(\frac{3\ g7445-10}{g7445^3-3\ g7445^2+3\ g7445-10}, g7445, t\right),$

$\mathtt{z(t)} = \mathrm{ilt}\left(\frac{g7445^2-4\ g7445}{g7445^3-3\ g7445^2+3\ g7445-10}, g7445, t\right)]$

Aquí `ilt` *es la función que calcula la transformada inversa de Laplace:* `ilf(expr,s, t)`*, donde* `expr` *es la función a la cual se le calcula la inversa de la transformada de Laplace en la variable* `s`*, y* `t` *es la variable de la función que se obtiene. En este caso Maxima asignó para la variable* `s` *la cadena* `g7445`*. Es decir, las soluciones vienen expresadas como*

$$\begin{aligned}
x(t) =& \mathrm{ilt}\left(\frac{2s-s^2}{s^3-3s^2+3s-10}, s, t\right),\\
y(t) =& \mathrm{ilt}\left(\frac{3s-10}{s^3-3s^2+3s-10}, s, t\right),\\
z(t) =& \mathrm{ilt}\left(\frac{s^2-4s}{s^3-3s^2+3s-10}, s, t\right).
\end{aligned}$$

A estas expresiones se les puede calcula su transformada de Laplace inversa (ver proposición 5.3), sin embargo Maxima no las calcula ya que algunas propiedades de la tranformadas no están implementadas. ☑

Obs Si queremos dar las soluciones del sistema en términos de las condiciones iniciales y después evaluarlas, usamos la función `ev(expr,arg1,... argn)`, donde `expr` es la expresión en que se quiere evaluar los argumentos `argj`, j=1,...,n .

En el ejemplo A.7 en lugar de usar `atvalue`, hallamos la solución mediante `desolve` y luego hacemos

```
(%i5) ev( %o4,x(0)=1,y(0)=0,z(0)=1);
```

Como sabemos, toda ecuación diferencial lineal de orden superior se puede reducir a un sistema de ecuaciones de primer orden (Ver ejemplo 7.1 y ejercicio 2 p. 321). Así, podemos usar Maxima para hallar soluciones de problemas de valor inicial en cero lineales de coeficientes constantes con orden mayor a dos.

Ejemplo A.9. *Hallemos la solución de la ecuación diferencial lineal de orden 3*

$$y''' + y'' - 2y = x.$$

(%i1) eq1: 'diff(y(x),x,3)+'diff(y(x),x,2)-2*y(x)=x;

(%o1) $\frac{d^3}{dx^3}y(x)+\frac{d^2}{dx^2}y(x)-2y(x)=x$

Ahora damos las condiciones iniciales:

(%i2) atvalue(y(x),x=0,0);

(%o2) 0

(%i3) atvalue('diff(y(x),x),x=0,1);

(%o3) 1

(%i4) atvalue('diff(y(x),x,2),x=0,-1);

(%o4) -1

Calculamos la ecuación y obtenemos:

(%i5) desolve(eq1,y(x));

(%o5) $[y(x)=\%e^{-x}\left(\frac{7\sin(x)}{10}-\frac{2\cos(x)}{5}\right)+\frac{2\%e^{x}}{5}-\frac{x}{2}$ ☑

1.3. contrib_ode

La función ode2 resuelve efectivamente ecuaciones de primer y segundo orden lineales con coeficientes constantes. Sin embargo, para el caso de ecuaciones de coeficientes variables; devuelve false como respuesta, e indica que no sabe resolver dicha ecuación. Por otro lado, la función contrib_ode extiende ode2 con métodos adicionales para ecuaciones lineales y no lineales de primer orden y ecuaciones homogéneas de segundo orden con coeficiente variable (el caso de ecuaciones no homogéneas no está implementado). Para poder hacer uso de este comando primero se debe cargar el paquete que lo contiene mediante la instrucción load('contrib_ode)$.

```
contrib_ode(eqn,dvar,ivar);
```

donde eqn es la ecuación diferencial escrita en forma $f(x,y,y',y'')=0$ y los parámetros son:

```
dvar:  variable dependiente.
ivar:  variable independiente.
```

La forma de las soluciones de esta función difieren de las de ode2 ya que las ecuaciones no lineales pueden tener múltiple soluciones, contrib_ode muestra una lista de soluciones. Cada solución puede ser de la forma:

- Una solución explícita.
- Una solución implícita.
- Una solución paramétrica en la variable %t.
- Una transformación en otra ecuación diferencial en la variable %u.

La función `odelin`, que también está en el paquete `contrib_ode`, resuelve ecuaciones diferenciales de primer y segundo orden lineales homogéneas con ciertos coeficientes variables y da como solución un conjunto fundamental de soluciones de dicha ecuación.

```
odelin(eqn,dvar,ivar);
```

Donde `eqn` es la ecuación diferencial escrita en forma $f(x, y, y', y'') = 0$ y los parámetros son:

```
dvar:  variable dependiente.
ivar:  variable independiente.
```

Ejemplo A.10. *Usemos* `contrib_ode` *para hallar la solución de la ecuación de Lagrange*

$$y = x(y')^2 + \sqrt{(y')^2 + 1}.$$

Primero cargamos el paquete `contrib_ode`.

```
(%i1) load('contrib_ode)$
(%i2) contrib_ode(y=x*('diff(y,x))^2+sqrt(('diff(y,x))^2+1),y,x);
```

(%t2) $y = \sqrt{\left(\frac{d}{dx}y\right)^2 + 1} + x\left(\frac{d}{dx}y\right)^2$ first order equation not linear in y'

(%o2) $[[x = \frac{\operatorname{asinh}(\%t) - \sqrt{\%t^2+1} + \%c}{(\%t-1)^2}, y = \%t^2 x + \sqrt{\%t^2 + 1}]]$ ☑

Ejemplo A.11. *Usando* `contrib_ode` *podemos hallar una expresión para la solución de la ecuación de Ricatti*

$$y' = \sin(x)y^2 + e^x y + x^2.$$

```
(%i1) contrib_ode('diff(y,x)=sin(x)*y^2+e^x*y+x^2,y,x);
```

(%o1) $[[y = -\frac{\frac{d}{dx}\%u}{\%u\sin(x)}, \%u x^2 \sin(x)^2 - \left(\frac{d}{dx}\%u\right)(e^x \sin(x) + \cos(x)) + \left(\frac{d^2}{dx^2}\%u\right)\sin(x) = 0]]$

La solución se obtiene una vez conocida la solución particular $u(x)$ (p. 51). ☑

El siguiente ejemplo muestra una ecuación diferencial lineal de segundo orden que no puede resuelta por `ode2`.

Ejemplo A.12. *Sea la ecuación diferencial*

$$xy'' + x^3 y' + x^2 y = 0.$$

Usando `odelin` *podemos hallar una expresión para la solución general:*

```
(%i1) odelin(x*'diff(y,x,2)+x^3*'diff(y,x)+x^2*y=0,y,x);
```

(%o1) $\left\{\frac{\mathrm{bessel\_y}\left(-\frac{1}{6},-\frac{\%i x^3}{6}\right)\sqrt{-x}\,x\,\%e^{-\frac{x^3}{6}}}{|x|}, \frac{\mathrm{bessel\_i}\left(-\frac{1}{6},-\frac{x^3}{6}\right)\sqrt{-x}\,x\,(-x^3)^{1/6}\,\%e^{-\frac{x^3}{6}}}{(-\%i x^3)^{1/6}|x|}\right\}$

Las soluciones son expresadas en términos de funciones de Bessel *(ver ejemplo 6.16)*. *Aquí* `bessel_y(v, z)` *calcula de función de Bessel (también conocida como función de Weber o Newmann) de segundo tipo de orden* v *y argumento* z *(el cual puede ser un número complejo) la cual es definida por*

$$\frac{\cos(\pi v)\mathrm{bessel\_}j(v,z)-\mathrm{bessel\_}j(-v,z)}{\sin(\pi v)},$$

donde la función `bessel_j(v, z)` *calcula de función de Bessel de primer tipo de orden* v *y argumento* z *definida como*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(v+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{v+2k}.$$

`bessel_i(v, z)` *calcula la función modificada de Bessel de primer tipo de orden* v *y argumento* z *definida mediante la fórmula*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(v+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{v+2k}.$$

Quisiéramos puntualizar que Maxima no usa series para calcular estas funciones especiales. ☑

Referencias

[1] R. Álvarez Nodarse, *Usando Maxima CAS para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias*, http://euler.us.es/ renato/clases/aam/maxima/manualcurso/intro-maxima-edos.pdf, online, acceso 22 de julio de 2019.

[2] T.M. Apostol, *Calculus*, Vol. I, 2da Ed., Editorial Reverté, Barcelona, 1980.

[3] W.E. Boyce y R.G. DiPrima, *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*, 5ta Ed., Limusa Wiley, México, 2004.

[4] P. Blanchard, R. Devaney y G. Hall, *Ecuaciones diferenciales*, International Thomson Editores, México, 1999.

[5] F. Brauer y C. Castillo-Chavez, *Mathematical models in population biology and epidemiology*, 2nd Ed., Springer, New York, 2011.

[6] J.C. Butcher, *Numerical methods for ordinary differential equations*, 2nd Ed., John Wiley and Sons, United Kingdom, 2008.

[7] S.D. Conte y C. de Boor, *Elementary numerical analysis, an algorithmic approach*, McGraw-Hill, New York, 1980.

[8] M.W. Hirsch, S. Smale y R.L. Denavey, *Differential equations, dynamical systems and an introduction to chaos*, Academic Press, San Diego, 2004.

[9] Z. Jackiewicz, *General linear methods for ordinary differential equations*, John Wiley and Sons, New Jersey, 2009.

[10] W.G. Kelley y A. C. Peterson, *The theory of differential equations*, Springer, New York, 2010.

[11] J. D. Logan, *A first course in differential equations*, Springer, Switzerland, 2006.

[12] D. Lomen y D. Lovelock, *Differential equations*, John Wiley and Sons, New York, 1999.

[13] F.W.J. Olver, *Asymptotics and special functions*, A.K. Peters Wellesley Ltd, Boca Raton, 1997.

[14] G.M. Ortigoza Capetillo, Ecuaciones diferenciales ordinarias con Maxima, Educación Matemática, 21**(2)**, 2009, 143–167.

[15] J.C. Robinson *An introduction to ordinary differential equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[16] M. Tenenbaum y H. Pollard, *Ordinary differential equations*, Dover Pubications, New York, 1963.

[17] W. F. Trench, *Elementary differential equations with boundary value problems*, Brooks/Cole Thomson Learning, disponible en http://ramanujan.math.trinity.edu/wtrench/texts/index.shtml, 2013, online, acceso 22 de julio de 2019.

[18] J.A. Vallejo, *Ecuaciones diferenciales con Maxima*, http://galia.fc.uaslp.mx/ jvallejo/EDO.pdf, online, acceso 22 de julio de 2019.

[19] A. Vigueras Campuzano, *Prácticas de cálculo numérico con Maxima*, Universidad Politécnica de Cartagena, CRAI Biblioteca, 2016.

[20] W-C. Xie, *Differential equations for engineers*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[21] D. Zill, *A first course in differential equations with modelling applications*, Cengage Learning, Boston, 2012.

[22] D.G. Zill y W.S. Wright, *Matemáticas avanzadas para ingeniería*, 4th ed., McGraw Hill, México, 2012.

Índice analítico

Editado por el Centro Editorial de la Facultad de Ciencias,
Universidad Nacional de Colombia, sede Bogotá.
Fuente principal Baskerllive y Fira Sans.

Colección
textos

Una ecuación diferencial es una relación matemática entre una función y sus derivadas, por lo cual, estas relaciones son una de las herramientas fundamentales en la modelación matemática de fenómenos naturales representados por funciones y sus razones de cambio.

En este texto se estudian los métodos clásicos para obtener las soluciones exactas, en términos de funciones elementales, de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, y su utilidad en la modelación matemática de diversas situaciones prácticas. Dado que no siempre se pueden encontrar dichas soluciones, también se estudian las ideas del análisis cualitativo de soluciones y algunos métodos numéricos para obtener soluciones aproximadas. Incluimos además una breve guía sobre el uso del software Maxima para el cálculo y análisis de soluciones de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales.