

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
CENTRO TECNOLÓGICO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL

## ECV 5220 - ANÁLISE ESTRUTURAL II

Prof<sup>a</sup> Henriette Lebre La Rovere, Ph.D.  
Prof<sup>a</sup> Poliana Dias de Moraes, Dr

Florianópolis, fevereiro de 2005

## Índice

1.	Estruturas hiperestáticas lineares .....	5
<b>1.1.</b>	Introdução.....	5
<b>1.2.</b>	Grau de hiperestaticidade .....	7
1.1.1.	Estruturas externamente hiperestáticas .....	7
1.1.2.	Estruturas internamente hiperestáticas .....	7
1.1.3.	Estruturas externa e internamente hiperestáticas .....	8
<b>1.3.</b>	Métodos de resolução de estruturas hiperestáticas.....	8
1.1.4.	Método das Forças (ou dos Esforços ou da Flexibilidade) .....	8
1.1.5.	Método dos deslocamentos (ou das deformações ou da rigidez) .....	8
1.1.6.	Método de Cross .....	9
2.	Método das forças .....	10
<b>1.4.</b>	Estruturas externamente hiperestáticas .....	10
1.1.1.	Estruturas uma vez hiperestáticas ( $g_e = 1$ ) .....	10
2.1.1.	Estruturas duas vezes hiperestáticas ( $g_e = 2$ ) .....	29
1.1.2.	Estruturas três vezes hiperestática ( $g_e = 3$ ).....	38
<b>1.5.</b>	Estruturas internamente hiperestáticas .....	46
2.1.2.	Exemplo 1- Treliça plana.....	46
2.1.3.	Exemplo 2 - Pórtico com tirante .....	50
2.1.4.	Exemplo 3 - Quadro bi-apoiado.....	55
2.1.5.	Exemplo 4 - Pórtico bi-engastado .....	63
2.1.6.	Exemplo 5 - Estrutura simétrica com carregamento simétrico .....	64
2.1.7.	Exercícios.....	65
2.2.	Tirando proveito da simetria .....	66
2.2.1.	Estruturas simétricas com carregamento simétrico.....	66
2.2.2.	Estruturas simétricas com carregamento anti-simétrico: .....	68
2.2.3.	Estrutura simétrica com carregamento qualquer.....	69
1.2.	Grelhas .....	74
1.2.1.	Exemplo 1- Estrutura simétrica – carregamento qualquer .....	74
1.2.2.	Exemplo 2 - Grelha simétrica com carregamento simétrico .....	80
1.2.3.	Exemplo 3 - Grelha simétrica com carregamento anti-simétrico.....	80
2.3.	Variação de temperatura.....	81
2.3.1.	Deformações em estruturas isostáticas .....	83
2.3.2.	Exemplo 1 - Pórtico isostático submetido à variação de temperatura.....	84
2.3.3.	Exemplo 2 – Pórtico hiperestático submetido à variação de temperatura.....	86
3.	Método dos deslocamentos ou método da rigidez .....	89
3.1.	Introdução.....	89
3.1.1.	Exemplo - Pórtico plano .....	90
3.2.	Vigas -Sistema de um grau de liberdade.....	90
3.2.1.	Exemplo 1 - Viga engastada-apoiada.....	90
3.3.	Vigas - Esforços de engastamento perfeito .....	93
1.3.	Vigas - Coeficientes de rigidez .....	94
3.4.	Vigas - Sistema de dois graus de liberdade.....	96
3.4.1.	Exemplo 1 - Viga contínua .....	96
3.4.2.	Exemplo 2 .....	98
3.5.	Treliças – Sistema de um grau de liberdade.....	100
3.5.1.	Exemplo – Barra de material homogêneo e seção transversal constante submetida à carga axial	100

3.6. Treliças – Sistema de dois graus de liberdade.....	101
3.6.1. Exemplo - Barra composta de duas hastes de materiais, comprimentos e seções diferentes submetida à carga axial .....	101
3.7. Divisão em elementos – Sistema de coordenadas.....	103
3.7.1. Modelagem - Algumas considerações sobre divisão da estrutura em elementos .....	104
3.7.2. Sistema de coordenadas .....	104
3.7.3. Graus de liberdade .....	105
3.8. Tipos de estruturas reticuladas .....	105
3.8.1. Deformações .....	106
3.8.2. Exemplos de estruturas reticuladas planas.....	107
3.8.3.....	107
3.8.4. Exemplos de estruturas reticuladas espaciais.....	108
3.8.5. Elementos de estruturas reticuladas .....	108
1.4. Resumo do Método dos Deslocamentos para estruturas reticuladas divididas em elementos.....	112
1.5. Matriz de rigidez de um elemento no sistema local (estruturas reticuladas planas) ...	113
1.5.1. Elemento de viga.....	113
1.5.2. Elemento de treliça .....	116
1.5.3. Elemento de pórtico plano .....	118
3.9. Matriz de rotação – transformação do sistema de coordenadas .....	119
3.10. Matriz de rigidez de um elemento no sistema global.....	122
3.11. Vetor de esforços de engastamento perfeito no sistema global .....	123
3.12. Sistema de equações de equilíbrio para a estrutura não-restringida.....	123
3.12.1. Montagem da matriz de rigidez da estrutura.....	124
3.12.2. Exemplo – Pórtico plano.....	124
3.12.3. Regra da correspondência .....	127
3.12.4. Exemplo 1 – Pórtico plano.....	127
3.12.5. Exemplo 2 - Elementos de treliça .....	128
3.12.6. Exemplo 3 – Elementos de viga.....	129
3.12.7. Exemplo 4 - Viga contínua .....	131
3.12.8. Exemplo Numérico .....	133
3.13. Sistema de equações de equilíbrio para a estrutura restringida.....	136
3.14. Reações de apoio da estrutura .....	139
3.14.1. Exemplo numérico .....	139
3.15. esforços nos elementos no sistema local .....	141
3.15.1. Elemento de Pórtico Plano.....	141
3.15.2. Exemplo numérico .....	142
3.15.3. Exemplo 3 – Treliça plana .....	144
3.15.4. Exemplo 4 – Pórtico plano.....	147
4. Processo de Cross.....	153
4.1. Princípios do processo.....	153
4.2. Momentos de engastamento perfeito.....	154
4.3. Rigidez das barras e coeficientes de transmissão.....	155
4.3.1. Barra bi-engastada .....	155
4.3.2. Viga engastada-rotulada.....	155
4.4. Convenção de sinais .....	156
4.5. Coeficientes de distribuição .....	156
4.6. Processo de Cross para estruturas indeslocáveis.....	158
4.6.1. Processo de Cross para um nó apenas (um grau de liberdade-rotação) .....	158
4.6.2. Processo de Cross para dois ou mais nós.....	168

---

4.6.3.	Exercícios propostos .....	175
1.6.	Explorando a simetria.....	179
1.6.1.	Vigas contínuas simétricas.....	179
1.6.2.	Pórticos planos simétricos.....	184
1.7.	Momentos de engastamento perfeito para o caso de recalques.....	187
1.8.	Processo de Cross para estruturas deslocáveis.....	187
1.8.1.	Exemplo .....	190
2.	Bibliografia .....	195

## 1. ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS LINEARES

### 1.1. INTRODUÇÃO

Entende-se por estrutura a parte da construção responsável pela estabilidade e pela resistência a ações externas. A estrutura submetida a ações externas deve tanto apresentar segurança quanto à ruptura dos materiais utilizados como também quanto à estabilidade global ou parcial de todos seus elementos; além disso deve demonstrar bom desempenho estrutural, no que diz respeito a deformações e durabilidade, de acordo com o fim e vida útil para a qual foi projetada.

Definido o sistema construtivo e o tipo de material a ser utilizado, seja concreto armado ou protendido, madeira, aço, argamassa armada ou alvenaria estrutural, a primeira fase de um projeto estrutural é a Análise Estrutural. O objetivo geral da Análise Estrutural pode ser descrito como:

- Dada uma estrutura, com características geométricas (geometria, dimensões) e mecânicas (vinculação, propriedades dos materiais) conhecidas, submetidas a certas ações, que podem ser tanto cargas (forças ou binários) como deformações impostas (recalques de apoio, deformações devido à variação de temperatura ou retração, ...),
- Determinar os deslocamentos (translações e/ou rotações) de todos os pontos da estrutura; os esforços internos decorrentes das deformações produzidas por estes deslocamentos (esforço axial, cortante, de flexão e de torção) e determinar também as reações vinculares.

A primeira etapa da Análise Estrutural consiste em estabelecer o *modelo estrutural* a ser adotado. As estruturas podem ser tratadas globalmente, ou divididas em diversos elementos. Com relação a suas dimensões, as estruturas podem ser classificadas em reticuladas, laminares e tridimensionais.

A estrutura é reticulada quando uma dimensão predomina em relação às outras duas. São em geral denominadas barras, cujo eixo, que pode ser reto ou curvo, é muito mais longo do que as dimensões da seção transversal.

A estrutura é laminar quando duas dimensões predominam em relação à terceira. Têm-se como exemplo as chapas, as paredes, as placas e as cascas, sendo sua espessura bem menor do que suas outras dimensões;

A estrutura é tridimensional quando nenhuma direção é predominante. É o caso de blocos de fundação, alguns tipos de barragens, etc ...

As estruturas podem ainda ser classificadas em hipostáticas, isostáticas (estaticamente determinadas) ou hiperestáticas (estaticamente indeterminadas).

As estruturas são consideradas hipostáticas quando seus movimentos de corpo-rígido não são restringidas e elas não atingem portanto uma configuração de equilíbrio estável. Elas são consideradas quando são restringidas a movimentos de corpo-rígido e o número de incógnitas a determinar é igual ao número de equações de equilíbrio estático. E finalmente, elas são consideradas hiperestáticas quando são restringidas a movimentos de corpo-rígido e o número de incógnitas a determinar é maior do que o número de equações de equilíbrio estático.

Será admitido nesta disciplina que as estruturas são lineares, ou seja, apresentam pequenos deslocamentos e deformações e são compostas de material elástico-linear.

A maioria das estruturas utilizadas na prática é hiperestática ou estaticamente indeterminada. O grau de hiperestaticidade da estrutura será definido no próximo item, 1.2. As estruturas hiperestáticas podem ser analisadas através de dois métodos clássicos da Análise Estrutural: Método das Forças e Método dos Deslocamentos, ou ainda por um método aproximado conhecido como Processo de Cross; estes métodos serão descritos brevemente no item 1.3.

O objetivo geral desta disciplina é capacitar o aluno a analisar estruturas reticuladas hiperestáticas, com ênfase em estruturas planas, determinando seus esforços internos e deslocamentos generalizados. Serão apresentados nesta apostila os três métodos de resolução de estruturas hiperestáticas, sendo o Método das Forças apresentado no Capítulo 2, o Método dos Deslocamentos no Capítulo 3 e o Processo de Cross no Capítulo 4. Como objetivo específico, pretende-se introduzir o aluno na utilização de programas computacionais para Análise Estrutural, através do uso do Programa Educacional ANEST.

## 1.2. GRAU DE HIPERESTATICIDADE

O grau de hipertestaticidade de uma estrutura pode ser externo ou interno. O grau de hipertestaticidade externo ( $g_e$ ) é dado por

$$g_e = r - e - nr, \quad (1.1)$$

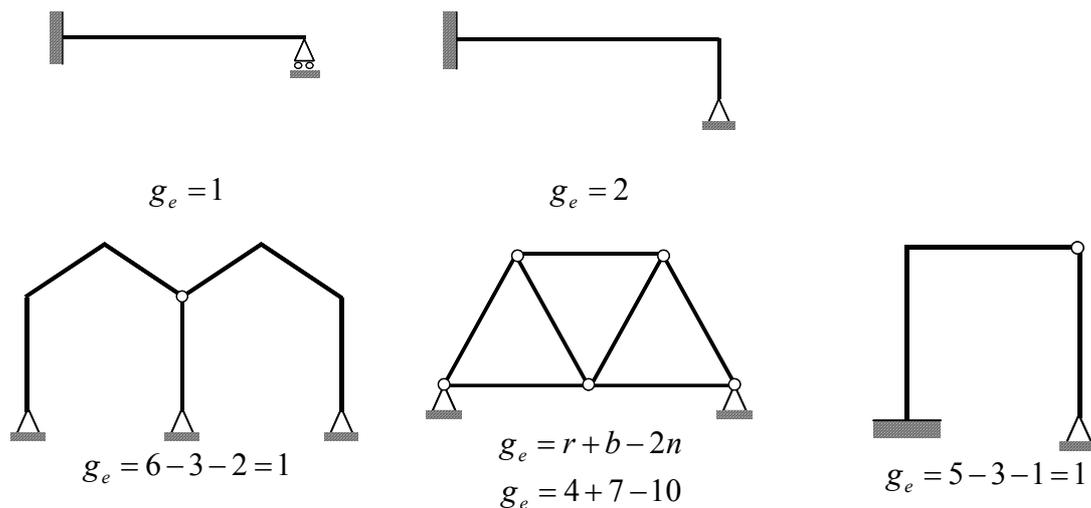
sendo  $r$  o número de reações,  $e$  o número de equações da estática e  $nr$  o número de equações provenientes de rótulas. Este último é expresso por

$$nr = b - 1, \quad (1.2)$$

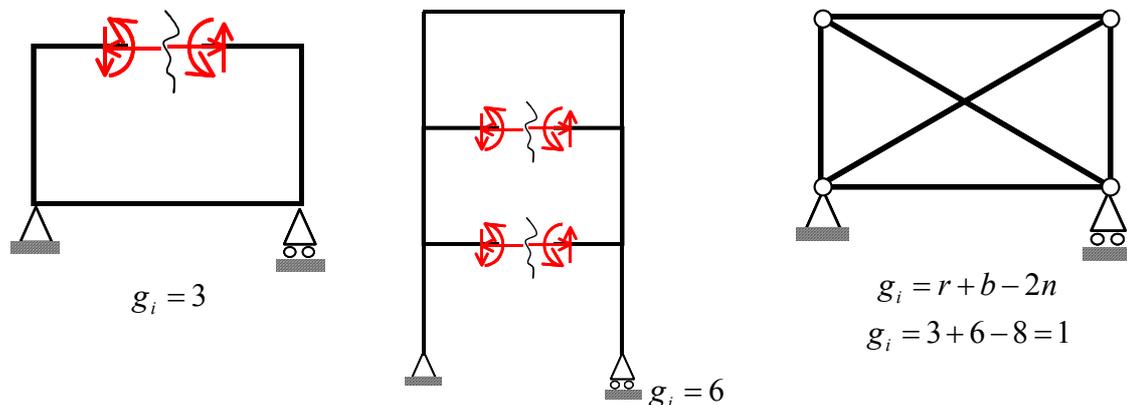
sendo  $b$  igual ao número de barras ligas à rótula.

O grau de hipertestaticidade interno ( $g_i$ ) é igual ao número de esforços internos necessários ao traçado de diagramas, conhecidas as reações.

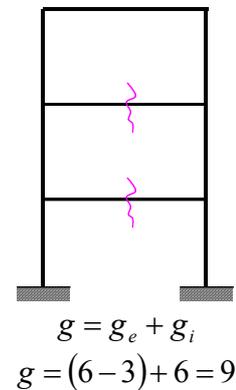
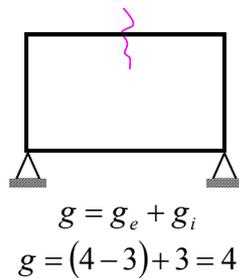
### 1.1.1. Estruturas externamente hipertestáticas



### 1.1.2. Estruturas internamente hipertestáticas



### 1.1.3. Estruturas externa e internamente hiperestáticas



## 1.3. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE ESTRUTURAS HIPERESTÁTICAS

### 1.1.4. Método das Forças (ou dos Esforços ou da Flexibilidade)

Incógnitas: forças

Equações: compatibilidade de **deslocamentos** \*

Processo: liberam-se os vínculos excedentes ou hiperestáticos

Sistema de equações (matricialmente): matriz de flexibilidade da estrutura

Obs: Métodos dos 3 momentos → caso particular, vigas contínuas

\* **Deslocamentos**: podem ser obtidos por:

Método de Integração direta;

Método de Mohr;

Teorema de Castigliano;

Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV);

{ Integração  
Tabelas de Kurt-Beyer

Tabelas;

Obs: Os dois últimos métodos (PTV e Tabelas) serão os mais utilizados.

### 1.1.5. Método dos deslocamentos (ou das deformações ou da rigidez)

Incógnitas: deslocamentos (dos nós, ligações entre barras)

Equações: equilíbrio de forças em torno dos nós

Processo: fixar todos os deslocamentos dos nós possíveis (graus de liberdade)

Sistema de Equações (matricialmente) → Matriz de rigidez da estrutura.

Obs: Método mais adequado para implementação computacional, sendo o mais utilizado atualmente.

#### 1.1.6. Método de Cross

É um método aproximado, baseado no Método dos Deslocamentos.

## 2. MÉTODO DAS FORÇAS

### 1.4. ESTRUTURAS EXTERNAMENTE HIPERESTÁTICAS

#### 1.1.1. Estruturas uma vez hiperestáticas ( $g_e = 1$ )

Seja uma viga engastada-apoiada como mostrado na Figura 2-1. Esta viga apresenta rigidez à flexão igual a  $EI$  e grau de hiperestaticidade externo ( $g_e$ ) igual a 1. Para determinar os esforços internos desta estrutura pelo Método das Forças, é necessário determinar o seu sistema principal. A determinação deste sistema consiste na substituição das vinculações excedentes por suas respectivas forças reativas de tal modo que as condições de compatibilidade de deslocamentos sejam respeitadas.

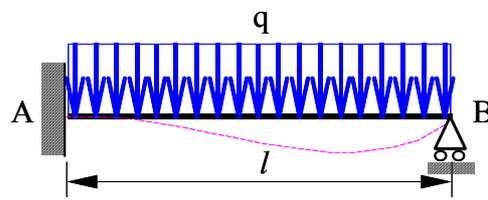


Figura 2-1: Viga engastada-apoiada

A Figura 2-2 apresenta dois sistemas principais possíveis para a viga engastada-apoiada mostrada na Figura 2-1. A condição de compatibilidade para o sistema principal da Figura 2-2a é o deslocamento vertical nulo em B, enquanto que para o sistema principal da Figura 2-2b a rotação no ponto A que deve ser nula.

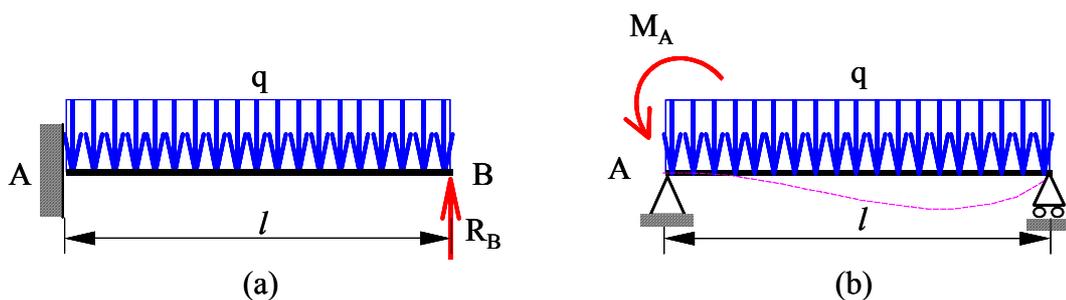


Figura 2-2: Sistemas principais com os respectivos hiperestáticos

Supondo-se que a estrutura esteja sujeita a pequenas deformações, pode-se determinar o valor dos hiperestáticos pela superposição dos efeitos do carregamento externo e do hiperestático em questão (BEER e JOHNSTON 1982; POPOV 1978; TIMOSHENKO 1967). Adotando-se o sistema principal da Figura 2-2a, sabe-se que o deslocamento produzido por uma carga uniformemente distribuída em uma viga engastada (Figura 2-3b) é de

$$\Delta_B^C = +\frac{ql^4}{8EI}, \quad (2.1)$$

e que o deslocamento produzido na mesma estrutura por uma carga concentrada  $R_B$  é de

$$\Delta_B^R = -\frac{R_B l^3}{3EI}. \quad (2.2)$$

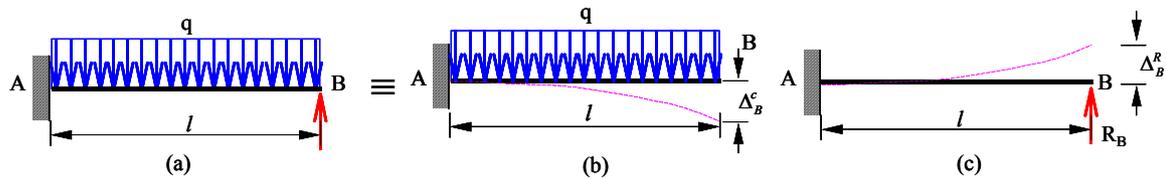


Figura 2-3: Superposição dos efeitos

Sabendo-se que o deslocamento vertical no ponto B é nulo, têm-se

$$\Delta_B = \Delta_B^C + \Delta_B^R = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{ql^4}{8EI} - \frac{R_B l^3}{3EI} = 0, \quad (2.4)$$

$$R_B = \frac{3}{8} ql. \quad (2.5)$$

Conhecida a reação em B, em seguida pode-se determinar os esforços internos na estrutura, utilizando a viga isostática mostrada na Figura 2-4.

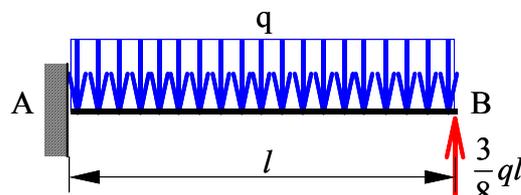


Figura 2-4: Sistema principal com o valor do hiperestático determinado

A fim de formalizar o Método das Forças para o sistema uma vez indeterminado da Figura 2-1, adota-se o sistema principal da Figura 2-2a. Aplicando-se um carregamento unitário no ponto B, este se deslocará de  $\delta_B$  (Figura 2-5). Portanto, aplicando-se uma força  $R_B$ , obter-se-á um deslocamento igual a  $(R_B \cdot \delta_B)$ .

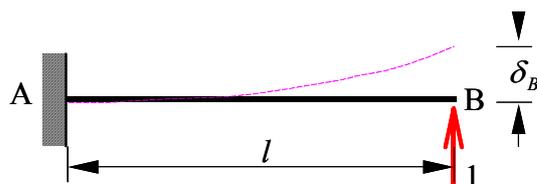


Figura 2-5: Deslocamento produzido por uma força unitária

Chamando-se de  $\delta_B^C$  o deslocamento em B provocado pela carga uniformemente distribuída  $\Delta_B^C$ , e chamando de  $\delta_B^R$  o deslocamento em B provocado pela carga concentrada unitária (Figura 2-5) tem-se

$$\delta_B^C + R_B \cdot \delta_B^R = 0. \quad (2.6)$$

Logo

$$R_B = -\frac{\delta_B^C}{\delta_B^R}. \quad (2.7)$$

Neste curso, será adotada a convenção proposta por SUSSEKIND, sendo os hiperestáticos denominados de  $R_1, R_2, R_3$  ou  $X_1, X_2, X_3...$  (incógnitas do problema) e os deslocamentos generalizados de  $\delta_{ij}$ . O índice  $i$  indica o local onde ocorre o deslocamento generalizado e o índice  $j$  indica a causa deste deslocamento.

Os deslocamentos generalizados provocados pelo carregamento externo apresentarão o índice  $j$  igual a zero ( $\delta_{i0}$ ). Portanto, para o exemplo da Figura 2-2a, o deslocamento na direção do hiperestático  $X_1$  provocado pelo carregamento externo é expresso por  $\delta_{10}$  e o deslocamento na direção do hiperestático  $X_1$  provocado pela força unitária é expresso por  $\delta_{11}$ .

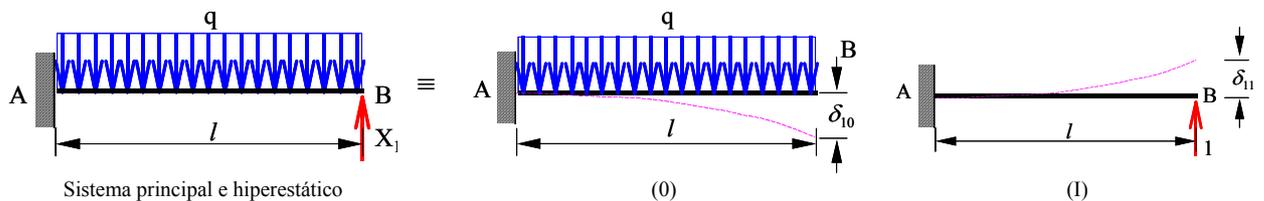


Figura 2-6: Decomposição dos efeitos das cargas e hiperestáticos sobre a viga

O deslocamento no ponto B na direção do hiperestático 1 é nulo, portanto a condição de compatibilidade de deslocamentos é

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0. \quad (2.8)$$

Logo

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}. \quad (2.9)$$

No exemplo da Figura 2-2a

$$\delta_{10} = -\frac{ql^4}{8EI} \text{ e} \quad (2.10)$$

$$\delta_{11} = \frac{1 \cdot l^3}{3EI} \quad (2.11)$$

Substituindo os valores na equação acima, têm-se

$$X_1 = -\frac{\left(\frac{ql^4}{8EI}\right)}{\frac{1 \cdot l^3}{3EI}}, \quad (2.12)$$

$$X_1 = -\frac{3}{8}ql. \quad (2.13)$$

Outro sistema principal possível seria o da Figura 2-2b, na qual o hiperestático  $X_1$  representa o momento no engaste A.

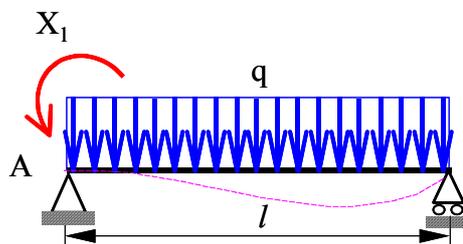


Figura 2-7: Sistema principal e hiperestático

Sabe-se que a rotação no ponto A da viga engastada-apoiada (Figura 2-1) é nula. Portanto, a soma da rotação causada pela carga distribuída com a rotação causada pelo hiperestático  $X_1$  deve ser nula (Figura 2-8) ( $\delta_1 = 0$ , ou seja,  $\theta_A = 0$ ).

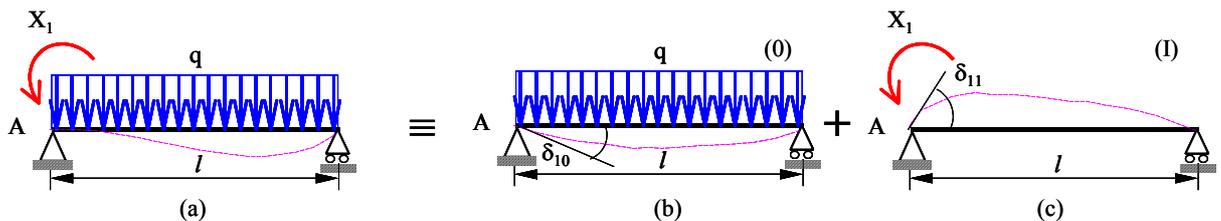


Figura 2-8: Superposição dos efeitos do carregamento externo e do hiperestático

Utilizando a nomenclatura proposta por SUSSEKIND e supondo que  $\delta_1$  é positivo no sentido de  $X_1$ , obtém-se de tabelas que a rotação em A (ponto 1) produzida por uma carga distribuída (Figura 2-8b) é

$$\delta_{10} = -\frac{ql^3}{24EI} \quad (2.14)$$

e a rotação em 1 (ponto A) produzida pelo momento unitário aplicado em 1 (ponto A) é

$$\delta_{11} = +\frac{1 \cdot l}{3EI} \quad (2.15)$$

Utilizando-se a condição de compatibilidade de rotação, têm-se

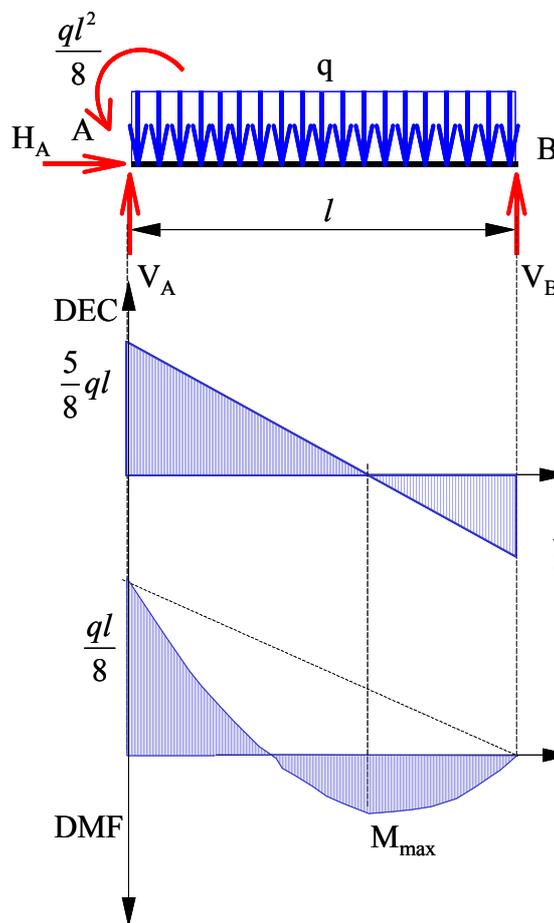
$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0, \quad (2.16)$$

$$-\frac{ql^3}{24EI} + X_1 \cdot \frac{1 \cdot l}{3EI} = 0, \quad (2.17)$$

$$X_1 = \frac{ql^2}{8}, \quad (2.18)$$

sendo  $X_1$  o momento reativo em A e o seu sinal positivo indica que o sentido arbitrado está correto.

Para serem determinados os esforços internos da estrutura, emprega-se o sistema principal utilizado



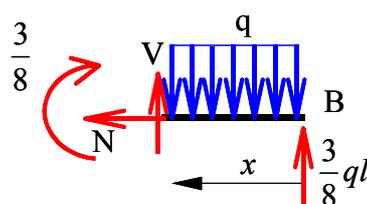
Cálculo das reações

$$V_A = \frac{ql}{2} + \frac{ql^2}{8l} = \frac{ql}{2} + \frac{ql}{8} = \frac{5}{8}ql$$

$$V_B = \frac{ql}{2} - \frac{ql^2}{8l} = \frac{ql}{2} - \frac{ql}{8} = \frac{3}{8}ql$$

Cálculo do momento máximo

O momento é máximo quando o esforço cortante é nulo.



Tomando-se um segmento de viga acima e efetuando-se o equilíbrio de forças e momentos, têm-se

$$\sum F = 0, \quad V = qx - \frac{3}{8}ql = 0, \quad x = \frac{3}{8}l.$$

$$M_{\max}^+ = \left(\frac{3}{8}ql\right) \cdot \left(\frac{3}{8}l\right) - \frac{q}{2} \left(\frac{3}{8}l\right)^2,$$

$$M_{\max}^+ = \frac{9}{128}ql^2$$

### 1.4.1.1. Exemplo 1- Pórtico plano

Traçar os diagramas de esforços do pórtico plano mostrado na Figura 2-9.

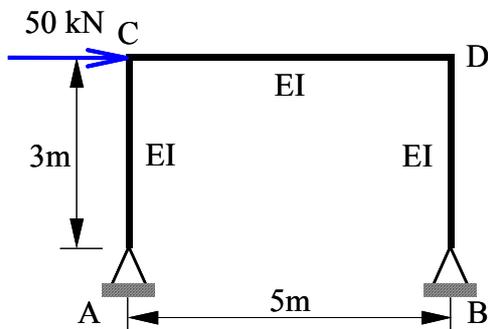


Figura 2-9: Pórtico uma vez hiperestático

Para determinar os diagramas de esforços do pórtico plano ilustrado pela Figura 2-9 é necessário primeiramente determinar as suas reações. Como o pórtico é hiperestático, utilizar-se-á o Método das Forças para a determinação das reações redundantes.

Para a aplicação do Método das Forças, supõem-se que o material segue a lei de Hooke e que as condições são tais que os pequenos deslocamentos devidos à deformação da estrutura não afetam a ação das forças exteriores e são desprezíveis no cálculo das tensões. Com estas duas restrições, os deslocamentos de um sistema elástico são funções lineares das cargas exteriores. Se as cargas crescem numa certa proporção, todos os deslocamentos crescem na mesma proporção (TIMOSHENKO 1967; POPOV 1978; BEER e JOHNSTON 1982).

Para resolver o pórtico da Figura 2-9 pelo Método das Forças, substitui-se o vínculo redundante por sua respectiva força reativa, tornando a estrutura isostática como o mostrado na Figura 2-10b.

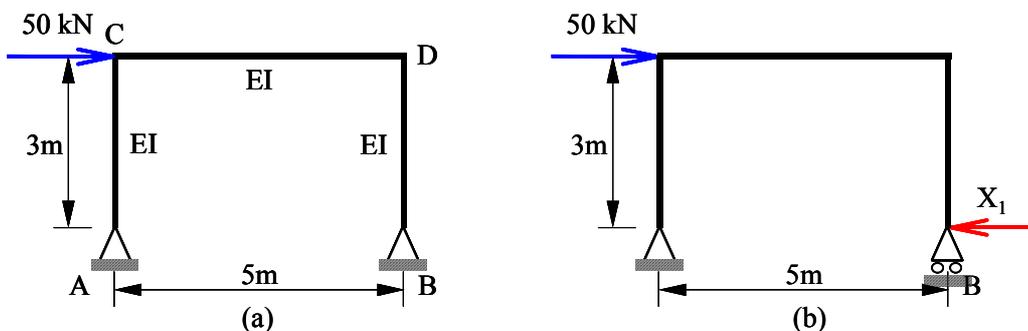


Figura 2-10: Pórtico com a sua estrutura principal e o seu hiperestático

Da Figura 2-10a, sabe-se que o deslocamento horizontal do ponto no qual esta sendo aplicada a força  $X_1$  é nulo ( $\delta_1 = 0$ ). Como o material é elástico e a estrutura esta submetida a pequenas deformações, pode ser usada a superposição dos efeitos devidos aos carregamentos. Portanto o deslocamento horizontal no ponto 1 (onde está sendo aplicado o hiperestático) provocado pelo carregamento externo mais o deslocamento horizontal no ponto 1 provocado pelo hiperestático  $X_1$  deve ser nulo para que a condição de compatibilidade de deslocamentos no ponto 1 seja obedecida.

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \delta_{11} = 0 \quad (2.19)$$

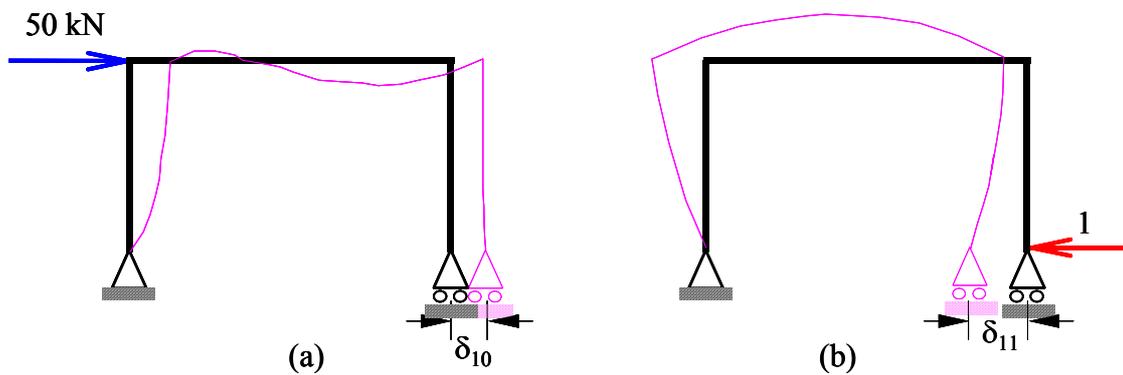


Figura 2-11: Deslocamentos provocados na estrutura pelo carregamento externo e por uma carga unitária.

Para determinar o valor do hiperestático  $X_1$  é preciso, primeiramente, determinar os deslocamentos generalizados  $\delta_{10}$  e  $\delta_{11}$ . Estes deslocamentos podem ser encontrados através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (TIMOSHENKO, 1967; POPOV, 1978; SUSSEKIND, 1994). Segundo o teorema do Princípio dos Trabalhos Virtuais aplicados aos corpos elásticos, o trabalho virtual das forças externas é igual ao trabalho virtual das forças internas para quaisquer deslocamentos virtuais compatíveis com os vínculos da estrutura.

$$\delta W_e = \delta W_{ei} \quad (2.20)$$

A escolha do estado de carregamento deve ser tal que a carga virtual  $P$  associada ao deslocamento  $\delta$  (que se deseja calcular) forneça um trabalho virtual de forças externas igual a

$$P \cdot \delta \quad (2.21)$$

Em uma estrutura, primeiramente aplica-se uma força imaginária ou virtual  $P$  na direção que se deseja calcular os deslocamentos. A força  $P$  causa esforços internos virtuais de flexão ( $\bar{M}$ ), tração ou compressão ( $\bar{N}$ ), de cisalhamento ( $\bar{V}$ ) e de torção ( $\bar{T}$ ) através do corpo.

Em seguida, com a força virtual atuando sobre a estrutura, aplicam-se as forças reais ou induzem-se as deformações específicas. Estas deformações podem ser provocadas pelo carregamento, pela variação de temperatura, por recalques dos apoios ou modificações impostas na montagem.

O trabalho externo realizado pela força virtual  $P$ , movendo-se de  $\delta$  na direção dessa força é igual ao trabalho total realizado nos elementos internos pelas forças virtuais ( $\bar{M}$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{V}$  e  $\bar{T}$ ). O trabalho realizado pela força virtual é dado pela deformação de todos os elementos  $dx$  ao longo da estrutura. Compreende-se por deformação as deformações devidas à flexão, ao esforço normal ao cisalhamento e à torção.

$$W_{\text{int}} = \int_l \bar{M} d\varphi + \int_l \bar{N} \Delta + \int_l \bar{Q} d\gamma + \int_l \bar{T} d\theta, \quad (2.22)$$

sendo  $d\varphi$  as rotações devidas ao carregamento real,  $\Delta$  os alongamentos ou encurtamentos devidos ao carregamento real,  $\gamma$  as deformações angulares e  $\theta$  as deformações devidas às torções.

$$\bar{P} \cdot \delta = \int_l \bar{M} \frac{M}{EI} dx + \int_l \bar{N} \frac{N}{EA} dx + \int_l \chi \bar{V} \frac{V}{GA} dx + \int_l \bar{T} \frac{T}{GJ_t} dx, \quad (2.23)$$

onde  $\bar{M}$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{V}$  e  $\bar{T}$  são os esforços produzidos pela carga virtual;  $M$ ,  $N$ ,  $V$  e  $T$  são os esforços produzidos pelo carregamento real;  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $G$  é o módulo de elasticidade transversal,  $I$  é o momento de inércia da seção transversal em relação ao seu eixo que passa pelo seu baricentro;  $A$  é a área da seção transversal e  $J_t$  é momento de inércia à torção.

Na prática, a contribuição de algumas parcelas de deformação pode ser desprezada em relação às outras, dependendo da sua importância relativa. A deformação devido ao cisalhamento pode ser negligenciada para a maioria de vigas e pilares normalmente utilizados na construção civil, porém esta parcela de deformação é importante para estruturas em madeira, estruturas com vãos curtos, em estruturas com cargas elevadas. A parcela de deformação axial pode ser desprezada em peças que não trabalhem fundamentalmente com esforço normal.

Neste exemplo somente serão conservadas as deformações relativas à flexão. Portanto

$$\bar{P} \cdot \delta = \int_l \frac{\bar{M}M}{EI} dx. \quad (2.24)$$

Efetuada-se a integração das deformações ao longo das três barras do pórtico da Figura 2-10 e considerando a força virtual igual a 1, tem-se

$$1 \cdot \delta = \int_l \frac{\bar{M}_1 M_1}{E_1 I_1} dx_1 + \int_l \frac{\bar{M}_2 M_2}{E_2 I_2} dx_2 + \int_l \frac{\bar{M}_3 M_3}{E_3 I_3} dx_3. \quad (2.25)$$

Para a determinação do deslocamento generalizado  $\delta_{10}$ , têm-se os estados de deformação e de carregamento mostrados na Figura 2-12. Visto que a solução dessas integrais são encontradas em tabelas como propõe SUSSEKIND (1994).

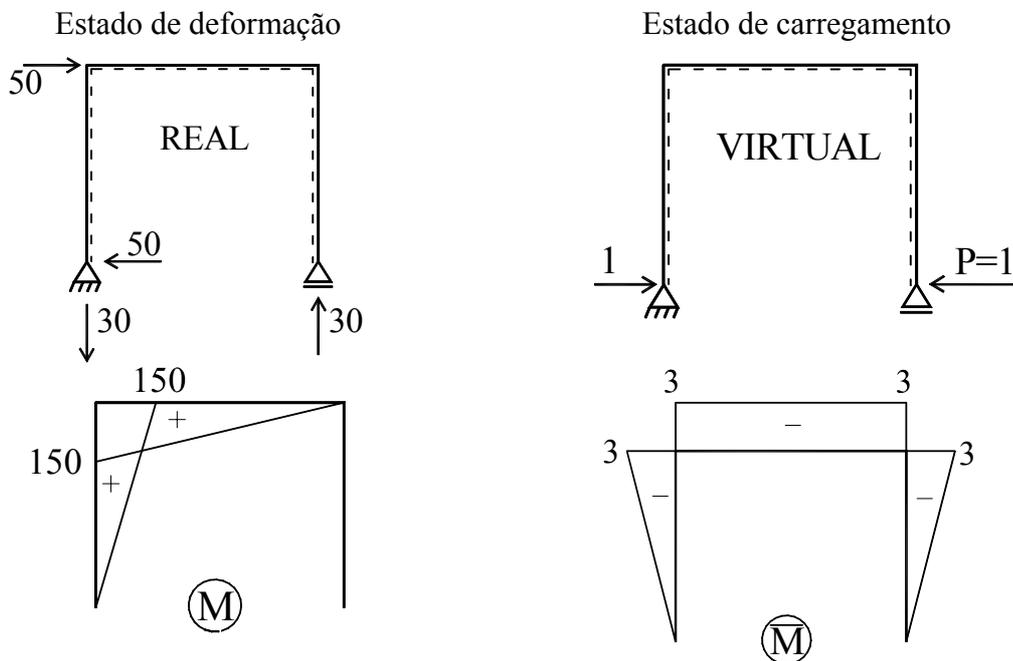


Figura 2-12: Estados de deformação e de carregamento para o cálculo de  $\delta_{10}$

As reações e os esforços solicitantes mostrados para os estados de deformação e de carregamento (Figura 2-12) são determinados utilizando-se as equações de equilíbrio de estática, como estudado na disciplina ECV 5219–Análise estrutural I.

Após a determinação dos momentos nas barras efetua-se a combinação, barra a barra, desses esforços a fim de se determinar o valor tabelado das integrais da equação acima (Tabela 2-1).

Tabela 2-1: Combinação dos diagramas de momentos fletores

Barra 1	Barra 2	Barra 3
<p style="text-align: center;"><math>L_1 = 3 \text{ m}</math></p>		
$\int_{l_1} \overline{MM} dx_1 = \frac{1}{3} l_1 \overline{MM}$	$\int_{l_2} \overline{MM} dx_2 = \frac{1}{2} l_2 \overline{MM}$	$\int_{l_3} \overline{MM} dx_3 = 0$

Como a rigidez à flexão é constante ao longo de toda a estrutura, pode-se escrever

$$EI \cdot (1 \text{ kN}) \delta_{10} = \int_l \overline{MM} dx_1 + \int_l \overline{MM} dx_2 + \int_l \overline{MM} dx_3. \quad (2.26)$$

Das combinações mostradas na Tabela 2-1, obtêm-se:

$$EI(1 \text{ kN}) \cdot \delta_{10} = \frac{1}{3} (3 \text{ m})(150 \text{ kN} \cdot \text{m})(-3 \text{ kN} \cdot \text{m}) + \frac{1}{2} (5 \text{ m})(150 \text{ kN} \cdot \text{m})(-3 \text{ kN} \cdot \text{m}). \quad (2.27)$$

$$EI(1 \text{ kN}) \delta_{10} = -450 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3 - 450 \text{ kN}^2 \cdot \text{m}^3. \quad (2.28)$$

$$\delta_{10} = -\frac{1575}{EI} \text{ kN} \cdot \text{m}^3 \quad (2.29)$$

O cálculo do deslocamento horizontal em 1 devido à carga unitária na direção do hiperestático  $X_1$  ( $\delta_{11}$ ) é efetuado a partir dos estados de deformação e de carregamento mostrados na Figura 2-13.

As reações e os esforços solicitantes mostrados para os estados de deformação e de carregamento (Figura 2-13) são determinados utilizando-se as equações de equilíbrio de estática.

Após a determinação dos momentos fletores nas barras, efetua-se a combinação, barra a barra, desses esforços a fim de determinar o valor tabelado das integrais da equação acima (Tabela 2-1).

$$EI(1 \text{ kN}) \delta_{11} = \int_{l_1} \overline{MM} dx_1 + \int_{l_2} \overline{MM} dx_2 + \int_{l_3} \overline{MM} dx_3. \quad (2.30)$$

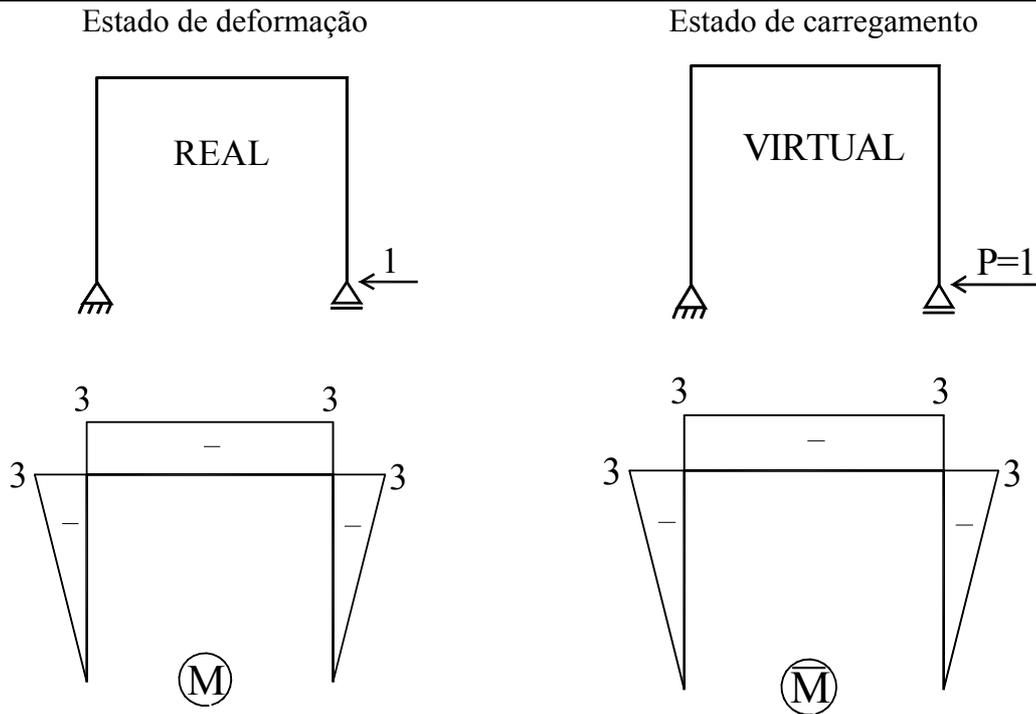


Figura 2-13: Estados de deformação e de carregamento para o cálculo de  $\delta_{11}$

Tabela 2-2: Combinação dos diagramas de momentos fletores para o cálculo de  $\delta_{11}$

Barra 1	Barra 2	Barra 3
$\int_{l_1} \overline{M} M dx_1 = \frac{1}{3} l_1 \overline{M} M$	$\int_{l_2} \overline{M} M dx_2 = l_2 \overline{M} M$	$\int_{l_3} \overline{M} M dx_3 = \frac{1}{3} l_3 \overline{M} M$

Das combinações mostradas na Tabela 2-2, obtêm-se:

$$EI \cdot (1kN) \cdot \delta_{11} = \frac{1}{3}(3)(-3)(-3) + (5)(-3)(-3) + \frac{1}{3}(3)(-3)(-3). \quad (2.31)$$

$$EI(1kN)\delta_{11} = 9kN^2 \cdot m^3 + 450kN^2 \cdot m^3 + 9kN^2 \cdot m^3. \quad (2.32)$$

$$\delta_{11} = \frac{63}{EI} kN \cdot m^3 \quad (2.33)$$

Substituindo os deslocamentos generalizados  $\delta_{10}$  e  $\delta_{11}$  na equação de compatibilidade, têm-se

$$-\frac{1575}{EI} kN \cdot m^3 + X_1 \cdot \frac{63}{EI} kN \cdot m^3 = 0, \quad (2.34)$$

$$X_1 = \frac{1575}{63} = 25, \quad (2.35)$$

$$X_1 = 25 kN. \quad (2.36)$$

Para a determinação do deslocamento generalizado  $\delta_{11}$ , não é necessário traçar novamente o diagrama de momento fletor, basta fazer

$$\delta_{11} = \int_{barras} \frac{\overline{M}_I \overline{M}_I}{EI} dx, \quad (2.37)$$

sendo  $\overline{M}_I$  o diagrama dos momentos fletores devido à carga unitária na direção do hiperestático  $X_1$ .

Para a determinação do deslocamento generalizado  $\delta_{10}$ , tem-se

$$\delta_{10} = \int_{barras} \frac{\overline{M}_I M_0}{EI} dx, \quad (2.38)$$

sendo  $M_0$  o diagrama dos momentos fletores devido ao carregamento externo.

Portanto o valor dos deslocamentos generalizados é dado por

$$\delta_{ij} = \int_{barras} \frac{\overline{M}_i M_j}{EI} dx. \quad (2.39)$$

Após o valor do hiperestático  $X_1$  ter sido determinado, as reações e os esforços internos no pórtico isostático são calculados utilizando-se as equações de equilíbrio da estática.

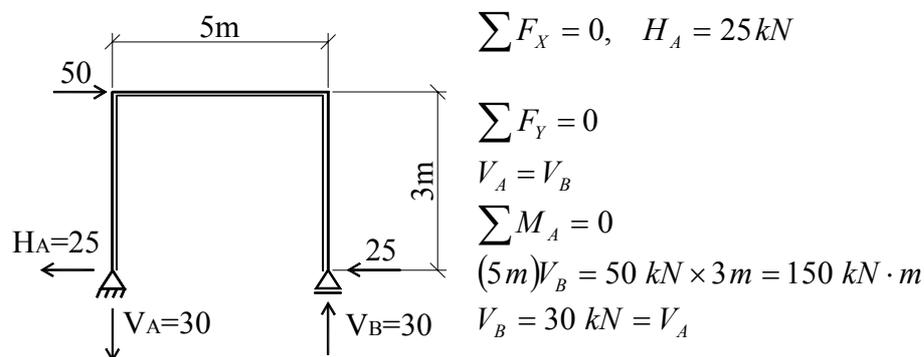


Figura 2-14: Reações de apoio do pórtico plano

Após a determinação dos esforços internos, são traçados os seus respectivos diagramas como mostrado na Figura 2-15.

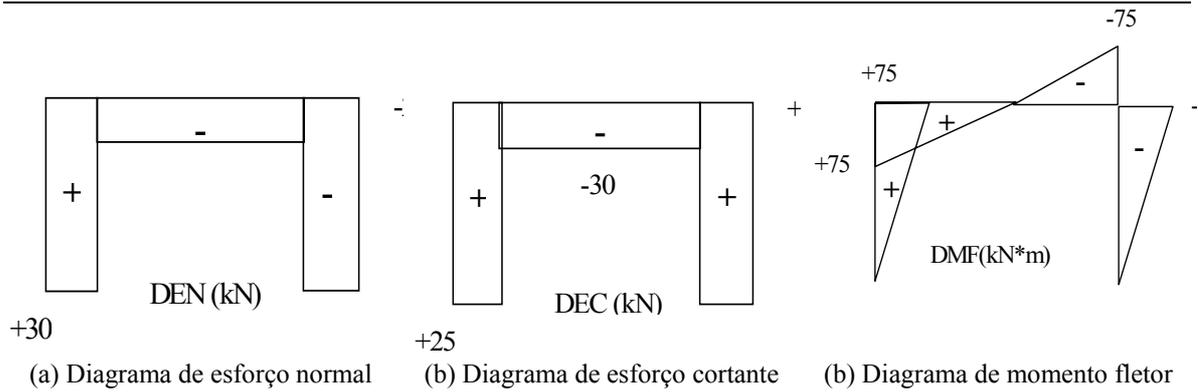


Figura 2-15: Diagrama de esforços do pórtico plano

### 1.1.1.1. Exemplo 2 - Pórtico plano

Determinar os diagramas de esforços do pórtico plano mostrado na Figura 2-16, cujos elementos estruturais apresentam uma seção retangular constante de 20 cm × 40 cm e módulo de elasticidade de  $2 \cdot 10^7 \frac{kN}{m^2}$ . No cálculo dos deslocamentos generalizados, considerar as deformações devidas à flexão e ao esforço normal.

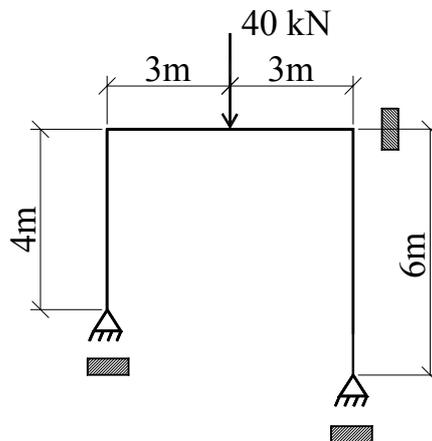


Figura 2-16: Pórtico plano

Para a determinação do diagrama de esforços do pórtico hiperestático mostrado na Figura 2-16, primeiramente as reações de apoio devem ser calculadas. Utilizando o Método das Forças para isto, tem-se que determinar inicialmente o sistema principal a ser utilizado (estrutura isostática mais o carregamento externo) (Figura 2-17)

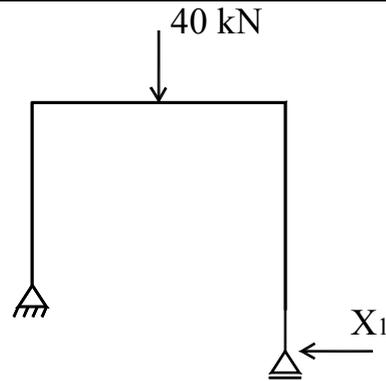


Figura 2-17: Sistema principal e hiperestático do pórtico plano da Figura 2-16

Sabe-se que, para estruturas elásticas submetidas à pequenas deformações, o deslocamento total da estrutura pode ser determinado pela soma dos deslocamentos de cada uma das ações. Portanto, os deslocamentos do pórtico isostático da mostrado na Figura 2-17 pode ser determinado como sendo a soma dos efeitos mostrados na Figura 2-18, sendo  $\delta_{10}$  o deslocamento na direção do hiperestático  $X_1$  devido ao carregamento e  $\delta_{11}$  o deslocamento na direção do hiperestático  $X_1$  devido à carga unitária na direção do hiperestático  $X_1$ .

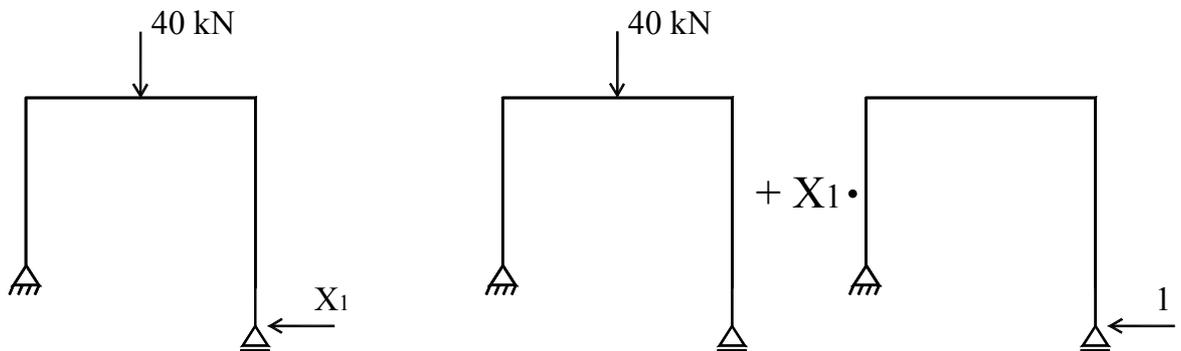


Figura 2-18: Superposição de efeitos

Da Figura 2-16, sabe-se que o deslocamento em 1 é nulo ( $\delta_1=0$ ), resultando na equação de compatibilidade de deslocamentos

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0. \quad (2.40)$$

Neste exemplo serão consideradas no cálculo dos deslocamentos generalizados  $\delta_{ij}$  as contribuições do esforço normal e do momento fletor. Portanto

$$\delta_{ij} = \int_l \frac{\overline{M}_i M_j}{EI} dx + \int_l \frac{\overline{N}_i N_j}{EA} dx, \quad (2.41)$$

sendo  $E$  o módulo de elasticidade do material;  $A$  a seção transversal das barras e  $I$  o momento de inércia da seção transversal.

O momento de inércia da seção retangular da barra é

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12} = \frac{(0,2 \text{ m}) \cdot (0,4 \text{ m})^3}{12} = 0,001067 \text{ m}^4 . \quad (2.42)$$

A área da seção transversal é

$$A = b \cdot h = (0,2 \text{ m}) \cdot (0,4 \text{ m}) = 0,08 \text{ m}^2 . \quad (2.43)$$

e

$$EA = 160 \cdot 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 , . \quad (2.44)$$

$$EI = 2,133 \cdot 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2 . \quad (2.45)$$

O cálculo dos deslocamentos generalizados é realizado a partir dos diagramas dos esforços normais e fletores da situação 0 (devido ao carregamento externo) e da situação I (devido ao hiperestático  $X_1$ ). Os diagramas dos esforços  $N_0$  e  $M_0$  são mostrados na Figura 2-19 e os diagramas  $N_1$  e  $M_1$  são mostrados na Figura 2-20.

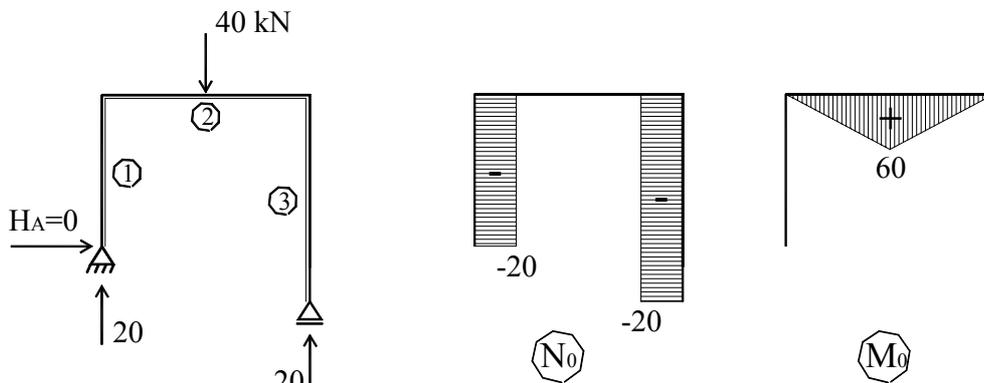
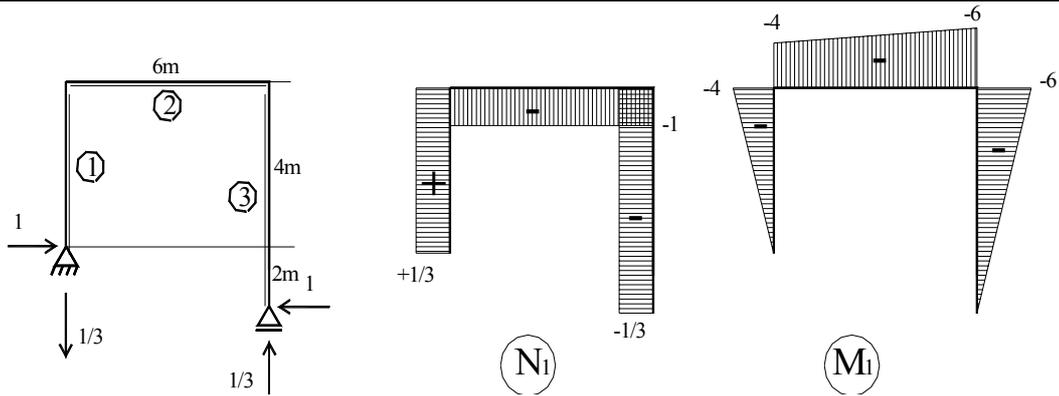


Figura 2-19: Diagramas  $N_0$ ,  $M_0$  devido ao carregamento

As reações e os esforços internos mostrados na Figura 2-19 e na Figura 2-20 foram calculados a partir do pórtico isostático utilizando unicamente as equações de equilíbrio da estática.



O cálculo do deslocamento generalizado  $\delta_{10}$  será realizado pela equação

$$\delta_{10} = \int_l \frac{\bar{N}_1 N_0}{EA} dx + \int_l \frac{\bar{M}_1 M_0}{EI} dx, \quad (2.46)$$

sendo  $\bar{N}_1 = N_1$  e  $\bar{M}_1 = M_1$  (Figura 2-20).

A Tabela 2-3 mostra a combinação dos diagramas de esforços normais  $N_1$  e  $N_0$ .

Tabela 2-3: Combinação dos esforços  $\bar{N}_1$  e  $N_0$  para o cálculo de  $\delta_{10}$

Barra 1	Barra 2	Barra 3
$-20$  $\frac{1}{3}$ $l_1=4m$	Combinação nula	
$\int_{l_1} N_1 N_0 dx_1 = l_1 N_1 N_0$		$\int_{l_3} N_1 N_0 dx_3 = l_3 N_1 N_0$

A Tabela 2-4 mostra a combinação dos diagramas de esforços normais  $M_1$  e  $M_0$ .

Tabela 2-4: Combinação dos esforços  $M_1$  e  $M_0$  para o cálculo de  $\delta_{10}$

Barra 1	Barra 2	Barra 3
Combinação nula		Combinação nula
	$\int_{l_2} N_1 N_0 dx_3 = l_2 N_1 N_0$	

$$\delta_{10} = \int_l \frac{N_1 N_0}{EA} dx + \int_l \frac{M_1 M_0}{EI} dx, \quad (2.47)$$

$$\delta_{10} = \frac{+40}{3EA} - \frac{900}{EI}, \quad (2.48)$$

$$\delta_{10} = \frac{40}{3 \cdot 160 \cdot 10^4} - \frac{900}{2,133 \cdot 10^4} = (0,083 \cdot 10^{-4}) - (421,94 \cdot 10^{-4}) = -421,86 \cdot 10^{-4} (m), \quad (2.49)$$

O cálculo do deslocamento generalizado  $\delta_{11}$  será realizado utilizando a equação

$$\delta_{11} = \int_l \frac{N_1 N_1}{EA} dx + \int_l \frac{M_1 M_1}{EI} dx. \quad (2.50)$$

(Figura 2-20).

A Tabela 2-5 mostra a combinação dos diagramas de esforços normais  $N_1$  e  $N_1$  cujo valor da contribuição é dado por

$$\int_l \frac{N_1 N_1}{EA} dx = \frac{1}{EA} \left[ (4m) \left( \frac{1}{3} \right) \left( \frac{1}{3} \right) + (6m) (-1) (-1) + (6m) \left( -\frac{1}{3} \right) \left( -\frac{1}{3} \right) \right] = \frac{64}{3EA}. \quad (2.51)$$

Tabela 2-5: Combinação dos esforços  $N_1$  e  $N_1$  para o cálculo de  $\delta_{11}$

Barra 1	Barra 2	Barra 3
$\int_{l_1} N_1 N_1 dx_1 = l_1 N_1 N_1$	$\int_{l_2} N_1 N_1 dx_2 = l_2 N_1 N_1$	$\int_{l_3} N_1 N_1 dx_3 = l_3 N_1 N_1$

A Tabela 2-6 mostra a combinação dos diagramas de momentos fletores  $M_1$  e  $M_1$ , sendo o valor da integral dos momentos na barra 2 é dada por

$$\int_{l_2} M_1 M_1 dx_2 = \frac{1}{6} (6 m) \{ [4 \cdot (2 \cdot 4 + 6) + 6 \cdot (2 \cdot 6 + 4)] \} = 156 \quad (2.52)$$

e a contribuição total devido ao momento fletor é dada por

$$\int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{(4m)}{3} (-4)(-4) + 156 + \frac{(6m)}{3} (-6)(-6) \right], \quad (2.53)$$

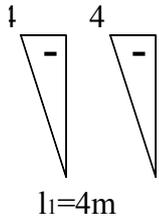
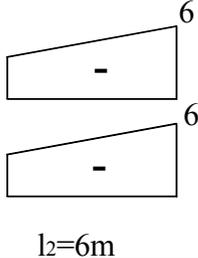
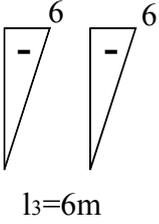
$$\int \frac{M_1 M_1}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{64}{3} + 156 + \frac{216}{3} \right] = \frac{736}{3 \cdot EI}. \quad (2.54)$$

$$\delta_{11} = \int \frac{N_1 N_1}{EA} dx + \int \frac{M_1 M_1}{EI} dx, \quad (2.55)$$

$$\delta_{11} = \frac{64}{9EA} + \frac{736}{3EI} = \frac{64}{9 \cdot 160 \cdot 10^4} + \frac{736}{3 \cdot 2,133 \cdot 10^4}, \quad (2.56)$$

$$\delta_{11} = 0,044 \cdot 10^{-4} + 115,02 \cdot 10^{-4} = 115,06 \cdot 10^{-4}. \quad (2.57)$$

Tabela 2-6: Combinação dos esforços  $M_1$  e  $M_1$  para o cálculo de  $\delta_{11}$

Barra 1	Barra 2	Barra 3
 <p><math>l_1=4m</math></p>	 <p><math>l_2=6m</math></p>	 <p><math>l_3=6m</math></p>
$\int_{l_1} M_1 M_1 dx_1 = \frac{1}{3} l_1 M_1 M_1$	$\int_{l_2} M_1 M_1 dx_2 = \frac{1}{6} l_2 \left[ \begin{matrix} M_{1A} (2M_{1A} + M_{1B}) + \\ M_{1B} (2M_{1B} + M_{1A}) \end{matrix} \right]$	$\int_{l_3} M_1 M_1 dx_3 = \frac{1}{3} l_3 M_1 M_1$

Substituindo os deslocamentos generalizados  $\delta_{10}$  e  $\delta_{11}$  na equação de compatibilidade, têm-se

$$-\frac{1575}{EI} kN \cdot m^3 + X_1 \cdot \frac{63}{EI} kN \cdot m^3 = 0, \quad (2.58)$$

$$X_1 = -\frac{(-421,86 \cdot 10^{-4})}{115,06 \cdot 10^{-4}}, \quad (2.59)$$

$$X_1 = +3,67 kN. \text{ A reação hiperestática é positiva} \quad (2.60)$$

Após a determinação da reação hiperestática, determinam-se as reações do pórtico isostático (Figura 2-17) utilizando as reações de equilíbrio da estática cujos valores são mostrados na Figura 2-21.

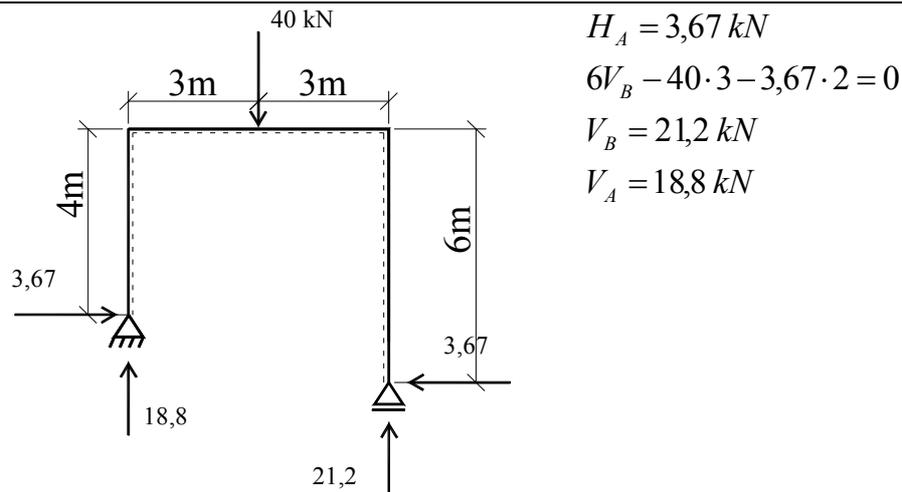
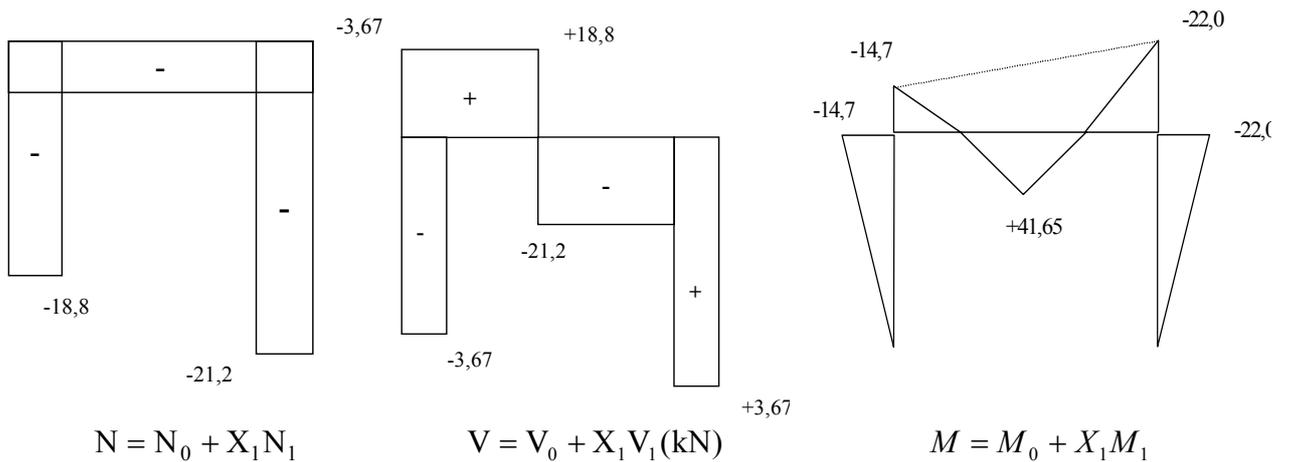


Figura 2-21: Reações no do pórtico mostrado na Figura 2-16

Conhecendo-se as reações é possível determinar os esforços internos e traçar os seus gráficos respectivos (Figura 2-22). Os esforços internos podem ser determinados pelo princípio das superposição dos esforços segundo as expressões mostradas na Figura 2-22.



(a) Diagrama de esforço normal      (b) Diagrama de esforço cortante      (c) Diagrama de momento fletor  
 Figura 2-22: Diagrama de esforços internos do pórtico plano da Figura 2-16

Neste exemplo, se o esforço axial fosse desprezado, a diferença no resultado da reação hiperestática seria 0,02% (o que é muito pequeno). Como exercício didático, deverá ser recalculado os hiperestáticos considerando somente a contribuição dos momentos fletores.

2.1.1. Estruturas duas vezes hiperestáticas ( $g_e = 2$ )

1.4.1.2. Exemplo 1 - Viga engastada com dois apoios

A Figura 2-23 apresenta um exemplo de estrutura duas vezes hiperestática. O grau de hiperestaticidade é determinado segundo o item 1.2 Esta estrutura apresenta cinco reações externas: 3 reações verticais, 1 reação horizontal e um momento (Figura 2-24)

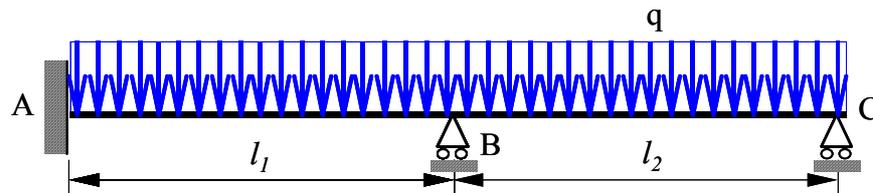


Figura 2-23: Viga engastada com dois apoios

O grau de hiperestaticidade é determinado pela expressão

$$g_e = r - e, \quad (2.61)$$

sendo  $r$  o número de reações e  $e$  o número de equações da estática. Portanto o grau de hiperestaticidade da viga mostrada na Figura 2-23 é

$$g_e = 5 - 3 = 2 \quad (2.62)$$

como foi afirmado anteriormente.

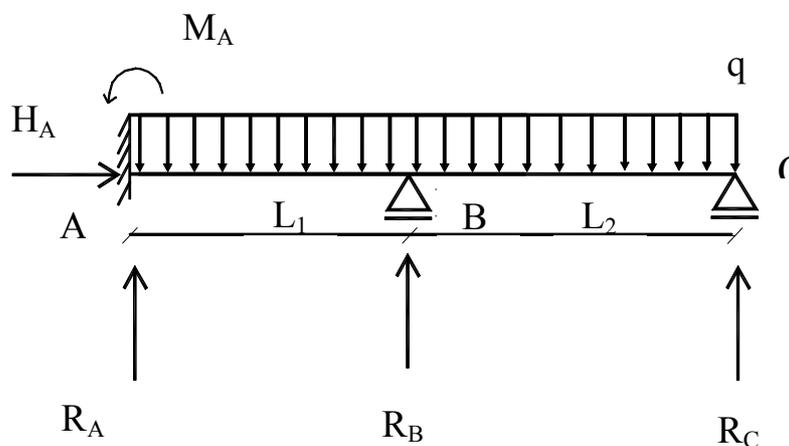


Figura 2-24: Reações da viga

A viga mostrada na Figura 2-23 apresenta diversos sistemas principais possíveis como ilustra a Figura 2-25.

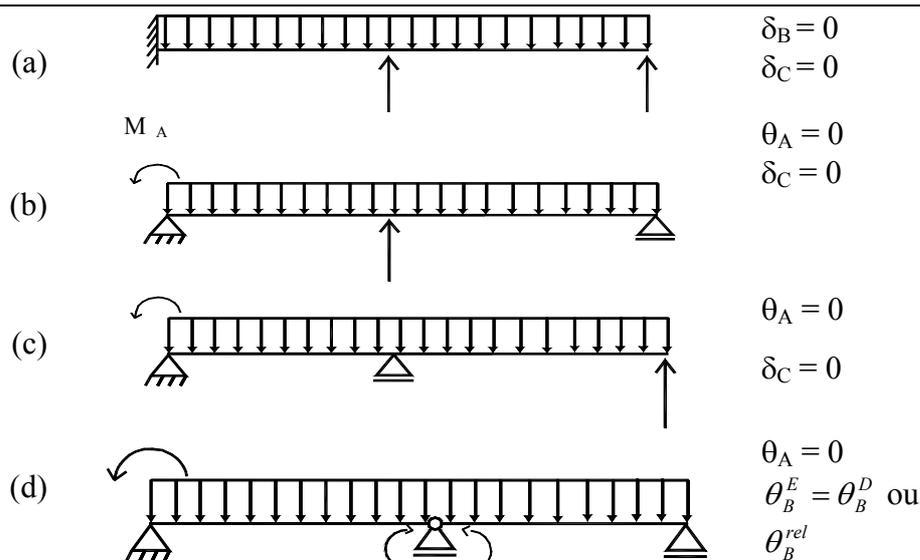


Figura 2-25: Sistemas principais possíveis da viga mostrada na Figura 2-23

O sistema principal mostrado na Figura 2-25d costuma ser conveniente, especialmente quando o carregamento ou a rigidez são diferentes nos dois vãos. Este sistema apresenta condições de compatibilidade de rotação similar ao Método dos Três Momentos.

O sistema principal mostrado na Figura 2-25a apresenta a visualização mais fácil dos efeitos do carregamento e dos hiperestáticos (Figura 2-26)

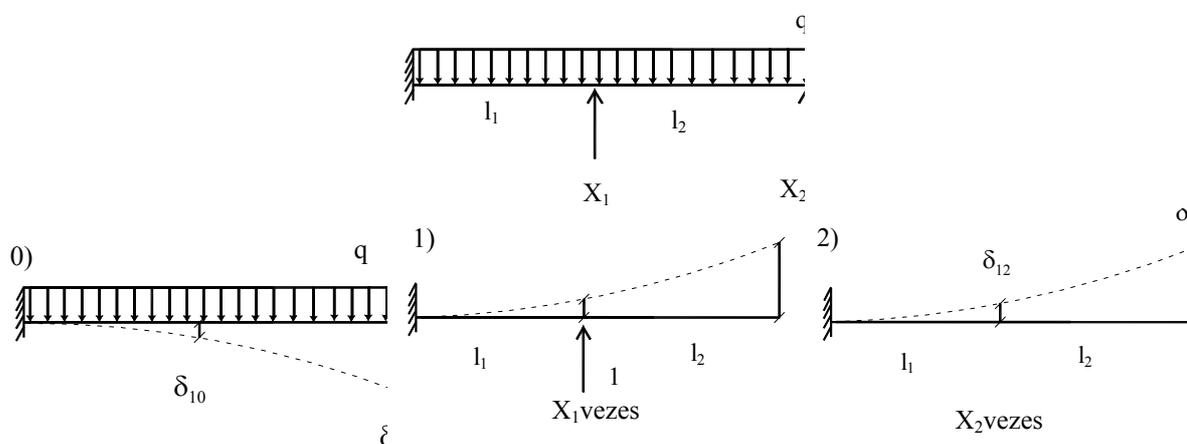


Figura 2-26: Deformação do carregamento e dos hiperestáticos

As condições de compatibilidade de deslocamentos fornecem um sistema de duas equações e duas incógnitas:

$$\delta_1 = 0 \rightarrow \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} = 0, \quad (2.63)$$

$$\delta_2 = 0 \rightarrow \delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} = 0. \quad (2.64)$$

O sistema de equações pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = -\delta_{10} \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = -\delta_{20} \end{cases} \quad (2.65)$$

que pode ser reescrito sob a forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad (2.66)$$

$$\delta \cdot \mathbf{X} = -\delta_0, \quad (2.67)$$

onde  $\delta$  é a matriz de flexibilidade,  $\mathbf{X}$  é o vetor de esforços ou forças (incógnitas) e  $\delta_0$  é o vetor de deslocamento devido à ação do carregamento.

Para se obter o vetor de incógnitas é necessário inverter a matriz de flexibilidade da estrutura:

$$\mathbf{X} = -\delta^{-1} \delta_0, \quad (2.68)$$

sendo  $\delta^{-1} = \mathbf{K}$  a matriz de rigidez da estrutura.

Em geral, para vigas contínuas, é mais conveniente adotar o sistema principal mostrado na Figura 2-25iv, conforme será visto no próximo exemplo. Os coeficientes  $\delta_{ij}$  podem ser obtidos por diversos métodos, neste curso será usado o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV).

### 1.4.1.3. Exemplo - Viga contínua com três vãos

Seja a viga contínua com três vãos, com dois graus de hiperestaticidade e rigidez à flexão ( $EI$ ) constante (Figura 2-27).

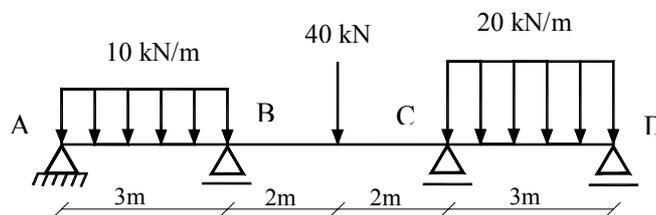


Figura 2-27: Viga contínua com três vãos

O sistema principal adotado para a resolução do problema é representado pela Figura 2-28. O sistema apresenta as rotações relativas entre as barras ligadas pelas 1 e 2

como sendo nula. Destas condições resultam as equações de compatibilidades expressas por

$$\delta_1 = \theta_B^E - \theta_B^D = 0, \quad (2.69)$$

$$\delta_2 = \theta_c^E - \theta_c^D = 0, \quad (2.70)$$

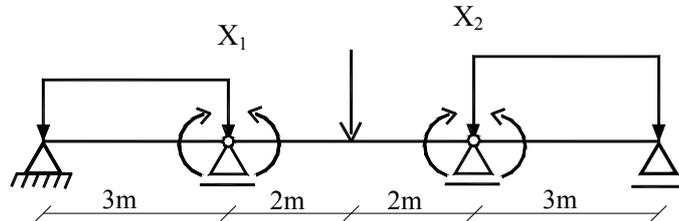


Figura 2-28: Sistema principal da viga contínua mostrada na Figura 2-27.

A Figura 2-29 apresenta os diagramas de esforços da situação 0 (\$M\_0\$) para o sistema principal da Figura 2-28.

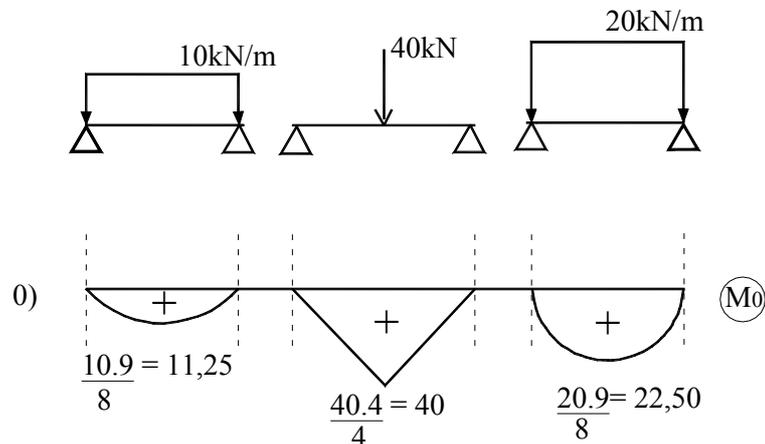


Figura 2-29: Momentos fletores do sistema principal causados pelo carregamento.

A Figura 2-30 apresenta os diagramas de momentos devidos à um momento unitário aplicado na direção dos hiperestáticos \$X\_1\$.

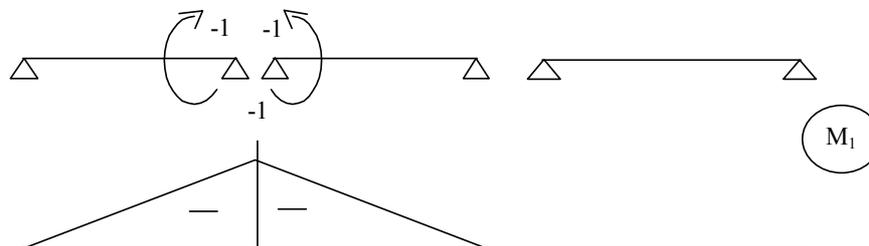


Figura 2-30: Momentos fletores devido a um momento unitário aplicado na direção do hiperestático \$X\_1\$

A Figura 2-31 apresenta os diagramas de momentos devidos à um momento unitário aplicado na direção dos hiperestáticos \$X\_2\$. Os momentos

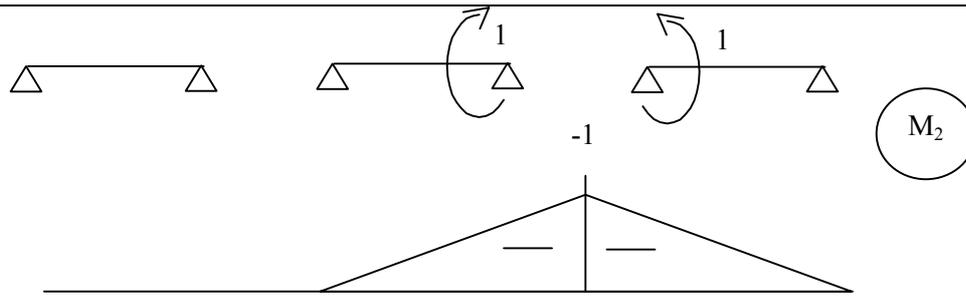


Figura 2-31: Diagrama de momentos devidos à um mom. unitário aplicado na direção dos hiperestáticos  $X_2$

Para se obter a rotação relativa na rótula 1, aplicam-se os binários unitários. Faz-se o mesmo para a rótula 2. Portanto, para obter-se rotação relativa na rótula 1 devido ao carregamento  $\underline{Q}$ , ou seja  $\delta_{10}$ , utilizando PVT, basta fazer

$$\delta_{10} = \int_{\text{barras}} \frac{M_1 M_0}{EI} dx, \quad (2.71)$$

visto que o esforço axial é nulo neste exemplo. Procede-se analogamente para determinar os demais coeficientes  $\delta_{ij}$ .

O sistema de equações de compatibilidade é

$$\begin{cases} \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} = 0 \\ \delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} = 0 \end{cases} \quad (2.72)$$

Para a determinação de  $\delta_{10}$  procede-se a combinação mostrada na Tabela 2-7, resultando

$$EI \cdot \delta_{10} = \frac{1}{3}(3m)(-1) \cdot 11,25 + \frac{1}{6}(4m)(1 + 0,5)(-1)(40),$$

$$\delta_{10} = -\frac{51,25}{EI}. \quad (2.73)$$

Tabela 2-7: Combinação dos diagramas de momentos para o cálculo de  $\delta_{10}$

Barra 1	Barra 2	Barra 3
		Combinação nula
$\int_{l_1} M_1 M_0 dx_1 = \frac{1}{3} l_1 M_1 M_{\max}$	$\int_{l_2} M_1 M_0 dx_2 = \frac{1}{6} l_2 (1 + \alpha) M_1 M_0$	

Para a determinação de  $\delta_{20}$  procede-se a combinação mostrada na Tabela 2-8, resultando

$$EI \cdot \delta_{20} = \frac{1}{6}(4m)(1+0,5)(-1)(40) + \frac{1}{3}(3m)(-1) \cdot 22,5,$$

$$\delta_{20} = -\frac{62,5}{EI} \cdot (\text{rad}) \quad (2.74)$$

Tabela 2-8: Combinação do diagrama de momentos para o cálculo de  $\delta_{20}$

Barra 1	Barra 2	Barra 3
Combinação nula		
	$\int_{l_2} M_2 M_0 dx_2 = \frac{1}{6} l_2 (1 + \alpha) M_2 M_0$	$\int_{l_3} M_2 M_0 dx_3 = \frac{1}{3} l_3 M_2 M_{\max}$

Para a determinação de  $\delta_{11}$  procede-se a combinação mostrada na Tabela 2-9, resultando

$$EI \cdot \delta_{11} = \frac{1}{3}(3m)(-1)(-1) + \frac{1}{3}(4m)(-1)(-1),$$

$$\delta_{11} = \frac{7}{3EI} \cdot (\text{rad/kN}) \quad (2.75)$$

Tabela 2-9: Combinação do diagrama de momentos para o cálculo de  $\delta_{11}$

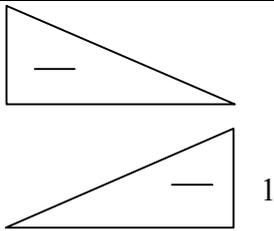
Barra 1	Barra 2	Barra 3
		Combinação nula
$\int_{l_1} M_1 M_1 dx_1 = \frac{1}{3} l_1 M_1 M_1$	$\int_{l_2} M_1 M_1 dx_2 = \frac{1}{3} l_2 M_1 M_1$	

Para a determinação de  $\delta_{21}$  procede-se a combinação mostrada na Tabela 2-10, resultando

$$EI \cdot \delta_{12} = \frac{1}{6}(4m)(-1)(-1),$$

$$\delta_{12} = \frac{2}{3EI} \cdot (\text{rad/kN.m}) \quad (2.76)$$

Tabela 2-10: Combinação do diagrama de momentos para o cálculo de  $\delta_{12}$

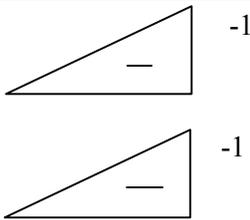
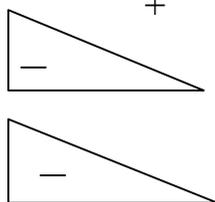
Barra 1	Barra 2	Barra 3
Combinação nula		Combinação nula
	$\int_{l_2} M_1 M_2 dx_2 = \frac{1}{6} l_2 M_1 M_2$	

Para a determinação de  $\delta_{22}$  procede-se a combinação mostrada na Tabela 2-11, resultando

$$EI \cdot \delta_{22} = \frac{1}{3}(4m)(-1)(-1) + \frac{1}{3}(3m)(-1)(-1),$$

$$\delta_{22} = \frac{7}{3EI} \text{ (rad/kN.m)} \quad (2.77)$$

Tabela 2-11: Combinação do diagrama de momentos para o cálculo de  $\delta_{22}$

Barra 1	Barra 2	Barra 3
Combinação nula		
	$\int_{l_2} M_1 M_1 dx_1 = \frac{1}{3} l_2 M_1 M_1$	$\int_{l_3} M_1 M_1 dx_2 = \frac{1}{3} l_3 M_1 M_1$

Substituindo os deslocamentos generalizados na equação (2.72), obtém-se

$$\begin{cases} -51,25 + \frac{7}{3}X_1 + \frac{2}{3}X_2 = 0 \\ -62,5 + \frac{2}{3}X_1 + \frac{7}{3}X_2 = 0 \end{cases} \quad (2.78)$$

$$X_1 = 15,60 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (2.79)$$

$$X_2 = 22,33 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad (2.80)$$

Os esforços podem ser obtidos a partir do sistema principal, isostático, empregando o princípio da superposição dos efeitos

$$M = M_0 + X_1 \cdot M_1 + X_2 \cdot M_2 \quad (2.81)$$

Os valores máximos (e mínimos) do momento fletor correspondem aos pontos onde o esforço cortante muda de sinal. Portanto, é necessário conhecer as reações e, a partir delas, traçar o diagrama de esforço cortante da viga. As reações podem ser calculadas a partir dos trechos da viga contínua (Figura 2-32), cujos momentos fletores internos foram determinados a partir dos hiperestáticos.

Como atividade didática, devem ser calculadas as reações nos apoios e concluídos os diagramas de esforços cortantes e momentos fletores.

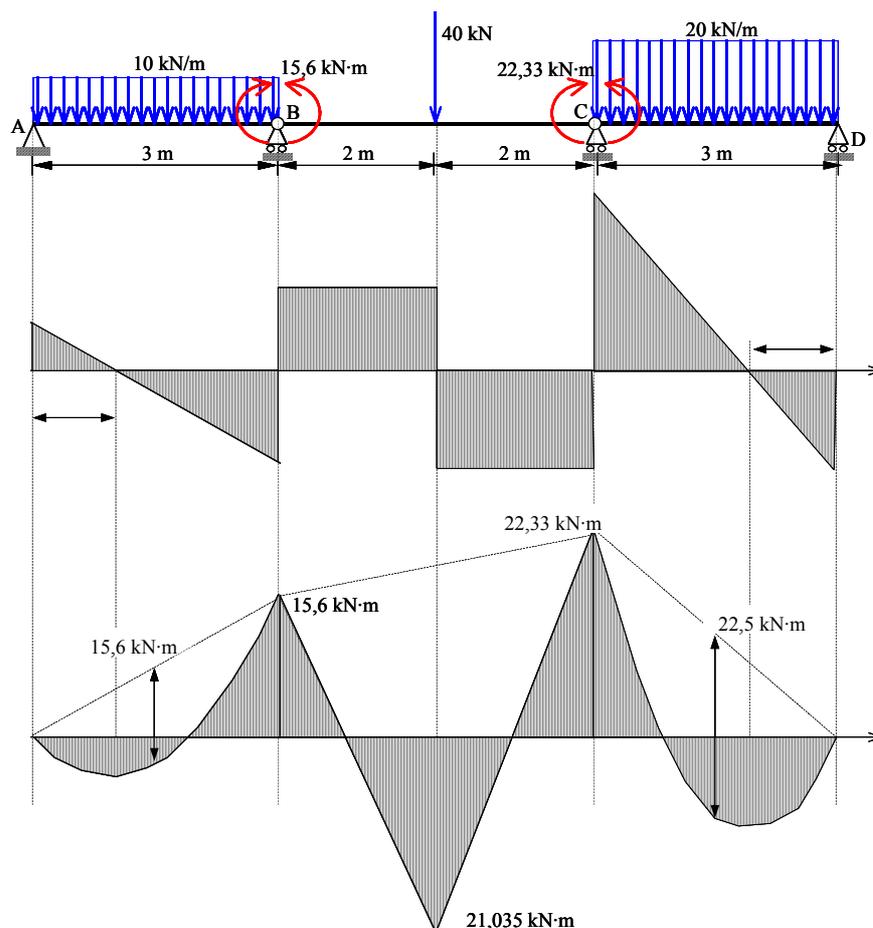
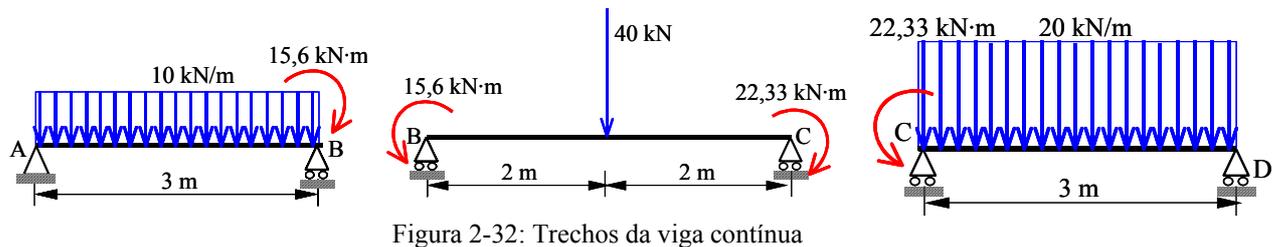


Figura 2-33: Diagramas de esforços cortantes e momentos fletores da viga da Figura 2-27.

**1.4.1.4. Exercício**

Uma viga contínua de quatro vãos tem, à esquerda, uma parte em balanço como se vê na figura. Determinar as reações e traçar os diagramas dos esforços internos da viga, no espaço indicado da Figura 2-34.  $I_1 = 4375 \text{ cm}^4$  e  $I_2 = 4102 \text{ cm}^4$ .

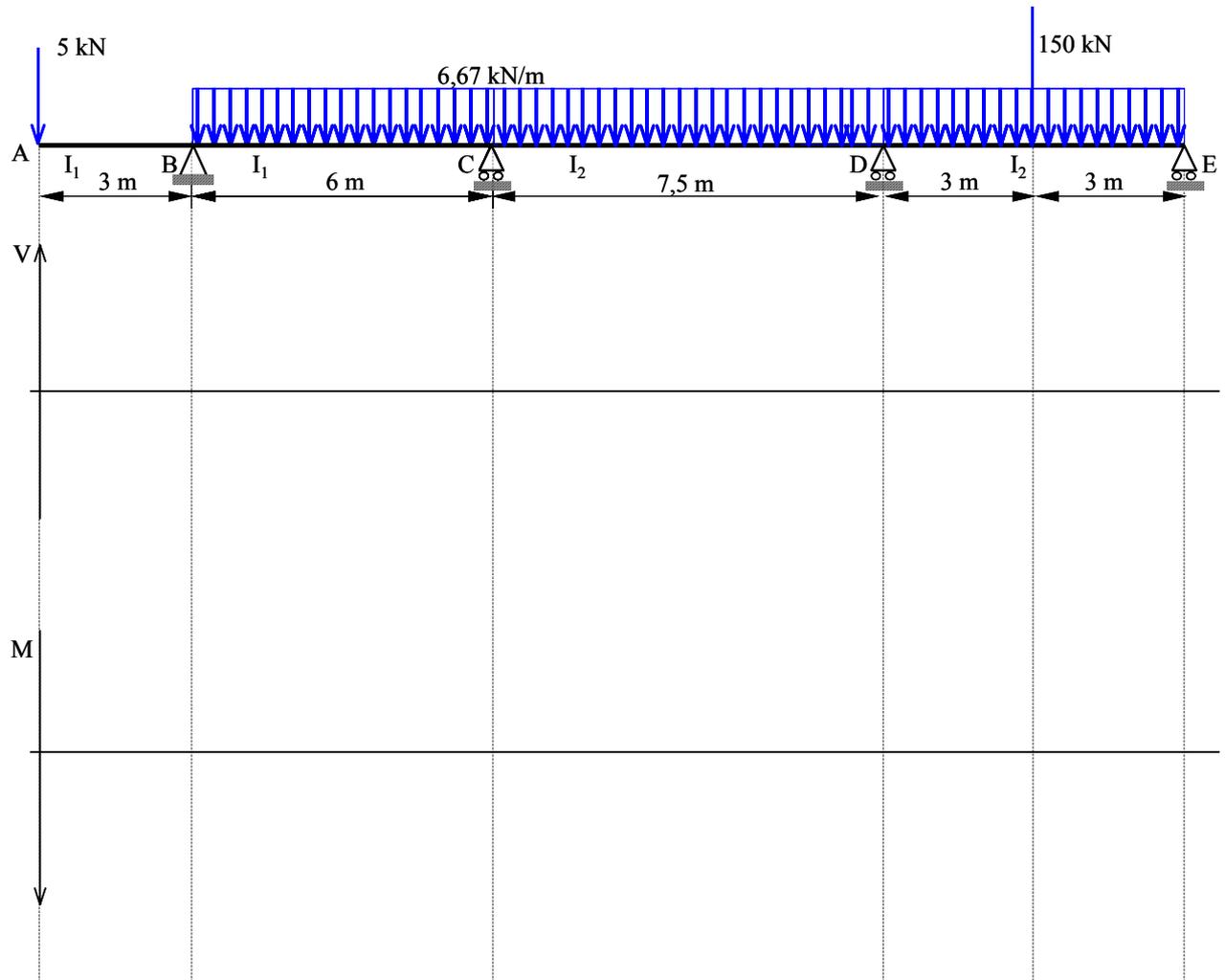


Figura 2-34: Viga contínua de quatro vão e seus esforços internos

### 1.1.2. Estruturas três vezes hiperestática ( $g_e = 3$ )

Seja o pórtico plano bi-engastado mostrado na Figura 2-35, do qual deseja-se determinar os esforços internos e traçar os respectivos diagramas. Este pórtico apresenta 6 reações devidas aos engastamentos em A e B, portanto o seu grau de hiperestaticidade ( $g_h$ ) é igual a 3.

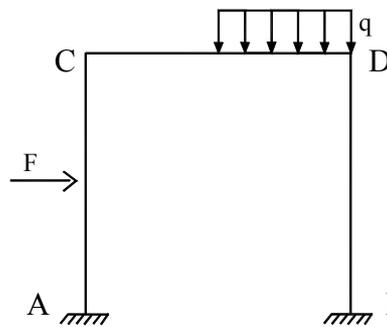


Figura 2-35: Pórtico plano bi-engastado

Um dos sistemas principais possíveis para o pórtico mostrado na Figura 2-35 é aquele mostrado pela Figura 2-36.

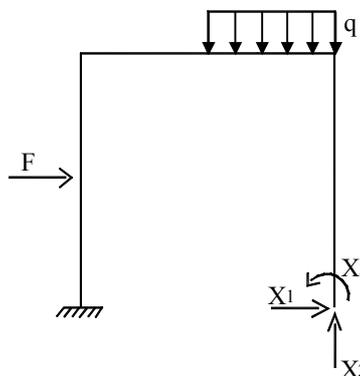


Figura 2-36: Sistema principal do pórtico mostrado na Figura 2-35

As condições de compatibilidade do sistema principal da Figura 2-36 é deslocamentos horizontal e vertical e rotação nulos no ponto B, o que resulta  $\delta_1 = 0$ ,  $\delta_2 = 0$  e  $\delta_3 = 0$ .

Para determinar os esforços no ponto B, usar-se-á o princípio da superposição dos efeitos das cargas sobre o sistema principal (isostático), segundo o esquema mostrado na Figura 2-37. Superpondo a contribuição de deslocamento dessas cargas e aplicando as condições de compatibilidade para o ponto B da estrutura real (Figura 2-35), obtém-se o sistema de equações

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} + X_3 \cdot \delta_{13} = 0 \quad (2.82)$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} + X_3 \cdot \delta_{23} = 0,$$

$$\delta_3 = \delta_{30} + X_1 \cdot \delta_{31} + X_2 \cdot \delta_{32} + X_3 \cdot \delta_{33} = 0$$

que na forma matriz é expresso como sendo

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{Bmatrix} \text{ ou}$$

$$\delta \cdot X = -\delta_0 \therefore X = -\delta^{-1} \cdot \delta_0, \quad (2.83)$$

onde  $\delta$  é a matriz de flexibilidade,  $X$  é o vetor das forças (incógnitas) e  $\delta_0$  é vetor de deslocamento devido ao carregamento (conhecidos).

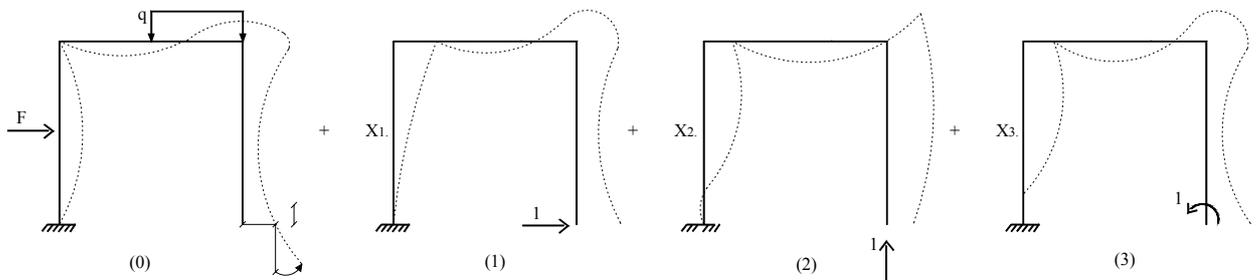


Figura 2-37: Efeitos devidos ao carregamento atuante na Figura 2-36

Conforme foi visto anteriormente, os coeficientes  $\delta_{ij}$  podem ser obtidos pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. Para o pórtico plano, desprezando esforço por cisalhamento, tem-se

$$\delta_{ij} = \int_l \frac{\overline{M}_i M_j}{EI} dx + \int_l \frac{\overline{N}_i N_j}{EA} dx, \quad (2.84)$$

sendo E o módulo de elasticidade do material; A a seção transversal das barras, I o momento de inércia da seção transversal e l todas as barras da estrutura.

Como  $M_i \cdot M_j = M_j \cdot M_i$ , tem-se  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ , ou seja, a matriz de flexibilidade é sempre simétrica, o que já foi demonstrado anteriormente (Teorema da Reciprocidade de Betti-Maxwell, SUSSEKIND, 1994a).

Para uma estrutura com  $g_h = 3$ , deve-se determinar 6 coeficientes da matriz  $\delta$  ( $\delta_{11}$ ,  $\delta_{22}$ ,  $\delta_{33}$ ,  $\delta_{12}$ ,  $\delta_{13}$ ,  $\delta_{23}$ ) e 3 coeficientes do vetor força  $\delta_0$  ( $\delta_{10}$ ,  $\delta_{20}$ ,  $\delta_{30}$ ). Resolvendo-se o sistema de equações (2.82) obtém-se X.

### 1.1.2.1. Exemplo 1: Pórtico bi-engastado

Determinar o diagrama de esforços do pórtico bi-engastado mostrado no Figura 2-38, desprezando a contribuição do esforço axial.

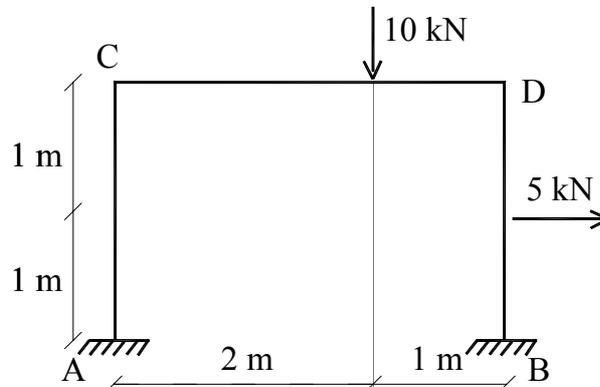


Figura 2-38: Pórtico bi-engastado

O sistema principal escolhido para a resolução do pórtico (Figura 2-38) é mostrado na Figura 2-39.

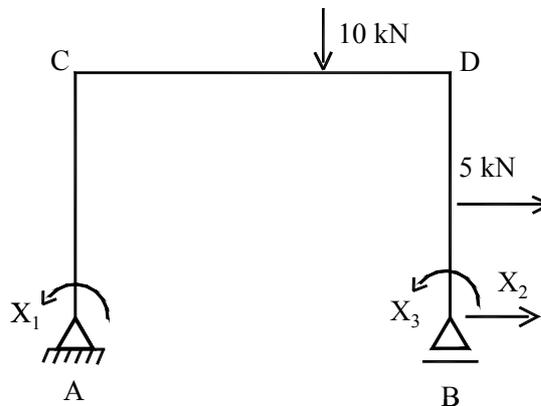


Figura 2-39: Sistema principal e hiperestáticos do pórtico da Figura 2-38

Para a determinação dos deslocamentos generalizados  $\delta_{ij}$ , é necessário a determinação das reações e dos esforços internos causados pelo carregamento (sistema 0) e pelo hiperestático  $X_1$  (sistema I).

Utilizando-se as equações de equilíbrio, determinam-se as reações e os esforços internos do pórtico isostático do sistema principal causadas pelo carregamento (Figura 2-40) e pelo hiperestático  $X_1$  (Figura 2-41),  $X_2$  (Figura 2-42) e  $X_3$  (Figura 2-43).

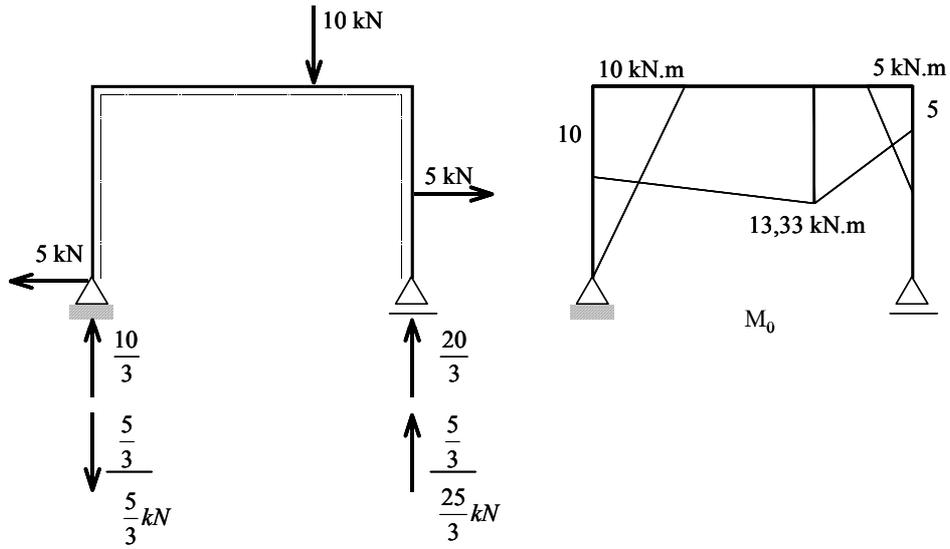


Figura 2-40: Reações e diagrama momentos internos do sistema 0

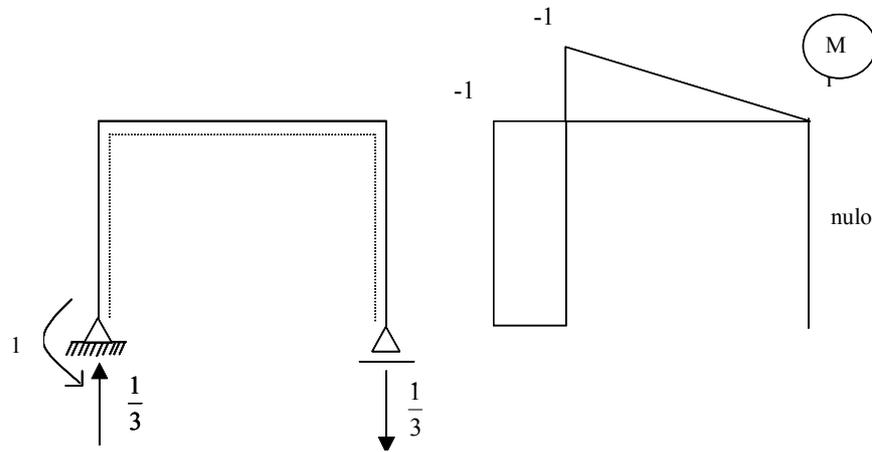


Figura 2-41: Reações e diagrama momentos internos do sistema I

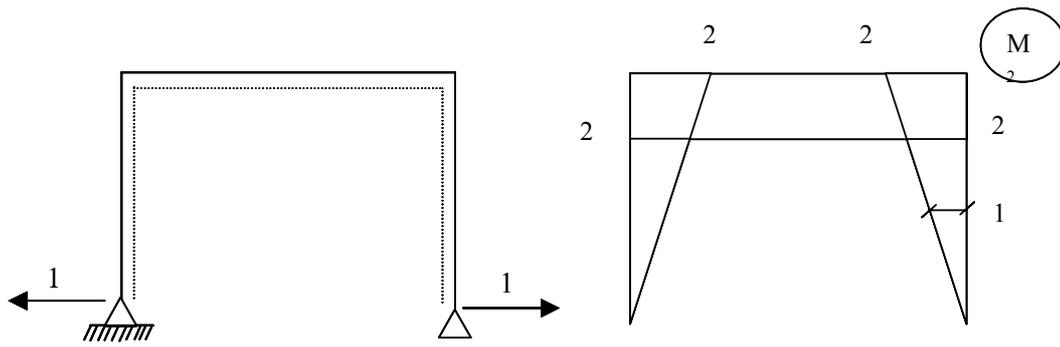


Figura 2-42: Reações e diagrama momentos internos do sistema II

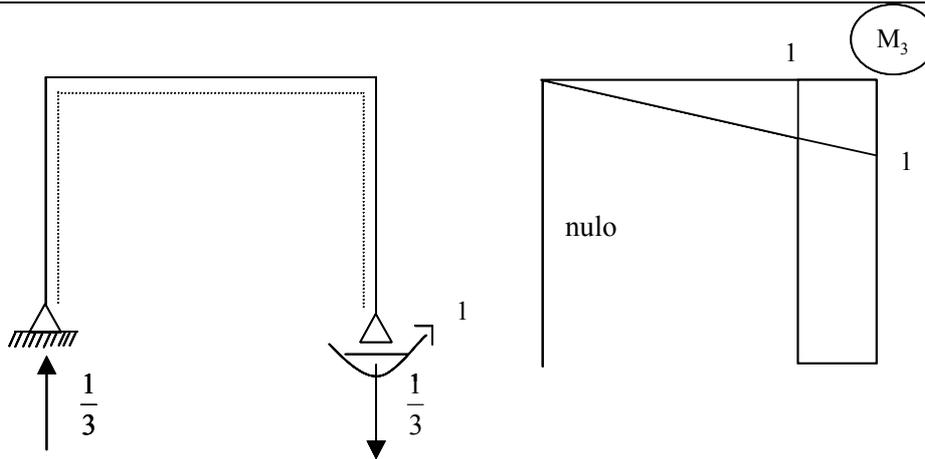


Figura 2-43: Reações e diagrama momentos internos do sistema III

Desprezando-se o esforço axial, a expressão para os deslocamentos generalizados é dada por

$$\delta_{ij} = \int_l \frac{\overline{M}_i M_j}{EI} dx. \quad (2.85)$$

O deslocamento generalizado  $\delta_{10}$  é obtido pela combinação apresentada pela Tabela 2-12

$$EI \cdot \delta_{10} = \frac{1}{2}(2m)(-1)(10) + \frac{1}{6}(3m)(-1)(2 \cdot 10 + 5) + \frac{1}{6}(3m)(-1)(2 \cdot 10 + 5),$$

$$EI \cdot \delta_{10} = -10 - 12,5 - 4,45$$

$$\delta_{10} = -\frac{26,95}{EI}. \quad (2.86)$$

Tabela 2-12: Combinação dos diagramas de momentos fletores para o cálculo de  $\delta_{10}$

Barra 1	Barra 2	Barra 3
		Combinação nula
$\int_{l_1} M_1 M_0 dx_1 = \frac{1}{2} l_1 M_1 M_0$	$\int_{l_2} M_1 M_0 dx_2 = \frac{1}{6} l_2 M_1 (2M_0^A + M_0^B) + \frac{1}{6} l_2 (1 + \alpha) M_1 M_0$	

O deslocamento generalizado  $\delta_{20}$  é obtido pela combinação apresentada pela Tabela 2-13

$$EI \cdot \delta_{20} = \frac{1}{3}(2m)2 \cdot 10 + \frac{1}{2}(3m) \cdot 2 \cdot (10+5) + \frac{1}{2}(3m) \cdot 2 \cdot 6,67 + \frac{1}{6}(1m)(1+2 \cdot 2) \cdot 5,$$

$$EI \cdot \delta_{20} = \frac{40}{3} + 45 + 20 + \frac{25}{6}$$

$$\delta_{20} = -\frac{82,5}{EI} \tag{2.87}$$

Tabela 2-13: Combinação dos diagramas de momentos fletores para o cálculo de  $\delta_{20}$

Barra 1	Barra 2	Barra 3
$\int_{l_1} M_2 M_0 dx_1 = \frac{1}{3} l_1 M_2 M_0$	$\int_{l_2} M_2 M_0 dx_2 = \frac{1}{6} l_2 M_2 (M_0^A + M_0^B) + \frac{1}{2} l_2 M_2 M_0$	$\int_{l_3} M_2 M_0 dx_3 = \frac{1}{6} l_1 (M_2^A + 2M_2^B) M_0$

O deslocamento generalizado  $\delta_{30}$  é obtido pela combinação apresentada pela Tabela 2-14

$$EI \cdot \delta_{30} = \frac{1}{6}(2m) \cdot 1 \cdot (10+2 \cdot 5) + \frac{1}{6}(3m) \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot 1 \cdot 6,67 + \frac{1}{2}(1m) \cdot 1 \cdot 5,$$

$$EI \cdot \delta_{30} = 10 + 5,56 + 2,5,$$

$$\delta_{30} = \frac{18,06}{EI} \tag{2.88}$$

Tabela 2-14: Combinação dos diagramas de momentos fletores para o cálculo de  $\delta_{30}$

Barra 2a	Barra 2b	Barra 3

$\int_{l_2} M_3 M_0 dx_2 = \frac{1}{6} l_2 M_3 (2M_0^A + M_0^B)$	$\int_{l_2} M_3 M_0 dx_2 = \frac{1}{6} l_2 \left(1 + \frac{2}{3}\right) M_3 M_0$	$\int_{l_3} M_3 M_0 dx_3 = \frac{1}{2} l_3 M_3 M_0$
--	--	---

Efetuada o mesmo procedimento, determinam-se os deslocamentos generalizados:

$$EI \cdot \delta_{11} = (2m) \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1}{3}(3m) \cdot 1 \cdot 1 = 3,$$

$$EI \cdot \delta_{22} = \left[ \frac{1}{3}(2m) \cdot 2 \cdot 2 \right] \cdot 2 + (3m) \cdot 2 \cdot 2 = 17,33,$$

$$EI \cdot \delta_{33} = \frac{1}{3}(3m) \cdot 1 \cdot 1 + (3m) \cdot 1 \cdot 1 = 3,$$

$$EI \cdot \delta_{12} = -\frac{1}{2}(2m) \cdot 1 \cdot 2 - \frac{1}{2}(3m) \cdot 1 \cdot 2 = -5,$$

$$EI \cdot \delta_{13} = -\frac{1}{6}(3m) \cdot 1 \cdot 1 = 0,5,$$

$$EI \cdot \delta_{23} = \frac{1}{2}(3m) \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2}(2m) \cdot 2 \cdot 1 = 5. \quad (2.89)$$

De posse dos deslocamentos generalizados, é possível obter o sistema de compatibilidade

$$\begin{aligned} 3X_1 - 5X_2 - 0,5X_3 - 26,95 &= 0 \\ -5X_1 + 17,33X_2 + 5X_3 + 82,5 &= 0, \\ 0,5X_1 + 5X_2 - 3X_3 + 18,06 &= 0 \end{aligned} \quad (2.90)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & -0,5 \\ -5 & 17,33 & 5 \\ -0,5 & 5 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 26,95 \\ -82,5 \\ -18,06 \end{Bmatrix}.$$

Resolvendo o sistema, obtém-se

$$\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,33 \\ -5,98 \\ 3,89 \end{Bmatrix}. \quad (2.91)$$

Os esforços podem ser obtidos por

$$N = N_0 + N_1 X_1 + N_2 X_2 + N_3 X_3,$$

$$V = V_0 + V_1 X_1 + V_2 X_2 + V_3 X_3 \text{ e} \quad (2.92)$$

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3.$$

Como exercícios didático, devem ser calculadas as reações do pórtico e traçados os diagramas de esforços normais, cortantes e momentos fletores, especificando os valores dos momentos máximos e os locais onde eles ocorrem.

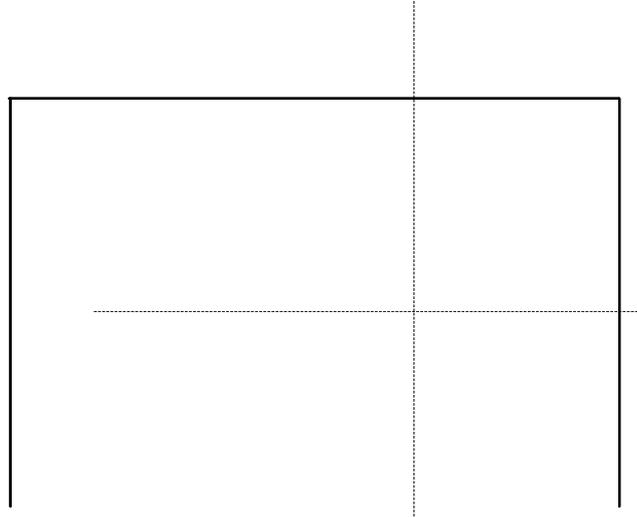


Figura 2-44: Diagrama de esforços normais

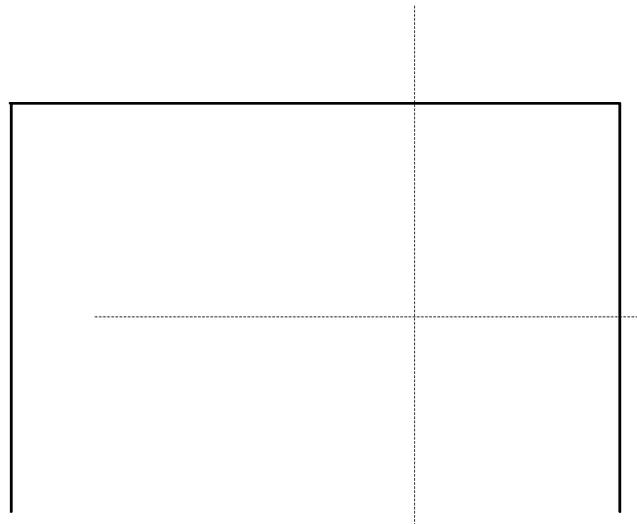


Figura 2-45: Diagrama de esforços cortantes

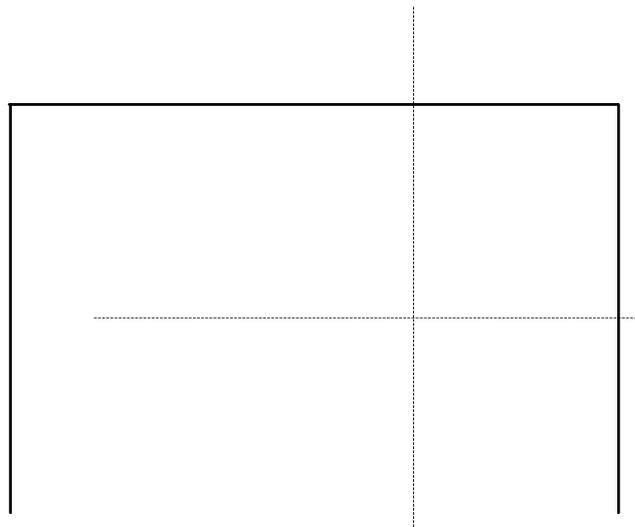


Figura 2-46: Diagrama de momentos fletores

## 1.5. ESTRUTURAS INTERNAMENTE HIPERESTÁTICAS

### 2.1.2. Exemplo 1- Treliça plana

Seja a treliça mostrada na Figura 2-47, cuja rigidez à tração de suas barras ( $EA$ ) é constante. Esta treliça é internamente hiperestática de grau 1 ( $g_i = 1$ ). Portanto, apresenta uma única incógnita hiperestática a ser determinada. Esta incógnita é o esforço normal em uma das barras.

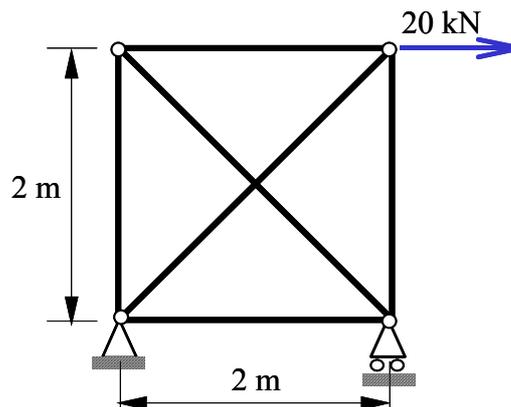


Figura 2-47: Treliça plana internamente hiperestática

Para a determinação do sistema principal da treliça mostrada na Figura 2-47, corta-se uma das barras, colocando-se o esforço interno atuante na seção (Figura 2-48). No caso de uma treliça, o esforço interno é o normal. A condição de compatibilidade é dada pelo deslocamento relativo nulo entre a seção à esquerda e a seção à direita.

$$\delta^E - \delta^D = 0 \text{ ou} \tag{2.93}$$

$$\delta^E = \delta^D \tag{2.94}$$

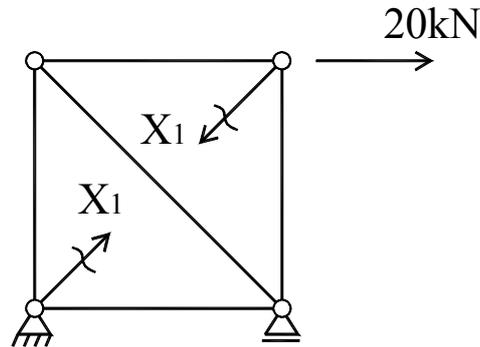


Figura 2-48: Sistema principal e hiperestático da treliça plana

A determinação do esforço interno  $X_1$  se dará pela superposição dos efeitos e utilizando as condições de compatibilidade de deslocamento (Figura 2-49)

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0, \tag{2.95}$$

$$X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}}. \tag{2.96}$$

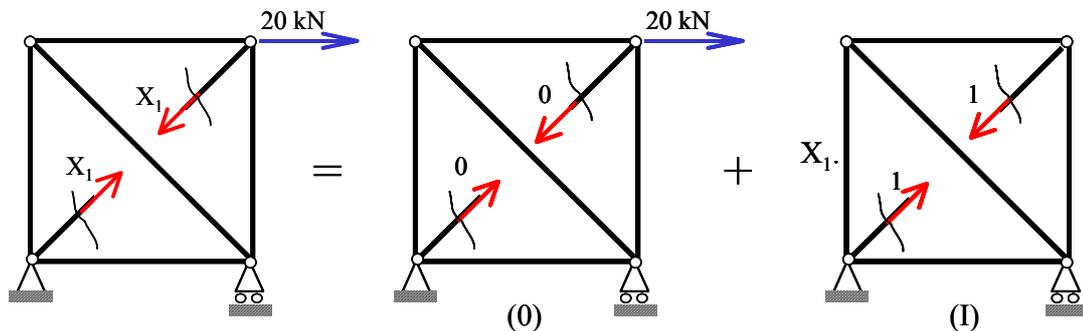


Figura 2-49: Superposição dos efeitos do carregamento e do hiperestático  $X_1$

Como as barras de uma treliça estão sujeitas unicamente a esforços normais, considera-se somente a contribuição desses esforços no cálculo dos deslocamentos generalizado. Sendo

$$\delta_{ij} = \int_{barras} \frac{N_i N_j}{EA} dx, \tag{2.97}$$

onde  $j = 0$  é o carregamento.

Então, para a obtenção dos deslocamentos generalizados, é necessário determinar os esforços axiais devido ao carregamento (sistema 0) e devido ao hiperestático  $X_1$  (sistema I). Estes valores foram calculados utilizando as equações da estática de equilíbrio de forças.

Os esforços nas barras devidos ao carregamento são determinados a seguir e mostrados na Figura 2-50.

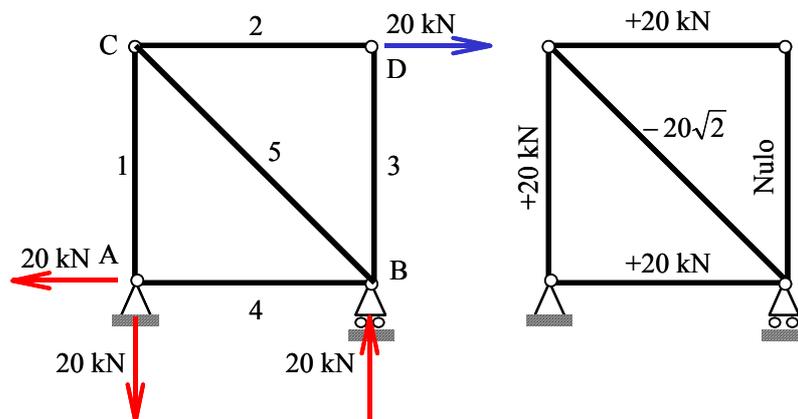
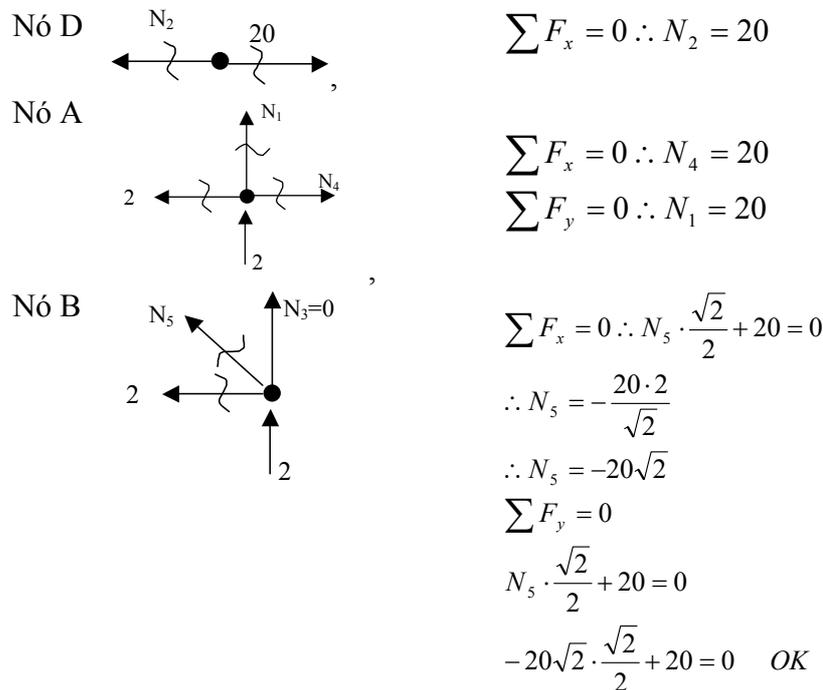
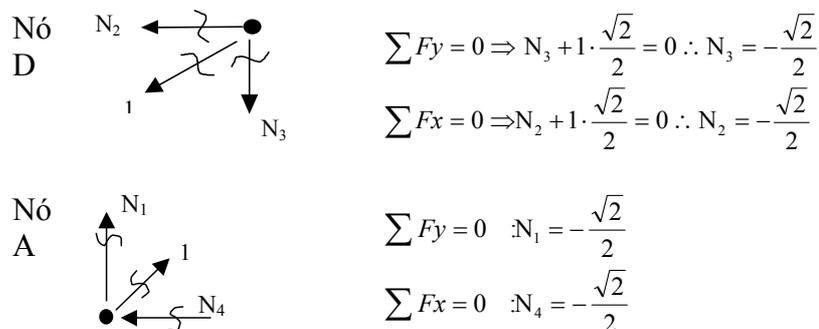


Figura 2-50: Reações e esforços normais nas barras devidos ao carregamento

Os esforços devidos ao carregamento unitário na direção do hiperestático  $X_1$  são calculados a seguir e mostrados na Figura 2-51



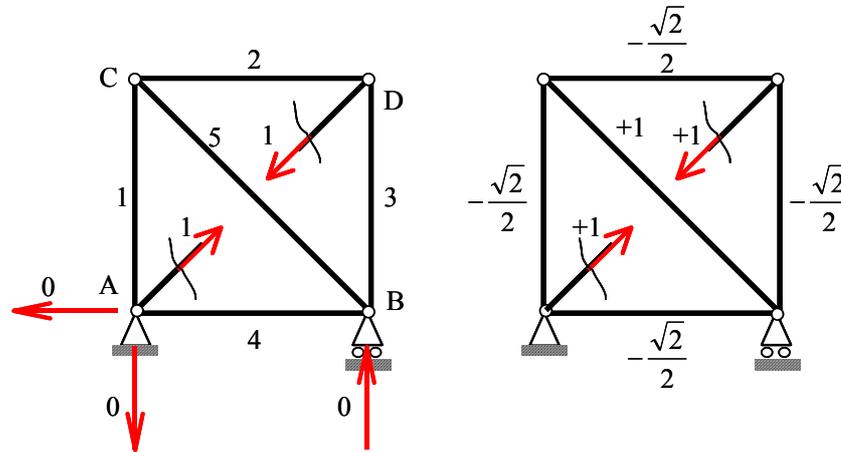
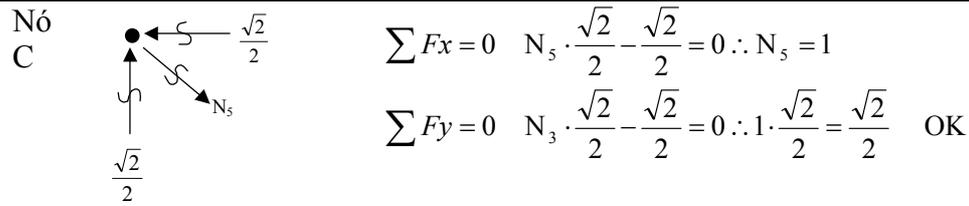


Figura 2-51: Reações e esforços internos devidos à carga unitária na direção do hiperestático  $X_1$

O cálculo do deslocamento relativo na direção  $\underline{1}$  devido ao carregamento ( $\delta_{10}$ ) é dado por

$$\delta_{10} = \int_l \frac{N_1 N_0}{(EA)_i} dx = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^6 N_1 N_0 \cdot l_i \quad (2.98)$$

e o cálculo do deslocamento relativo na direção  $\underline{1}$  devido ao esforço unitário na direção  $\underline{1}$  ( $\delta_{11}$ ) é dado por

$$\delta_{11} = \int_l \frac{N_1 N_1}{(EA)_i} dx = \frac{1}{EA} \sum_{i=1}^6 N_1 N_1 \cdot l_i \quad (2.99)$$

É recomendável organizar uma tabela como a Tabela 2-15. Ela permite o cálculo sistemático dos esforços em cada barra e dos deslocamentos generalizados.

Tabela 2-15: Cálculo dos deslocamentos generalizados  $\delta_{10}$  e  $\delta_{11}$

Barra	$l$ (m)	EA	$N_0$	$N_1$	$(N_0 \cdot N_1 l_i) / EA$	$(N_1 \cdot N_1 l_i) / EA$	N (kN)
1	2	EA	+20	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{20\sqrt{2}}{EA}$	$\frac{1}{EA}$	7,93
2	2	EA	+20	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{20\sqrt{2}}{EA}$	$\frac{1}{EA}$	7,93
3	2	EA	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{1}{EA}$	-12,07
4	2	EA	+20	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{20\sqrt{2}}{EA}$	$\frac{1}{EA}$	7,93

5	$2\sqrt{2}$	EA	$-20\sqrt{2}$	1	$-\frac{80}{EA}$	$\frac{2\sqrt{2}}{EA}$	-11,21
6	$2\sqrt{2}$	EA	0	1	0	$\frac{2\sqrt{2}}{EA}$	17,07
$\Sigma$					$-\frac{164,85}{EA}$	$\frac{9,66}{EA}$	

Substituindo os deslocamentos generalizados na equação de compatibilidade, obtém-se

$$\frac{-164,85}{EA} + X_1 \frac{9,66}{EA} = 0, \quad (2.100)$$

$$X_1 = 17,07 \text{ kN}. \quad (2.101)$$

Os esforços normais finais são obtidos por

$$N = N_0 + X_1 \cdot N_1, \quad (2.102)$$

cujos resultados são apresentados na última coluna da Tabela 2-15.

### 2.1.3. Exemplo 2 - Pórtico com tirante

Seja um pórtico com tirante, uma vez hiperestático, cuja rigidez à flexão das barras (EI) é  $2 \cdot 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}$  e a rigidez à tração do tirante ( $EA_t$ ) é  $10^4 \text{ kN}$  (Figura 2-52)

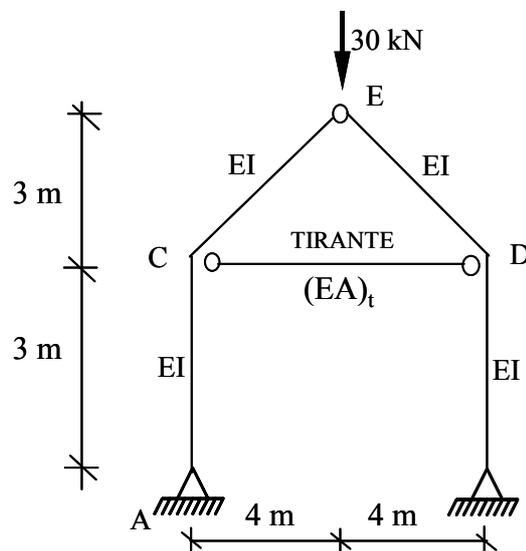


Figura 2-52: Pórtico com tirante

Para a determinação do sistema principal do pórtico mostrado na Figura 2-52, secciona-se o tirante, colocando-se os esforços internos, no caso, o esforço normal (Figura 2-53). A condição de compatibilidade é dada pelo deslocamento relativo nulo na seção do corte.

$$\delta = 0$$

$$(2.103)$$

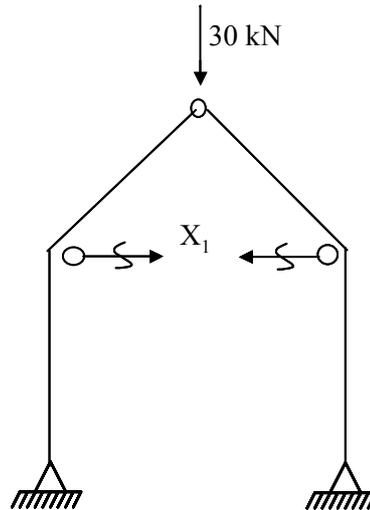


Figura 2-53: Sistema principal e hiperestático do pórtico mostrado na Figura 2-52

O efeito do carregamento e do hiperestático  $X_1$  sobre o sistema principal pode ser determinado por superposição de efeitos, sendo calculados separadamente os efeitos da carga e do hiperestático sobre a estrutura (Figura 2-54).

Para o sistema (0) (Figura 2-54), tomando o elemento ACE do pórtico e fazendo o equilíbrio de forças na vertical, determina-se a reação vertical em A. Fazendo-se o equilíbrio de momentos em torno do ponto E, obtém-se o valor da reação horizontal em A como sendo

$$15 \cdot 4 - H \cdot 6 = 0,$$

$$H = 10 \text{ kN}. \quad (2.104)$$

Para o sistema (I) (Figura 2-54), tomando o elemento ACE do pórtico e fazendo o equilíbrio de forças na vertical, determina-se a reação vertical em A, que é zero. Fazendo-se o equilíbrio de momentos em torno do ponto E, obtém-se o valor da reação horizontal em A como sendo

$$H \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 0,$$

$$H = 0,5. \quad (2.105)$$

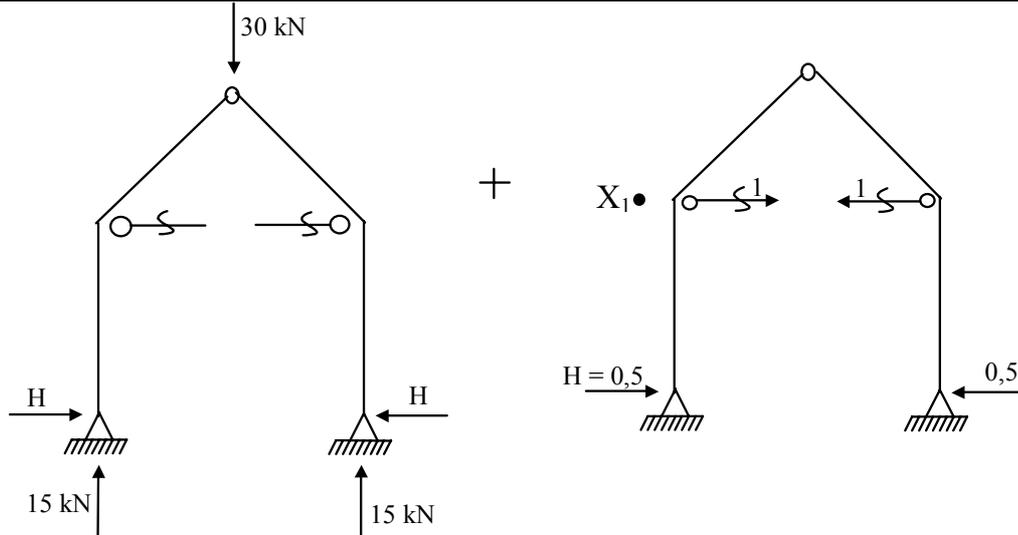


Figura 2-54: Superposição dos efeitos do carregamento e do hiperestático

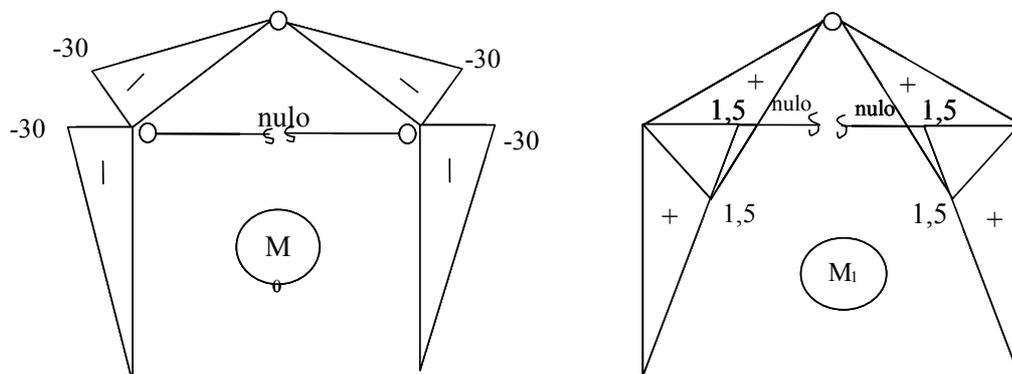


Figura 2-55: Diagramas de momentos fletores devido ao carregamento e à carga unitária no tirante

É importante lembrar que, no sistema principal, o esforço normal no tirante devido ao carregamento é nulo ( $N_0 = 0$ ) e que o esforço normal no tirante devido à força unitária é 1 ( $N_1 = 1$ ). Neste exemplo, o esforço axial nas barras do pórtico é desprezado visto que  $EI \gg EA$ , porém não podemos fazê-lo para o caso do tirante. Logo, a expressão para o cálculo dos deslocamentos generalizados é dada por

$$\delta_{ij} = \int_{\text{Barras}} \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int_{\text{Tirante}} \frac{N_i N_j}{(EA)_t} dx. \quad (2.106)$$

Portanto os valores dos deslocamentos generalizados são

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI} \cdot 2 \left\{ -\frac{1}{3} \cdot 3 \text{ m} \cdot 30 \cdot 1,5 - \frac{1}{3} \cdot 5 \text{ m} \cdot 30 \cdot 1,5 \right\} + 0$$

$$\delta_{10} = -\frac{240}{EI} = -\frac{240}{2 \cdot 10^4} = -120 \cdot 10^4 \text{ m} = -12 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (2.107)$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot 2 \left\{ \frac{1}{3} \cdot 3 \text{ m} \cdot 1,5 \cdot 1,5 + \frac{1}{3} \cdot 5 \text{ m} \cdot 1,5 \cdot 1,5 \right\} + \frac{1 \cdot 1 \cdot 8 \text{ m}}{(EA)_t}$$

$$\delta_{11} = \frac{12}{EI} + \frac{8}{(EA)_t} = \frac{12}{2 \cdot 10^4} + \frac{8}{10^4} = 14 \cdot 10^{-4} = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ m/kN} \quad (2.108)$$

A equação de compatibilidade é

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0 \quad (2.109)$$

e substituindo-se os valores calculados, obtém-se

$$-12 \cdot 10^{-3} + X_1 \cdot 1,4 \cdot 10^{-3} = 0 \quad (2.110)$$

$$X_1 = \frac{12}{1,4} = 8,57 \text{ kN} \quad (2.111)$$

As reações (R) e os momentos finais (M) podem ser obtidos por

$$R = R_0 + R_1 \cdot X_1 \text{ e} \quad (2.112)$$

$$M = M_0 + M_1 \cdot X_1 \quad (2.113)$$

Como exercícios didático, devem ser calculadas as reações do pórtico (Figura 2-56) e traçados os diagramas de esforços normais (Figura 2-57), cortantes (Figura 2-58) e momentos fletores (Figura 2-59), especificando os valores dos momentos máximos e os locais onde eles ocorrem.

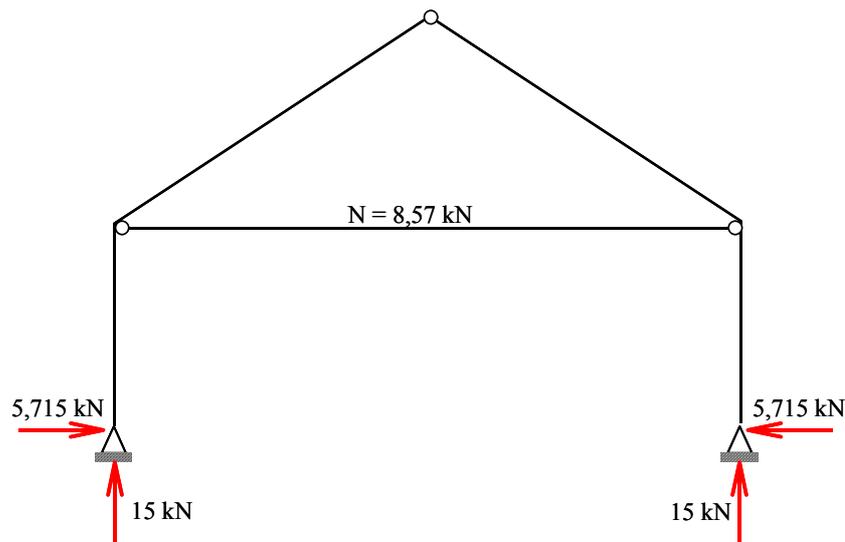


Figura 2-56: Reações e esforço normal no tirante

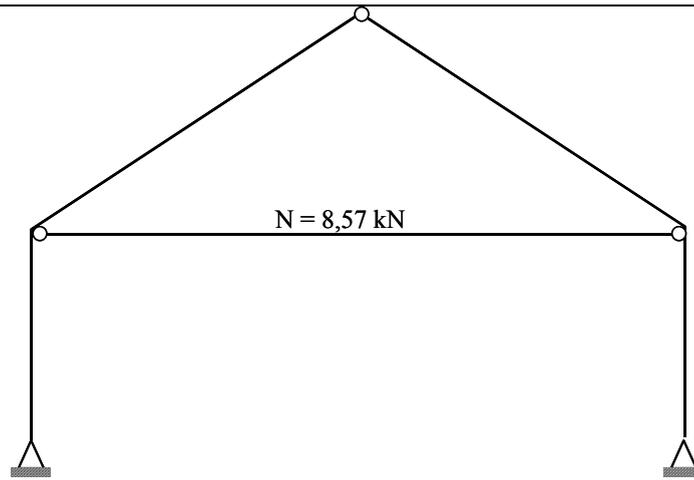


Figura 2-57: Diagrama de esforços normais nas barras e no tirante

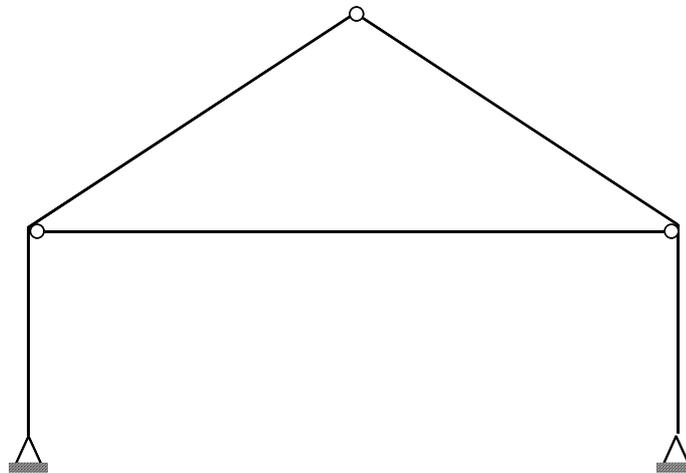


Figura 2-58: Diagrama de esforços cortantes

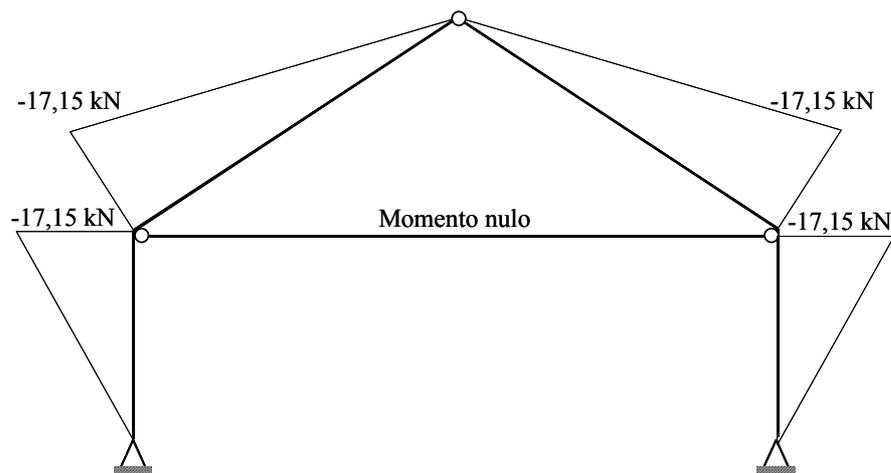


Figura 2-59: Diagrama de momentos fletores

### 2.1.4. Exemplo 3 - Quadro bi-apoiado

Seja o quadro bi-apoiado mostrado na Figura 2-60a. Esta estrutura se caracteriza por ser três vezes hiperestática. Isto pode ser constatado por meio de um corte virtual de uma barra do quadro. Na seção deste corte aparecerão os esforços internos normal ( $N$ ), cortante ( $V$ ) e momento fletor ( $M$ ) (Figura 2-60b).

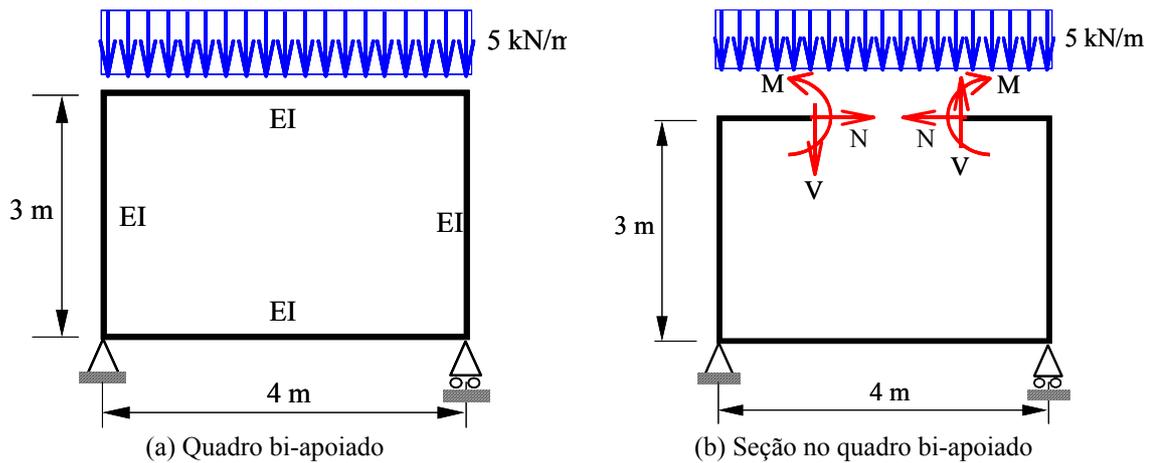


Figura 2-60: Quadro bi-apoiado

Para determinar os esforços internos nas barras do quadro bi-apoiado, pode-se utilizar a secção apresentada na Figura 2-60b. Chamando  $N = X_1$ ,  $V = X_2$  e  $M = X_3$ , têm-se as incógnitas hiperestáticas internas e tem-se o sistema principal (Figura 2-61).

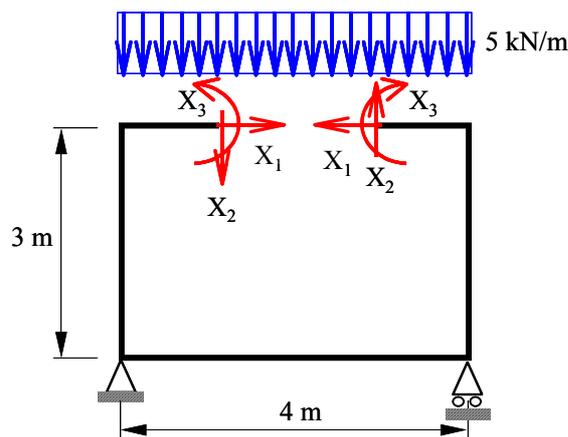


Figura 2-61: Sistema principal e hiperestáticos

A condição de compatibilidade é dada pelos deslocamentos relativos nulos na seção do corte. O deslocamento horizontal relativo  $\delta_1 = 0$ , o deslocamento vertical relativo  $\delta_2 = 0$  e a rotação relativa na seção do corte  $\delta_3 = (\theta^E - \theta^D) = 0$ . Estas condições podem

ser desacopladas em 4 sistemas utilizando-se a superposição de efeitos (estrutura linear) (Figura 2-62).

$$\delta = 0 \quad (2.114)$$

O efeito do carregamento e do hiperestático  $X_i$  sobre o sistema principal pode ser determinado por superposição de efeito, sendo calculado separadamente o efeito da carga e do hiperestático sobre a estrutura (Figura 2-62).

Superpondo os efeitos dos esforços mostrados na Figura 2-62 e aplicando as condições de compatibilidade, têm-se:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} = 0 \\ \delta_2 &= \delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} = 0, \\ \delta_3 &= \delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} = 0 \end{aligned} \quad (2.115)$$

sendo  $\delta_{i0}$  o deslocamento relativo na seção devido ao carregamento externo.

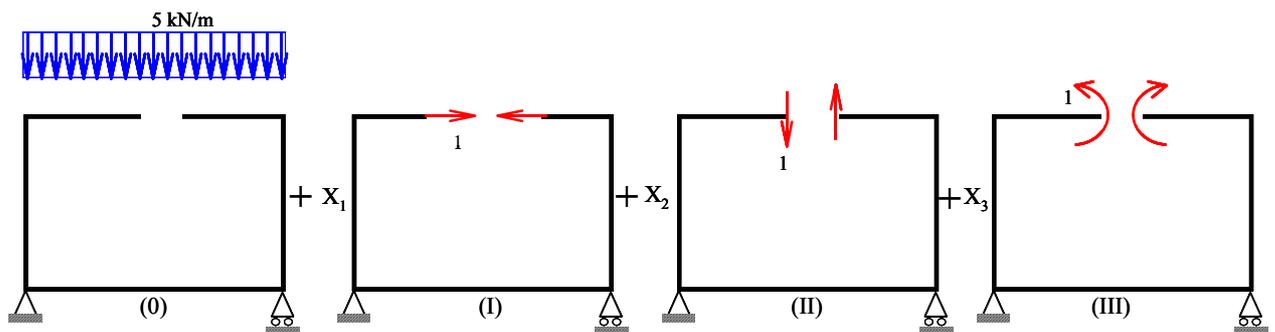


Figura 2-62: Efeitos do carregamento e dos hiperestáticos

Os deslocamentos generalizados são calculados por

$$\delta_{ij} = \int_{\text{Barras}} \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int_{\text{Barras}} \frac{N_i N_j}{EA} dx, \quad (2.116)$$

mas desprezando-se o esforço axial, tem-se

$$\delta_{ij} = \int_{\text{Barras}} \frac{M_i M_j}{EI} dx, \quad (2.117)$$

Para se encontrar os coeficientes  $\delta_{ij}$ , calculam-se inicialmente os diagramas de momento fletor  $M_0$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  e  $M_3$  para os sistemas 0, I, II e III, respectivamente.

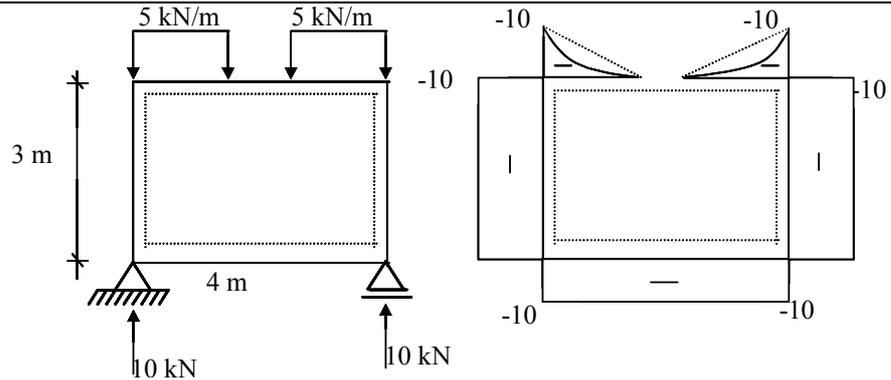


Figura 2-63: Reações e diagrama de momentos para o sistema 0

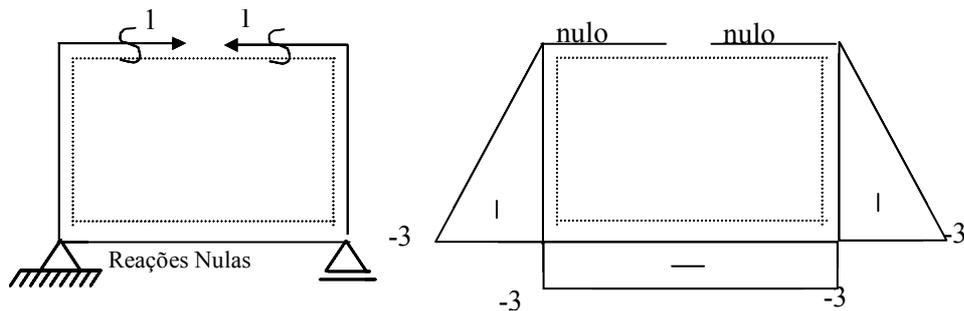


Figura 2-64: Reações e diagrama de momentos para o sistema I

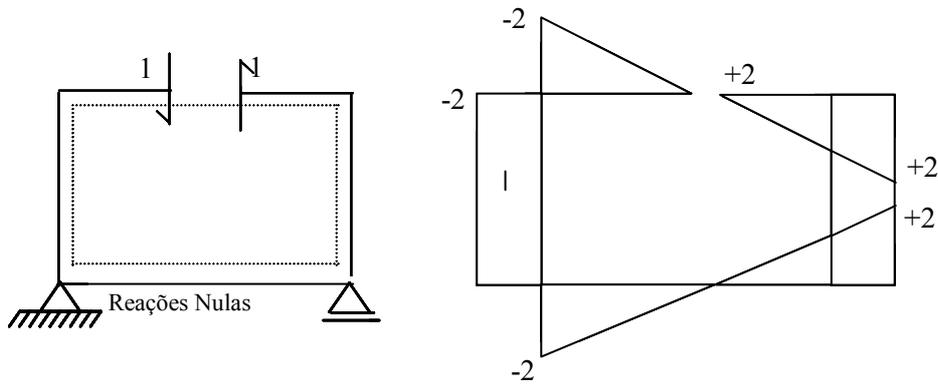


Figura 2-65: Reações e diagrama de momentos para o sistema II

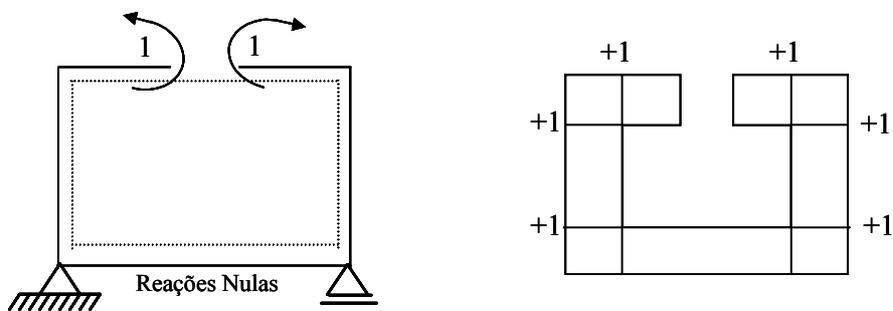
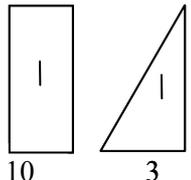
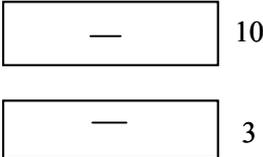
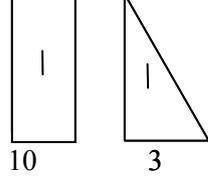


Figura 2-66: Reações e diagrama de momentos para o sistema III

A partir dos diagramas de momentos flexores dos sistemas 0, I, II e III (Figura 2-63, Figura 2-64, Figura 2-65 e Figura 2-66, respectivamente), calculam-se os coeficientes  $\delta_{ij}$ . A Tabela 2-16 apresenta a combinação dos diagramas de momentos flexores utilizada para o cálculo de  $\delta_{10}$ .

Tabela 2-16: Combinação de momentos para o cálculo de  $\delta_{10}$

Barra 1	Barra 2	Barra 3	Barra 4
			Combinação nula
$\int_{l_1} M_1 M_0 dx_1 = \frac{1}{2} l_1 M_1 M_0$	$\int_{l_2} M_1 M_0 dx_2 = l_2 M_1 M_0$	$\int_{l_3} M_1 M_0 dx_3 = \frac{1}{2} l_3 M_1 M_0$	

$$EI \cdot \delta_{10} = 2 \left[ \frac{1}{2} \cdot (3m) \cdot 10 \cdot 3 \right] + (3m) \cdot 3 \cdot 10,$$

$$\delta_{10} = \frac{210}{EI}.$$
(2.118)

A Tabela 2-17 apresenta a combinação dos diagramas de momentos flexores utilizada para o cálculo de  $\delta_{20}$ . Esta combinação apresenta valores finais nulos ( $\delta_{20} = 0$ ), visto que resultam da combinação de uma função simétrica com uma função anti-simétrica. A integral do produto de duas funções de  $(x)$  em que uma é simétrica e a outra é anti-simétrica em relação a um eixo transversal a  $x$  no meio do intervalo de integração é sempre nula (Figura 2-67).

$$\int_0^L f(x) \cdot g(x) = 0.$$
(2.119)

Isto vem a simplificar o cálculo de deformações em estruturas simétricas. Se o diagrama  $M_i$  for simétrico em relação ao eixo de simetria da estrutura e  $M_j$  for anti-simétrico (ou vice-versa) então

$$\delta_{ij} = \int_{\text{Barras}} \frac{M_i M_j}{EI} dx = 0.$$
(2.120)

Para este exemplo, têm-se que  $M_0$ ,  $M_1$  e  $M_3$  são simétricos e  $M_2$  é anti-simétrico. Portanto, pode-se afirmar, sem efetuar os cálculos, que

$\delta_{20} = 0, \delta_{12} = \delta_{21} = 0$  e  $\delta_{32} = \delta_{23} = 0$ . Quando  $M_i$  e  $M_j$  são simétricos, pode-se calcular o produto dos diagramas para metade da estrutura e multiplicar por 2.

Lembrando –se que

$$\int_0^{\pi} \text{sen } mx \text{ sen } nx \, dx = 0 \text{ e} \tag{2.121}$$

$$\int_0^{\pi} \cos \, mx \, \cos \, nx \, dx = 0, \tag{2.122}$$

se  $m \neq 0$  e  $m, n \neq \pi$ .

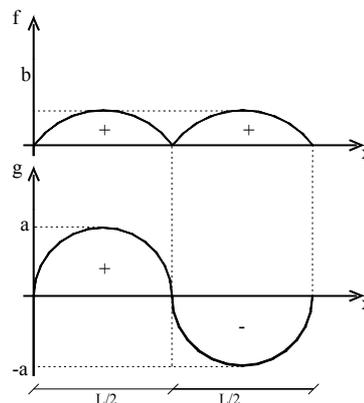


Figura 2-67: Função  $f(x)$  simétrica e função  $g(x)$  anti-simétrica

Tabela 2-17: Combinação de momentos para o cálculo de  $\delta_{20}$

Barra 1	Barra 2	Barra 3	Barra 4
$-2$  $-10$ 	Combinação nula  (função simétrica + função anti-simétrica)	$2$  $-10$ 	
$\int_{l_1} M_2 M_0 \, dx_1 = l_1 M_2 M_0$		$\int_{l_3} M_2 M_0 \, dx_3 = l_3 M_2 M_0$	função simétrica + função anti-simétrica)

A Tabela 2-18 apresenta a combinação dos diagramas de momentos utilizada para o cálculo de  $\delta_{30}$ , resultando

$$EI \cdot \delta_{30} = 2 \left[ -(3m) \cdot 1 \cdot 10 - (2m) \cdot 1 \cdot 10 - \frac{1}{3} \cdot (2m) \cdot 1 \cdot 10 \right],$$

$$\delta_{30} = -\frac{113,33}{EI}. \tag{2.123}$$

Efetuada as demais combinações, obtêm-se

$$EI \cdot \delta_{11} = 2 \cdot \left[ \frac{1}{3} \cdot (3m) \cdot 3 \cdot 3 + (2m) \cdot 3 \cdot 3 \right] = 54, \quad (2.124)$$

$$EI \cdot \delta_{22} = 2 \cdot (3m) \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot (3m) \cdot 2 \cdot 2 = 34,67, \quad (2.125)$$

$$EI \cdot \delta_{33} = 2 \cdot [(3m) \cdot 1 \cdot 1 + (2m) \cdot 1 \cdot 1 + (2m) \cdot 1 \cdot 1] = 14 \text{ e} \quad (2.126)$$

$$EI \cdot \delta_{13} = 2 \cdot \left[ -\frac{1}{2} \cdot (3m) \cdot 3 \cdot 1 - (2m) \cdot 3 \cdot 1 \right] = -21. \quad (2.127)$$

Tabela 2-18: Combinação de momentos para o cálculo de  $\delta_{30}$

Barra 1	Barra 2	Barra 3	Barra 4
$\int_{l_1} M_3 M_0 dx_1 = l_1 M_3 M_0$	$\int_{l_2} M_3 M_0 dx_2 = l_2 M_3 M_0$	$\int_{l_3} M_3 M_0 dx_3 = l_3 M_3 M_0$	$\int_{l_4} M_3 M_0 dx_4 = \frac{1}{3} l_4 M_3 M_0$

Substituindo os coeficientes na equação de compatibilidade (Equação 2.128), têm-se

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \delta_{10} \\ \delta_{20} \\ \delta_{30} \end{Bmatrix}, \quad (2.128)$$

$$\begin{bmatrix} 54 & 0 & -21 \\ 0 & 34,67 & 0 \\ -21 & 0 & 14 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} -210 \\ 0 \\ 113,33 \end{Bmatrix}. \quad (2.129)$$

Do sistema de equações acima tira-se

$$X_2 = 0, \quad (2.130)$$

como era esperado, pois é uma estrutura simétrica com carregamento simétrico ( $V = 0$ , no eixo de simetria).

Rearranjando as equações, têm-se

$$X_1 = -1,78 \text{ kN} \quad (2.131)$$

$$X_3 = 5,43 \text{ kN} .$$

(2.132)

A Figura 2-68 apresenta o carregamento, as reações internas e os esforços internos calculados a partir do Método das Forças.

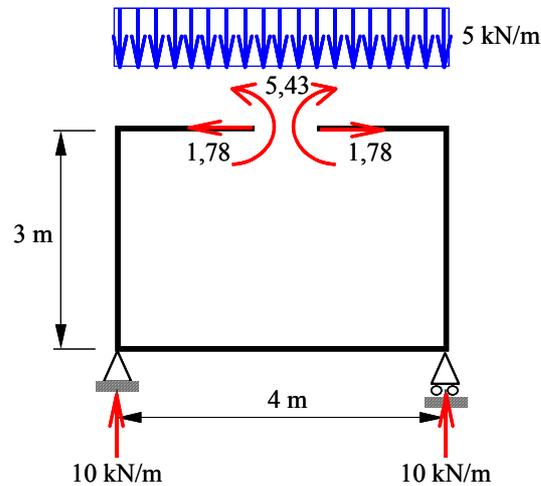


Figura 2-68: Quadro plano com suas reações e esforços internos

Os esforços internos finais no quadro plano é obtido por superposição de efeitos, de tal modo que

$$E = E_0 + E_1 \cdot X_1 + E_2 \cdot X_2 + E_3 \cdot X_3 .$$
 (2.133)

Como exercício didático, devem ser traçados os diagramas de esforços normais (Figura 2-69), cortantes (Figura 2-70) e momentos fletores (Figura 2-71), especificando os locais onde os esforços cortantes são nulos, os valores dos momentos máximos e os locais onde eles ocorrem.



Figura 2-69: Diagrama de esforços normais



Figura 2-70: Diagrama de esforços cortantes

Os momentos internos finais no quadro plano é obtido por superposição de efeitos, resultando no gráfico de momentos fletores mostrado na Figura 2-71.

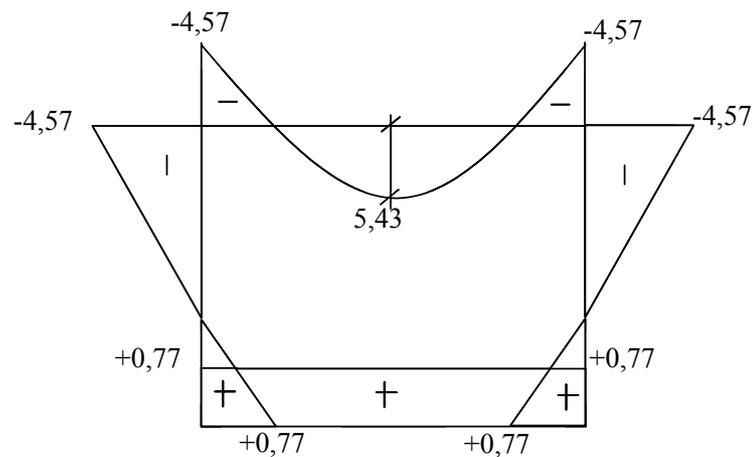


Figura 2-71: Diagrama dos momentos internos finais do quadro plano

Exemplos típicos de quadro são caixas d'água. Nem sempre são quadros bi-apoiados. Quando apoiados sobre o terreno, ou enterrados, têm-se as chamadas estruturas auto-equilibradas (Figura 2-72).

O procedimento utilizado para quadros pode ser também aplicado a pórticos, mesmo extremamente hiperestáticos, o que será conveniente se forem simétricos.

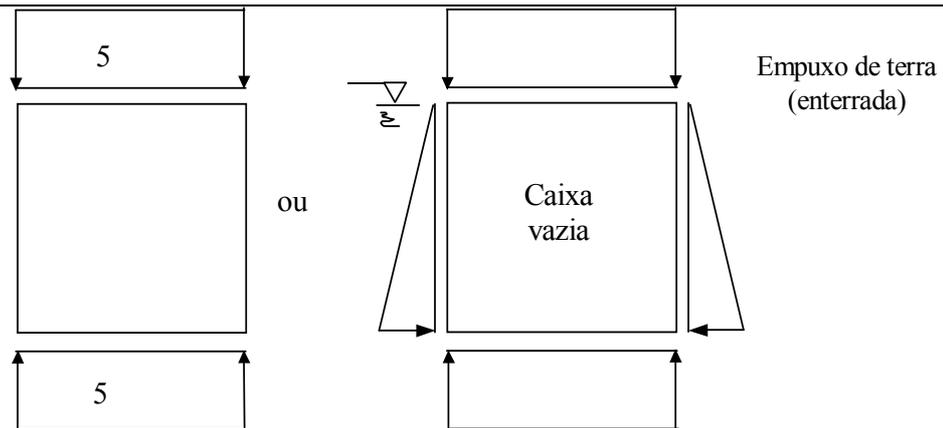


Figura 2-72: Exemplos de quadros

#### 2.1.5. Exemplo 4 - Pórtico bi-engastado

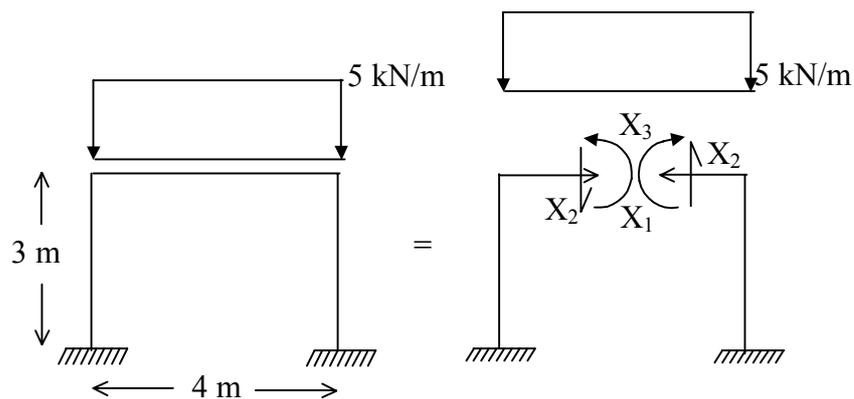


Figura 2-73: Pórtico bi-engastado e seus sistema principal e hiperestáticos

A priori já sabemos que  $X_2 = 0$  e que os coeficientes  $\delta_{20}, \delta_{21}$  e  $\delta_{23}$  são nulos também, o que facilita. Mesmo que o carregamento não fosse simétrico  $\delta_{20} \neq 0$  teríamos  $\delta_{21}$  e  $\delta_{23}$  nulos, o que já representa uma vantagem no sistema principal escolhido. Se o carregamento fosse anti-simétrico teríamos  $\delta_{20} \neq 0$  e  $\delta_{10} = \delta_{30} = 0$  o que implica em  $X_1 = 0$  e  $X_3 = 0$ . Estas conclusões podem ser extrapoladas para qualquer estrutura simétrica em que a seção S de corte encontra-se no eixo de simetria (perpendicular à barra). Se o carregamento for simétrico  $V = 0$ . Se o carregamento for anti-simétrico:  $M = 0$  e  $N = 0$

2.1.6. Exemplo 5 - Estrutura simétrica com carregamento simétrico

A Figura 2-74 ilustra o caso de uma estrutura simétrica com carregamento simétrico. Esta estrutura possui 6 reações de apoio e uma rótula situada sobre o eixo de simetria, portanto o seu grau de hiperestaticidade é igual a 2.

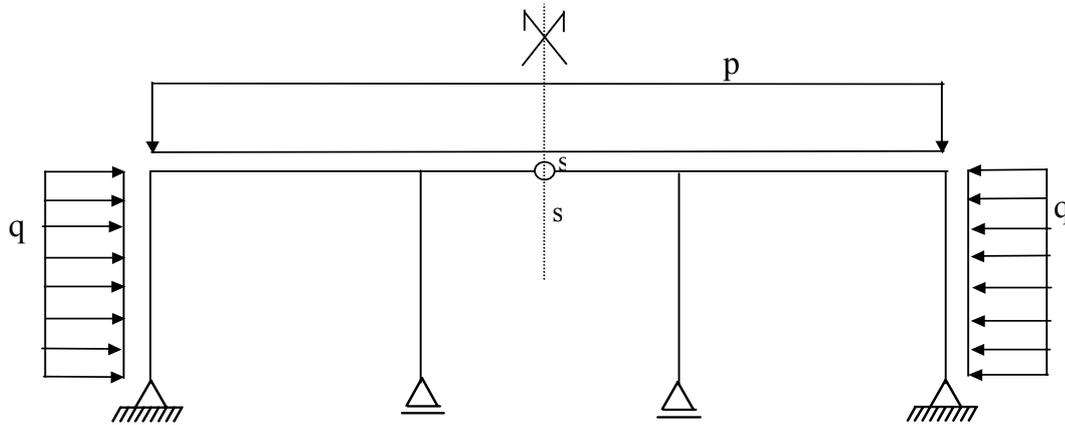


Figura 2-74: Estrutura simétrica com carregamento simétrico

Na seção de simetria de uma estrutura simétrica com carregamento simétrico, o esforço cortante é nulo ( $V = 0$ ), mas como é rotulada o momento é nulo ( $M = 0$ ) (Figura 2-74). Portanto, cortando-se a estrutura na seção S, tem-se apenas 1 incógnita hiperestática ( $X_1$ ). Esta incógnita é o esforço axial (N) (Figura 2-75)

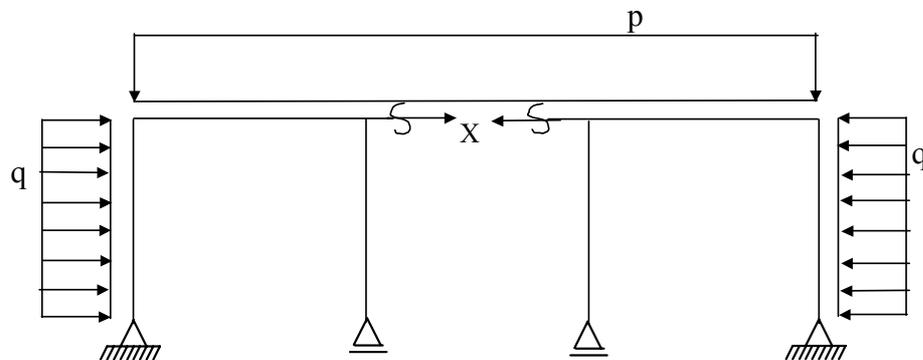


Figura 2-75: Sistema principal e hiperestático da estrutura ilustrada na Figura 2-74

A condição de compatibilidade é de deslocamento horizontal nulo no eixo de simetria  $\delta_1 = 0$ . Portanto a equação de compatibilidade é dada por

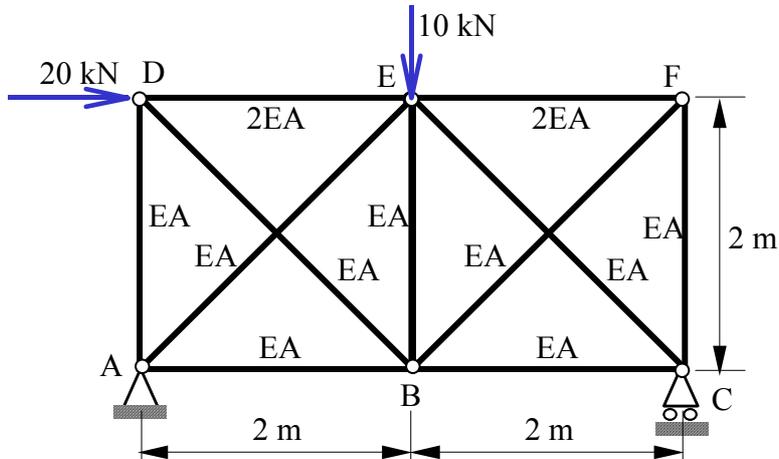
$$\delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 = 0.$$

Voltaremos a falar de simetria mais adiante.

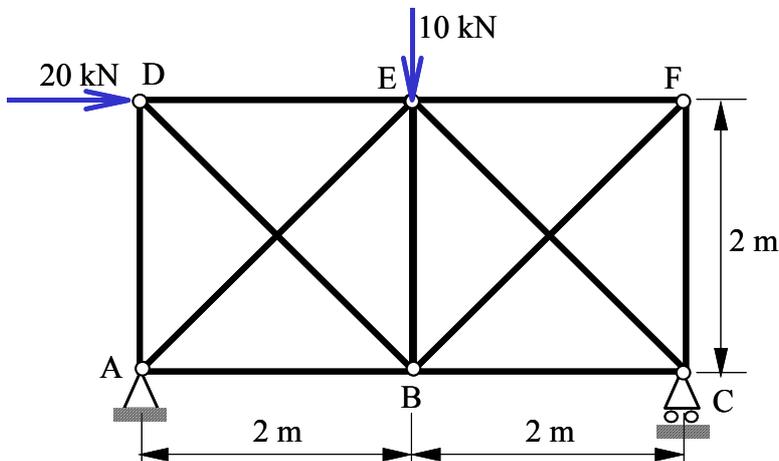
2.1.7. Exercícios

Determine os esforços nas barras das treliças hiperestáticas abaixo.

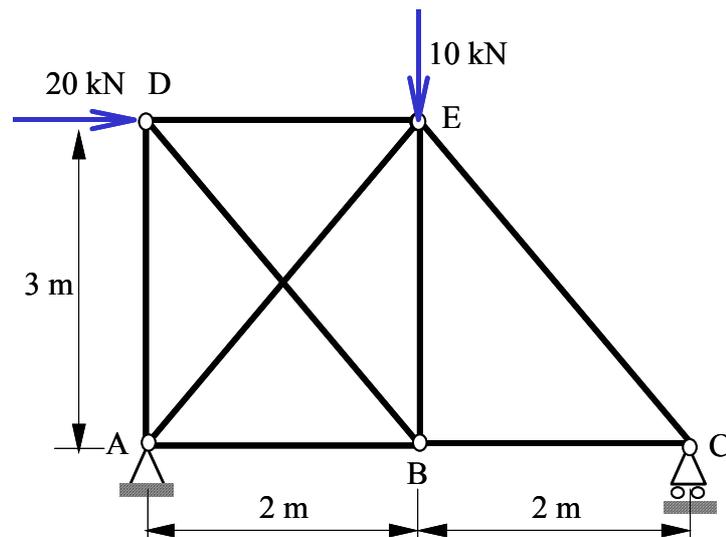
a)



b)



c)



## 2.2. TIRANDO PROVEITO DA SIMETRIA

### 2.2.1. Estruturas simétricas com carregamento simétrico

#### 2.2.1.1. Exemplo 1 -Viga bi-apoiada

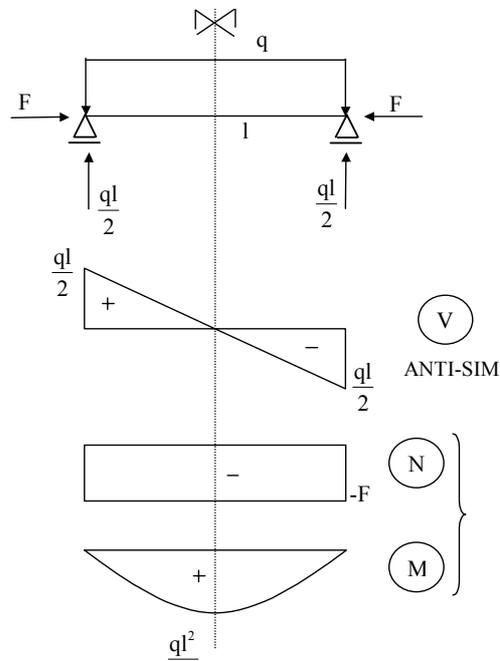


Figura 2-76: Viga bi-apoiada com carregamento simétrico



$$\theta = 0, \delta_v = \max, \delta_H = 0$$

$$\theta = 0 \text{ e } \delta_H = 0$$

Figura 2-77: Condições de contorno de deslocamento para o eixo de simetria da viga

Resolve-se apenas a metade da estrutura (Figura 2-78a) e traçam-se os diagramas. Depois estende-se para a estrutura toda lembrando que os diagramas N e M são simétricos e V é anti-simétrico.

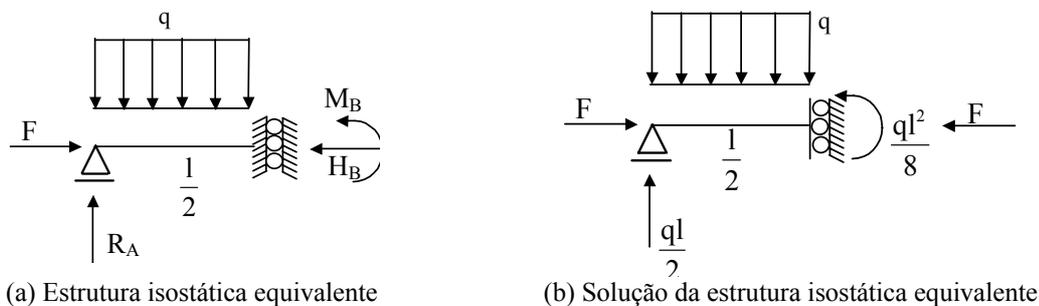


Figura 2-78: Estrutura isostática equivalente e sua solução

2.2.1.2. Exemplo 2 - Pórtico bi-engastado

Seja por exemplo o pórtico da Figura 2-79, cujo grau de hiperestaticidade é igual a 3 ( $g_h = 3$ ). Se for utilizada a sua estrutura equivalente, tem-se uma estrutura com  $g_h = 2$ .

O pórtico apresenta, no seu eixo de simetria, rotação e deslocamento horizontal nulos ( $\theta = 0$  e  $\delta_H = 0$ ). Não são deslocamentos relativos.

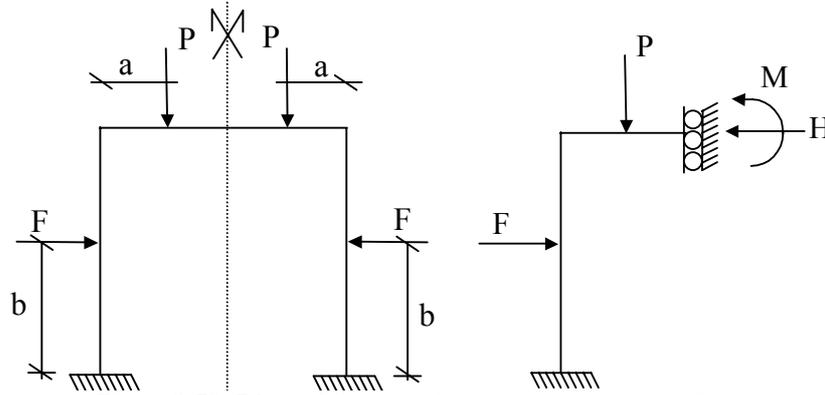


Figura 2-79: Pórtico bi-engastado e sua estrutura equivalente

Libertando os vínculos do apoio  da estrutura equivalente, resolve-se apenas a metade da estrutura, ou seja, a estrutura equivalente (Figura 2-80).

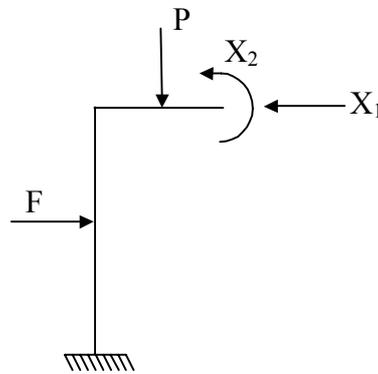


Figura 2-80: Estrutura equivalente

As equações de compatibilidade de deslocamentos são dadas por

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} + X_2 \cdot \delta_{12} = 0, \quad (2.134)$$

$$\delta_{20} + X_1 \cdot \delta_{21} + X_2 \cdot \delta_{22} = 0. \quad (2.135)$$

A vantagem em relação a cortar a seção no eixo de simetria e considerar os esforços internos é que se trabalha apenas com a metade da estrutura. Cortando a estrutura (Figura 2-81), ter-se-ia um grau de hiperestaticidade  $g_h = 3$ . Neste caso, o carregamento pode ser qualquer. Se o carregamento for simétrico, então  $X_2 = 0$  e o procedimento é

equivalente a usar o apoio . Têm-se duas incógnitas hiperestáticas. No entanto, deve-se trabalhar com a estrutura inteira e com os deslocamentos relativos (Figura 2-81).

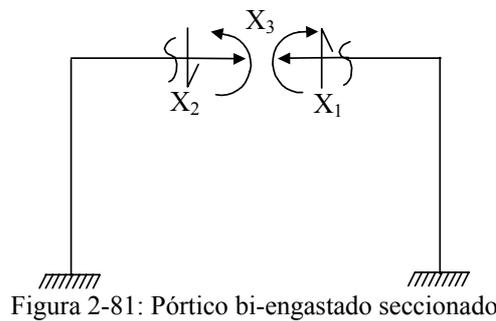


Figura 2-81: Pórtico bi-engastado seccionado

2.2.2. Estruturas simétricas com carregamento anti-simétrico:

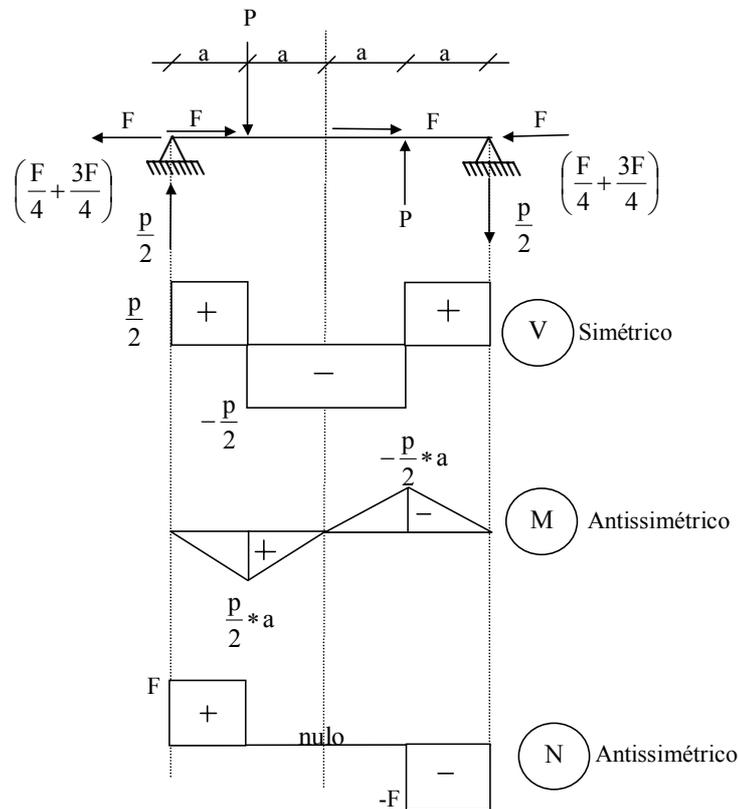


Figura 2-82: Viga bi-apoiada com carregamento anti-simétrico

A deformada da viga bi-apoiada (Figura 2-82) é ilustrada pela Figura 2-83. No eixo de simetria, a rotação e o deslocamento horizontal são diferentes de zero ( $\theta \neq 0$  e  $\delta_H \neq 0$ ), enquanto que o deslocamento vertical é nulo ( $\delta_V = 0$ ).

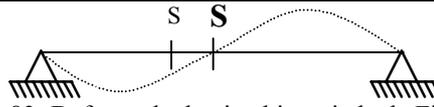


Figura 2-83: Deformada da viga bi-apoiada da Figura 2-82

Logo, a estrutura equivalente é mostrada na Figura 2-84. Resolvendo-se apenas esta metade da estrutura, estendem-se os diagramas para a estrutura inteira, lembrando que  $V$  é simétrico e  $N$  e  $M$  são anti-simétricos.

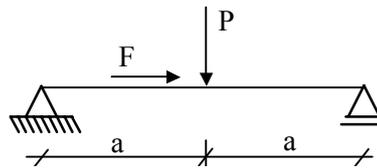


Figura 2-84: Sistema equivalente da viga ilustrada na Figura 2-82

### 2.2.2.1. Exemplo 3 - Pórtico bi-engastado

Seja o pórtico bi-engastado e com carregamento anti-simétrico mostrado na Figura 2-85a. Este pórtico apresenta grau de hiperstaticidade igual a 3. Ele pode ser resolvido utilizando-se o sistema equivalente da Figura 2-85b. Este sistema apresenta somente um grau de hiperstaticidade ( $g_h = 1$ ) (Figura 2-85b e Figura 2-85c) e cuja condição de deslocamento é  $\delta_1 = 0$ .

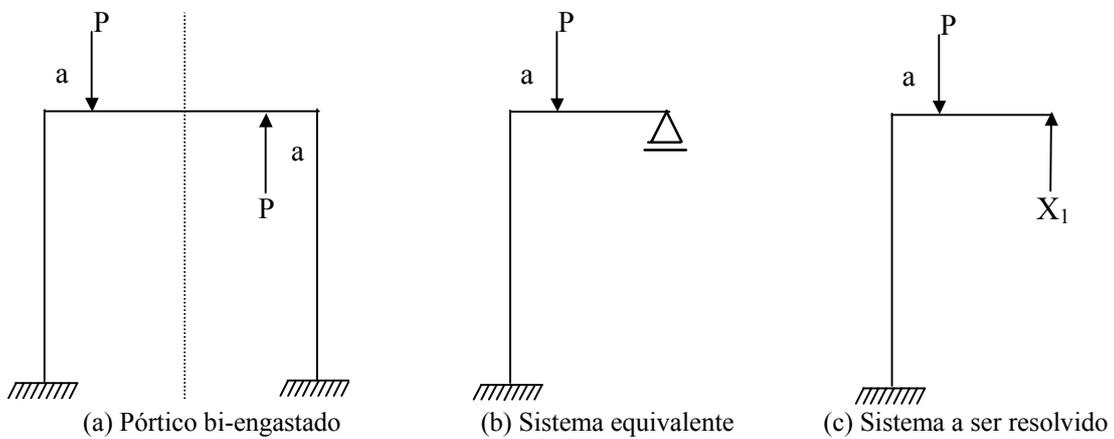


Figura 2-85: Pórtico bi-engastado e seu sistema equivalente

### 2.2.3. Estrutura simétrica com carregamento qualquer

Qualquer carregamento pode ser decomposto em uma soma de um carregamento simétrico com outro anti-simétrico como ilustrado na Figura 2-86.

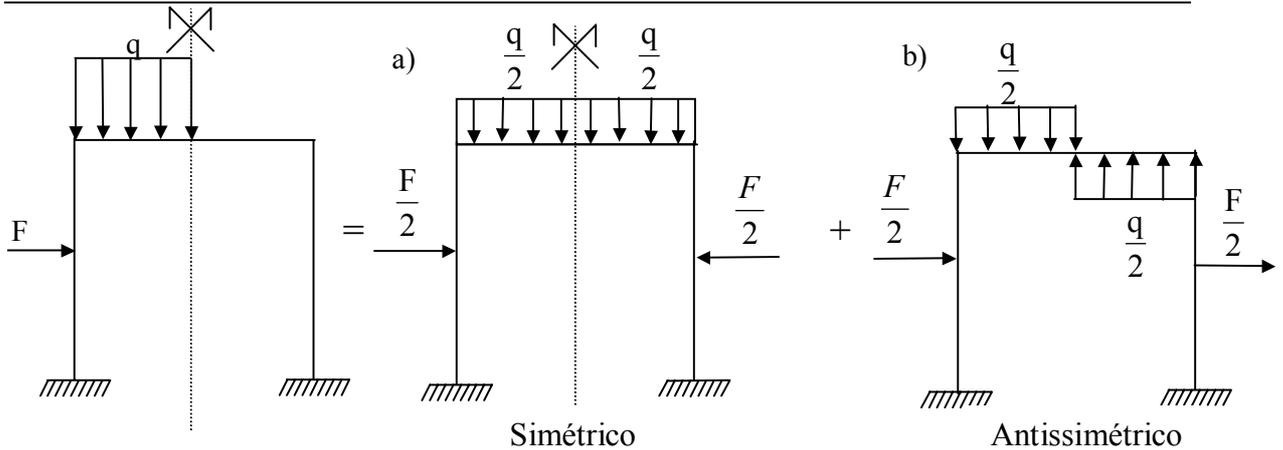


Figura 2-86: Decomposição de um carregamento em um parcela simétrica e outra anti-simétrica

A parcela do carregamento simétrico (Figura 2-87a) tem grau de hiperestaticidade igual a 2 ( $g_h = 2$ ) e apresenta diagramas de esforço normal (N) e de momentos flexores (M) simétricos, enquanto que o diagrama de esforço cortante (V) é anti-simétrico. A parcela do carregamento anti-simétrico (Figura 2-87b) tem grau de hiperestaticidade igual a 1 ( $g_h = 1$ ) e apresenta diagramas de esforço normal (N) e de momentos flexores (M) assimétricos, enquanto que o diagrama de esforço cortante (V) é simétrico.

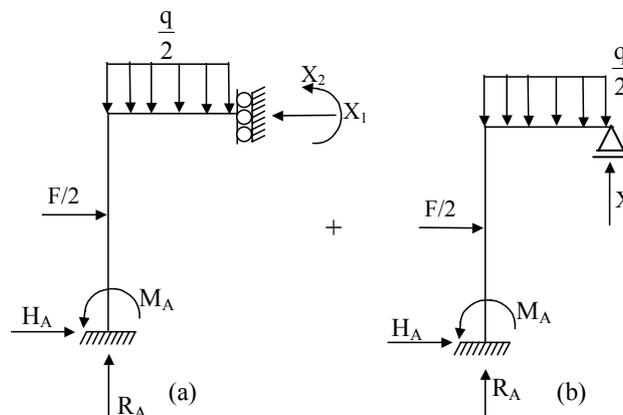


Figura 2-87: Parcelas simétrica (a) e anti-simétrica (b) do carregamento

Alguns sistemas estruturais têm dupla simetria. Neste caso, resolve-se apenas um quarto da estrutura. A Figura 2-88a apresenta um quadro com dupla simetria cujo grau de hiperestaticidade é igual a 3, porém os seus sistemas equivalentes mostrados na Figura 2-88b e Figura 2-88c possuem grau de hiperestaticidade igual a 1.

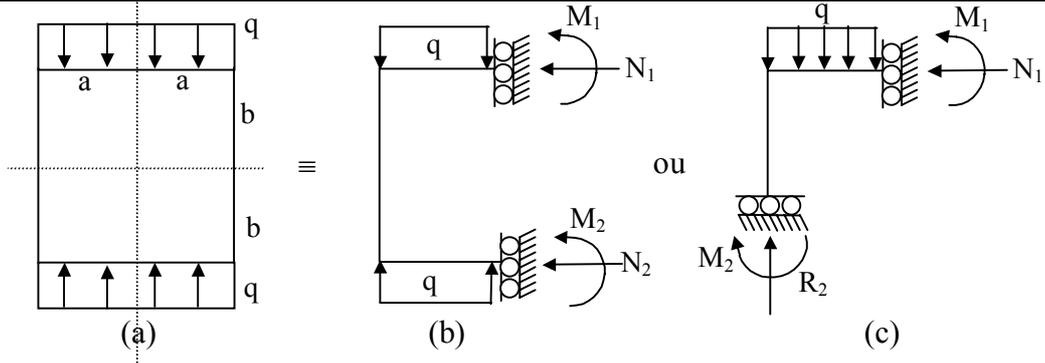


Figura 2-88: Quadro com dupla simetria

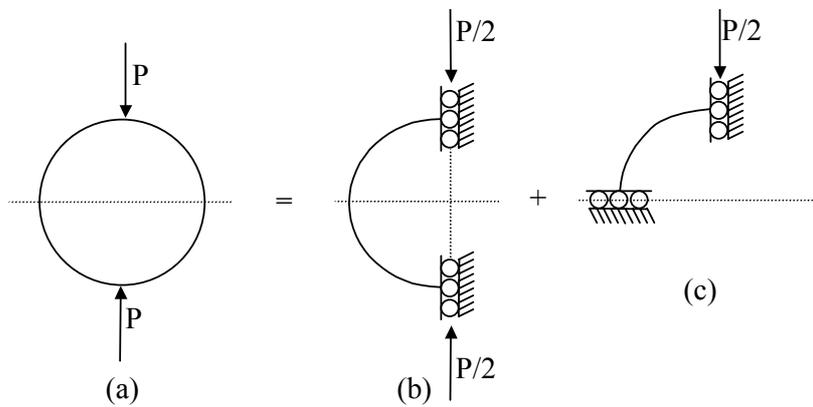


Figura 2-89: Estrutura com dupla simetria

### 2.2.3.1. Exemplo numérico

Resolver o pórtico bi-engastado submetido a um carregamento assimétrico (Figura 2-90).

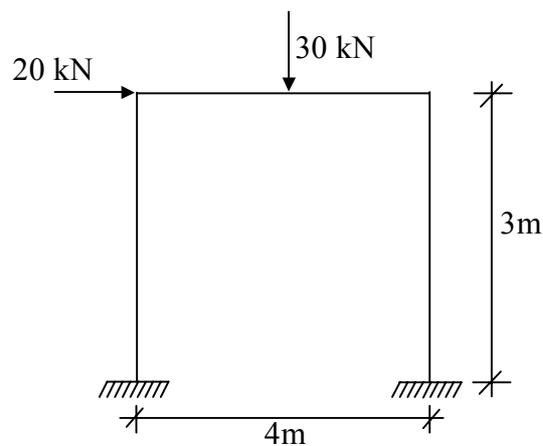
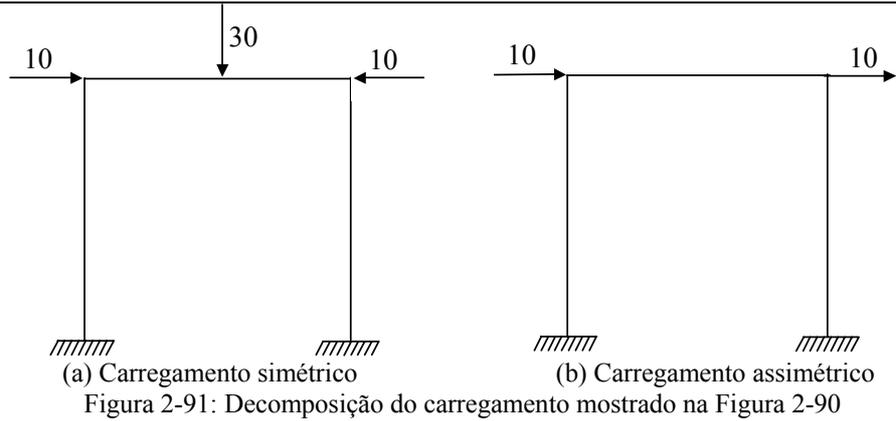
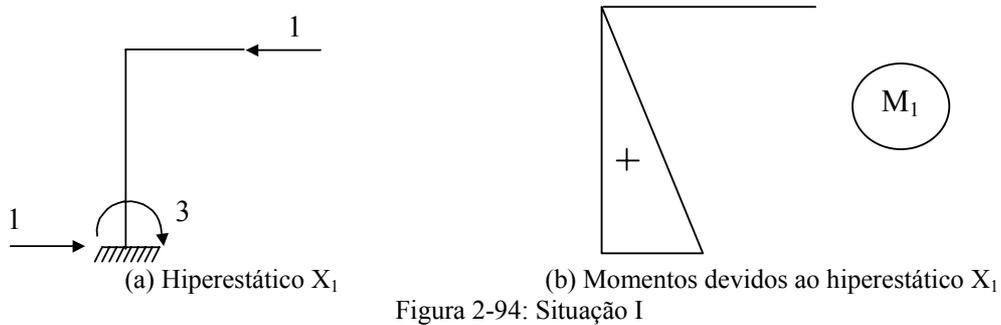
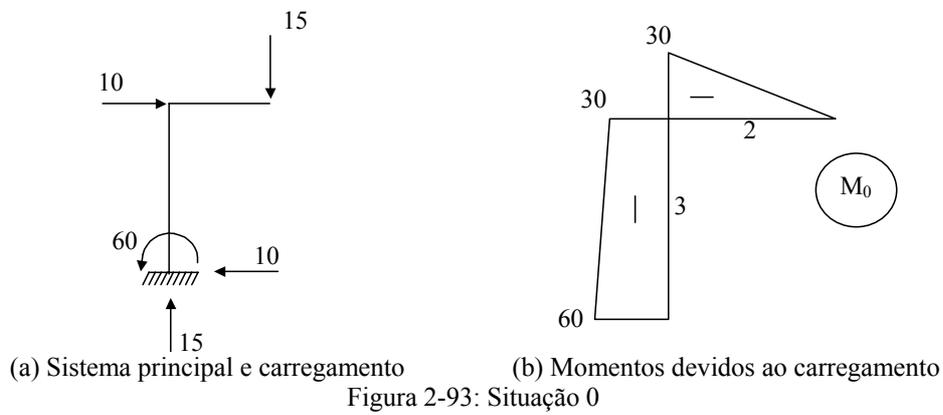
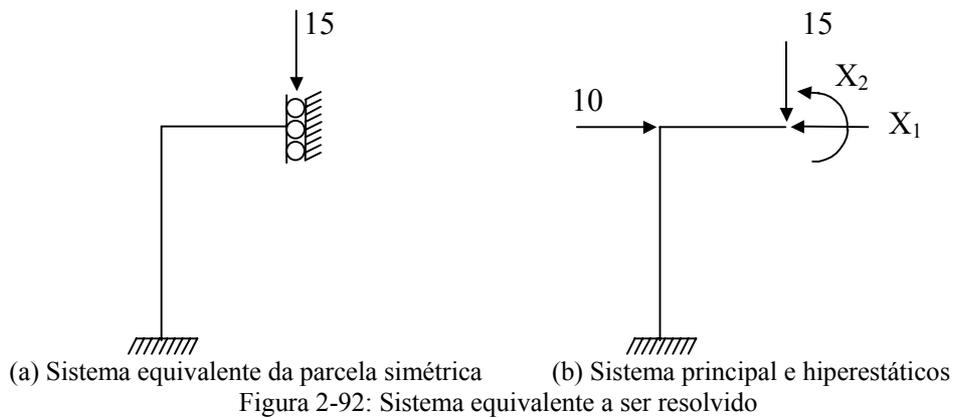
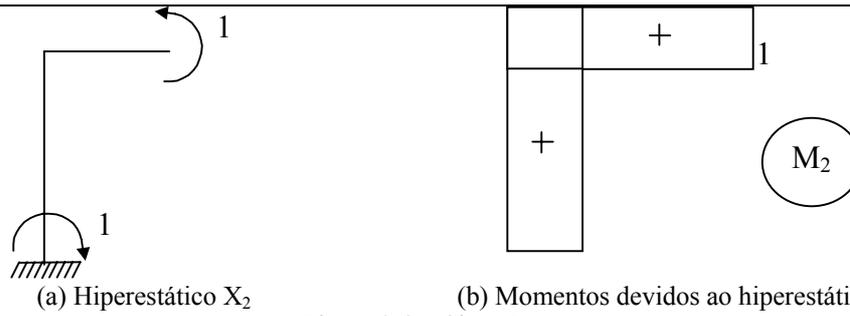


Figura 2-90: Pórtico bi-engastado submetido a carregamento assimétrico



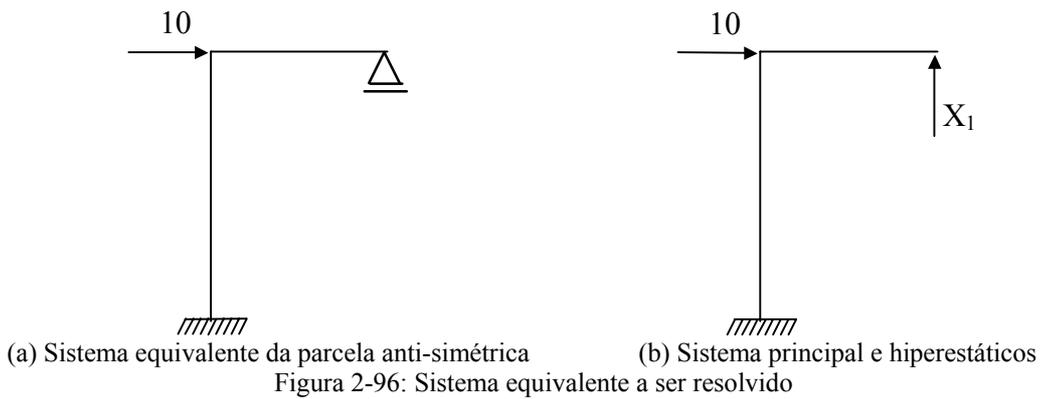
Resolução da parte simétrica



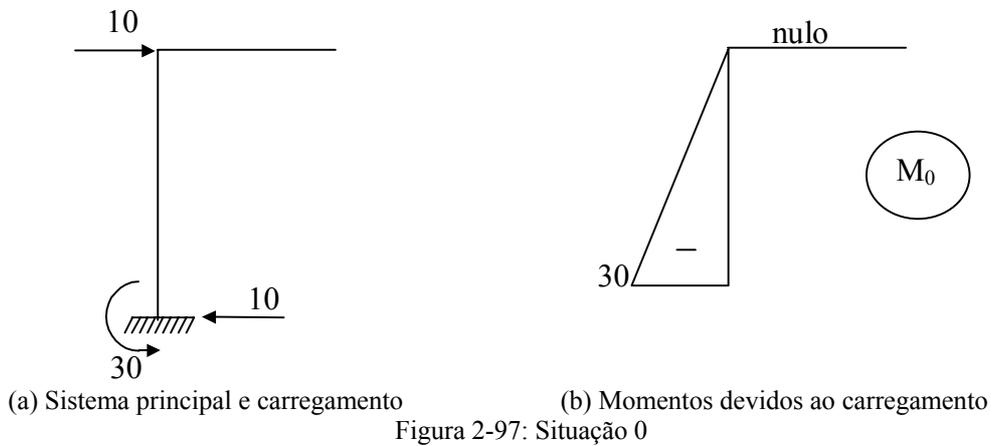


(a) Hiperestático  $X_2$  (b) Momentos devidos ao hiperestático  $X_2$   
 Figura 2-95: Situação II

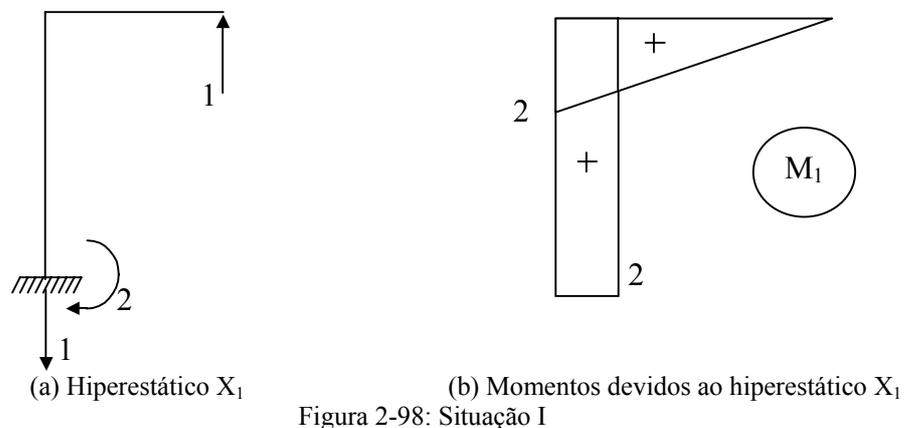
Resolução da parte anti-simétrica



(a) Sistema equivalente da parcela anti-simétrica (b) Sistema principal e hiperestáticos  
 Figura 2-96: Sistema equivalente a ser resolvido



(a) Sistema principal e carregamento (b) Momentos devidos ao carregamento  
 Figura 2-97: Situação 0



(a) Hiperestático  $X_1$  (b) Momentos devidos ao hiperestático  $X_1$   
 Figura 2-98: Situação I

## 1.2. GRELHAS

As grelhas são estruturas planas reticulares que suportam cargas perpendiculares ao seu plano. Devido a essas ações, seus elementos estruturais estão submetidos principalmente a esforços internos cisalhantes ( $V$ ), a momentos fletores ( $M$ ) e torçores ( $T$ ). As parcelas mais importantes na consideração da energia de deformação são os momentos fletores e torçores. Portanto, no cálculo de grelhas hiperestáticas utilizando o Método das Forças, a expressão para o cálculo dos deslocamentos generalizados é dado por

$$\delta_{ij} = \int \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int \frac{T_i T_j}{GJ_o} dx \quad (2.136)$$

### 1.2.1. Exemplo 1- Estrutura simétrica – carregamento qualquer

Seja grelha mostrada na Figura 2-99, cujas rigidezes à flexão ( $EI$ ) e à torção ( $GJ_0$ ) são constantes para todas as barras e  $EI = 1,5 \cdot GJ$ .

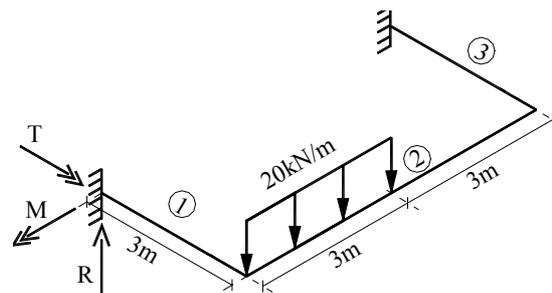


Figura 2-99: Grelha simétrica

A grelha mostrada na Figura 2-99 apresenta grau de hiperestaticidade igual a 3 ( $g_h = 3$ ) e está submetida a esforço cisalhamento ( $V$ ), a momentos fletor ( $M$ ) e torçor ( $T$ ).

Cortando a barra 2 no eixo de simetria, obtém-se o sistema principal ilustrado pela Figura 2-100, cujas condições de compatibilidade são rotação relativa nula ( $\delta_1 = 0$ ), giro relativo nulo ( $\delta_2 = 0$ ) e deslocamento vertical relativo nulo ( $\delta_3 = 0$ ) na seção.

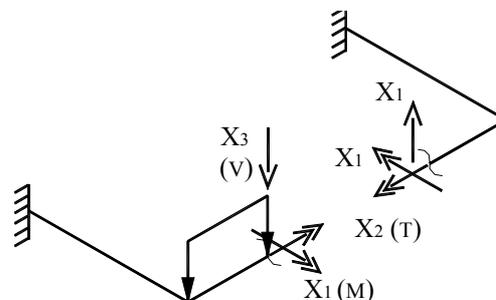


Figura 2-100: Sistema principal e hiperestáticos da grelha mostrada na Figura 2-99

Aplicando o princípio da superposição dos efeitos na estrutura mostrada em Figura 2-100, obtém-se

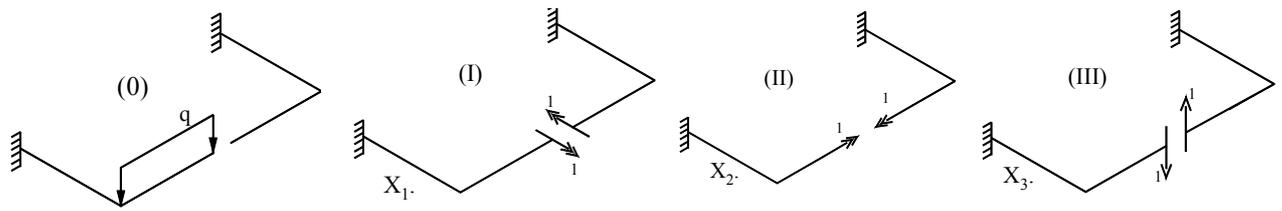


Figura 2-101: Carregamento externo e hiperestáticos

Efetuando-se a superposição das cargas mostradas na Figura 2-101 e aplicando-se as condições de compatibilidade de deslocamentos, tem-se o sistema de equações

$$\delta_1 = \delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13} = 0 \quad (2.137)$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23} = 0$$

$$\delta_3 = \delta_{30} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33} = 0$$

Para a determinação dos deslocamentos generalizados  $\delta_{ij}$ , são necessários os diagramas de momentos fletores e torçores causados pelo carregamento externo (0), e pelos hiperestáticos (I, II e III) (Figura 2-102, Figura 2-103, Figura 2-104 e Figura 2-105)

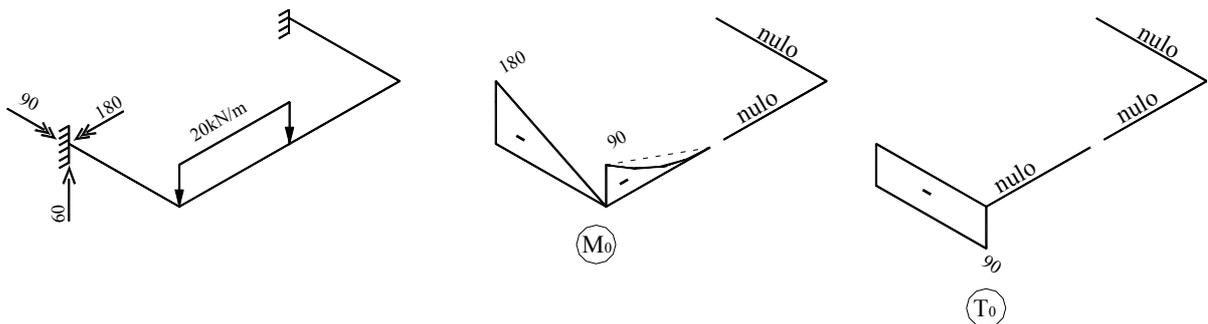


Figura 2-102: Diagramas de esforços devidos ao sistema (0)

Observa-se que, a aplicação de um binário conjugado simétrico  $\begin{matrix} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{matrix}$  no eixo de simetria resulta em esforços de flexão (M) simétricos e esforços de torção (T) anti-simétricos (Figura 2-103).

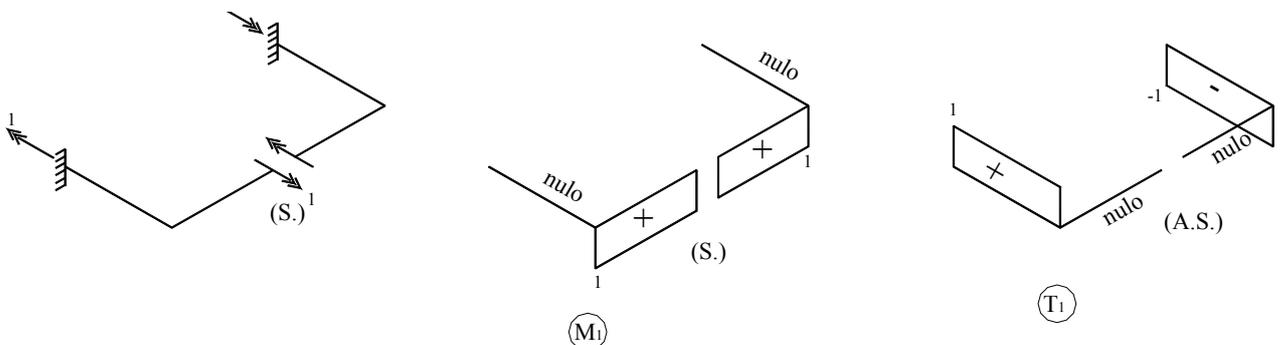


Figura 2-103: Diagramas de esforços devidos ao sistema I

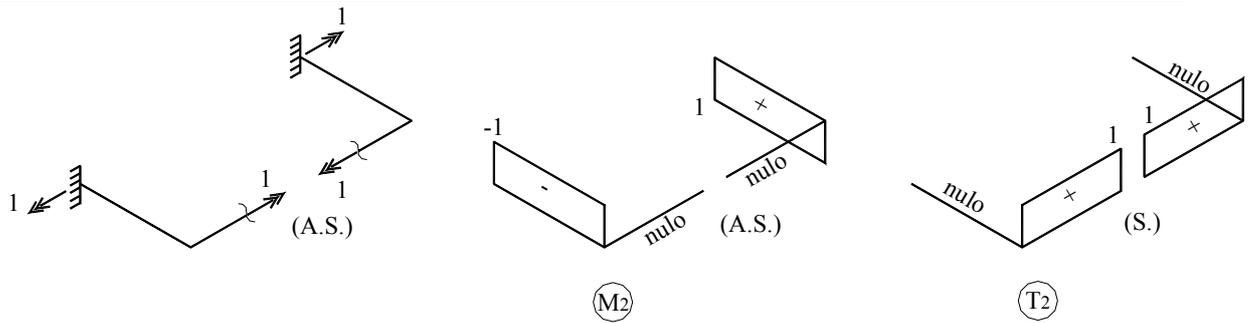


Figura 2-104: Diagramas de esforços devidos ao sistema II

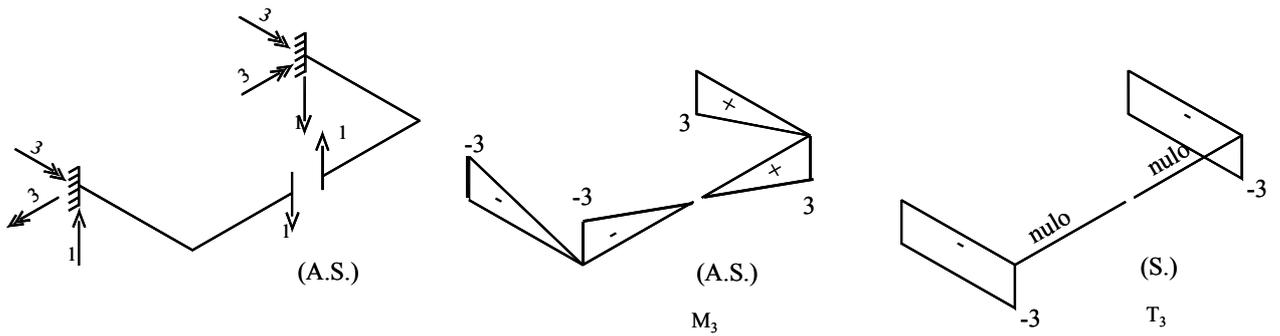


Figura 2-105: Diagramas de esforços devidos ao sistema III

A determinação dos esforços generalizados se dá utilizando as equações 2.138 e 2.139.

$$\delta_{ij} = \int \frac{M_i M_j}{EI} dx + \int \frac{T_i T_j}{GJ_o} dx \quad (2.138)$$

$$\delta_{ij} = \int \frac{M_i M_j}{EI} dx + 1,5 \int \frac{T_i T_j}{EI} dx \quad (2.139)$$

Tabela 2-19: Combinação dos diagramas  $M_1 M_0$

Barra 1	Barra 2	Barra 3
Combinação nula		Combinação nula
	$\int M_1 \cdot M_0 = \frac{1}{2}(3m) \cdot 1 \cdot (-90) + \frac{2}{3}(3m) \cdot 1 \cdot (22,5) = -90$	

Tabela 2-20: Combinação dos diagramas  $T_1T_0$

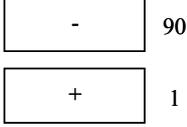
Barra 1	Barra 2	Barra 3
	Combinação nula	Combinação Nula
$\int T_1 \cdot T_0 = (3m) \cdot 1 \cdot (-90) = 270$		

Tabela 2-21: Combinação dos diagramas  $M_2M_0$

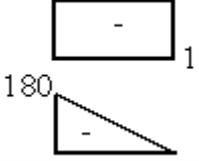
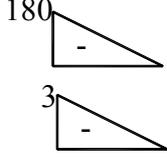
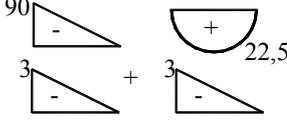
Barra 1	Barra 2	Barra 3
	Combinação nula	Combinação nula
$\int M_2 \cdot M_0 = \frac{1}{2}(3m) \cdot (-1) \cdot (-180) = 270$		

Tabela 2-22: Combinação dos diagramas  $M_3M_0$

Barra 1	Barra 2	Barra 3
		Combinação Nula
$\int M_3 \cdot M_0 = \frac{1}{3}(3m) \cdot (-3) \cdot (-180) = 540$	$\int M_3 \cdot M_0 = \frac{1}{3}(3m) \cdot (-3) \cdot (-90) + \frac{2}{3}(3m) \cdot (-3) \cdot (22,5)$	

$$\int T_3 \cdot T_0 = (3m) \cdot (-3) \cdot (-90) = 810$$

$$\int M_1 \cdot M_2 = S \text{ com } AS = 0 \Rightarrow \delta_{12} = 0$$

$$\int T_1 \cdot T_2 = AS \text{ com } S = 0$$

$$\int M_1 \cdot M_3 = S \text{ com } AS = 0 \Rightarrow \delta_{13} = 0$$

$$\int T_1 \cdot T_3 = AS \text{ com } S = 0$$

$$\int M_2 \cdot M_3 = 2 \cdot [(3m)(1)(3)] = 9$$

$$\int T_2 \cdot T_3 = 0$$

$$\int M_1 \cdot M_1 = 2 \cdot [(3m)(1)(1)] = 6$$

$$\int T_1 \cdot T_1 = 2 \cdot [(3m)(1)(1)] = 6$$

$$\int M_2 \cdot M_2 = 6$$

$$\int T_2 \cdot T_2 = 6$$

$$\int M_3 \cdot M_3 = 4 \cdot \left[ \frac{1}{3} (3m)(3)(3) \right] = 36$$

$$\int T_3 \cdot T_3 = 2 \cdot [(3m)(3)(3)] = 54$$

Agora, calculam-se os coeficientes  $EI \delta_{ij}$  e monta-se o sistema de equações de compatibilidade.

$$EI \cdot \delta_{10} = -90 - (270 \cdot 1,5) = -495 ,$$

$$EI \cdot \delta_{20} = 270 + 0 = 279 ,$$

$$EI \cdot \delta_{30} = 742,5 + (810 \cdot 1,5) = 1957,5 ,$$

$$EI \cdot \delta_{11} = 6 + (6 \cdot 1,5) = 15 ,$$

$$EI \cdot \delta_{12} = 0 ,$$

$$EI \cdot \delta_{13} = 0 ,$$

$$EI \cdot \delta_{22} = 6 + (6 \cdot 1,5) = 15 ,$$

$$EI \cdot \delta_{23} = 9 + 0 = 9 ,$$

$$EI \cdot \delta_{33} = 36 + (54 \cdot 1,5) = 117 .$$

Substituindo os deslocamentos generalizados no sistema de equações 2.137, obtém-se

$$15 \cdot X_1 + 0 + 0 = 495 \tag{2.140}$$

$$0 + 15 \cdot X_2 + 9 \cdot X_3 = -270 \quad ;$$

$$0 + 9 \cdot X_2 + 117 X_3 = -1957,5$$

cujas incógnitas valem

$$X_1 = +33 \text{ kN} \cdot \text{m} \tag{2.141}$$

$$X_2 = -8,35 \text{ kN} \cdot \text{m} .$$

$$X_3 = -16,09 \text{ kN}$$

As reações (Figura 2-106) e os esforços internos finais são dados por

$$E = E_0 + E_1 X_1 + E_2 X_2 + E_3 X_3 , \tag{2.142}$$

ou seja,

$$R = R_0 + R_1 X_1 + R_2 X_2 + R_3 X_3 , \tag{2.143}$$

$$M = M_0 + M_1 X_1 + M_2 X_2 + M_3 X_3 , \tag{2.144}$$

$$T = T_0 + T_1 X_1 + T_2 X_2 + T_3 X_3 . \tag{2.145}$$

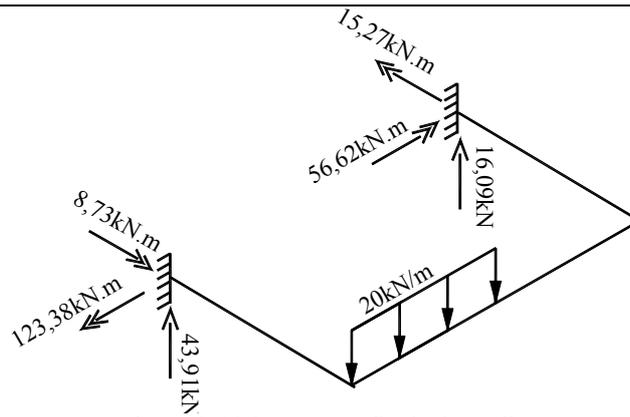


Figura 2-106: Reações finais da grelha

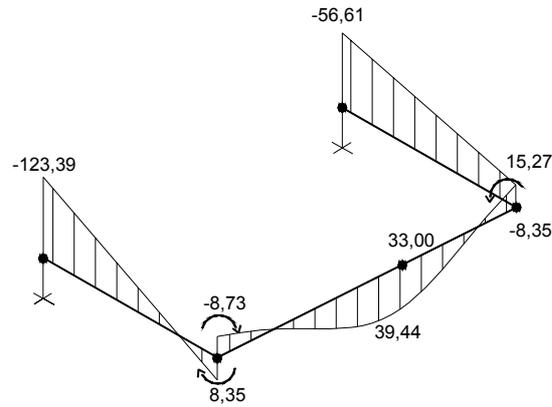


Figura 2-107: Diagrama de momento fletor da grelha (kN.m)

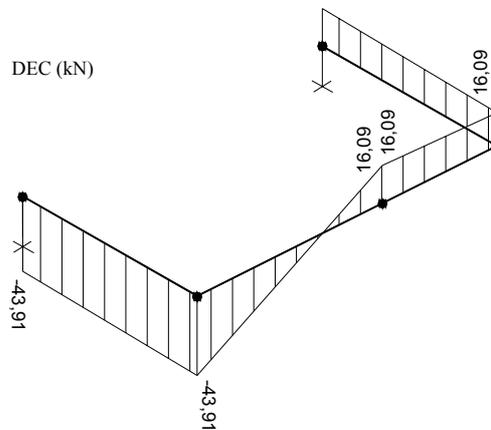


Figura 2-108: Diagrama de esforço cortante da grelha

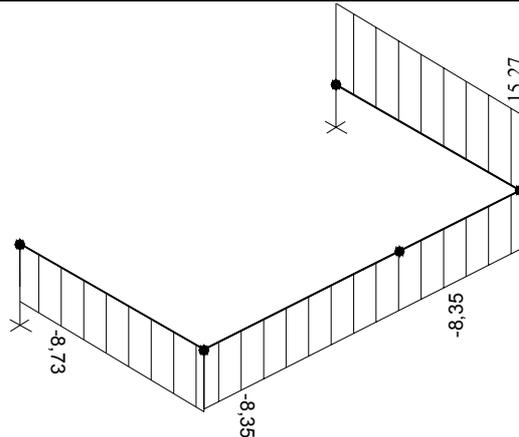


Figura 2-109: Diagrama de momento torçor da grelha

### 1.2.2. Exemplo 2 - Grelha simétrica com carregamento simétrico

Seja a estrutura mostrada na Figura 2-110. Ela é uma vez hiperestática. Têm-se  $M_0$  simétrico e  $T_0$  anti-simétrico, isso implica em  $\delta_{20} = \delta_{30} = 0$ ,  $X_2 = X_3 = 0$  (T e V) e a  $M \neq 0$  ( $X_1 \neq 0$ ).

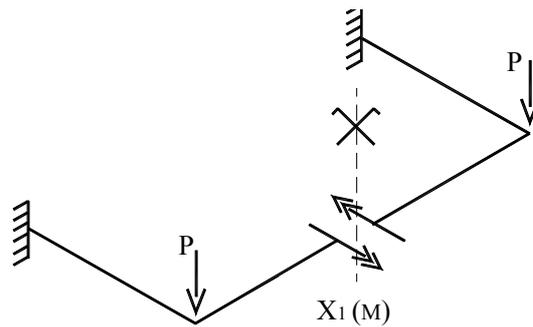


Figura 2-110: Grelha simétrica com carregamento simétrico

### 1.2.3. Exemplo 3 - Grelha simétrica com carregamento anti-simétrico

Seja a estrutura mostrada na Figura 2-111. Ela é 2 vezes hiperestática. Têm-se  $M_0$  anti-simétrico e  $T_0$  simétrico, o que implica em  $\delta_{10} = 0$ ,  $X_1 = 0$  (M),  $X_2 \neq 0$  (T) e  $X_3 \neq 0$  (V)

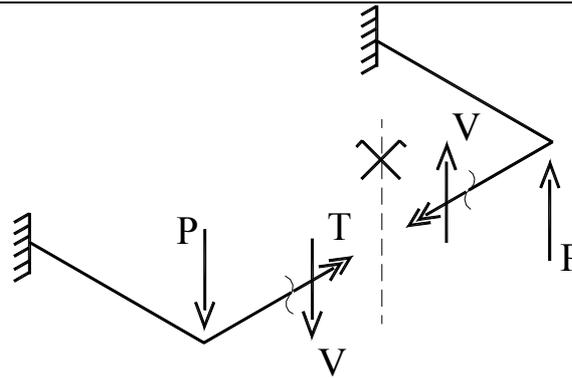


Figura 2-111: Grelha simétrica com carregamento anti-simétrico

Resumindo, estrutura simétrica, com seção S de corte no eixo simétrico e carregamento simétrico apresenta  $M_S \neq 0$ ,  $N_S \neq 0$ ,  $V_S = 0$  e  $T_S = 0$ . Porém se o carregamento for anti-simétrico, a estrutura apresenta  $M_S = 0$ ,  $N_S = 0$ ,  $V_S \neq 0$  e  $T_S \neq 0$ .

### 2.3. VARIAÇÃO DE TEMPERATURA

A variação de temperatura pode produzir deformações e tensões internas em uma estrutura. A relação fundamental que governa o comportamento das estruturas quando submetidas à efeitos térmico é

$$\mathcal{E}_{total} = \mathcal{E}_{térmica} + \mathcal{E}_{mecânica} \quad (2.146)$$

com a deformação total ( $\mathcal{E}_{total}$ ) produzindo deslocamentos na estrutura e a deformação mecânica ( $\mathcal{E}_{mecânica}$ ) gerando tensões internas ( $\sigma$ ).

A deformação total da estrutura governa o formato deformado da estrutura ( $\delta$ ) através das condições de equilíbrio ou das considerações de compatibilidade. O estado de tensões de uma estrutura depende somente das deformações mecânicas. Em estruturas que não apresentam carregamento externo e que são livres para se deformar termicamente, a deformação total é dada por

$$\mathcal{E}_{total} = \mathcal{E}_{térmica} \quad (2.147)$$

com deslocamentos oriundos desta deformação.

Em estruturas nas quais as deformações térmicas são impedidas completamente e não apresentam nem carregamento externo, nem tensões térmicas, nem plastificação, tem-se

$$\mathcal{E}_{total} = \mathcal{E}_{térmica} + \mathcal{E}_{mecânica} = 0 \quad (2.148)$$

com a deformação mecânica ( $\mathcal{E}_{mecânica}$ ) gerando tensões internas ( $\sigma$ ).

Das equações 2.146 a 2.148 pode-se concluir que o comportamento da estrutura submetida a um aquecimento é governado pela maneira como a estrutura responde às deformações induzidas pelo aquecimento de seus membros. As deformações térmicas podem ser dilatação térmica ou de encurvamento. A dilatação térmica se manifesta sob a forma de aumento do comprimento do elemento estrutural causado pela elevação da temperatura do eixo da peça. Já o encurvamento térmico é provocado por um gradiente de temperatura ao longo da espessura do elemento estrutural.

Se a estrutura tem vinculação insuficiente para a expansão térmica, apresenta uma resposta ao aquecimento dominada pelo deslocamentos (Figura 2-112a). Os gradientes térmicos induzem ao encurvamento dos membros que têm as extremidades livres para girar, produzindo, neste caso, uma resposta ao aquecimento caracterizada por grandes deflexões (Figura 2-113a-b).

Membros cujas extremidades são vinculadas contra a translação produzem deformações mecânicas opostas à expansão térmica e portanto tensões de compressão (Figura 2-112b). O encurvamento produzido pelo gradiente de temperatura, em membros cujas extremidades são impedidas de girar, gera momentos sem deflexão ao longo do elemento (Figura 2-113c). O encurvamento térmico em elementos que permitem o giro das extremidades mas não permitem a translação produz trações internas (Figura 2-113b).

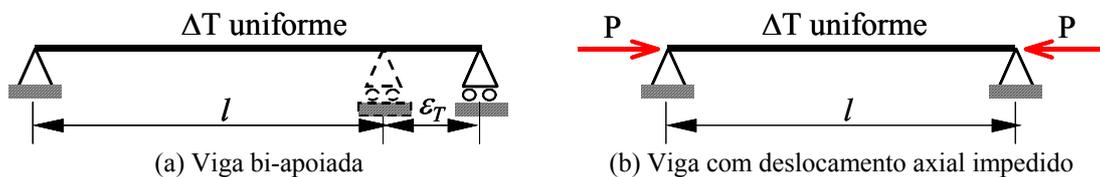


Figura 2-112: Vigas submetidas a um aquecimento uniforme

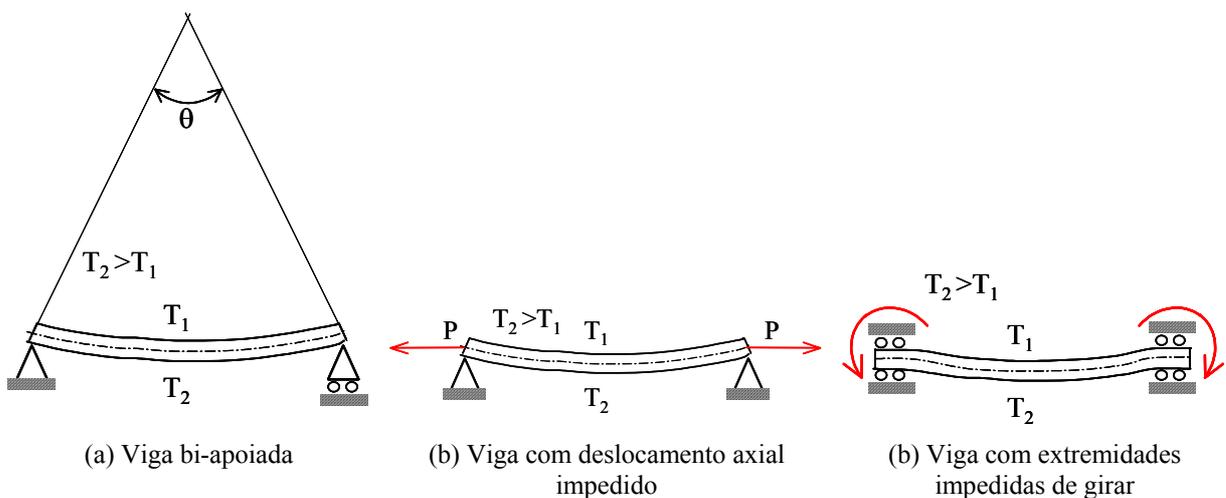


Figura 2-113: Vigas submetidas a um gradiente de temperatura

2.3.1. Deformações em estruturas isostáticas

A variação uniforme de temperatura em estruturas isostáticas provoca uma deformação específica axial (Figura 2-114) no elemento dado por

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = \alpha \cdot \Delta T \text{ ou} \quad (2.149)$$

$$du = \alpha \cdot \Delta T \cdot dx, \quad (2.150)$$

sendo  $\alpha$  o coeficiente de dilatação térmica do material,  $\Delta T$  a variação de temperatura.

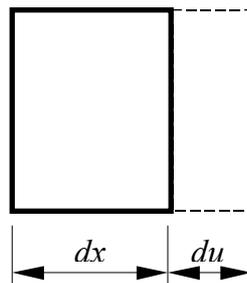


Figura 2-114: Deformação térmica

Uma variação não uniforme de temperatura ( $\Delta T_e$  e  $\Delta T_i$ ) (Figura 2-115) provoca uma deformação específica longitudinal dada por

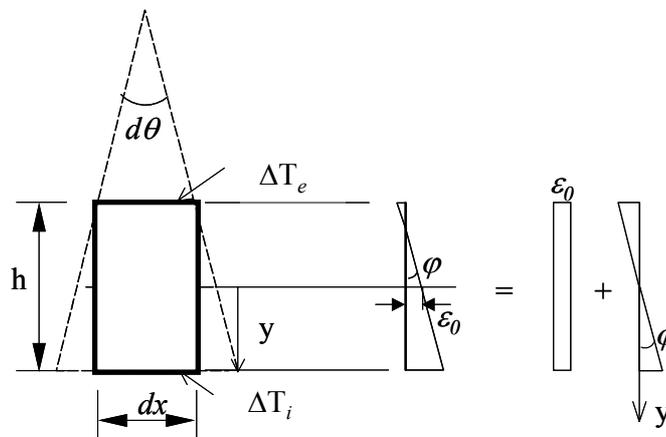


Figura 2-115: Deformação térmica devida à uma variação não uniforme de temperatura

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + \varphi \cdot y, \quad (2.151)$$

sendo  $\varepsilon_0$  a deformação específica do eixo da peça e  $\varphi \cdot y$  a deformação devido ao encurvamento térmico. A deformação específica axial é dada por

$$\varepsilon_0 = \alpha \cdot \Delta T_o, \quad (2.152)$$

sendo  $\alpha$  o coeficiente de dilatação térmica do material e  $\Delta T_o$  a variação de temperatura no eixo da peça.

Considerando que  $\varphi \cong tg\varphi$ , a rotação da seção transversal devido ao encurvamento é dada por

$$\varphi = \alpha \cdot \frac{(\Delta T_i - \Delta T_e)}{h}, \quad (2.153)$$

sendo  $\alpha$  o coeficiente de dilatação térmica do material e  $\Delta T_{i,e}$  a variação de temperatura interna e externa e  $h$  é a altura do elemento.

### 2.3.2. Exemplo 1 - Pórtico isostático submetido à variação de temperatura

Seja o pórtico isostático mostrado na Figura 2-116 sujeito a um gradiente de temperatura uniforme sobre todas as barras. As barras têm módulo de elasticidade ( $E$ ) igual à  $2,0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$  e coeficiente de dilatação térmica de  $10^{-5}/^\circ\text{C}$ . As suas seções transversais  $s$  de  $20 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ . Determinar o deslocamento do pórtico em B ( $\delta_B$ ), sabendo que ele foi construído à  $15^\circ\text{C}$  ( $T_g$ ).

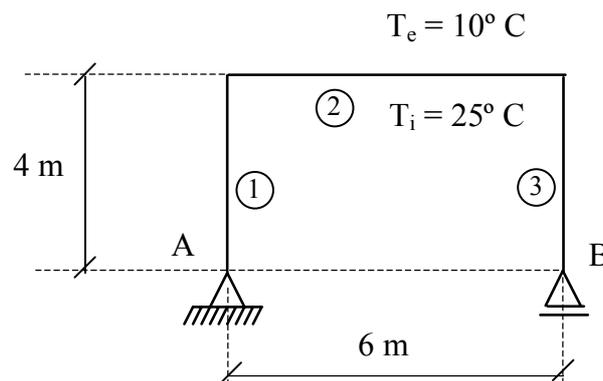


Figura 2-116: Pórtico isostático sujeito a um gradiente de temperatura

Pode-se calcular o deslocamento horizontal do ponto B pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais. No apoio B, aplica-se uma carga unitária na direção que se deseja conhecer o deslocamento (Figura 2-117a). Em seguida, impõe-se à estrutura uma configuração deformada virtual, que coincide com a deformada da estrutura real. Nesta situação, o trabalho realizado pelas forças externas (virtuais) sobre os deslocamentos reais será igual ao realizado pelos esforços internos (virtuais) sobre as deformações (reais).

$$\overline{W}_e = \overline{W}_i, \quad (2.154)$$

sendo o trabalho das forças externas é dado por

$$\overline{W}_e = P \cdot \delta_B \quad (2.155)$$

e o trabalho das forças internas é dado pela integral sobre todas as barras da expressão

$$\overline{W}_i = \int \overline{N} \cdot du + \int \overline{M} \cdot d\theta . \quad (2.156)$$

Dessa forma

$$1 \cdot \delta_B = \int \overline{N} \cdot du + \int \overline{M} \cdot d\theta . \quad (2.157)$$

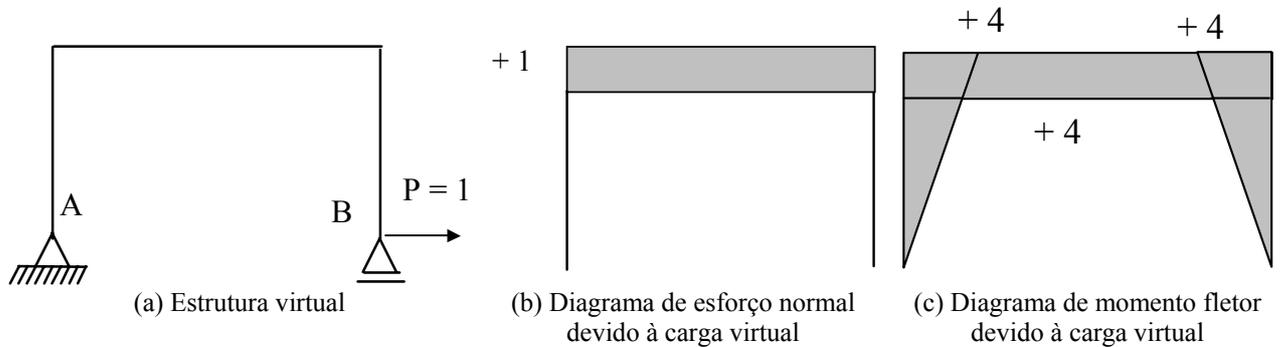


Figura 2-117

Tem-se que determinar  $du$  e  $d\theta$  presentes na equação (2.168). A deformação específica ( $\varepsilon$ ) ao longo da altura da seção é dada por

$$\varepsilon = \varepsilon_o + \varphi \cdot y , \quad (2.158)$$

como ilustrado na Figura 2-118.

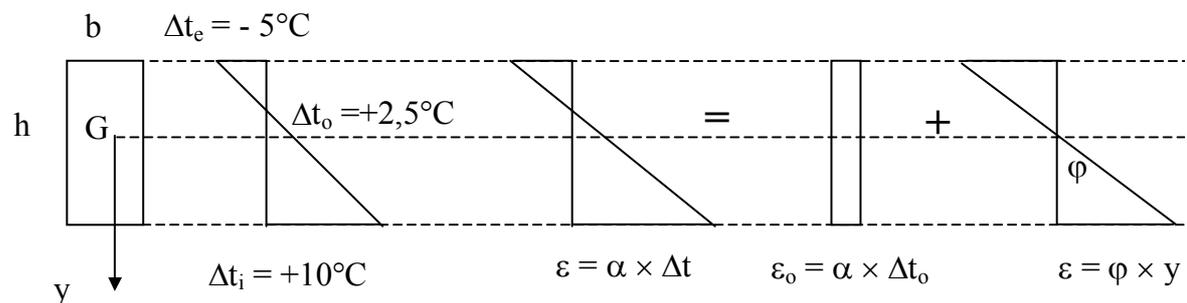


Figura 2-118: Deformações devidas ao gradiente de temperatura

$du$  é dado por

$$du = \varepsilon_o \cdot dx = \alpha \cdot \Delta T_o \cdot dx \quad (2.159)$$

e  $d\theta$  por

$$d\theta = \varphi \cdot dx , \quad (2.160)$$

$$\varphi = \frac{\alpha \cdot (\Delta T_i - \Delta T_e)}{h} \quad (2.161)$$

sendo  $\alpha$  coeficiente de dilatação térmica,  $\Delta T_o$  a variação de temperatura sobre o eixo do centro geométrico da seção,  $\varphi$  a curvatura do elemento estrutural,  $\Delta T_i$  e  $\Delta T_e$  são as variações de temperatura internas e externas e  $h$  é a altura do elemento estrutural.

Dos dados do problema (Figura 2-118), tira-se que as variações de temperatura externa, interna e no centróide são

$$\Delta T_e = 10 - 15 = -5^\circ C \text{ (externa),}$$

$$\Delta T_i = 25 - 15 = +10^\circ C \text{ (interna),}$$

$$\Delta T_o = \frac{(10 - 5)}{2} = +2,5^\circ C \text{ (centróide),}$$

$$du = 2,5\alpha \cdot dx.$$

$$d\theta = \varphi \cdot dx = \alpha \frac{[10 - (-5)]}{0,5} \cdot dx = \frac{15 \cdot \alpha}{0,5} \cdot dx = 30 \cdot \alpha \cdot dx$$

$$1 \cdot \delta_B = \int \bar{N} \cdot 2,5\alpha \cdot dx + \int \bar{M} \cdot 30\alpha \cdot dx.$$

$$1 \cdot \delta_B = 2,5\alpha \int \bar{N} dx + 30\alpha \int \bar{M} dx.$$

As integrais acima correspondem às áreas dos diagramas de esforço normal e fletor do pórtico (Figura 2-117)

Logo, o deslocamento do ponto B é dado por

$$\delta_B = A_{\bar{N}} \times 2,5 \cdot \alpha + A_{\bar{M}} \times 30 \cdot \alpha$$

$$\delta_B = 6 \times 2,5 \times 10^{-5} + 40 \times 30 \times 10^{-5} = 1215 \times 10^{-5} m.$$

O deslocamento do ponto B foi causado unicamente pela variação de temperatura. Não havia nenhuma carga aplicada à estrutura. Neste exemplo (estrutura isostática), observa-se que os esforços internos (M, N e V) são nulos na estrutura real. Não há esforços no pórtico somente deformação térmica.

### 2.3.3. Exemplo 2 – Pórtico hiperestático submetido à variação de temperatura

Seja o pórtico hiperestático mostrado na Figura 2-119, cujas barras têm módulo de elasticidade (E) igual à  $2,0 \cdot 10^7 \text{ kN/m}^2$  e coeficiente de dilatação térmica ( $\alpha$ ) de  $10^{-5}/^\circ C$ . A seção transversal dessas barras é de  $20 \text{ cm} \times 50 \text{ cm}$ . Determinar os esforços internos do pórtico devidos às deformações térmicas. Sabe-se que o pórtico foi construído à  $15^\circ C$  ( $T_g$ ).

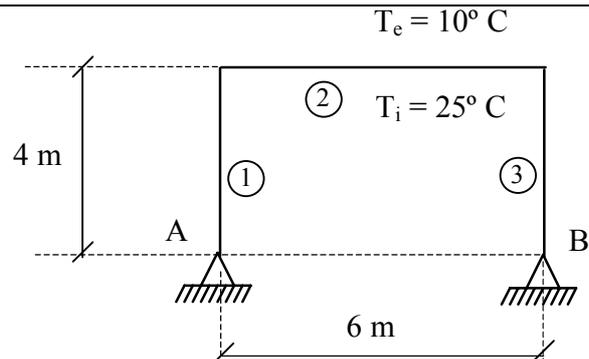


Figura 2-119: Pórtico hiperestático submetido à um gradiente de temperatura

A estrutura é uma vez hiperestática. Empregar-se-á o Método das Forças para o cálculo dos esforços. Para isso, primeiramente determina-se o sistema principal (isostático) substituindo-se um vínculo pela reação correspondente. Após, desmembra-se o carregamento externo (sistema 0 - o campo de temperatura) e o hiperestático (sistema I) (Figura 2-120).

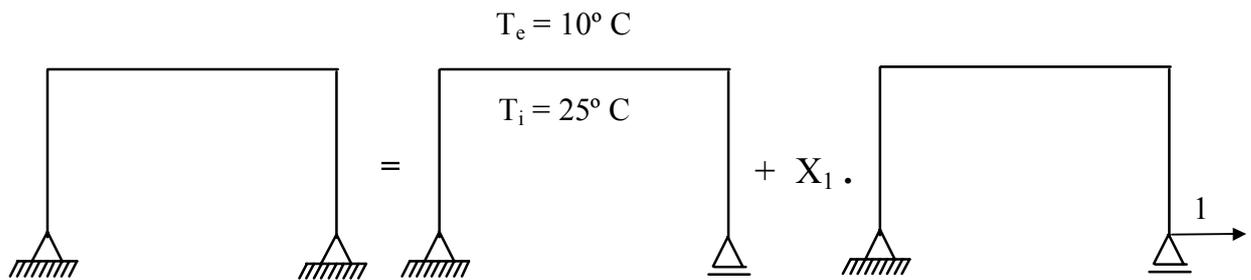


Figura 2-120: Superposição dos efeitos

Calcula-se o deslocamento na direção 1 (do hiperestático  $X_1$ ) devido ao carregamento externo (Sistema 0 - variação de temperatura). Este deslocamento já foi calculado no Exemplo 1 (item 2.3.2), sendo igual a

$$\delta_{10} = 1,215 \times 10^{-5} \text{ m} . \quad (2.162)$$

Em seguida, calcula-se o deslocamento na direção 1 devido à carga unitária na direção 1 (Figura 2-121a)

$$\delta_{11} = \int \frac{N_1 \cdot N_1}{EA} dx + \int \frac{M_1 \cdot M_1}{EI} dx , \quad (2.163)$$

sendo  $N_1$  e  $M_1$  os esforços normal (Figura 2-121b) e fletor (Figura 2-121c) devidos à carga unitária.

Dos dados do problema, tira que

$$A = (0,2 \text{ m}) \cdot (0,5 \text{ m}) = 0,1 \text{ m}^2 ,$$

$$I = \frac{(0,2 \text{ m}) \cdot (0,5 \text{ m})^3}{12} = 0,0021 \text{ m}^2,$$

$$EA = 2 \cdot 10^6 \text{ kN e}$$

$$EI = 4,17 \cdot 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2.$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EA}(1 \cdot 1 \cdot 6 \text{ m}) + \frac{1}{EI} \left[ 2 \cdot \left( \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \text{ m} \right) + 4 \cdot 4 \cdot 6 \text{ m} \right] = 33,31 \times 10^{-3} \text{ m/kN}, \quad (2.164)$$

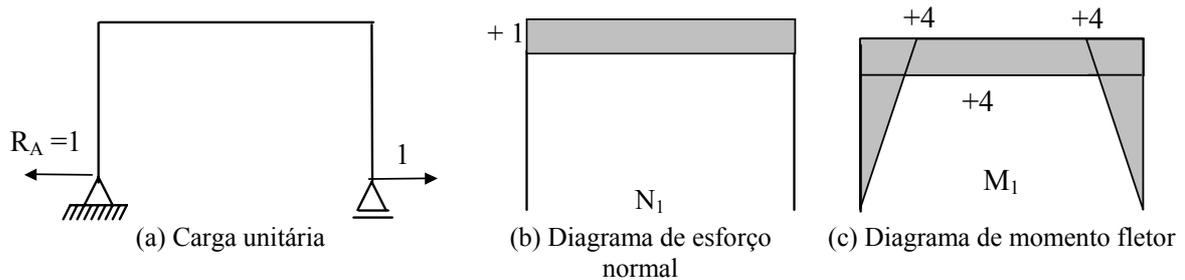


Figura 2-121: Carga unitária e seus esforços normal e fletor

A equação de compatibilidade é dada por

$$\delta_{10} + X_1 \cdot \delta_{11} = 0, \quad (2.165)$$

$$12,15 \cdot 10^{-3} + 33,31 \cdot 10^{-3} \cdot X_1 = 0,$$

$$X_1 = -0,365 \text{ kN}. \quad (2.166)$$

As reações e os esforços nas barras podem ser calculados empregando-se o princípio da superposição dos efeitos.

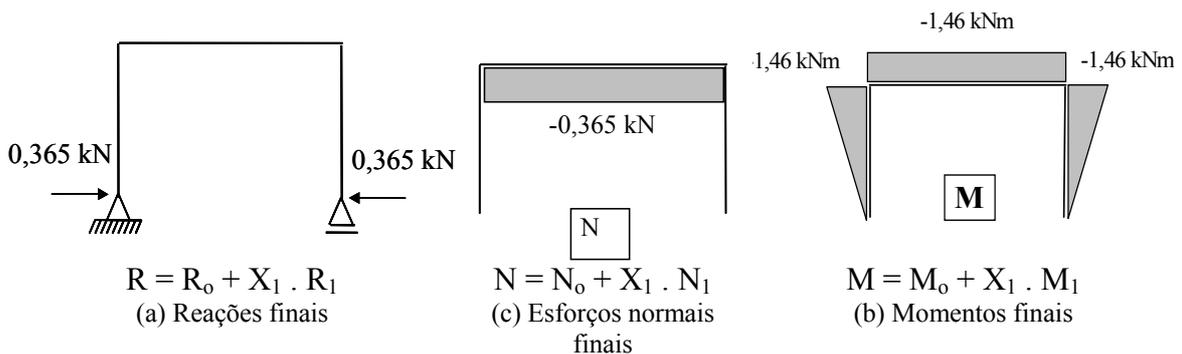


Figura 2-122: Reações e esforços finais no pórtico

### 3. MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS OU MÉTODO DA RIGIDEZ

#### 3.1. INTRODUÇÃO

Neste método determinam-se inicialmente os deslocamentos e indiretamente, a partir destes, os esforços; as incógnitas são os deslocamentos.

O método pode ser usado para analisar qualquer estrutura, isostática ou hiperestática. A única estrutura que não pode ser resolvida por este método é a viga bi-engastada.

No caso de estruturas reticuladas, que são formadas por barras ligadas por pontos nodais denominados “nós”, o número de incógnitas será o número de deslocamentos nodais ou o número total de “graus de liberdade” (GL) de todos os nós da estrutura.

Define-se grau de liberdade de um nó a direção possível deste se deslocar. No caso de estruturas planas, no plano XY (Figura 3-1a), existem três direções possíveis de deslocamento para cada nó: translação paralela ao eixo X; translação paralela ao eixo Y e rotação em torno do eixo Z (Figura 3-1b).

Em uma extremidade livre, assim como numa extremidade ligada a um vínculo, também existe um nó.

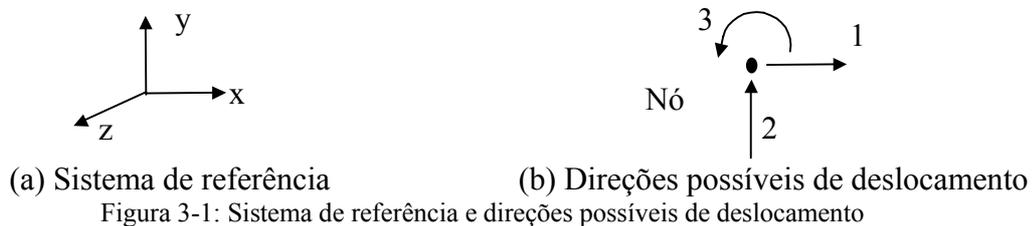


Figura 3-1: Sistema de referência e direções possíveis de deslocamento

No caso de vigas, não serão considerados deslocamentos axiais, portanto cada nó terá apenas 2GL: translação paralela ao eixo Y (1) e rotação em torno do eixo Z (2) (Figura 3-2).

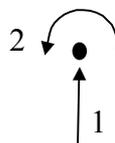


Figura 3-2: Graus de liberdade de uma viga

Quando existirem forças horizontais aplicadas nas vigas, estas serão modeladas como pórtico plano.

O método consiste em inicialmente fixar a estrutura, introduzindo-se vínculos fictícios, tornando a estrutura cinematicamente determinada. Consideram-se as cargas

aplicadas nas barras e calculam-se os esforços causados pelas cargas para a estrutura fixa (sistema principal).

Impõem-se em seguida os deslocamentos nos nós e calculam-se os esforços decorrentes destes na estrutura. Por superposição de efeitos calculam-se os esforços totais que devem estar em equilíbrio com as forças externas aplicadas nos nós. Chega-se a um sistema de equações de equilíbrio de forças em torno dos nós da estrutura.

Para estruturas reticuladas, o único sistema principal possível é obtido pela fixação de todos os nós. É por isto que este método é mais conveniente para utilização em programas computacionais de que o Método das Forças.

### 3.1.1. Exemplo - Pórtico plano

O pórtico da Figura 3-3a apresenta 6 graus de liberdade, enquanto o da Figura 3-3b apresenta 10 graus de liberdade.

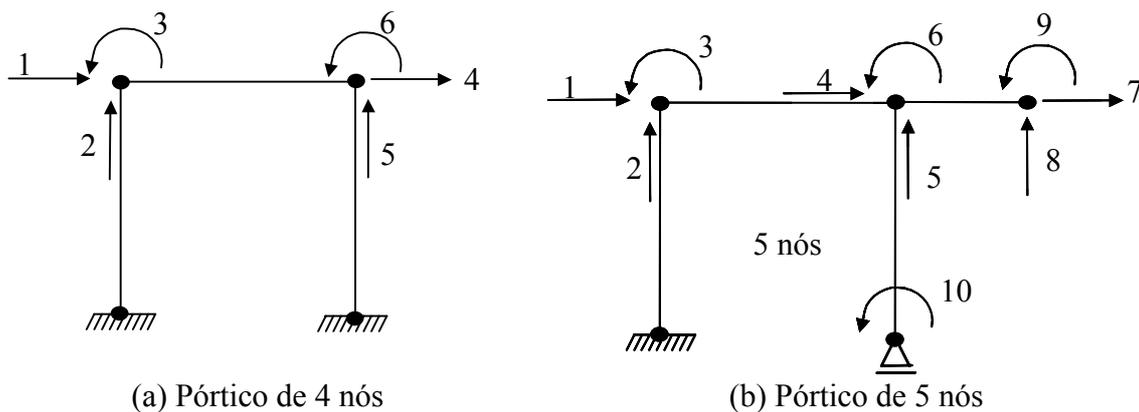


Figura 3-3: Pórticos planos

## 3.2. VIGAS -SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE

### 3.2.1. Exemplo 1 - Viga engastada-apoiada

Seja a viga engastada-apoiada de rigidez à flexão  $EI$  mostrada na Figura 3-4a. Esta viga apresenta apenas um grau de liberdade, a rotação em B ( $\theta_B$ ) (Figura 3-4b). As vigas de maneira geral apresentam 2 graus de liberdade por nó.



(a) Viga engastada-apoiada (b) Deformada da viga engastada-apoiada

Figura 3-4: Viga engastada-apoiada e sua deformada

Primeiramente fixa-se a estrutura e calculam-se os esforços de engastamento perfeito. Calcula-se, para a estrutura fixa, o esforço (momento) que surge na barra na direção do GL devido ao carregamento externo (Figura 3-5).

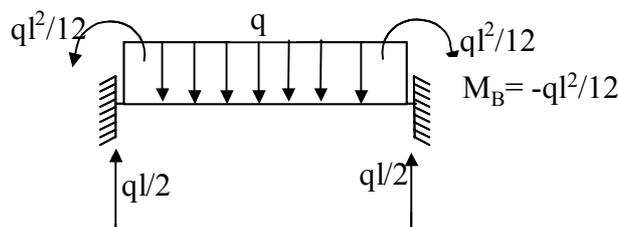


Figura 3-5: Esforços devidos ao carregamento externo

Em seguida, impõe-se o deslocamento  $\theta_B$  no nó e calculam-se os esforços correspondentes. Como na verdade a estrutura não é fixa, o nó B sofre um deslocamento  $\theta_B$ . Impõe-se este deslocamento no nó e calcula-se o esforço correspondente na barra, na direção do GL (Figura 3-6). Este esforço será proporcional ao deslocamento imposto ( $\theta_B$ ) proporcionalidade esta dada pelo coeficiente de rigidez da barra ( $\frac{4EI}{l}$ ).

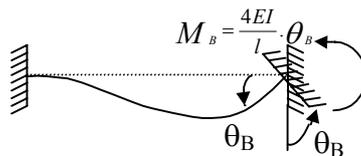


Figura 3-6: Esforço devido ao deslocamento  $\theta_B$  imposto

Finalmente efetua-se o equilíbrio de forças em torno do nó B. Por superposição de efeitos calcula-se o esforço total na extremidade da barra e iguala-se à força (momento) aplicada no nó

$$-\frac{ql^2}{12} + \frac{4EI}{l} \cdot \theta_B = 0. \quad (3.1)$$

Resolvendo-se esta equação, cuja incógnita é  $\theta_B$ , obtém-se:

$$\theta_B = \frac{l}{4EI} \cdot \frac{ql^2}{12}.$$

$$\theta_B = \frac{ql^3}{48EI}$$

De uma maneira geral, pode-se escrever a equação de equilíbrio de forças:

$$F_{EP} + S \cdot d = F_{no} = A \quad (3.2)$$

sendo  $F_{EP}$  o esforço de engastamento perfeito;  $S$  o coeficiente de rigidez;  $d$  o deslocamento e  $A$  a ação (força ou binário) aplicada no nó.

Para sistematizar o Método dos Deslocamentos, ao invés de se impor os deslocamentos reais, impõem-se deslocamentos unitários na direção dos GL. Para  $d_1 = 1$  tem-se  $M_B = \frac{4EI}{1} = S_{11}$  (Figura 3-7). Logo, para  $d_1 = \theta_B$  tem-se  $M_B = \frac{4EI}{1} \cdot \theta_B$  ou  $M_B = S_{11} \cdot \theta_B = S_{11} \cdot d_1$ , onde  $S_{11}$  representa o esforço na barra na direção  $\underline{1}$  causado por um deslocamento unitário na direção  $\underline{1}$ .



Figura 3-7: Esforço na barra causado por um deslocamento unitário

De uma maneira geral, tem-se para um grau de liberdade a seguinte equação de equilíbrio de forças na direção 1:

$$F_{EP1} + S_{11} \cdot d_1 = A_1 \quad (3.3)$$

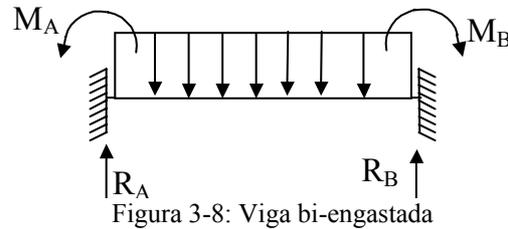
Como será visto mais adiante, para muitos graus de liberdade encontra-se um sistema de equações de equilíbrio de forças:

$$\{F_{EP}\} + [S] \cdot \{D\} = \{A\} \quad (3.4)$$

onde  $\{F_{EP}\}$  é o vetor de esforços de engastamento perfeito;  $[S]$  é a matriz de rigidez da estrutura;  $\{D\}$  é o vetor de deslocamentos nodais e  $\{A\}$  é o vetor de ações nodais. Cada coeficiente  $S_{ij}$  da matriz de rigidez (onde:  $i$  = efeito,  $j$  = causa), representa o esforço na barra na direção ou GL  $i$ , causado por um deslocamento unitário na direção ou grau de liberdade  $j$ .

### 3.3. VIGAS - ESFORÇOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO

Os esforços de engastamento perfeito podem ser encontrados pelo Método das Forças. Seja o exemplo da viga bi-engastada com carga distribuída (Figura 3-8). Têm-se 4 incógnitas (desprezando esforço axial) e 2 equações de equilíbrio estático ( $g_e = 2$ ).



O sistema principal está mostrado na Figura 3-9, e, por simetria, obtém-se que  $X_1 = X_2$ .

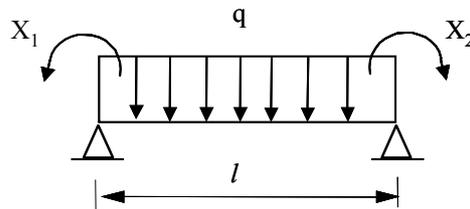


Tabela 3-1: Tabela de diagramas de momentos fletores

 Situação 0 ( $M_0$ ) (a)	 Situação 1 ( $M_1$ ) (b)	 Situação 2 ( $M_2$ ) (c)
---------------------------------	---------------------------------	---------------------------------

Efetuando-se a combinação dos diagramas de momentos fletores da Tabela 3-1, obtêm-se

$$EI\delta_{10} = EI\delta_{20} = -\frac{1}{3} \cdot l \cdot \frac{ql^2}{8} = -\frac{ql^3}{24},$$

$$EI\delta_{11} = EI\delta_{22} = \frac{1}{3}l \text{ e}$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = \frac{1}{6}l.$$

As equações de compatibilidade são dadas por

$$\delta_1 = \delta_{10} + \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 = 0 \text{ e} \quad (3.5)$$

$$\delta_2 = \delta_{20} + \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 = 0. \quad (3.6)$$

Substituindo-se os coeficientes  $\delta_{ij}$  nas equações de compatibilidade 3.5 e 3.6, chega-se ao sistema de equações:

$$\frac{l}{3}X_1 + \frac{l}{6}X_2 = \frac{ql^3}{24} \text{ e}$$

$$\frac{l}{6}X_1 + \frac{l}{3}X_2 = \frac{ql^3}{24}$$

Resolvendo, tem-se que  $X_2 = \frac{ql^2}{12} = X_1$ . (3.7)

Portanto os esforços de engastamento perfeito são os indicados na Figura 3-10. Existem tabelas de esforços de engastamento perfeito para barras bi-engastadas submetidas a vários tipos de carregamento (que podem ser consultadas diretamente).

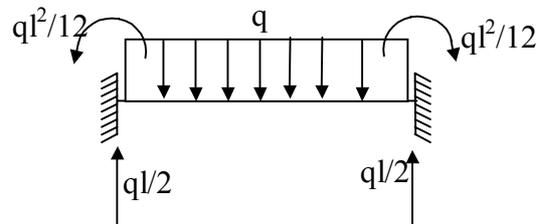


Figura 3-10: Esforços de engastamento perfeito

### 1.3. VIGAS - COEFICIENTES DE RIGIDEZ

Os coeficientes de rigidez podem também ser encontrados pelo Método das Forças, impondo-se deslocamentos unitários nos graus de liberdade.

Seja por exemplo o caso da viga engastada e apoiada vista no item 3.2.1, onde se deseja encontrar o coeficiente  $S_{11}$  (esforço na extremidade da barra na direção ou grau de liberdade 1 causado por um deslocamento unitário imposto na direção 1 ). Fixa-se a estrutura e impõe-se um deslocamento unitário no grau de liberdade 1 Figura 3-11. A Figura 3-11 mostra o sistema principal, estrutura fixa (que é duas vezes hiperestática) com  $d_1 = 1$ .

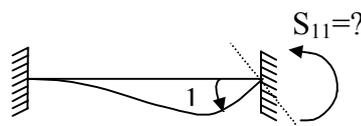


Figura 3-11: Viga engastada-apoiada e seu sistema principal

Pelo Método das Forças, eliminando-se os vínculos excedentes na viga acima, obtém-se o sistema principal (Figura 3-12), cujas condições de compatibilidade são  $\delta_1 = 1$  e  $\delta_2 = 0$ .

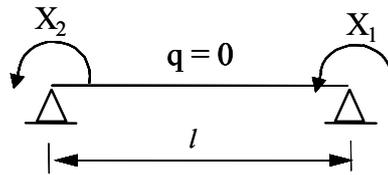


Figura 3-12

O diagrama de momento devido ao carregamento externo ( $q = 0$ ) é nulo. O diagrama de momentos devido ao momento unitário na direção do hiperestático  $X_1$  está mostrado na Figura 3-13 (situação 1) e o diagrama de momentos devido ao momento unitário na direção do hiperestáticos  $X_2$  (situação 2) está mostrado na Figura 3-14.

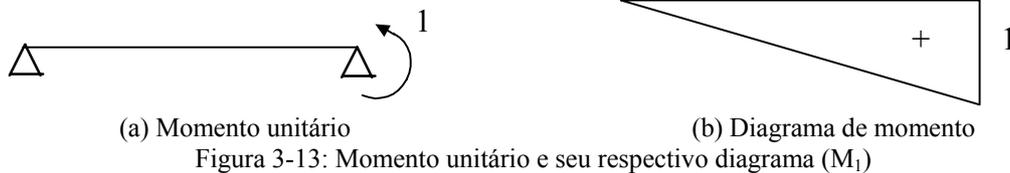


Figura 3-13: Momento unitário e seu respectivo diagrama ( $M_1$ )

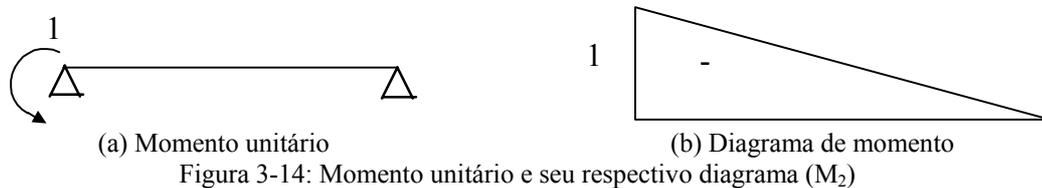


Figura 3-14: Momento unitário e seu respectivo diagrama ( $M_2$ )

A partir dos diagramas de momentos mostrados nas Figura 3-13 e Figura 3-14, calculam-se os deslocamentos generalizados

$$EI\delta_{10} = EI\delta_{20} = 0$$

$$EI\delta_{11} = EI\delta_{22} = \frac{1}{3} \cdot l$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = -\frac{1}{6} \cdot l$$

Das condições de compatibilidade, obtém-se o sistema de equações

$$\begin{cases} EI(\delta_{10} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12}) = EI\delta_1 = EI \cdot 1 = EI \\ EI(\delta_{20} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22}) = EI\delta_2 = EI \cdot 0 = 0 \end{cases} \quad (3.8)$$

Substituindo-se os coeficientes  $\delta_{ij}$  encontrados nas equações de compatibilidade (3.8), chega-se ao sistema de equações (3.9), cuja solução é dada pelas equações 3.10 e 3.11.

$$\begin{cases} \frac{l}{3} X_1 - \frac{l}{6} X_2 = EI \\ -\frac{l}{6} X_1 + \frac{l}{3} X_2 = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

$$X_1 = \frac{4EI}{l} \text{ e} \quad (3.10)$$

$$X_2 = \frac{2EI}{l}. \quad (3.11)$$

Portanto o coeficiente de rigidez é  $S_{11} = X_1 = \frac{4EI}{l}$ . O esforço na extremidade da barra é igual à reação no engaste e observa-se que na outra extremidade o esforço é a metade.

### 3.4. VIGAS - SISTEMA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

#### 3.4.1. Exemplo 1 - Viga contínua

Seja a viga contínua mostrada na Figura 3-15, com dois graus de liberdade  $d_1, d_2$  (não considerando deslocamento horizontal).

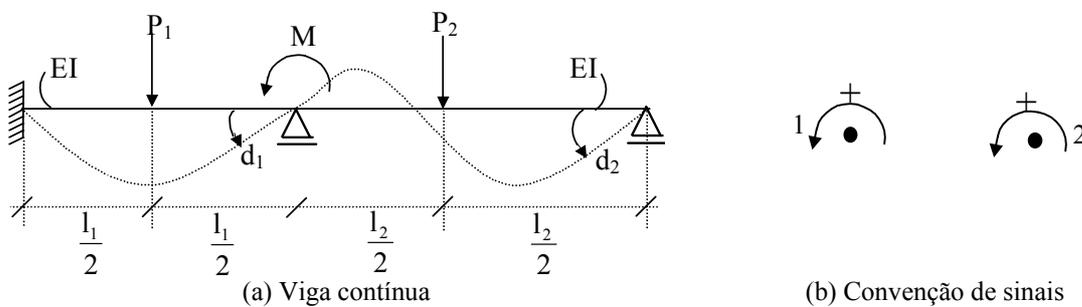


Figura 3-15: Viga contínua

Aplicando-se o Princípio de Superposição de Efeitos, inicialmente fixa-se a estrutura, aplicam-se as cargas nas barras e calculam-se os esforços de engastamento perfeito (situação 0). Usando-se as tabelas de esforços de engastamento perfeito, obtêm-se  $F_{EP1}$  e  $F_{EP2}$  (Figura 3-16).

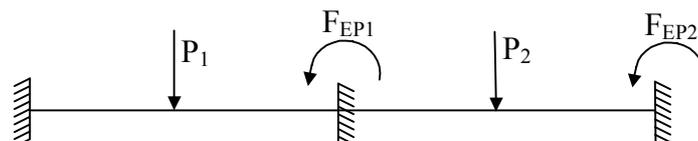


Figura 3-16: Momentos de engastamento perfeito

Em seguida impõe-se um deslocamento unitário no grau de liberdade 1 ( $d_1 = 1$  e  $d_2 = 0$ ). Encontram-se os esforços correspondentes, que são os coeficientes de rigidez  $S_{11}$  no GL1 e  $S_{21}$  no GL2 (Figura 3-17),

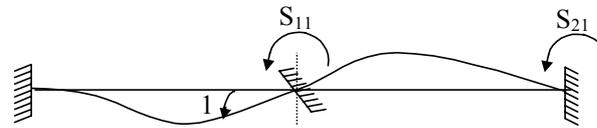


Figura 3-17: Deslocamento unitário em 1

e impõe-se um deslocamento unitário no GL2 ( $d_1 = 0$  e  $d_2 = 1$ ). Encontram-se os esforços correspondentes, que são os coeficientes de rigidez  $S_{12}$  no GL1 e  $S_{22}$  no GL2 (Figura 3-18)

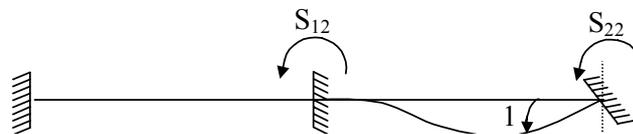


Figura 3-18: Deslocamento unitário em 2

Por equilíbrio, a soma dos esforços em um nó em uma certa direção ou GL tem que ser igual à ação aplicada neste mesmo nó na mesma direção. No grau de liberdade 1, tem-se

$$F_{EP1} + S_{11} \cdot d_1 + S_{12} \cdot d_2 = A_1 = M . \quad (3.12)$$

Analogamente, no grau de liberdade 2, tem-se

$$F_{EP2} + S_{21} \cdot d_1 + S_{22} \cdot d_2 = A_2 = 0 . \quad (3.13)$$

Este sistema de 2 equações e 2 incógnitas pode ser escrito matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} F_{EP1} \\ F_{EP2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ ou} \quad (3.14)$$

$$\{F_{EP}\} + [S] \cdot \{D\} = \{A\}, \quad (3.15)$$

onde  $\{F_{EP}\}$  é o vetor de esforços de engastamento perfeito;  $[S]$  é a matriz de rigidez da estrutura;  $\{D\}$  é o vetor de deslocamentos nodais e  $\{A\}$  é o vetor de ações nodais ou ações externas aplicadas diretamente nos nós (forças ou binários). O produto  $[S] \{D\}$  equivale aos esforços internos causados pelos deslocamentos nos nós, e a soma  $\{F_{EP}\} + [S] \{D\}$  é o total de esforços internos, que devem estar em equilíbrio com as ações externas.

Resolvendo-se o sistema de equações 3.15 obtém-se o vetor de deslocamentos nodais  $\{D\}$ :

$$[S] \cdot \{D\} = \{A\} - \{F_{EP}\}$$

$$\{D\} = [S]^{-1} \cdot \{A - F_{EP}\} \quad (3.16)$$

Se a estrutura for isostática ou hiperestática, a matriz  $[S]$  poderá ser invertida sempre, logo, do sistema de equações obtém-se  $\{D\}$ . Se a estrutura for hipostática, a matriz  $[S]$  será singular ( $\det [S] = 0$ ) e o sistema de equações não terá solução.

### 3.4.2. Exemplo 2

Seja a viga contínua mostrada abaixo na Figura 3-19, cuja rigidez à flexão ( $EI$ ) das barras é constante e igual a  $72 \times 10^3 \text{ kNm}^2$ . Trata-se de um sistema de 2 graus de liberdade, conforme mostra a Figura 3-20a, submetido às ações nodais, mostradas na Figura 3-20b.

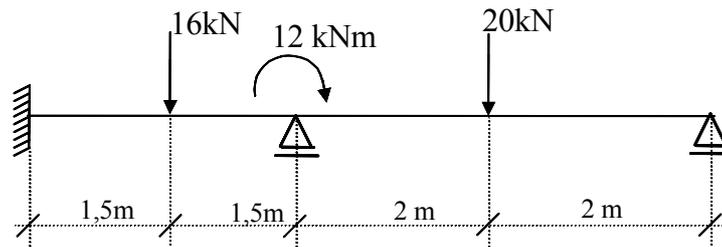


Figura 3-19: Viga contínua

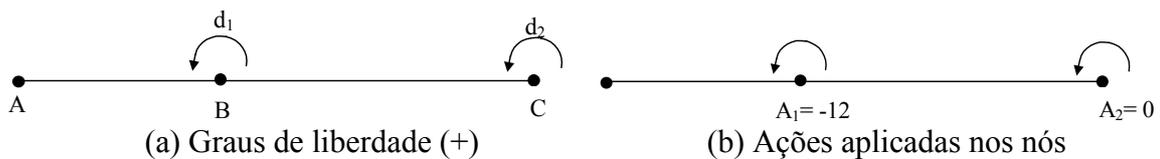


Figura 3-20: Graus de liberdade e ações aplicadas nos nós

Fixa-se a estrutura, aplicam-se as cargas nas barras (Figura 3-21) e encontram-se os esforços de engastamento perfeito (Figura 3-22).

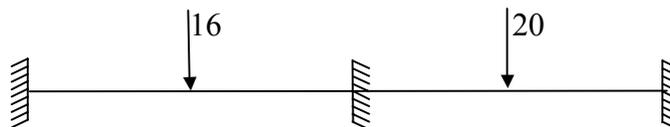


Figura 3-21: Sistema principal

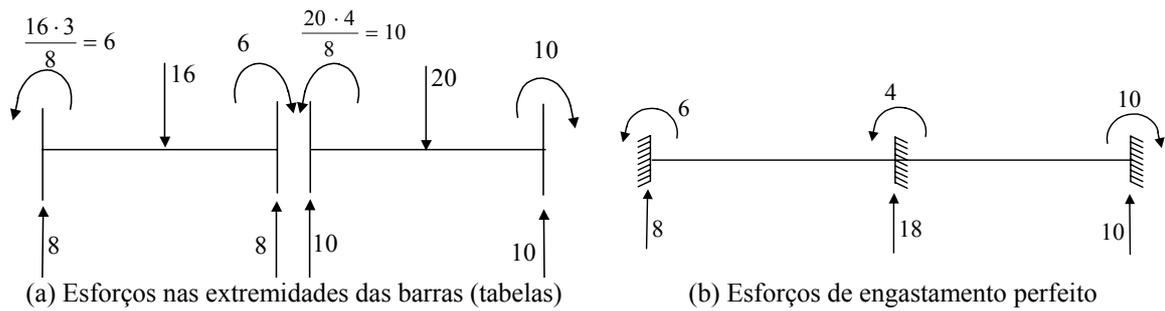


Figura 3-22: Esforços de engastamento perfeito

Momentos de engastamento perfeito nos GL 1 e 2:  $\overset{+}{\curvearrowright} F_{EP1} = 4$  e  $F_{EP2} = -10$ .

$\therefore \{F_{EP}\} = \begin{Bmatrix} 4 \\ -10 \end{Bmatrix}$ .

Aplica-se em seguida  $d_1 = 1$  ( $d_2 = 0$ ) e encontram-se os esforços correspondentes (Figura 3-23).

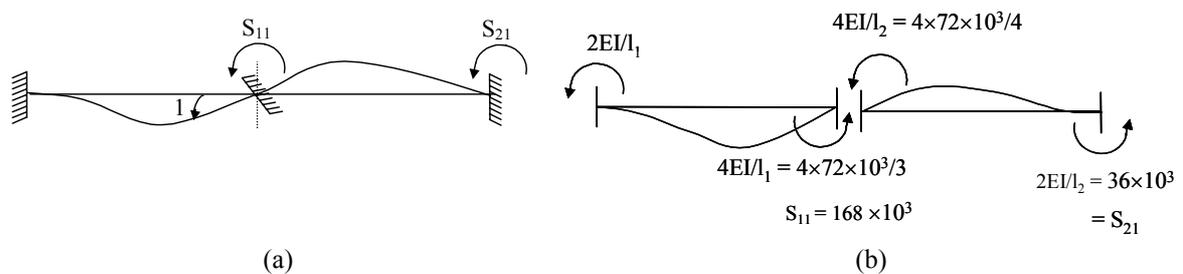


Figura 3-23

Aplica-se após  $d_2 = 1$  ( $d_1 = 0$ ) e encontram-se os esforços correspondentes (Figura 3-24)

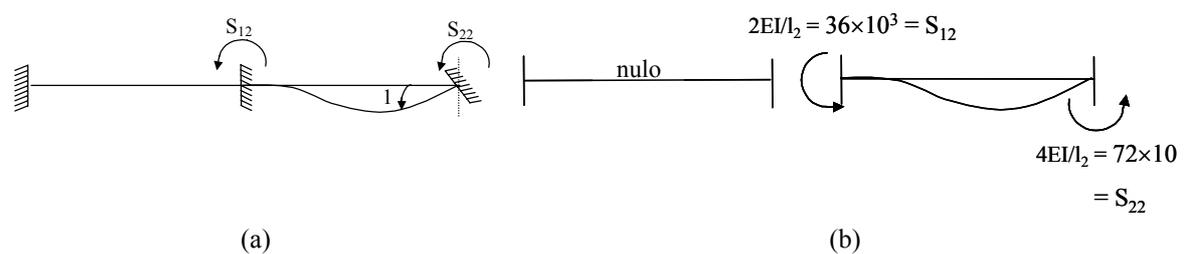


Figura 3-24

Aplicando-se superposição de efeitos, escreve-se o sistema de equações de equilíbrio de forças para os nós. No nó B (grau de liberdade 1) tem-se que:

$$F_{EP1} + S_{11} \cdot d_1 + S_{12} \cdot d_2 = A_1 \quad (3.17)$$

e no nó C (grau de liberdade 2):

$$F_{EP2} + S_{21} \cdot d_1 + S_{22} \cdot d_2 = A_2 \quad (3.18)$$

Ou, matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} F_{EP1} \\ F_{EP2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad (3.19)$$

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ -10 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 168 & 36 \\ 36 & 72 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12 \\ 0 \end{Bmatrix}. \quad (3.20)$$

ou

$$\begin{bmatrix} 168 & 36 \\ 36 & 72 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12 - 4 \\ 0 + 10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,14 \times 10^{-3} \\ 0,21 \times 10^{-3} \end{Bmatrix}. \quad (3.21)$$

A partir dos deslocamentos nodais  $d_1$  e  $d_2$ , pode-se encontrar os esforços nas barras multiplicando-se os coeficientes de rigidez de cada barra pelos deslocamentos sofridos nas suas extremidades e somando-se o resultado com os esforços de engastamento perfeito nas extremidades das barras. As reações de apoio também podem ser calculadas a partir dos deslocamentos nodais, conforme será visto mais adiante.

Neste exemplo, a estrutura foi considerada globalmente. Entretanto, fica mais fácil dividir a estrutura em elementos e tratar cada elemento separadamente, formando-se depois o sistema de equações de equilíbrio da estrutura, levando em conta a contribuição de todos os elementos, como será visto no item 3.7.

### 3.5. TRELIÇAS – SISTEMA DE UM GRAU DE LIBERDADE

#### 3.5.1. Exemplo – Barra de material homogêneo e seção transversal constante submetida à carga axial

Seja uma barra discretizada por um elemento de treliça, que coincide com o eixo longitudinal da barra, com 2 nós na extremidade (Figura 3-25). Como a barra é fixa à esquerda, o deslocamento horizontal do nó 2 é nulo,  $u_2 = 0$ . O sistema fica reduzido, portanto a um sistema com apenas 1 grau de liberdade (GL), o deslocamento horizontal do nó 1,  $u_1$ .

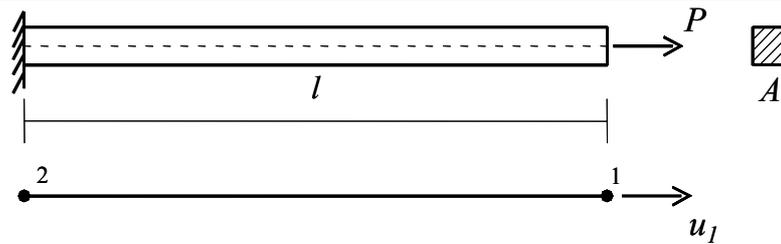


Figura 3-25: Barra de seção transversal constante

Em analogia a uma mola elástica de rigidez  $k$ , deve-se ter que a força aplicada  $P$  é proporcional ao deslocamento  $u_1$ , sendo esta proporcionalidade dada pela rigidez axial da barra ou do elemento (Figura 3-26). pode-se então escrever a equação de equilíbrio de forças para o nó 1, na direção 1:

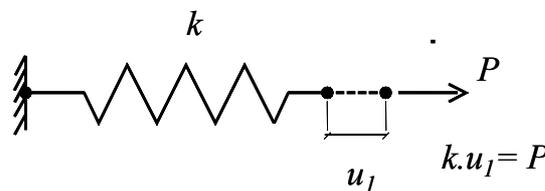


Figura 3-26

Supondo conhecida a rigidez axial da barra, que é o inverso da flexibilidade, sendo esta obtida, por exemplo, a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$k = \frac{EA}{l} \quad (3.22)$$

Pode-se obter então a solução da equação de equilíbrio de forças para este sistema de 1 GL:

$$u_1 = \frac{P}{k} = \frac{Pl}{EA} \quad (3.23)$$

### 3.6. TRELIÇAS – SISTEMA DE DOIS GRAUS DE LIBERDADE

#### 3.6.1. Exemplo - Barra composta de duas hastes de materiais, comprimentos e seções diferentes submetida à carga axial

Seja agora uma barra composta de duas hastes, de materiais, comprimentos, e seções diferentes (Figura 3-27).

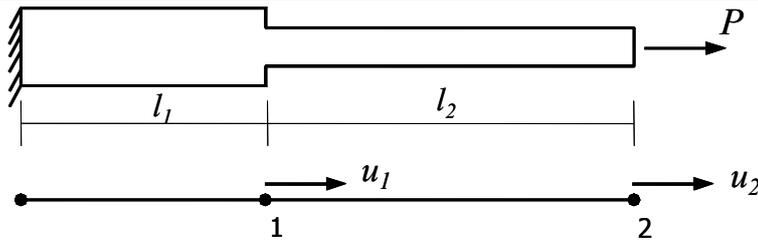


Figura 3-27

Esta estrutura pode ser idealizada pela associação de dois elementos de treliça de rigidez diferente,  $k_1$  e  $k_2$ , interligados por nós, o que corresponde a um sistema discreto de três pontos materiais ligados por duas molas elásticas diferentes (Figura 3-28)

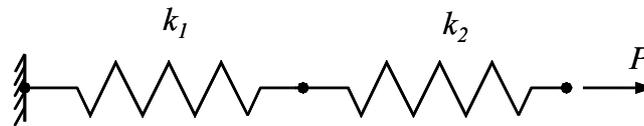


Figura 3-28

Sendo as constantes elásticas das molas

$$k_1 = \frac{E_1 A_1}{l_1} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{E_2 A_2}{l_2} \quad (3.24)$$

Como a extremidade à esquerda é fixa, trata-se de um problema de 2 graus de liberdade, ( $u_1$  e  $u_2$ ). As equações de equilíbrio de forças em torno dos nós da estrutura resultam em um sistema de 2 equações e 2 incógnitas, de tal forma que pode-se escrever

$$\begin{cases} S_{11} u_1 + S_{12} u_2 = A_1 = 0 \\ S_{21} u_1 + S_{22} u_2 = A_2 = P \end{cases} \quad (3.25)$$

ou então, sob a forma matricial:

$$[S] \cdot \{D\} = \{A\} \quad (3.26)$$

A matriz de rigidez da estrutura  $[S]$  pode ser obtida da seguinte maneira. Impõem-se os deslocamentos  $u_1 = 1$  e  $u_2 = 0$  à estrutura (Figura 3-29), obtendo-se assim os coeficientes  $S_{11} = k_1 + k_2$  e  $S_{21} = -k_2$ .

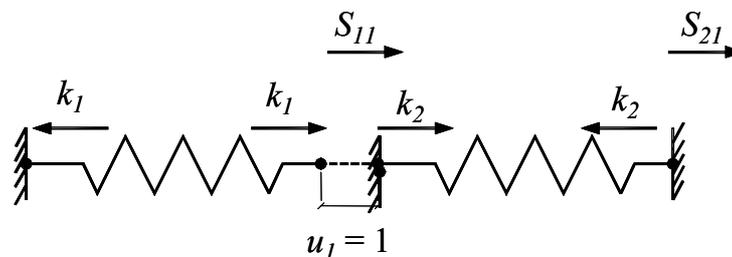


Figura 3-29

Impõem-se em seguida os deslocamentos  $u_1 = 0$  e  $u_2 = 1$  à estrutura (Figura 3-30), obtendo-se assim os coeficientes  $S_{12} = -k_2$  e  $S_{22} = k_2$ .

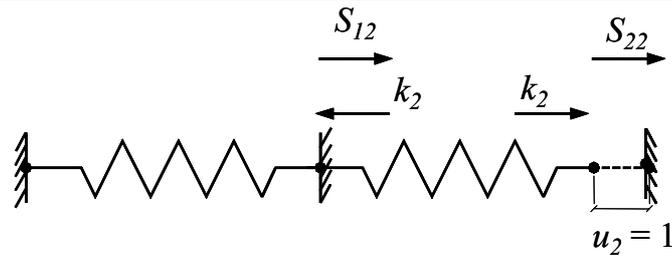


Figura 3-30

Substituindo-se os coeficientes  $S_{ij}$  no sistema de equações de equilíbrio de forças, vem

$$\begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ P \end{Bmatrix}. \quad (3.27)$$

Resolvendo-se o sistema de equações (3.27), obtêm-se as incógnitas do problema,  $u_1$  e  $u_2$ .

Para estruturas compostas de muitas barras, em vez de se tratar a estrutura globalmente, como neste exemplo, divide-se a estrutura em elementos. As matrizes de rigidez de cada elemento são calculadas então isoladamente e, a partir destas, obtêm-se a matriz de rigidez da estrutura, somando-se os coeficientes correspondentes aos mesmos graus de liberdade. Para uma estrutura com um total de  $n$  graus de liberdade, o sistema de equações de equilíbrio da estrutura será  $n \times n$ .

### 3.7. DIVISÃO EM ELEMENTOS – SISTEMA DE COORDENADAS

As estruturas reticuladas são divididas em elementos ligados entre si por pontos nodais denominados nós, aonde se supõem concentradas todas as forças de ligação entre elementos. As ações e deslocamentos são discretizados nos nós e a composição destes elementos para constituir a estrutura resulta em um sistema de equações algébricas que é tratado matricialmente.

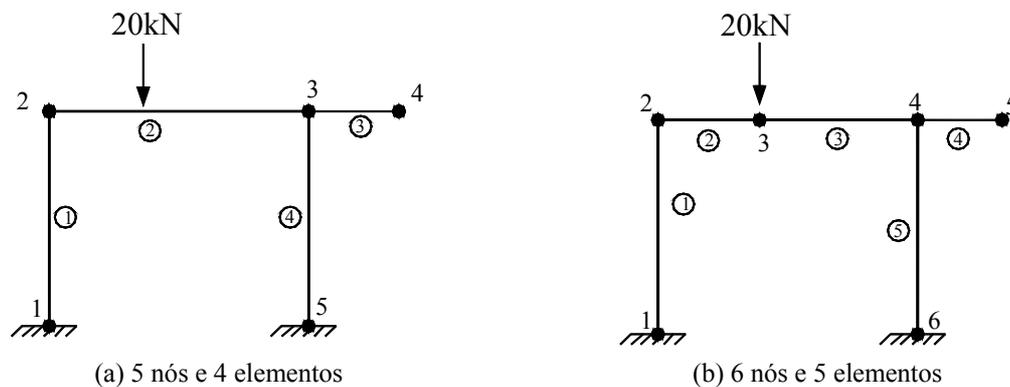
No caso do método dos deslocamentos, estas equações são equações de equilíbrio de forças em torno dos nós. Uma estrutura com  $N$  nós, em que cada nó tem  $M$  graus de liberdade (GL), resultará em um sistema de  $N \times M$  equações algébricas, incluindo-se as direções restringidas por vínculos.

### 3.7.1. Modelagem - Algumas considerações sobre divisão da estrutura em elementos

Cada elemento é representado por uma linha reta, que coincide com o eixo da barra, ligando 2 nós que não podem ocupar a mesma posição no espaço.

Uma extremidade livre, assim como uma extremidade vinculada a um apoio também é considerada um nó.

A noção de nó pode ser generalizada quando for conveniente, dividindo-se uma barra em dois elementos separados por um nó fictício. Deve-se criar um nó fictício sempre que houver descontinuidade de tipo de material ou de tipo de seção de barra. Pode-se também criar um nó fictício sob uma carga concentrada, conforme mostra o exemplo abaixo, mas não é necessário.



(a) 5 nós e 4 elementos

(b) 6 nós e 5 elementos

Figura 3-31: Exemplo para divisão em elementos para pórtico plano.

### 3.7.2. Sistema de coordenadas

Para estruturas reticuladas utiliza-se o sistema de coordenadas cartesianas. A estrutura é definida em relação a um sistema global de coordenadas  $(X,Y,Z)$  e os elementos em relação a um sistema local  $(x,y,z$  ou  $x_L, y_L, z_L)$ . Os três eixos cartesianos são perpendiculares entre si e formam um sistema destrógiro (satisfazem a regra da mão direita). No sistema local, o eixo local  $x$  (ou  $x_L$ ) coincide com o eixo longitudinal da barra passando pelo centróide da seção e o sentido positivo deste eixo é definido pela incidência dos nós no elemento (do nó inicial para o nó final), conforme mostra a figura para um exemplo de pórtico plano (Figura 3-32). Em geral o eixo vertical da seção é denominado eixo  $y$  (ou  $y_L$ ) e o horizontal eixo  $z$  (ou  $z_L$ ).

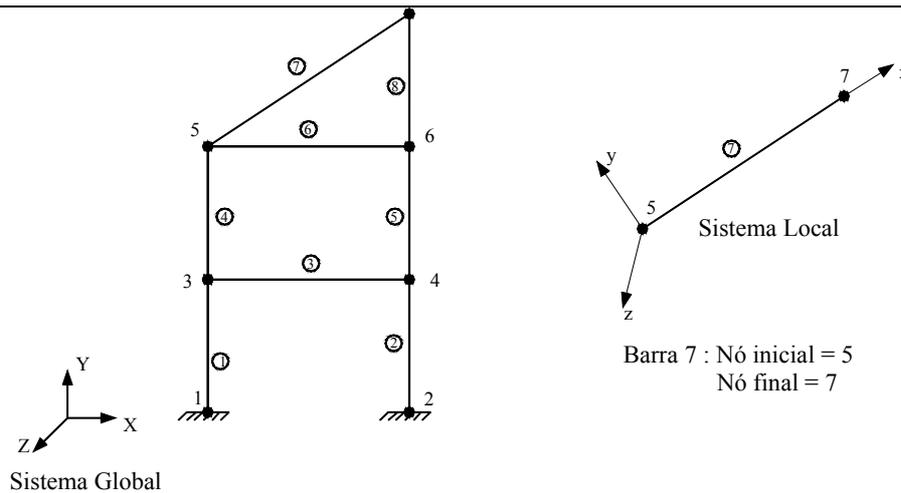


Figura 3-32: Sistemas global e local de coordenadas de um pórtico plano

### 3.7.3. Graus de liberdade

Com relação ao sistema de coordenadas globais, definem-se os graus de liberdade de cada nó da estrutura: translação paralela ao eixo X (UX); translação paralela ao eixo Y (UY); translação paralela ao eixo Z (UZ); rotação em torno do eixo X (RX); rotação em torno do eixo Y (RY); Rotação em torno do eixo Z (RZ).

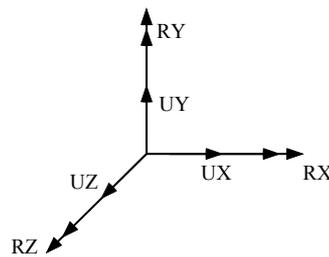


Figura 3-33: Graus de liberdade

## 3.8. TIPOS DE ESTRUTURAS RETICULADAS

Estruturas reticuladas são aquelas em que uma de suas dimensões predomina sobre as outras duas. As estruturas reticuladas podem ser classificadas em seis tipos: vigas, treliças planas, pórticos planos, treliças espaciais, grelhas e pórticos espaciais. Cada tipo apresenta características geométricas e mecânicas especiais. Quando os eixos das barras situam-se em um plano e se deformam neste mesmo plano as estruturas são classificadas de planas, caso contrário são classificadas de espaciais.

Deve-se ressaltar que para que as estruturas planas (no plano XY, por exemplo) se deformem no mesmo plano em que se situam os eixos de suas barras (x) é necessário que o eixo vertical da seção das barras (y) seja um eixo de simetria. Desta forma os eixos da

seção transversal  $(x, y)$  são eixos principais de inércia e o centróide coincide com o centro de toda seção, ou seja, se as forças aplicadas (concentradas ou distribuídas) situarem-se no plano  $XY$  (ou  $xy$ ) e os binários também atuarem no plano  $XY$ , em torno de um eixo paralelo a  $Z$ , as barras se deformarão no plano  $XY$  ou  $xy$  (deformação por flexão, axial, por cisalhamento), não haverá torção. Caso contrário, se  $y$  não for um eixo de simetria, haverá torção e a barra se deformará portanto fora do plano  $XY$ .

Nesta disciplina as barras das estruturas reticuladas serão consideradas prismáticas, ou seja, de seção transversal constante, e de eixo reto. Em geral as ligações de barras de treliças planas ou espaciais são articuladas e as ligações de barras de vigas, grelhas, pórticos planos e espaciais são rígidas, mas pode haver algumas ligações articuladas.

Os deslocamentos em uma estrutura são causados pelos efeitos acumulados das deformações de todos seus elementos conforme descrito no que se segue.

### 3.8.1. Deformações

Seja uma barra de eixo longitudinal  $x$ , comprimento  $l$  e seção transversal circular com eixos  $y$  (vertical) e  $z$  (horizontal), de material elástico-linear (módulo de elasticidade  $E$  e de cisalhamento  $G$ ) submetida aos seguintes esforços: axial paralelo ao eixo  $x$  ( $N$ ), flexão em torno do eixo  $z$  ( $M_z$ ), cortante paralelo ao eixo  $y$  ( $V_y$ ) e torção em torno do eixo  $x$  ( $T$ ).

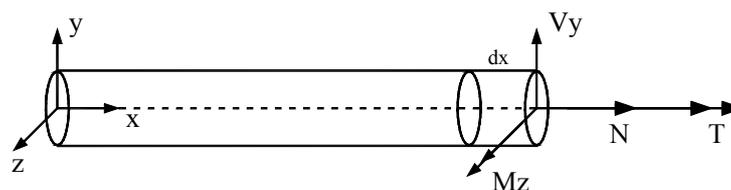


Figura 3-34

Estes esforços provocam as seguintes deformações correspondentes em um elemento infinitesimal  $dx$  da barra:

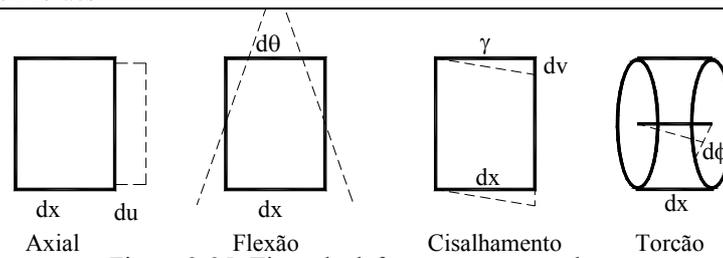
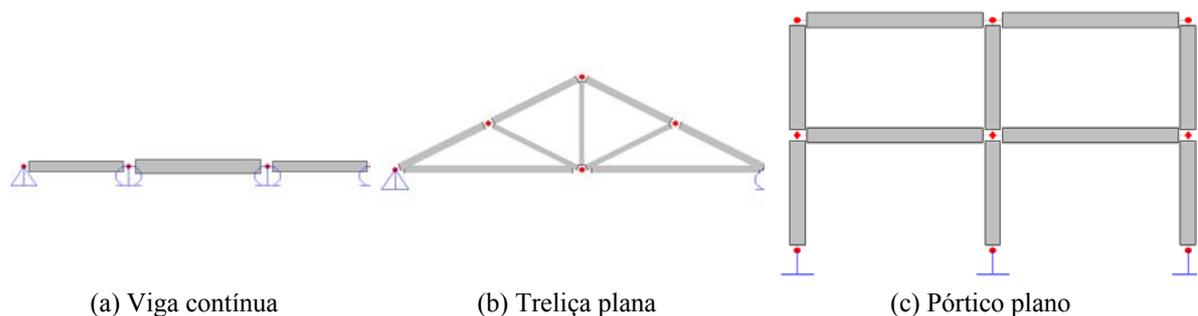


Figura 3-35: Tipos de deformação em uma barra

Nas treliças planas e espaciais haverá apenas esforço e deformação axiais se as cargas forem aplicadas diretamente nos nós, caso contrário haverá também flexão e esforço cortante, sendo que a deformação axial predomina.

No caso de vigas e pórticos planos predomina a deformação por flexão, em geral despreza-se a deformação axial em vigas. Como as barras de estruturas reticuladas são em geral longas, costuma-se desprezar as deformações por cisalhamento, mas pode-se também considerá-las no caso de vigas ou pilares-parede. Será admitido nesta disciplina que os deslocamentos sofridos pelos eixos das barras são pequenos, não havendo, portanto interação entre esforço axial e de flexão nos pórticos planos e espaciais (desprezam-se os efeitos de segunda ordem). Nas grelhas e pórticos espaciais em geral predomina também a deformação por flexão, mas em barras rígidas à torção, como as seções em caixão, a deformação por torção pode tornar-se significativa. Sendo os dois eixos da seção das barras eixos de simetria, não haverá interação entre flexão e torção.

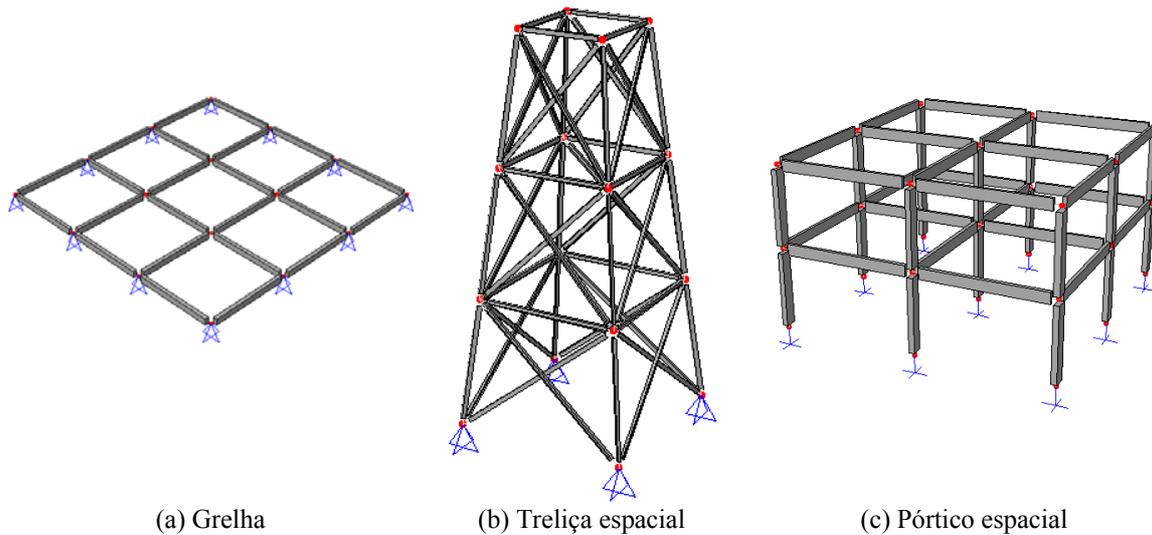
### 3.8.2. Exemplos de estruturas reticuladas planas



### 3.8.3.

Figura 3-36: Estruturas reticuladas planas

### 3.8.4. Exemplos de estruturas reticuladas espaciais



### 3.8.5. Elementos de estruturas reticuladas

#### Características – Graus de Liberdade no Sistema Local

##### 3.8.5.1. Viga

(2 GL por nó  $\rightarrow$  translação paralela a y e rotação em torno de z)

Geometria: estrutura plana em que o eixo longitudinal das barras (x) está contido no eixo XY e é sempre paralelo ao eixo X. O eixo y da seção transversal das barras deve ser um eixo de simetria de maneira a garantir que as barras não sofram torção; os eixos da seção transversal serão assim eixos principais de inércia e o centro de gravidade coincidirá com o centro de torção da seção.

Ligações: as barras são em geral rigidamente ligadas entre si.

Cargas: as forças aplicadas podem ser concentradas ou distribuídas e situam-se no plano XY (que coincide com o plano xy das barras). Os binários aplicados devem ter seus vetores-momento (seta dupla) normais ao plano XY (paralelos ao eixo Z).

Deformações: atendidas as condições acima, os elementos de viga se deformarão no plano xy, não sofrendo torção nem flexão fora do plano. As deformações per flexão predominam e no caso de vigas longas, em que a relação altura da seção(h) / comprimento do vão (l) for pequena, pode-se desprezar o efeito da força cortante. As deformações axiais não serão consideradas.

Esforços: a viga estará submetida a esforço cortante e momento fletor; não será considerado o esforço axial..

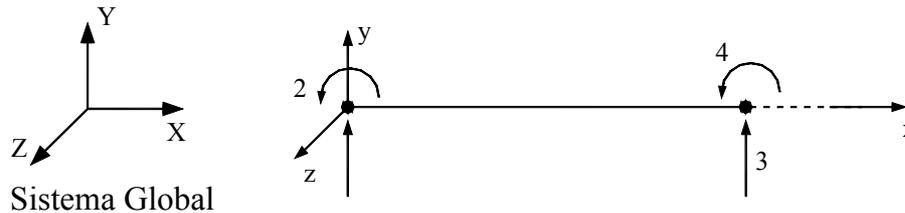


Figura 3-38: Viga

No caso da viga estar submetida a esforço axial significativo, esta deve ser tratada como pórtico plano

### 3.8.5.2. Treliça Plana

$2 GL/ \text{nó} \rightarrow$  translação paralela a x e a y

*Geometria:* estrutura plana em que o eixo longitudinal das barras (x) está contido no plano XY e pode ter uma orientação arbitrária em relação ao eixo X.

*Ligações:* as barras são articuladas, ou seja, ligadas entre si por rótulas.

*Cargas:* as forças aplicadas podem ser concentradas ou distribuídas e situam-se no plano XY. Os binários aplicados devem ter seus vetores -momento (seta dupla) normais ao plano XY (paralelos ao eixo Z). Pode haver forças aplicadas diretamente nos nós ou nas barras, mas não pode haver binários aplicados diretamente nos nós (apenas nas barras).

*Deformações:* as deformações axiais predominam; pode haver também deformação por flexão, mas a de cisalhamento será sempre desprezada.

*Esforços:* se só houver forças aplicadas diretamente nos nós e forças axiais ao longo das barras, as barras estarão submetidas apenas a esforço axial. Se houver forças transversais e binários ao longo das barras haverá esforço cortante e momento fletor também (obtidos considerando-se as barras como vigas bi-apoiadas).

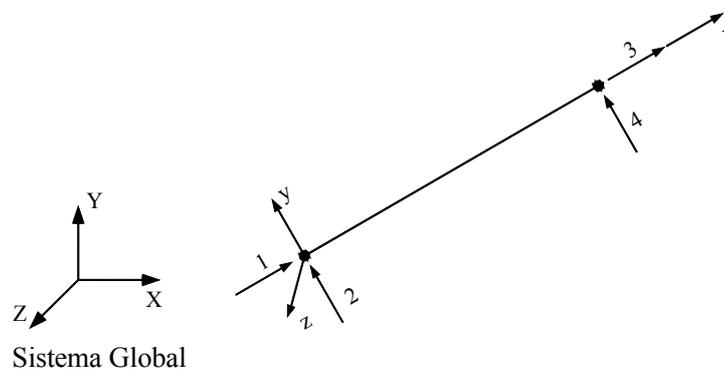


Figura 3-39: Treliça plana

### 3.8.5.3. Treliça Espacial

(3 GL/ nó  $\rightarrow$  translação paralela a x, y, z)

*Geometria:* idêntica à treliça plana, exceto que as barras podem ter qualquer direção no espaço.

*Ligações:* as barras são ligadas entre si por rótulas.

*Deformações:* as deformações axiais predominam; pode haver também deformação por flexão, mas a de cisalhamento será sempre desprezada.

*Esforços:* se só houver forças aplicadas diretamente nos nós e forças axiais ao longo das barras, as barras estarão submetidas apenas a esforço axial. Se houver forças transversais e binários ao longo das barras haverá esforço cortante e momento fletor também (obtidos considerando-se as barras como vigas bi-apoiadas).

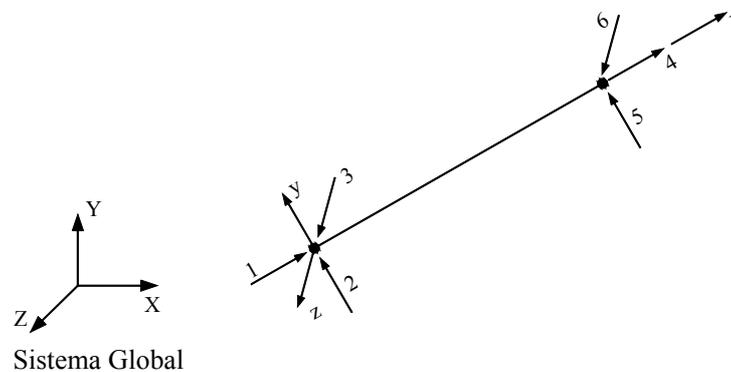


Figura 3-40: Treliça espacial

### 3.8.5.4. Pórtico Plano

(3 GL/ nó  $\rightarrow$  translação paralela a x e a y e rotação em torno de z)

*Geometria:* estrutura plana constituída de barras prismáticas, situadas no plano XY, com orientação arbitrária em relação ao eixo X. Assim como nas vigas, considera-se que o eixo vertical (y) da seção transversal das barras é um eixo de simetria e, portanto, y e z são eixos principais de inércia.

*Ligações:* as barras são em geral rigidamente ligadas entre si.

*Cargas:* como nas vigas, as forças atuam no plano XY e binários atuam perpendicularmente ao plano XY (direção Z).

*Esforços internos:* de flexão, axial e corante.

*Deformação:* as deformações por flexão predominam e ocorrem no plano XY. Consideram-se as barras longas; desprezam-se, portanto, as deformações por cisalhamento.

As deformações por flexão e axial são consideradas independentemente uma da outra (nas estruturas lineares não haverá interação entre esforço axial e flexão).

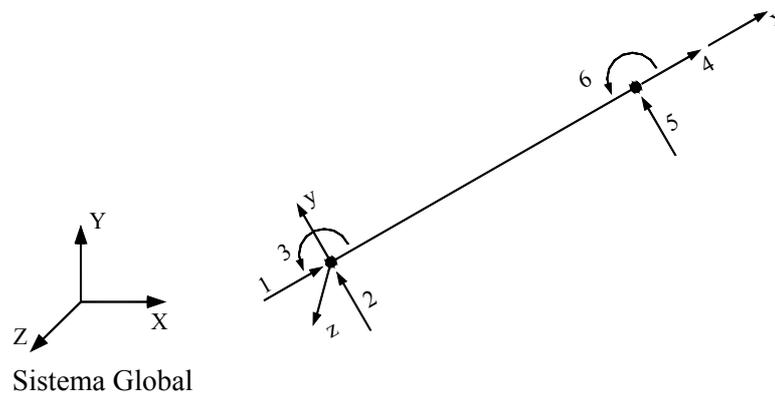


Figura 3-41: Pórtico plano

### 3.8.5.5. Grelha

(3 GL/nó → translação paralela a z e rotação em torno de x e de y)

*Geometria:* estrutura plana (plano XY) composta de barras contínuas que se interceptam mutuamente.

*Cargas:* ao contrário do pórtico plano, todas as forças atuam normalmente ao plano XY e todos os binários têm seus vetores (seta dupla) no plano da grelha (XY).

*Esforços internos:* de flexão, torção e cortante.

*Deformação:* predominante por flexão (deformações por torção e por cisalhamento são secundárias). Considera-se que cada barra tem dois eixos de simetria na seção transversal, um está no plano XY e o outro paralelo a direção Z. Isto implica em que os esforços de momento torçor e fletor ajam independentemente e também implica que as barras se deformem por flexão na direção Z.

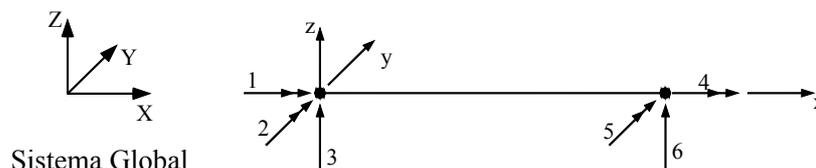


Figura 3-42: Grelha

### 3.8.5.6. Pórtico Espacial

(6 GL/ nó → translação paralela a x, y, e z e rotação em torno de x, y, z)

*Geometria:* tipo de estrutura mais geral, não há restrição na posição dos nós, barras ou direções das cargas. No entanto considera-se que a seção transversal tem dois eixos de simetria (eixos principais) de forma a não ocorrer interação entre flexão e torção.

*Ligações:* as barras são em geral rigidamente ligadas entre si.

*Esforços internos:* axial, de torção, esforço cortante nas duas direções principais e também de flexão nas duas direções principais.

*Deformação:* por flexão, axial e por torção; no caso de barras longas pode-se desprezar a deformação por cisalhamento.

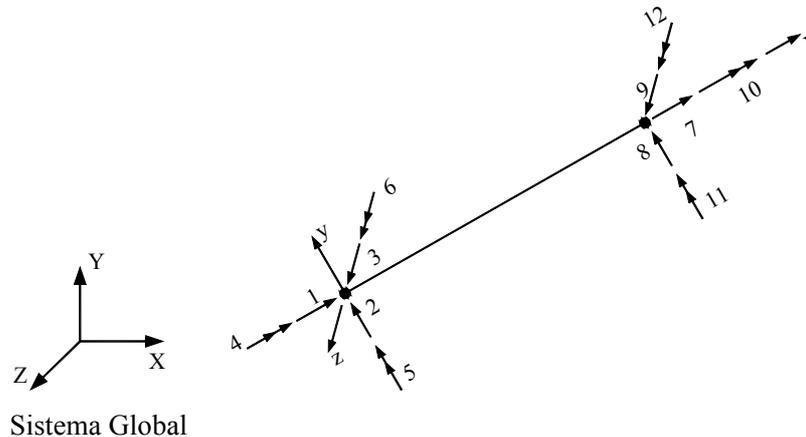


Figura 3-43: Pórtico espacial

#### 1.4. RESUMO DO MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS PARA ESTRUTURAS RETICULADAS DIVIDIDAS EM ELEMENTOS

Cada elemento será considerado isoladamente. Será calculada a matriz de rigidez do elemento não-restringido, em relação a todos os graus de liberdade do elemento, inicialmente no sistema local de coordenadas  $[S_L]$ .

Quando houver cargas aplicadas ao longo dos elementos ou barras, será calculado o vetor de esforços de engastamento perfeito (para o elemento fixo), inicialmente no sistema local.  $\{F_{LEP}\}$ .

Em seguida, através de uma transformação de coordenadas, encontra-se a matriz de rigidez do elemento no sistema global  $[S_G]$  e o vetor de esforços de engastamento perfeito no sistema global  $\{F_{GEP}\}$ .

Levando-se em conta a contribuição de todos os elementos será formado o sistema de equações de equilíbrio para a estrutura não-restringida, em relação a todos os GL possíveis (inclusive os restringidos por apoios).

$$\{F_{EP}\}^* + [S]^* \cdot \{D\}^* = \{A\}^* \quad (3.28)$$

sendo

$$[S]^* = \sum_{\text{Elementos}} [S_G],$$

$$\{F_{EP}\}^* = \sum_{\text{Elementos}} \{F_{GEP}\}$$

e " $\sum_{\text{Elementos}}$ " a soma dos coeficientes (que correspondem ao mesmo GL da estrutura) dos elementos que concorrem no mesmo nó. Se uma estrutura tem  $N$  nós, e cada nó tem  $M$  GL, o sistema (3.28) resultante terá  $N \times M$  equações.

Em seguida serão impostas as condições de contorno, encontrando-se o sistema de equações de equilíbrio para a estrutura restringida:

$$\{F_{EP}\} + [S] \cdot \{D\} = \{A\} \quad (3.29)$$

Resolve-se o sistema de equações (3.29) e obtém-se o vetor de deslocamentos:

$$[S] \cdot \{D\} = \{A\} - \{F_{EP}\}$$

$$\{D\} = [S]^{-1} \cdot \{A - F_{EP}\}$$

A partir de  $\{D\}$  obtém-se as reações de apoio utilizando-se o sistema (3.28), encontra-se o vetor de deslocamentos nas extremidades de cada elemento, no sistema local,  $\{u_L\}$ , e os esforços no elemento no sistema local:

$$\{A_L\} = \{F_{LEP}\} + [S_L] \cdot \{u_L\} \quad (3.30)$$

## 1.5. MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM ELEMENTO NO SISTEMA LOCAL (ESTRUTURAS RETICULADAS PLANAS)

### 1.5.1. Elemento de viga

Seja o elemento de viga com 2 graus de liberdade por nó mostrado na Figura 3-44, cujo sistema local coincide com o sistema global.

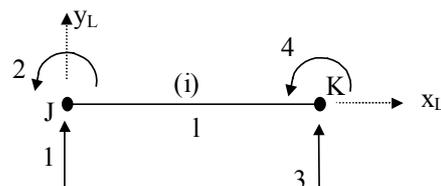


Figura 3-44: Elemento de viga com 2 graus de liberdade por nó

O elemento (i) (Figura 3-44), tem nó inicial J e nó final K, comprimento  $l$  e o momento de inércia da seção transversal é  $I$ . O vetor de deslocamentos nodais do elemento é dado pela equação (3.31) e a matriz de rigidez do elemento no sistema local é expressa pela equação (3.32):

$$\{u_L\}_{4 \times 1} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}. \quad (3.31)$$

$$[S_L]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Para se obter os coeficientes da matriz de rigidez,  $S_{Lij}$ , inicialmente fixam-se as extremidades do elemento e impõe-se  $u_1 = 1$  (Figura 3-45a); impõe-se em seguida  $u_2 = 1$  (Figura 3-45b).

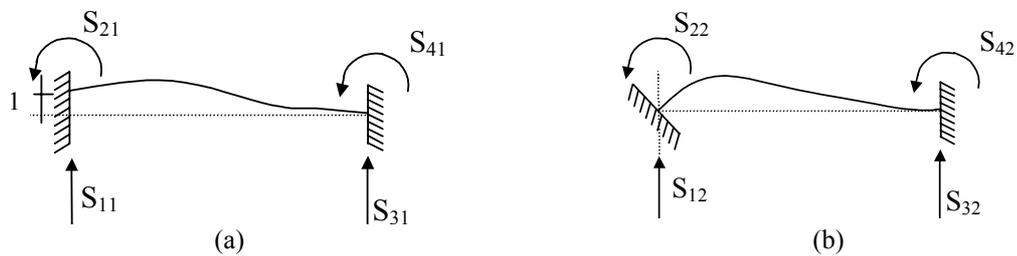


Figura 3-45: Imposição dos deslocamentos unitários  $u_1$  e  $u_2$

Impõe-se após o deslocamento unitário  $u_3 = 1$  e por fim impõe-se  $u_4 = 1$  (Figura 3-46a e b respectivamente) com o elemento fixo nas extremidades.

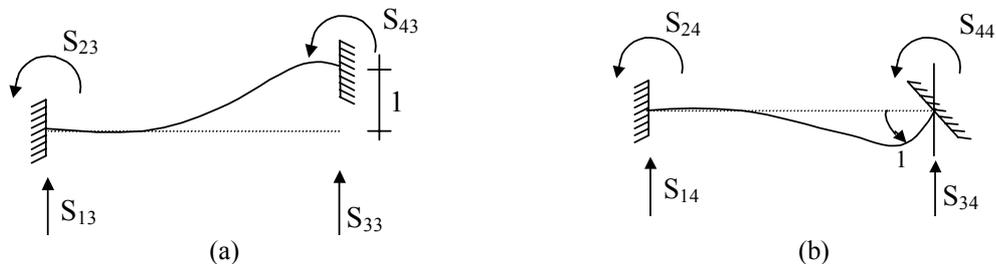


Figura 3-46: Imposição dos deslocamentos unitários  $u_3$  e  $u_4$

Todos os coeficientes de rigidez,  $S_{Lij}$  podem ser calculados pelo Método das Forças. Os coeficientes  $S_{44}$ ,  $S_{24}$ , ou  $S_{22}$ ,  $S_{42}$  já foram encontrados anteriormente no item 3.4. Os demais coeficientes podem ser encontrados por equilíbrio e sabendo-se que  $S_{ij} = S_{ji}$  (matriz de rigidez é simétrica).

Impõe-se inicialmente  $u_2 = 1$  e, conforme visto anteriormente, têm-se que  $S_{22} = \frac{4EI}{l}$  e  $S_{42} = \frac{2EI}{l}$ .

Por equilíbrio têm-se que  $(\sum M_J = 0 \text{ e } \sum F_y = 0)$

$$S_{32} = -\left(\frac{4EI}{1} - \frac{2EI}{1}\right) \div 1 = -\frac{6EI}{l^2} \quad \text{e} \quad S_{12} = +\frac{6EI}{l^2}$$

Analogamente, ao impor-se  $u_4 = 1$  têm-se que  $S_{44} = \frac{4EI}{1}$  e  $S_{24} = \frac{2EI}{1}$  e por equilíbrio obtêm-se os coeficientes

$$S_{43} = S_{34} = \frac{-6EI}{l^2} \quad \text{e} \quad S_{41} = S_{14} = \frac{+6EI}{l^2} \quad (3.33)$$

Por simetria obtêm-se os coeficientes:

$$S_{23} = S_{32} = \frac{-6EI}{l^2} \quad \text{e} \quad S_{21} = S_{12} = \frac{+6EI}{l^2} \quad (3.34)$$

Por equilíbrio obtêm-se os coeficientes restantes.

Da Figura 3-45a, obtêm-se os coeficientes

$$S_{21} = \frac{6EI}{l^2}, \quad S_{41} = \frac{6EI}{l^2} \quad (3.35)$$

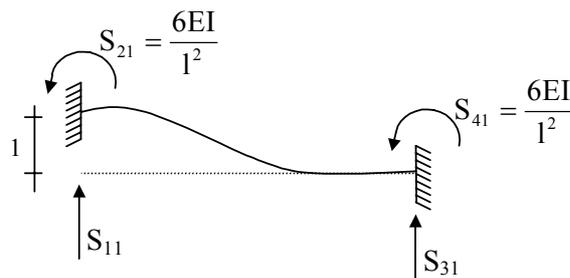


Figura 3-47

$$\sum M_j = 0, \quad S_{31} = -\left(\frac{6EI}{l^2} + \frac{6EI}{l^2}\right) \div l = \frac{-12EI}{l^3} \quad (3.36)$$

$$\sum F_y = 0, \quad S_{11} = -S_{31} = \frac{+12EI}{l^3} \quad (3.37)$$

Da Figura 3-46a obtêm-se os coeficientes

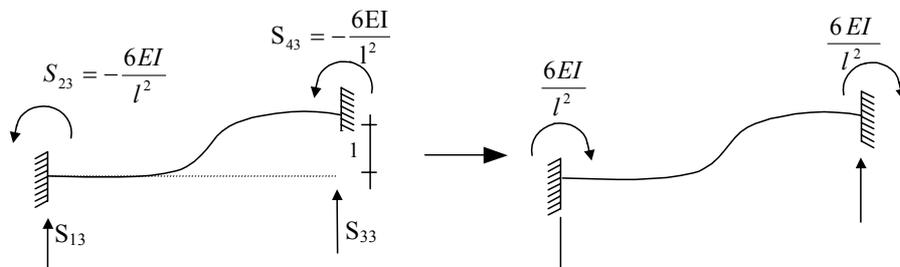


Figura 3-48

$$S_{23} = \frac{-6EI}{l^2} \qquad S_{43} = \frac{-6EI}{l^2} \qquad (3.38)$$

$$S_{31} = S_{13} = -\left(\frac{6EI}{l^2} + \frac{6EI}{l^2}\right) \div l = \frac{-12EI}{l^3} \qquad S_{33} = -S_{13} = +\frac{12EI}{l^3} \qquad (3.39)$$

Portanto a matriz de rigidez do elemento de viga (não-restringido) no sistema local é

$$[S_L]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \qquad (3.40)$$

Esta matriz de rigidez é singular, não é inversível. É necessário restringir o elemento para resolver o sistema de equações de equilíbrio deste. Não existe, portanto, uma matriz de flexibilidade para elemento não-restringido.

Os coeficientes da diagonal de  $[S_L]$  são sempre positivos. Para este elemento a matriz de rigidez no sistema local coincide com o global.

### 1.5.2. Elemento de treliça

Seja o elemento de barra de 2 graus de liberdade por nó formado pelos nós J e K (Figura 3-49). Em geral, o sistema local não coincide com o sistema global; o vetor de deslocamentos nodais é  $\{u_L\}_{4 \times 1}$  e a matriz de rigidez é  $[S_L]_{4 \times 4}$ .

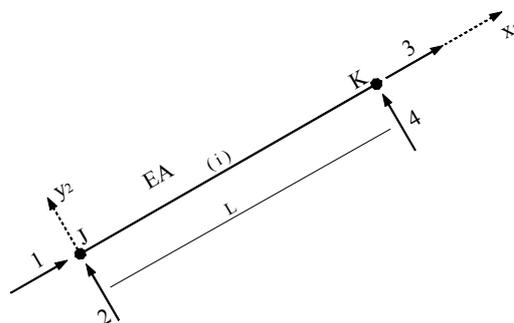


Figura 3-49

O elemento tem comprimento  $l$  e a área da seção transversal é  $A$ . Inicialmente, fixe-se o elemento a movimentos de translação, lembrando que as ligações são articuladas (rotações não produzem esforços nos elementos).

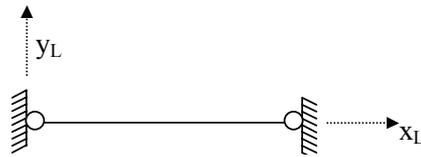


Figura 3-50

Impõe-se  $u_1 = 1$  (Figura 3-51a) e obtêm-se

$$S_{11} = \frac{EA}{l}, \quad (3.41)$$

$$\sum F_x = 0 : S_{31} = -S_{11} = -\frac{EA}{l}, \quad (3.42)$$

$$\text{e } S_{21} = S_{41} = 0. \quad (3.43)$$

Impõe-se  $u_2 = 1$ , movimento de corpo rígido, (Figura 3-51b) e obtêm-se  $S_{12} = S_{22} = S_{32} = S_{42} = 0$

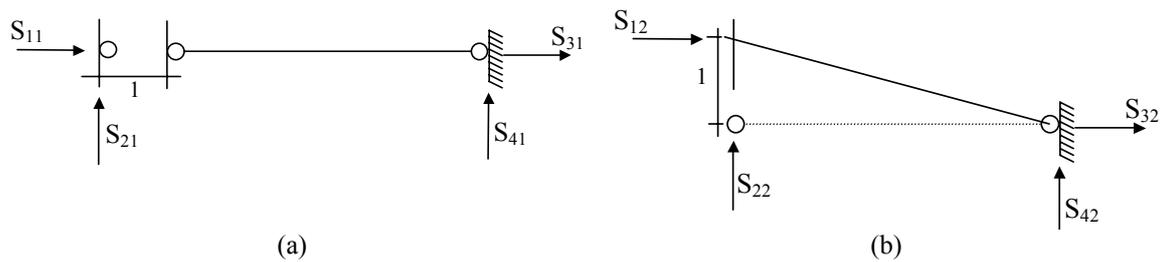


Figura 3-51: Imposição dos deslocamentos unitários  $u_1$  e  $u_2$

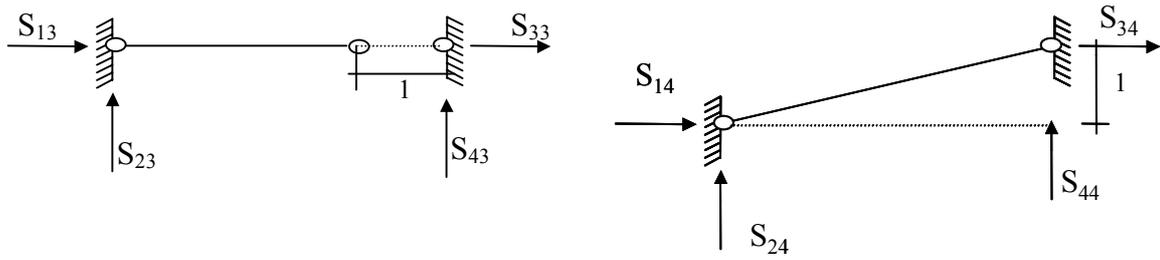
Impõe-se  $u_3 = 1$  (Figura 3-52a), calculam-se

$$S_{33} = \frac{EA}{l} \quad (3.44)$$

$$\sum F_x = 0 \quad S_{13} = -\frac{EA}{l} \quad (3.45)$$

$$S_{23} = S_{43} = 0 \quad (3.46)$$

Impõe-se  $u_4 = 1$  (Figura 3-52b) (movimento de corpo rígido), calculam-se  $S_{14} = S_{24} = S_{34} = S_{44}$



(a) (b)  
 Figura 3-52: Imposição dos deslocamentos unitários  $u_3$  e  $u_4$

A matriz de rigidez do elemento de treliça plana no sistema local pode então ser escrita:

$$[S_L]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EA}{l} & 0 & \frac{EA}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

### 1.5.3. Elemento de pórtico plano

Seja o elemento de pórtico plano com 3 graus de liberdade por nó, formado pelos nós J e K (Figura 3-53). O vetor de deslocamentos nodais é  $\{u_L\}_{6 \times 1}$  e a matriz de rigidez é  $[S_L]_{6 \times 6}$ . Em geral o sistema local não coincide com o sistema global do elemento.

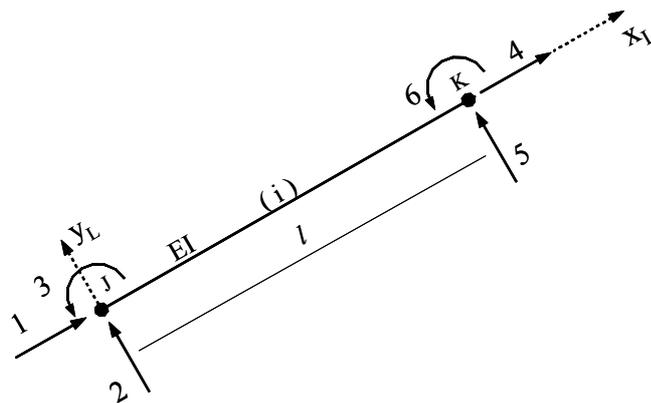


Figura 3-53: Elemento de pórtico plano

A matriz de rigidez do elemento de pórtico plano pode ser encontrada superpondo-se a matriz de rigidez do elemento de viga com a matriz de rigidez do elemento de treliça plana, uma vez que não há interação entre esforço axial e de flexão (pequenos deslocamentos, estrutura linear).

GL 1 do elemento de viga → GL 2 do elemento pórtico plano

- GL 2 do elemento de viga → GL 3 do elemento pórtico plano  
 GL 3 do elemento de viga → GL 5 do elemento pórtico plano  
 GL 4 do elemento de viga → GL 6 do elemento pórtico plano  
 GL 1 do elemento de treliça → GL 1 do elemento pórtico plano  
 GL 3 do elemento de treliça → GL 4 do elemento pórtico plano

Portanto, no sistema local, a matriz de rigidez do elemento de pórtico plano, fica

$$[S_L]_{6 \times 6} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} & 0 & -\frac{12EI}{l^3} & \frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} & 0 & \frac{12EI}{l^3} & -\frac{6EI}{l^2} \\ 0 & \frac{6EI}{l^2} & \frac{2EI}{l} & 0 & -\frac{6EI}{l^2} & \frac{4EI}{l} \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

### 3.9. MATRIZ DE ROTAÇÃO – TRANSFORMAÇÃO DO SISTEMA DE COORDENADAS

Seja por exemplo um elemento de pórtico plano, cujo eixo local  $x_L$  faz um ângulo  $\theta$  (+ no sentido anti-horário) com o eixo global  $x_G$  da estrutura:

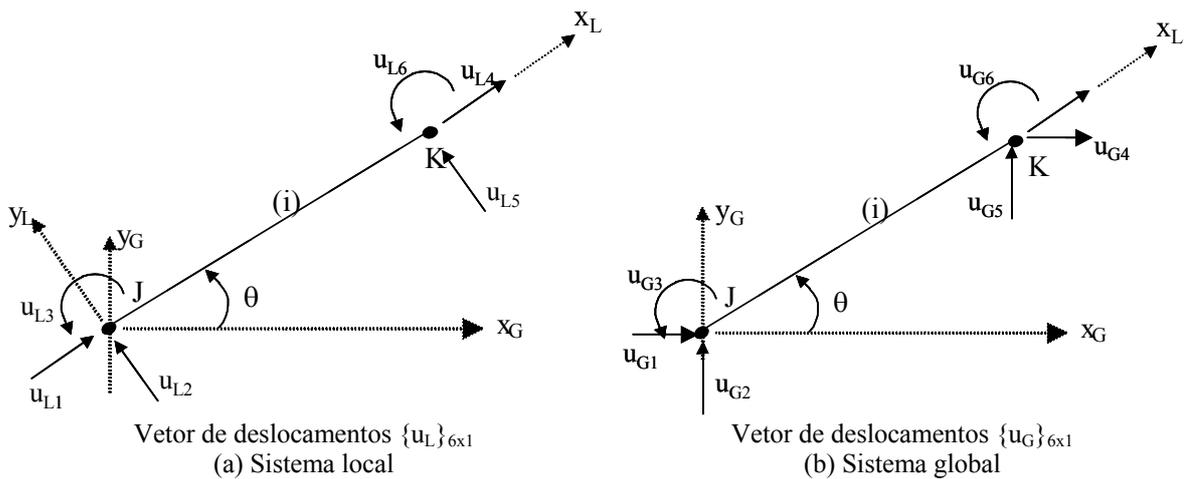


Figura 3-54: Sistema de coordenadas

Decompondo-se os deslocamentos  $u_{G1}$  e  $u_{G2}$  nos eixos  $x_L$  e  $y_L$ , tem-se:

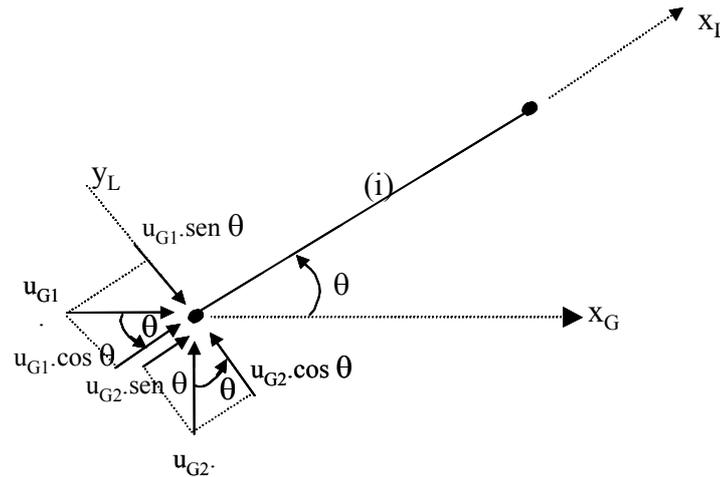


Figura 3-55

Comparando-se a Figura 3-54a com a Figura 3-55, observa-se que

$$\begin{aligned} u_{L1} &= u_{G1} \cdot \cos \theta + u_{G2} \cdot \text{sen} \theta \text{ e} \\ u_{L2} &= -u_{G1} \cdot \text{sen} \theta + u_{G2} \cdot \cos \theta . \end{aligned} \quad (3.49)$$

Uma vez que a resultante dos vetores de translação  $\begin{Bmatrix} u_{L1} \\ u_{L2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{G1} \\ u_{G2} \end{Bmatrix}$  é a mesma.

Observa-se também das Figura 3-54a e b que  $u_{L3} = u_{G3}$  e  $u_{L6} = u_{G6}$ , pois a rotação do nó J assim como do nó K é a mesma no plano  $(X_L, Y_L$  ou  $X_G, Y_G)$ .

Matricialmente pode-se escrever

$$\begin{Bmatrix} u_{L1} \\ u_{L2} \\ u_{L3} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{G1} \\ u_{G2} \\ u_{G3} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{u_L^J\}_{3 \times 1} = [R]_{3 \times 3} \{u_G^J\} \quad (3.50)$$

Analogamente para o nó K têm-se

$$\begin{Bmatrix} u_{L4} \\ u_{L5} \\ u_{L6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \text{sen} \theta & 0 \\ -\text{sen} \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{G4} \\ u_{G5} \\ u_{G6} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{u_L^K\}_{3 \times 1} = [R]_{3 \times 3} \{u_G^K\} \quad (3.51)$$

Escrevendo-se agora a relação entre o vetor de deslocamentos nodais do elemento no sistema local,  $\{u_L\}$ , e o vetor de deslocamentos nodais do elemento no sistema global,  $\{u_G\}$ , vem:

$$\begin{Bmatrix} u_{L1} \\ u_{L2} \\ u_{L3} \\ u_{L4} \\ u_{L5} \\ u_{L6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{G1} \\ u_{G2} \\ u_{G3} \\ u_{G4} \\ u_{G5} \\ u_{G6} \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad \{u_L\}_{6 \times 1} = [R]_{6 \times 6} \{u_G\}_{6 \times 1}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} \{u_L^J\}_{3 \times 1} \\ \{u_L^K\}_{3 \times 1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [R]_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & [R]_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{u_G^J\}_{3 \times 1} \\ \{u_G^K\}_{3 \times 1} \end{Bmatrix} \quad (3.52)$$

A matriz  $[R]_{6 \times 6}$  é chamada de matriz de transformação de coordenadas do sistema global para o sistema local ou matriz de rotação ( $\theta$  positivo do eixo global para o local + ↻ no sentido anti-horário). Observa-se que a matriz inversa  $[R]^{-1}$  pode ser obtida substituindo-se  $\theta$  por  $-\theta$  (rotação inversa no sentido horário, do local para o global).

$$[R]^{-1} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

Uma vez que  $\cos(-\theta) = \cos\theta$  e  $\text{sen}(-\theta) = -\text{sen}\theta$ , observa-se que  $[R]^{-1} = [R]^T$ , ou seja, a matriz  $[R]$  é uma matriz ortogonal. Portanto  $\{u_G\} = [R]^{-1} \{u_L\} = [R]^T \{u_L\}$ .

Para o elemento de treliça plana, têm-se dois graus de liberdade por nó. Não se considera o grau de liberdade de rotação do nó pois este não resulta em esforço na barra.

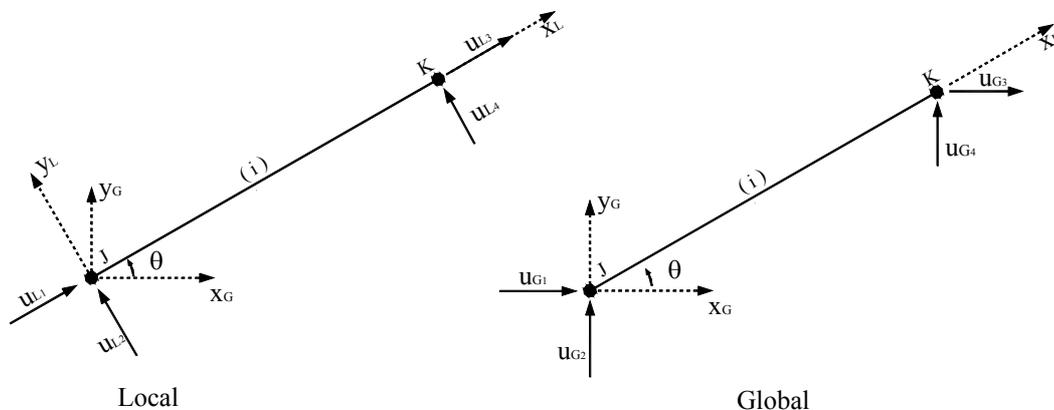


Figura 3-56

A matriz de transformação é

$$[\mathfrak{R}]_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta & 0 & 0 \\ -\text{sen}\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \text{sen}\theta \\ 0 & 0 & -\text{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

### 3.10. MATRIZ DE RIGIDEZ DE UM ELEMENTO NO SISTEMA GLOBAL

Seja por exemplo um elemento de pórtico plano. Supondo que não haja cargas atuando ao longo do elemento, os esforços nas extremidades do elemento dependem apenas dos deslocamentos nodais. As equações de equilíbrio no sistema local e global se escrevem:

$$\{A_L\} = [S_L] \cdot \{u_L\} \quad (3.55)$$

$$\{A_G\} = [S_G] \cdot \{u_G\}, \quad (3.56)$$

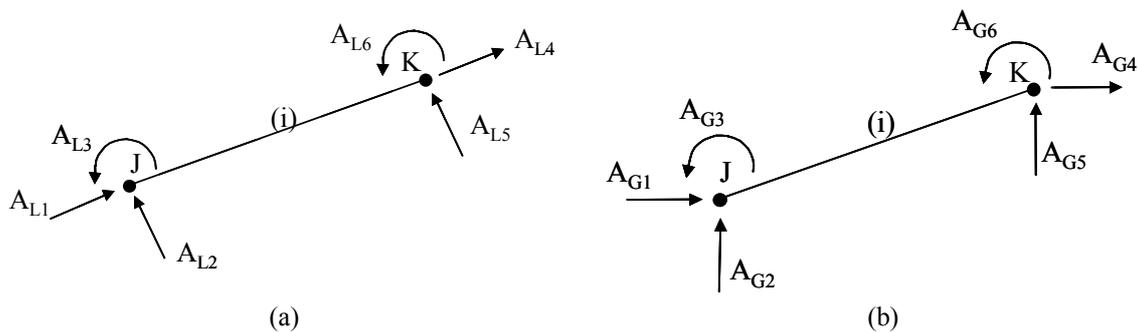


Figura 3-57

sendo  $\{A_L\}$  e  $\{A_G\}$  os vetores de esforços mostrados na Figura 3-57a e Figura 3-57b respectivamente,  $[S_L]$  e  $[S_G]$  as matrizes de rigidez  $\{u_L\}$  e  $\{u_G\}$  os vetores de deslocamentos.

Já foi visto no item anterior que

$$\{u_L\} = [\mathfrak{R}] \cdot \{u_G\} \quad (3.57)$$

e analogamente

$$\begin{aligned} \{A_L\} &= [\mathfrak{R}] \cdot \{A_G\} \\ \{A_G\} &= [\mathfrak{R}]^{-1} \{A_L\} = [\mathfrak{R}]^T \{A_L\} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Substituindo-se (3.57) em (3.55) tem-se:

$$\{A_L\} = [S_L].[R].\{u_G\} \quad (3.59)$$

Pré multiplicando (3.59) por  $[R]^T$ , vem:

$$[R]^T.\{A_L\} = [R]^T.[S_L].[R].\{u_G\} \quad (3.60)$$

Substituindo-se (3.58) em (3.60):

$$\{A_G\} = [R]^T.[S_L].[R].\{u_G\} \quad (3.61)$$

Comparando agora as equações (3.61) e (3.56), obtém-se a matriz de rigidez do elemento no sistema global:

$$\{S_G\} = [R]^T.[S_L].[R] \quad (3.62)$$

Apesar desta expressão ter sido desenvolvida para o elemento de pórtico plano, ela é genérica e, portanto, válida para todos os tipos de estrutura reticulada (sendo que para cada tipo de elemento tem-se uma matriz de rotação e uma matriz de rigidez no sistema local diferente).

### 3.11. VETOR DE ESFORÇOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO NO SISTEMA GLOBAL

Para formar o vetor de esforços de engastamento perfeito da estrutura, deve-se transformar os esforços de engastamento perfeito de todos os elementos do sistema local para o global. Analogamente à equação (3.58), tem-se:

$$\{F_{GEP}\} = [R]^T.\{F_{LEP}\} \quad (3.63)$$

### 3.12. SISTEMA DE EQUAÇÕES DE EQUILÍRIO PARA A ESTRUTURA NÃO-RESTRINGIDA

As equações de equilíbrio de forças generalizadas (ou ações) em torno dos nós, para a estrutura com apoios podem ser escritas

$$\{A\} = \{F_{EP}\} + [S].[D], \quad (3.64)$$

sendo  $\{A\}$  as ações aplicadas nos nós;  $\{F_{EP}\}$  os esforços nas extremidades dos elementos devidos às cargas atuando nos elementos para a estrutura fixa (esforços de engastamento perfeito);  $[S].[D]$  os esforços devido aos deslocamentos nodais.

Estas equações podem ser reescritas para a estrutura não-restringida (sem apoios):

$$\{A\}^* = \{F_{EP}\}^* + [S]^*.[D]^* \quad (3.65)$$

Ambos sistemas de equações acima são considerados no sistema global de todos os elementos, que são formuladas em relação aos graus de liberdade dos elementos. A relação entre os graus de liberdade do elemento e os graus de liberdade da estrutura será efetuada através da regra da correspondência.

### 3.12.1. Montagem da matriz de rigidez da estrutura

A matriz de rigidez da estrutura não-restringida (sem consideração dos apoios),  $[S]^*$ , é formada a partir das matrizes de rigidez dos elementos no sistema global:

$$[S]^* = \sum_{i=1}^{nelms} \mathfrak{R}^{(i)\top} [S_L]^{(i)} \mathfrak{R}^{(i)} = \sum_{i=1}^{nelms} [S_G]^{(i)}, \quad (3.66)$$

sendo *nelms* correspondente ao número de elementos da estrutura.

A matriz  $[S]^*$  é então formada “somando-se” a contribuição de todos os elementos, isto é, os coeficientes  $S^*_{ij}$ , cujo primeiro índice “i” corresponde a um grau de liberdade de um nó da estrutura, são encontrados somando-se os coeficientes das matrizes de rigidez  $[S_G]$  dos elementos que concorrem a este mesmo nó correspondentes ao mesmo G.L.” *i* “. Deve-se então identificar qual o G.L. na extremidade do elemento que corresponde a um G.L. de nó na estrutura.

### 3.12.2. Exemplo – Pórtico plano

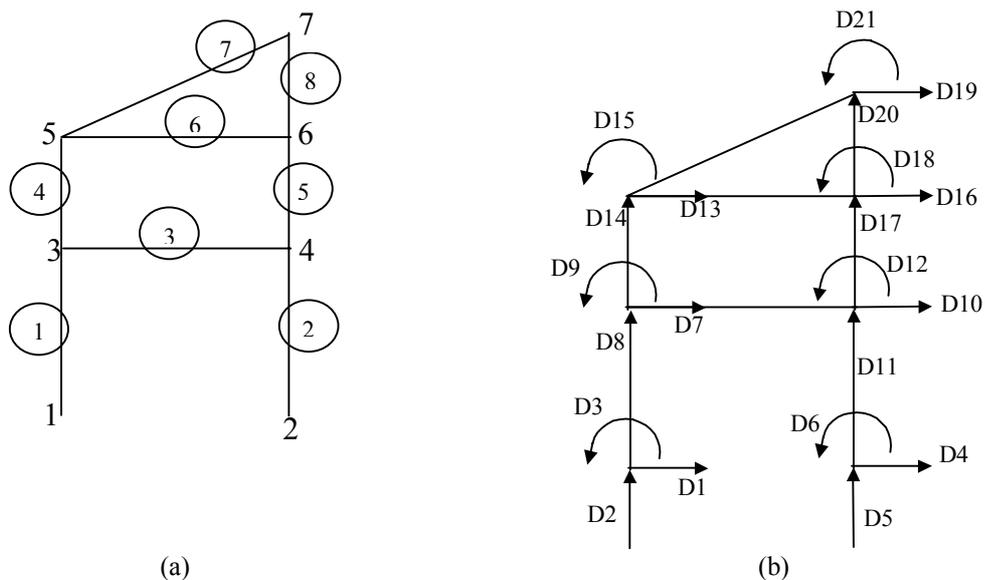


Figura 3-58

Por exemplo, para o pórtico plano da Figura 3-58, concorrem no nó "5" três elementos: (4), (6), e (7), cujos graus de liberdade nas suas extremidades (vetor de deslocamentos  $\{u_G\}$ ), no sistema global estão apresentados a seguir:

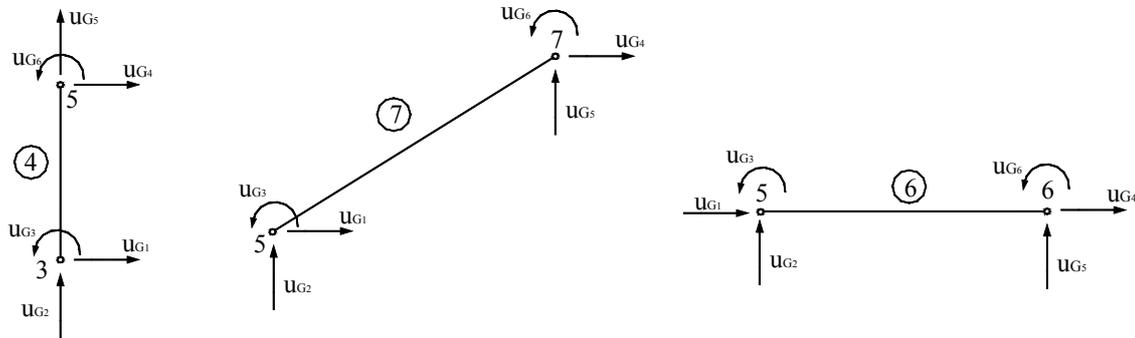


Figura 3-59

Para o elemento (6) o sistema local coincide com o global, já para os elementos (4) e (7), deve-se transformar o vetor de deslocamentos do sistema local para o sistema global, como mostrado abaixo para o elemento (4):

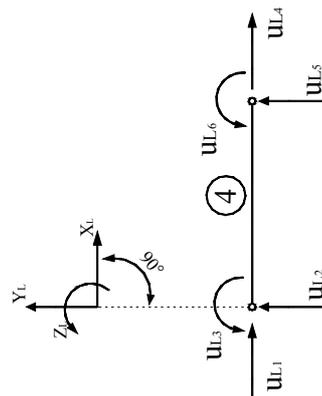


Figura 3-60

$$\begin{Bmatrix} u_{L1} \\ u_{L2} \\ u_{L3} \\ u_{L4} \\ u_{L5} \\ u_{L6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{G1} \\ u_{G2} \\ u_{G3} \\ u_{G4} \\ u_{G5} \\ u_{G6} \end{Bmatrix}$$

$$\{u_L\} = [R] \{u_G\}; \tag{3.66}$$

$$\{u_G\} = [R]^T \{u_L\}$$

À direção generalizada, ou G.L. 14 da estrutura ( $D_{14}$ , que é o segundo G.L. do nó 5), correspondem as direções:  
 5 do elemento (4);

2 do elemento (7);

2 do elemento (6).

À direção 15 ( $D_{15}$ ) da estrutura correspondem as direções:

6 do elemento (4);

3 do elemento (7);

3 do elemento 6.

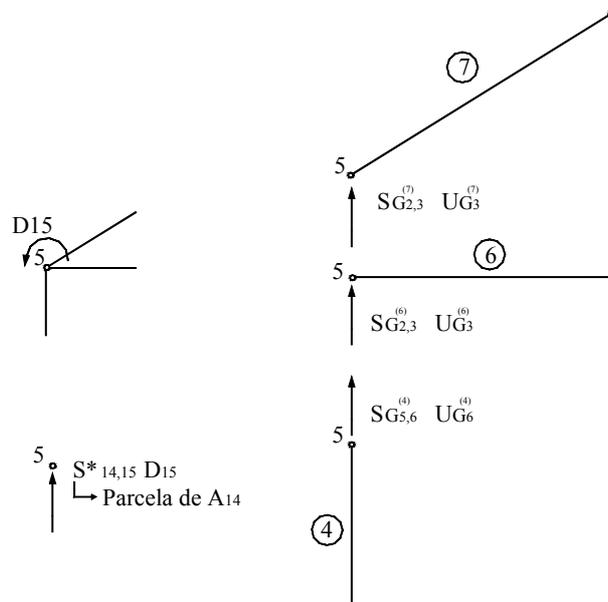
O coeficiente  $S_{14,15}^*$  que exprime a influência de um deslocamento na direção 15 sobre o esforço na direção 14 (força vertical no nó 5), será a soma dos coeficientes de influência das matrizes  $[S_G]$  dos elementos (4), (7), e (6) correspondentes.

$$S_{14,15}^* = S_{G_{56}}^{(4)} + S_{G_{23}}^{(7)} + S_{G_{23}}^{(6)} \quad (3.67)$$

Para compreender fisicamente o significado desta expressão, multiplicam-se ambos os lados da equação (3.67) acima por  $D_{15}$  ( $= u_{G_6}^{(4)} = u_{G_3}^{(7)} = u_{G_3}^{(6)}$ ):

$$S_{14,15}^* D_{15} = S_{G_{56}}^{(4)} u_{G_6}^{(4)} + S_{G_{23}}^{(7)} u_{G_3}^{(7)} + S_{G_{23}}^{(6)} u_{G_3}^{(6)}, \quad (3.68)$$

sendo que  $S_{14,15}^* D_{15}$  (que é uma parcela de  $A_{14}$ ) representa a força na direção 14 devido a uma rotação no nó 5 ( $=D_{15}$ ), cuja magnitude é igual à soma das forças nos elementos (4), (7), e (6) na direção correspondente à 14 (5, 2 e 2 respectivamente), devido a esta rotação do nó 5 nas extremidades dos mesmos.





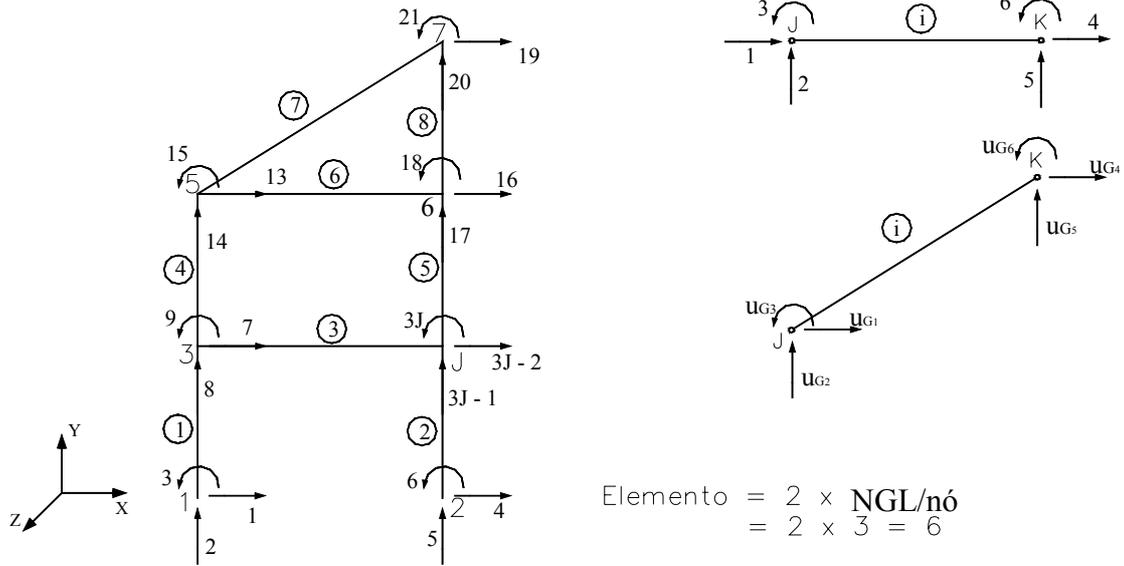


Figura 3-63

Tomando-se o elemento 7 como exemplo, que liga o nó 5 ao nó 7 (J=5; K=7)

Regra da Correspondência

Tabela 3-2: Correspondência dos nós

GL da estrutura ( $\{D\}^*$ )	GL do elemento i ( $\{u_G\}$ ) (ligando $J^{(i)}$ a $K^{(i)}$ ).
$3J^{(i)} - 2 = 13$	1
$3J^{(i)} - 1 = 14$	2
$3J^{(i)} = 15$	3
$3K^{(i)} - 2 = 19$	4
$3K^{(i)} - 1 = 20$	5
$3K^{(i)} = 21$	6

3.12.5. Exemplo 2 - Elementos de treliça

$E_1 \cdot A_1 / L_1 = 10$        $D_2 = ?$

$E_2 \cdot A_2 / L_2 = 30$        $D_3 = ?$

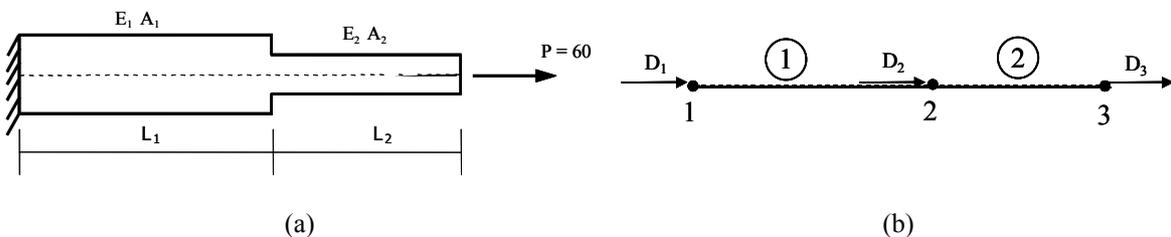


Figura 3-64: Elemento de treliça

Os elementos de barra utilizados na modelagem da barra tracionada estão mostrados na Figura 3-65a, sendo que cada nó apresenta um grau de liberdade (translação horizontal).

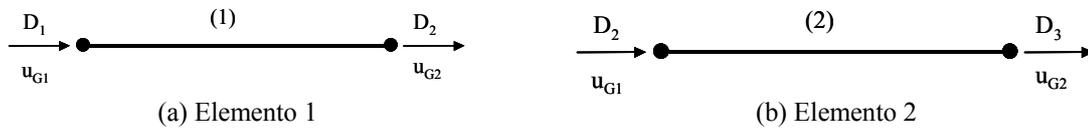


Figura 3-65: Elementos da estrutura tracionada

Nó J: GL da estrutura = J

$$[S_L] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{1} & \frac{-EA}{1} \\ -\frac{EA}{1} & \frac{EA}{1} \end{bmatrix}$$

$$[S_L^{(1)}] = [S_G^{(1)}] = \begin{bmatrix} 10 & -10 \\ -10 & 10 \end{bmatrix}$$

$$[S_L^{(2)}] = [S_G^{(2)}] = \begin{bmatrix} 30 & -30 \\ -30 & 30 \end{bmatrix}$$

Regra da correspondência:

Tabela 3-3: Regra da correspondência: GL da estrutura correspondente ao GL dos elementos

Elemento	1	2	
J → K	1 → 2	2 → 3	u <sub>G</sub>
J	1	2	1
K	2	3	2

A matriz de rigidez da estrutura não-restringida (sem apoios) é formada levando-se em conta a contribuição dos dois elementos, somando-se os coeficientes das matrizes de rigidez no sistema global, que correspondem ao mesmo grau de liberdade da estrutura:

$$[S^*] = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -10 & 10+30 & -30 \\ 0 & -30 & 30 \end{bmatrix} \quad \therefore [S^*] = \begin{bmatrix} 10 & -10 & 0 \\ -10 & 40 & -30 \\ 0 & -30 & 30 \end{bmatrix}$$

### 3.12.6. Exemplo 3 – Elementos de viga

Seja a viga contínua mostrada na Figura 3-66, cujo número de graus de liberdade por nó é igual a dois.

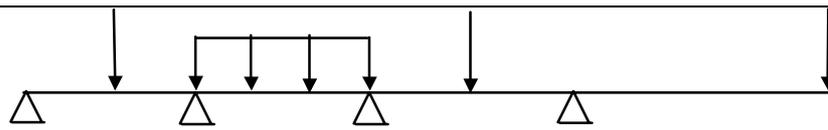


Figura 3-66: Viga contínua

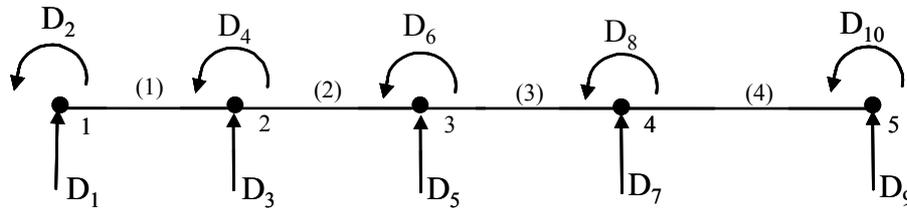


Figura 3-67: Graus de liberdade da estrutura

Nó J: GL da estrutura =  $2J-1$  e  $2J$

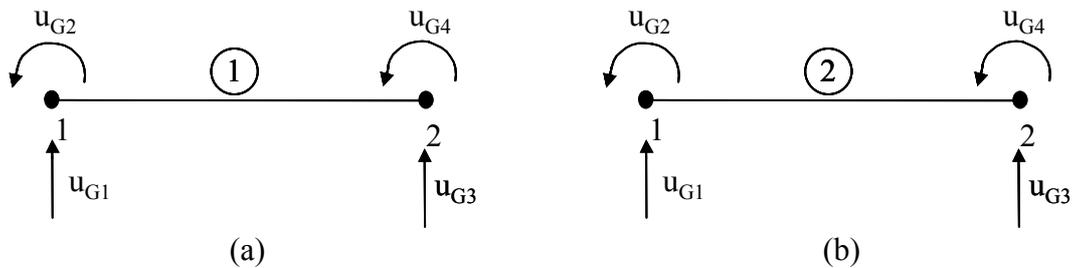


Figura 3-68: Elementos de viga utilizados na modelagem – graus de liberdade dos elementos

Regra da correspondência:

Tabela 3-4: Regra da correspondência: GL da estrutura correspondente ao GL dos elementos

Elemento $J \rightarrow K$	(1) $1 \rightarrow 2$	(2) $2 \rightarrow 3$	(3) $3 \rightarrow 4$	(4) $4 \rightarrow 5$	$u_G$
$2J - 1$	1	3	5	7	1
$2J$	2	4	6	8	2
$2K - 1$	3	5	7	9	3
$2K$	4	6	8	10	4

$$[S_G]^1 = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$[S_G]^2 = \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ X & X & X & X \\ X & X & X & X \\ X & X & X & X \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$[S_G]^3 = \begin{array}{cccc|c} & 5 & 6 & 7 & 8 & \\ \hline & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 5 \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 6 \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 7 \\ & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & 8 \end{array} \quad [S_G]^4 = \begin{array}{cccc|c} & 7 & 8 & 9 & 10 & \\ \hline & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & 7 \\ & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & 8 \\ & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & 9 \\ & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & 10 \end{array}$$

$$[S^*] = \begin{array}{cccccccccccc|c} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} & \\ \hline & \square & \square & \square & \square & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{1} \\ & \square & \square & \square & \square & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{2} \\ & \square & \square & \square+ & X & \square & X & X & X & 0 & 0 & \mathbf{3} \\ & \square & \square & \square+ & X & \square & X & X & X & 0 & 0 & \mathbf{4} \\ & 0 & 0 & X & X & X+ & \bullet & X+ & \bullet & \bullet & \bullet & \mathbf{5} \\ & 0 & 0 & X & X & X+ & \bullet & X+ & \bullet & \bullet & \bullet & \mathbf{6} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet+ & \Delta & \bullet+ & \Delta & \mathbf{7} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet+ & \Delta & \bullet+ & \Delta & \mathbf{8} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \mathbf{9} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Delta & \Delta & \Delta & \Delta & \mathbf{10} \end{array}$$

Os coeficientes da matriz de rigidez da estrutura não restringida são formados a partir dos coeficientes das matrizes de rigidez no sistema global de cada elemento, usando-se a regra da correspondência e somando-se os coeficientes que correspondem ao mesmo grau de liberdade da estrutura nos nós onde concorrem os elementos.

$$\begin{aligned} S_{33}^* &= S_{G33}^1 + S_{G11}^2 \\ S_{34}^* &= S_{G34}^1 + S_{G12}^2 \\ S_{44}^* &= S_{G44}^1 + S_{G22}^2 \\ S_{55}^* &= S_{G33}^2 + S_{G11}^3 \\ S_{66}^* &= S_{G44}^2 + S_{G22}^3 \\ S_{56}^* &= S_{G34}^2 + S_{G12}^3, \text{ etc...} \end{aligned}$$

### 3.12.7. Exemplo 4 - Viga contínua

Repetir o problema anterior mudando a numeração dos nós.

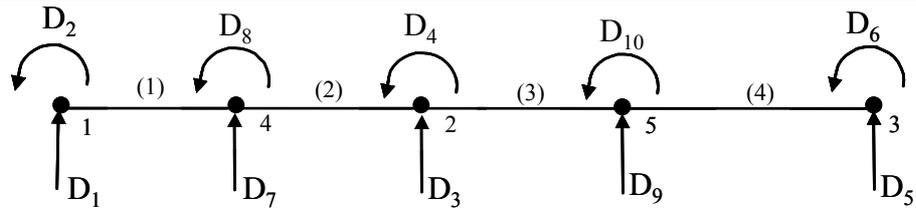


Figura 3-69: Graus de liberdade da estrutura

Regra da correspondência:

Tabela 3-5: Regra da correspondência: GL da estrutura correspondente ao GL dos elementos

Elemento J → K	(1) 1 → 4	(2) 4 → 2	(3) 2 → 5	(4) 5 → 3	$u_G$
2J - 1	1	7	3	9	1
2J	2	8	4	10	2
2K - 1	7	3	9	5	3
2K	8	4	10	6	4

$$[S_G]^1 = \begin{bmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 7 \\ 8 \end{matrix}$$

$$[S_G]^2 = \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ X & X & X & X \\ X & X & X & X \\ X & X & X & X \end{bmatrix} \begin{matrix} 7 \\ 8 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$[S_G]^3 = \begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 9 \\ 10 \end{matrix}$$

$$[S_G]^4 = \begin{bmatrix} \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \\ \Delta & \Delta & \Delta & \Delta \end{bmatrix} \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Matriz de rigidez da estrutura não-restringida

$$S_{33}^* = S_{G33}^2 + S_{G11}^3$$

$$S_{55}^* = S_{G33}^4$$

$$S_{44}^* = S_{G44}^2 + S_{G22}^3$$

$$S_{66}^* = S_{G44}^4, \text{ etc...}$$

$$S_{77}^* = S_{G33}^1 + S_{G11}^2$$

$$S_{99}^* = S_{G33}^3 + S_{G11}^4$$

$$S_{78}^* = S_{G34}^1 + S_{G12}^2$$

$$\mathbf{1} \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{7} & \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{10} \\ \square & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \square & \square & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

	2	□	□	0	0	0	0	0	□	□	0	0
	3	0	0	X+	●	X+	●	0	X	X	●	●
	4	0	0	X+	●	X+	●	0	X	X	●	●
[S*]=	5	0	0	0	0	Δ	Δ	0	0	0	Δ	Δ
	6	0	0	0	0	Δ	Δ	0	0	0	Δ	Δ
	7	□	□	X	X	0	0	□+ X	□+ X	0	0	0
	8	□	□	X	X	0	0	□+ X	□+ X	0	0	0
	9	0	0	●	●	0	0	0	0	●+	Δ	●+
	10	0	0	●	●	0	0	0	0	●+	Δ	●+

### 3.12.8. Exemplo Numérico

Seja a viga contínua ilustrada na Figura 3-70, que é o mesmo exemplo calculado anteriormente sem dividir a estrutura em elementos. A viga tem seção transversal constante com rigidez à flexão  $EI = 72 \times 10^3 \text{ kNm}^2$ .

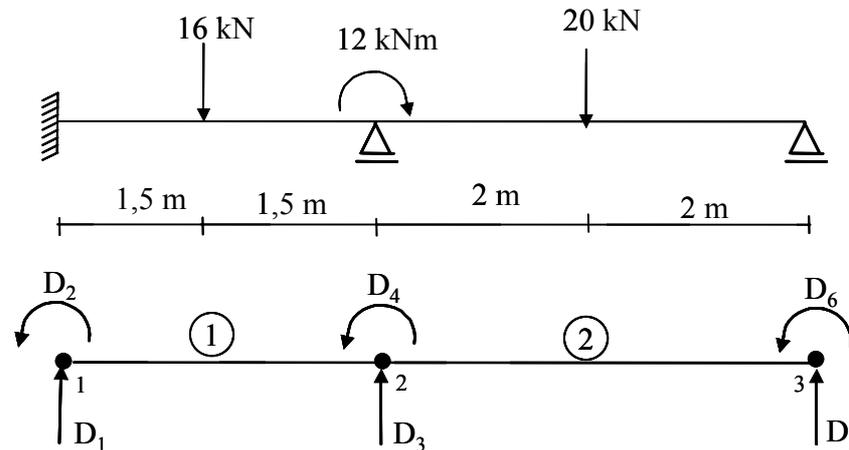


Figura 3-70: Viga contínua – geometria, carregamento e graus de liberdade da estrutura

Divide-se a estrutura em dois elementos como mostrado na Figura 3-71:.

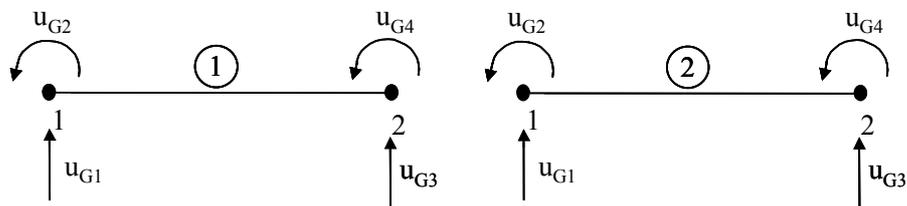


Figura 3-71: Graus de liberdade dos elementos

### Regra da correspondência

Tabela 3-6: Regra da correspondência: GL da estrutura correspondente ao GL dos elementos

Elemento	(1)	(2)
----------	-----	-----

	J → K	1 → 2	2 → 3	
	2J - 1	1	3	1
	2J	2	4	2
	2K - 1	3	5	3
	2K	4	6	4

Matriz de rigidez de cada elemento (sistema local coincide com global):

$$\text{Elemento 1 } l_1 = 3\text{m} \quad [S^1] = 10^3 \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 32 & 48 & -32 & 48 \\ 48 & 96 & -48 & 48 \\ -32 & -48 & 32 & -48 \\ 48 & 48 & -48 & 96 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

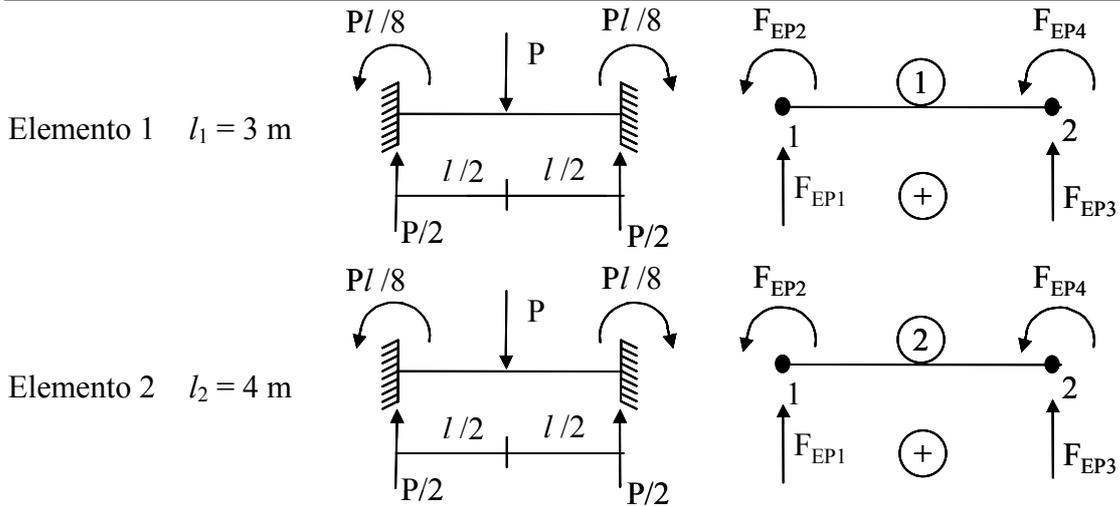
$$\text{Elemento 2 } l_2 = 4\text{m} \quad [S_G^2] = 10^3 \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 13,5 & 27 & -13,5 & 27 \\ 27 & 72 & -27 & 36 \\ -13,5 & -27 & 13,5 & -27 \\ 27 & 36 & -27 & 72 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Matriz de Rigidez da estrutura não-restringida

$$[S^*] = 10^3 \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 32 & 48 & -32 & 48 & 0 & 0 \\ 48 & 96 & -48 & 48 & 0 & 0 \\ -32 & -48 & 32+13,5 & -48+27 & -13,5 & 27 \\ 48 & 48 & -48+27 & 96+72 & -27 & 36 \\ 0 & 0 & -13,5 & -27 & 13,5 & -27 \\ 0 & 0 & 27 & 36 & -27 & 72 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$[S^*] = 10^3 \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 32 & 48 & -32 & 48 & 0 & 0 \\ 48 & 96 & -48 & 48 & 0 & 0 \\ -32 & -48 & 45,5 & -21 & -13,5 & 27 \\ 48 & 48 & -21 & 168 & -27 & 36 \\ 0 & 0 & -13,5 & -27 & 13,5 & -27 \\ 0 & 0 & 27 & 36 & -27 & 72 \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

Vetores de esforços de engastamento perfeito



$$\{F_{EP_G}^1\} = \{F_{EP_L}^1\} = \begin{Bmatrix} 8 & \rightarrow 1 \\ 6 & \rightarrow 2 \\ 8 & \rightarrow 3 \\ -6 & \rightarrow 4 \end{Bmatrix} \text{ GL da estrutura}$$

$$\{F_{EP_G}^2\} = \{F_{EP_L}^2\} = \begin{Bmatrix} 10 & \rightarrow 3 \\ 10 & \rightarrow 4 \\ 10 & \rightarrow 5 \\ -10 & \rightarrow 6 \end{Bmatrix} \text{ GL da estrutura}$$

Vetor de Esforços de engastamento perfeito da estrutura: (não-restringida)

$$\{F_{EP}\}^* = \begin{Bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 6 \\ 3 & 8+10 \\ 4 & -6+10 \\ 5 & 10 \\ 6 & -10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \\ 4 \\ 10 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

Sistema de equações de equilíbrio para a estrutura não-restringida: (6 equações, 6 incógnitas)

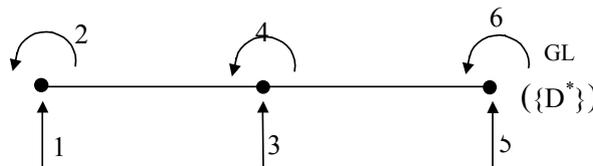


Figura 3-72 Vetor de deslocamentos nodais da estrutura não-restringida

$$\{F_{EP}\}^* + [S]^* \cdot \{D\}^* = \{A\}^*$$

O vetor  $\{D\}^*$  mostrado na Figura 3-72 inclui os deslocamentos nodais  $D_4$  e  $D_6$ , que são as incógnitas do problema e os deslocamentos nodais restringidos por vínculos que são conhecidos  $D_1 = D_2 = D_3 = D_5 = 0$ .

O vetor  $\{A\}^*$  inclui as ações aplicadas nos nós, que são conhecidas, nas direções livres.  $A_4 = -12$  kN.m e  $A_6 = 0$  e também as reações de apoio  $R_1, R_2, R_3, R_5$ , que são incógnitas:

$$\begin{Bmatrix} 8 \\ 6 \\ 18 \\ 4 \\ 10 \\ -10 \end{Bmatrix} + 10^3 \cdot \begin{bmatrix} 32 & 48 & -32 & 48 & 0 & 0 \\ 48 & 96 & -48 & 48 & 0 & 0 \\ -32 & -48 & 45,5 & -21 & -13,5 & 27 \\ 48 & 48 & -21 & 168 & -27 & 36 \\ 0 & 0 & -13,5 & -27 & 13,5 & -27 \\ 0 & 0 & 27 & 36 & -27 & 72 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 = 0 \\ D_1 = 0 \\ D_3 = 0 \\ D_4 \\ D_5 = 0 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ A_4 = -12 \\ R_5 \\ A_6 = 0 \end{Bmatrix}$$

### 3.13. SISTEMA DE EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO PARA A ESTRUTURA RESTRINGIDA

Para considerar a estrutura restringida, deve-se impor as condições de contorno, ou seja, deslocamentos nulos nas direções restringidas por apoios. No sistema de equações de equilíbrio para a estrutura não-restringida.

$$\{F_{EP}\}^* + [S]^* \cdot \{D\}^* = \{A\}^*, \quad (3.69)$$

isto equivale a eliminar as colunas de  $[S]^*$  correspondentes aos GL restringidos por apoios, e, conseqüentemente, como  $[S]^*$  é simétrica, eliminar também as linhas que correspondem aos GL restringidos.

O sistema de equações resultantes fica

$$\{F_{EP}\} + [S] \cdot \{D\} = \{A\} \quad (3.70)$$

Por exemplo, seja a viga da Figura 3-73 que tem um total de 4 graus de liberdade. As direções ou graus de liberdade 1 e 2 são restringidas. Neste caso, os esforços de engastamento perfeito do elemento ou da estrutura são

$$\{F_{EP_G}\} = \{F_{EP_L}\} = \begin{Bmatrix} P/2 \\ Pl/8 \\ P/2 \\ -Pl/8 \end{Bmatrix} \quad (3.71)$$

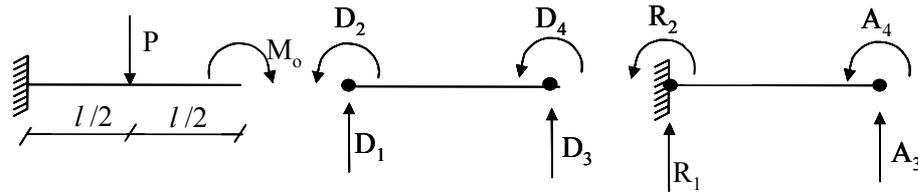


Figura 3-73 Viga engastada e livre; vetor de deslocamentos e vetor de ações nodais para a estrutura não-restringida

Para a estrutura não-restringida tem-se:

$$\{F_{EP}\}^* + [S]^* \cdot \{D\}^* = \{A\}^* \quad (3.72)$$

$$\begin{Bmatrix} P/2 \\ Pl/8 \\ P/2 \\ -Pl/8 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{Bmatrix}^* \cdot \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ 0 \\ -Mo \end{Bmatrix}$$

Fazendo-se  $D_1 = 0$  e  $D_2 = 0$  no sistema (3.72), obtém-se

$$\begin{cases} P/2 + (S_{11}^* x_0) + (S_{12}^* x_0) + S_{13}^* D_3 + S_{14}^* D_4 = A_1^* = R_1 & (i) \\ Pl/8 + (S_{21}^* x_0) + (S_{22}^* x_0) + S_{23}^* D_3 + S_{24}^* D_4 = A_2^* = R_2 & (ii) \\ P/2 + (S_{31}^* x_0) + (S_{32}^* x_0) + S_{33}^* D_3 + S_{34}^* D_4 = A_3^* = 0 & (iii) \\ -Pl/8 + (S_{41}^* x_0) + (S_{42}^* x_0) + S_{43}^* D_3 + S_{44}^* D_4 = A_4^* = -Mo & (iv) \end{cases} \quad (3.73)$$

Observa-se que os coeficientes da coluna 1 e da coluna 2 de  $[S]^*$  são multiplicados por zero, portanto estas colunas podem ser eliminadas.

Eliminando-se também as linhas *i* e *ii* de  $[S]^*$ , obtém-se o sistema de equações de equilíbrio para a estrutura restringida, em relação apenas às direções ou GL livres (*iii* e *iv*):

$$\begin{Bmatrix} P/2 \\ -Pl/8 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S_{33}^* & S_{34}^* \\ S_{43}^* & S_{44}^* \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -Mo \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (iii) \\ (iv) \end{matrix} \text{ ou}$$

$$\{F_{EP}\} + [S] \cdot \{D\} = \{A\} \quad (3.74)$$

$$\text{logo } \{D\} = [S]^{-1} \cdot [\{A\} - \{F_{EP}\}]$$

Resolvendo-se este sistema de equações (3.74) obtém-se  $\{D\} = \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix}$ . Inserindo-se

$D_3$  e  $D_4$  nas equações (*i*) e (*ii*) obtém-se as reações de apoio  $R_1$  e  $R_2$ .

O sistema de equações (3.72) pode ser escrito na forma: ( $D \rightarrow$  deslocável;  $R \rightarrow$  restringida).

$$\begin{Bmatrix} \{F_{EP}\}_R \\ \{F_{EP}\}_D \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{RR} & S_{RD} \\ S_{DR} & S_{DD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{D\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{R\} \\ \{A\} \end{Bmatrix} \quad (3.75)$$

Da segunda linha  $\rightarrow \{F_{EP}\}_D + [S_{DD}].\{D\} = \{A\}$ , onde  $[S_{DD}]$  é a matriz de rigidez da estrutura restringida,  $[S]$ , e  $\{F_{EP}\}_D$  é o vetor de esforços de engastamentos perfeito da estrutura restringida,  $\{F_{EP}\}$ ; resolvendo-se este sub-sistema de equações obtém-se  $\{D\}$ .

Inserindo  $\{D\}$  na primeira linha do sistema (3.75)  $\rightarrow \{R\} = \{F_{EP}\}_R + [S_{RD}].\{D\}$ , obtém-se as reações de apoio da estrutura.

Nem sempre o sistema de equações está assim “arrumado”, com as direções restringidas no início ou no final. Seja por exemplo a mesma viga, agora bi-apoiada:.

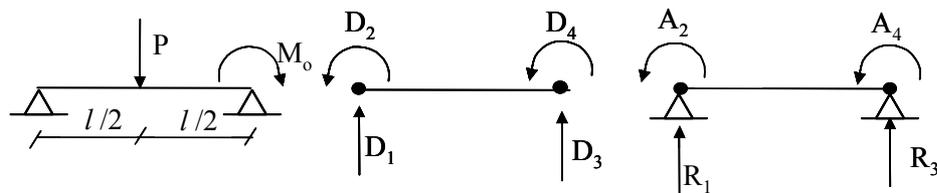


Figura 3-74 Viga bi-apoiada; vetor de deslocamentos e vetor de ações nodais para a estrutura não-restringida

Para a estrutura não-restringida tem-se:

$$\{F_{EP}\}^* + [S]^*.\{D\}^* = \{A\}^*, \quad (3.76)$$

$\{F_{EP}\}^*$  e  $[S]^*$  não mudam em relação ao exemplo anterior, mudam as direções restringidas:.

$$\begin{Bmatrix} P/2 \\ Pl/8 \\ P/2 \\ -Pl/8 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix}^* \begin{Bmatrix} D_1 = 0 \\ D_2 \\ D_3 = 0 \\ D_4 \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{Bmatrix}^* = \begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ R_3 \\ -Mo \end{Bmatrix} \begin{matrix} (i) \\ (ii) \\ (iii) \\ (iv) \end{matrix} \quad (3.77)$$

Impõem-se as condições de contorno na estrutura, eliminando-se as colunas 1 e 3 de  $[S]^*$  e por simetria as linhas 1 e 3 também ( $i$  e  $iii$ ) no sistema de equações (3.75), o que “sobra” é o sistema de equações da estrutura restringida:

$$\begin{Bmatrix} P/8 \\ -P/8 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{22} & S_{24} \\ S_{42} & S_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_2 \\ D_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -M_0 \end{Bmatrix} \quad \text{ou} \quad (3.78)$$

$$\{F_{EP}\} + [S] \cdot \{D\} = \{A\} \quad (3.79)$$

cuja solução fornece o vetor de deslocamentos nodais da estrutura:

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} D_3 \\ D_4 \end{Bmatrix} = [S]^{-1} [\{A\} - \{F_{EP}\}] \quad (3.80)$$

Inserindo-se  $D_2$  e  $D_4$  nas linhas (i) e (iii) do sistema de equações (3.77), obtém-se as reações de apoio  $R_1$  e  $R_3$ . No próximo item apresenta-se a continuação do exemplo numérico de viga contínua, visto no item 3.12.8, obtendo-se agora as reações de apoio da estrutura.

### 3.14. REAÇÕES DE APOIO DA ESTRUTURA

#### 3.14.1. Exemplo numérico

Seja a viga analisada anteriormente no item 3.12.8 (Figura 3-75)

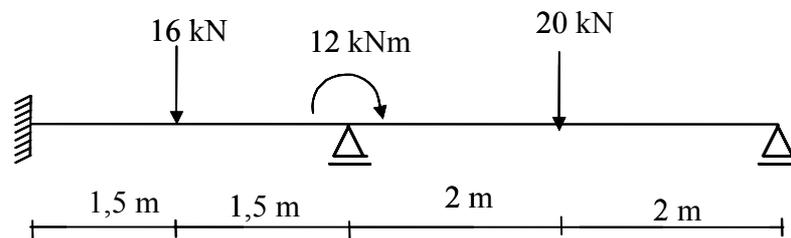
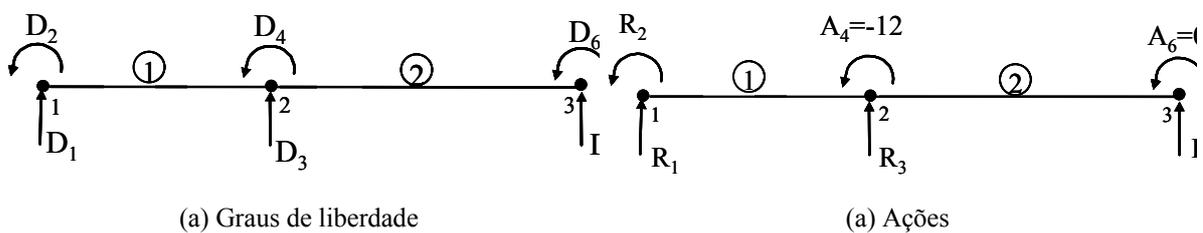


Figura 3-75



(a) Graus de liberdade

(a) Ações

Figura 3-76: Graus de liberdade e ações da estrutura

Impondo-se as condições de contorno no sistema de equações de equilíbrio da estrutura não-restringida.

$$\{F_{EP}\}^* + [S]^* \cdot \{D\}^* = \{A\}^* \quad (3.80)$$

Equivale a eliminar as colunas 1, 2, 3 e 5 de  $[S]^*$  e as linhas 1, 2, 3 e 5 do sistema (3.80); obtendo-se assim:

$$\begin{Bmatrix} 4 \\ -10 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 168 & 36 \\ 36 & 72 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{Bmatrix} D_4 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 168 & 36 \\ 36 & 72 \end{bmatrix} \cdot 10^3 \cdot \begin{Bmatrix} D_4 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -12 - 4 \\ 0 + 10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} D_4 \\ D_6 \end{Bmatrix} = 10^{-3} \cdot \begin{bmatrix} 168 & 36 \\ 36 & 72 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -16 \\ 10 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 168 & 36 \\ 36 & 72 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{168 \cdot 72 - 36^2} \begin{bmatrix} 72 & -36 \\ -36 & 168 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6,67 & -3,33 \\ -3,33 & 15,56 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} D_4 \\ D_6 \end{Bmatrix} = 10^{-6} \begin{bmatrix} 6,67 & -3,33 \\ -3,33 & 15,56 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -16 \\ 10 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -140 \\ 208,9 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-6} \text{ rad}$$

$$\begin{Bmatrix} D_4 \\ D_6 \end{Bmatrix} \cong \begin{Bmatrix} -0,14 \\ 0,21 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-3} \text{ rad} \tag{3.81}$$

O que confere com os valores encontrados anteriormente, no item 3.4.2.

Para se obter as reações de apoio, inserem-se os deslocamentos  $D_4$  e  $D_6$  no sistema de equações (3.80), para a estrutura não-restringida:

$$R_1 = 8 + 10^3 \times 48 \times D_4 + 0 \times D_6 = 8 - 48 \times 0,14 = 1,28 \text{ kN}$$

$$R_2 = 6 + 10^3 \times 48 \times D_4 + 0 \times D_6 = -0,72 \text{ kN.m}$$

$$R_3 = 18 + 10^3 \times [(-21) \times D_4 + 27 \times D_6] = 18 + 8,58 = 26,58 \text{ kN} \tag{3.82}$$

$$R_5 = 10 + 10^3 \times [-27 \times D_4 - 27 \times D_6] = 10 - 1,86 = 8,14 \text{ kN}$$

Verificação do equilíbrio

$$\Sigma F_y = 0 \quad 1,28 + 26,61 + 8,11 = 36 \quad \therefore 36 = 36 \quad \text{OK} \tag{3.83}$$

$$\Sigma M_{nól} = 0 \quad 8,14 \times 7 + 26,58 \times 3 - 12 - 20 \times 5 - 16 \times 1,5 - 0,72 = 0 \quad \text{OK} \tag{3.84}$$

### 3.15. ESFORÇOS NOS ELEMENTOS NO SISTEMA LOCAL

#### 3.15.1. Elemento de Pórtico Plano

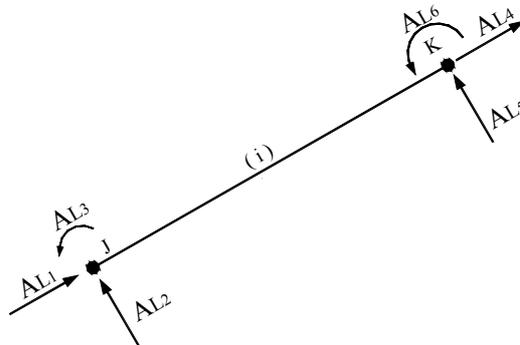


Figura 3-77: Sistema local

Os esforços totais nos elementos são encontrados superpondo-se os esforços de engastamento perfeito (causados pelas cargas que atuam ao longo dos elementos com as extremidades fixas) aos esforços causados pelos deslocamentos nodais:

$$\{A_L\} = \{F_{LEP}\} + [S_L] \{u_L\} \quad (3.85)$$

Depois de resolvido o sistema de equações:

$$\{F_{EP}\} + [S] \{D\} = \{A\} \rightarrow \{D\} = [S]^{-1} [\{A\} - \{F_{EP}\}] \quad (3.87)$$

obtém-se o vetor de deslocamentos nodais  $\{D\}$ , em relação aos GL da estrutura, e, inserindo-se os deslocamentos nulos dos apoios, forma-se o vetor  $\{D\}^*$ . Para se obter os esforços em cada elemento, utiliza-se primeiro a Regra da Correspondência para se obter  $\{u_G\}$  a partir de  $\{D\}^*$  e, em seguida, a equação (3.57), vista anteriormente, para se encontrar o vetor de deslocamentos nodais no sistema local, em cada elemento:

$$\{u_L\} = [R] \cdot \{u_G\}$$

Inserindo-se esta equação na equação (3.85), obtém-se assim os esforços totais em cada elemento:

$$\{A_L\} = \{F_{LEP}\} + [S_L] [R] \{u_G\}. \quad (3.86)$$

Apesar desta equação (3.86) ter sido encontrada para o elemento de Pórtico Plano, ela é genérica, sendo válida para qualquer tipo de elemento.

3.15.2. Exemplo numérico

Continuando o exemplo numérico da viga contínua,, pode-se obter o vetor  $\{D\}^*$  a partir do vetor de deslocamentos  $\{D\}$ , encontrado no item 3.14.1 (ver equação 3.81):

$$\{D^*\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,14 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0,21 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \quad (3.88)$$

Através da Regra da Correspondência sabe-se que para o elemento 1:

$$\{u_G\}^{(1)} = \begin{Bmatrix} D_1^* \\ D_2^* \\ D_3^* \\ D_4^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,14 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} \quad (3.89)$$

e para o elemento 2:

$$\{u_G\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} D_3^* \\ D_4^* \\ D_5^* \\ D_6^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,14 \cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0,21 \cdot 10^{-3} \end{Bmatrix} \quad (3.90)$$

A Figura 3-78 mostra graficamente o vetor de deslocamentos nodais  $\{u_G\}$  na extremidade dos elementos 1 e 2 e a deformada aproximada.

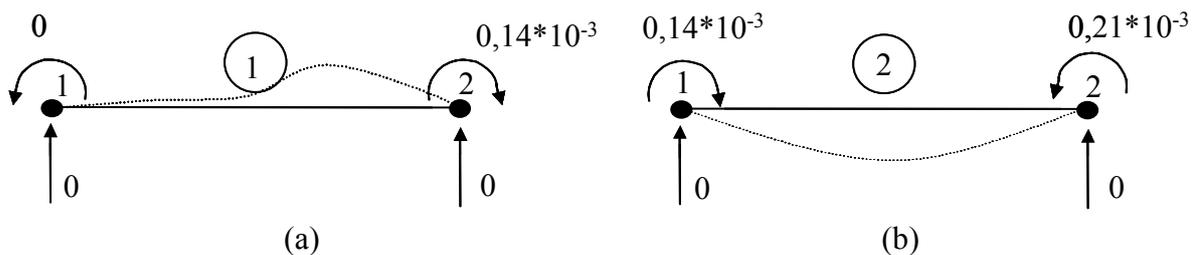


Figura 3-78 Deslocamentos nodais e deformada aproximada dos elementos 1 (a) e 2 (b).

Como para o elemento de viga  $[R] = [I]$ , a equação (3.86) fica:

$$\{A_L\} = \{F_{LEP}\} + [S_L] \{u_G\} \quad (3.91)$$

Utilizando-se a equação acima para cada elemento, obtém-se então os esforços totais, sendo as forças em kN e os momentos em kN.m:

$$\text{Elemento 1:} \quad \{A_L\}^{(1)} = \{F_{LEP}\}^{(1)} + [S_L]^{(1)} \{u_G\}^{(1)} \quad (3.92)$$

$$\{A_L\} = \begin{Bmatrix} 8 \\ 6 \\ 8 \\ -6 \end{Bmatrix} + 10^3 \times \begin{bmatrix} 32 & 48 & -32 & 48 \\ 48 & 96 & -48 & 48 \\ -32 & -48 & 32 & -48 \\ 48 & 48 & -48 & 96 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -0,14 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \therefore \{A_L\} = \begin{Bmatrix} 1,28 \\ -0,72 \\ 14,72 \\ -19,44 \end{Bmatrix}$$

Elemento 2  $\{A_L\}^{(2)} = \{F_{LEP}\}^{(2)} + [S_L]^{(2)} \{u_G\}^{(2)}$  (3.93)

$$\{A_L\}^{(2)} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \\ -10 \end{Bmatrix} + 10^3 \times \begin{bmatrix} 13,5 & 27 & -13,5 & 27 \\ 27 & 72 & -27 & 36 \\ -13,5 & -27 & 13,5 & -27 \\ 27 & 36 & -27 & 72 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0,14 \times 10^{-3} \\ 0 \\ 0,21 \times 10^{-3} \end{Bmatrix} \therefore$$

$$\{A_L\} = \begin{Bmatrix} 11,86 \\ 7,44 \\ 8,14 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Os esforços nas extremidades dos elementos 1 e 2 estão ilustrados na Figura 3-79 abaixo:

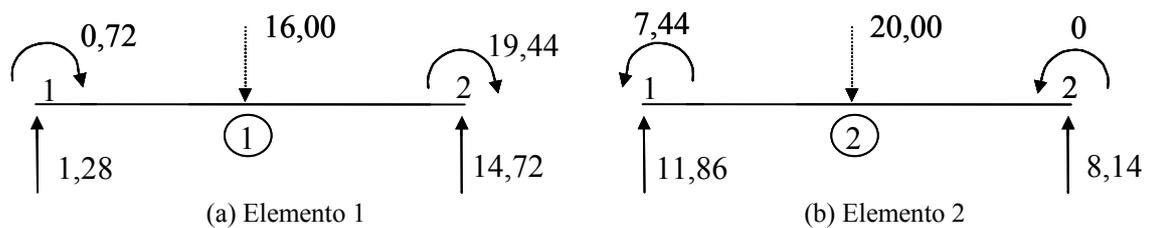


Figura 3-79: Esforços nos elementos 1 (a) e 2 (b).

A partir destes esforços nas extremidades e das cargas aplicadas nos elementos pode-se traçar os diagramas de esforços internos na viga contínua:

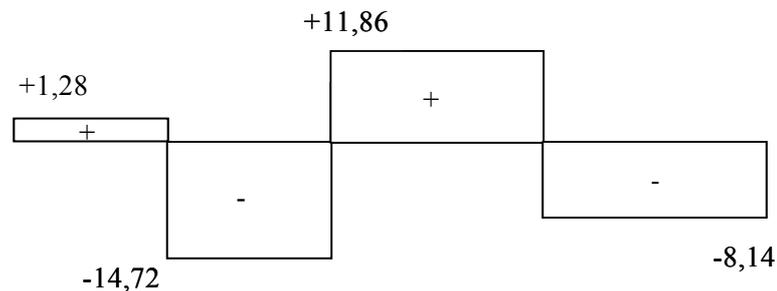


Figura 3-80: Diagrama de Esforço Cortante (kN)

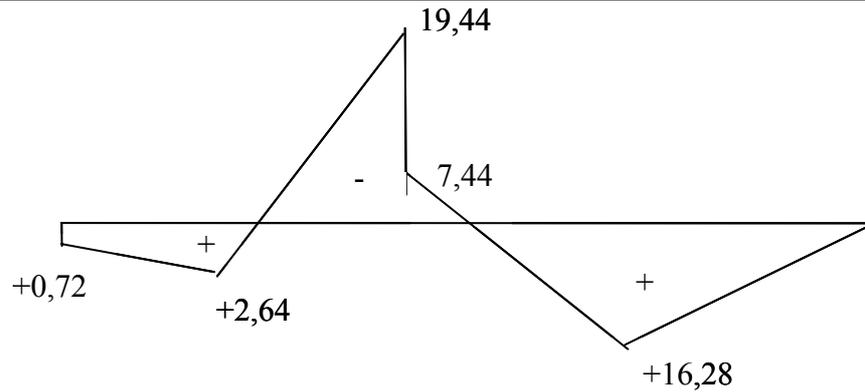


Figura 3-81: Diagrama de Momento Fletor (kN.m)

### 3.15.3. Exemplo 3 – Treliça plana

Seja a treliça plana mostrada na Figura 3-82, cujas rigidezes à tração das barras são  $(EA)_1 = 4$ ,  $(EA)_2 = 3$  e  $(EA)_3 = 5$ . Considere a incidência dos elementos como sendo

$$1 : 2 \rightarrow 1$$

$$2 : 3 \rightarrow 2$$

$$3 : 3 \rightarrow 1$$

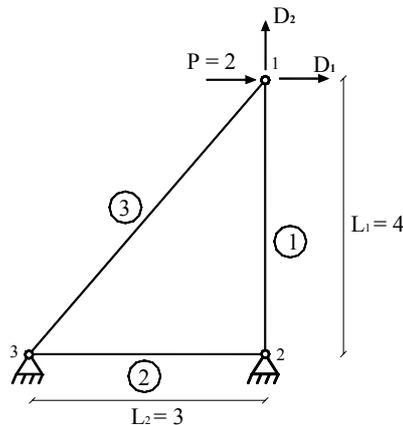


Figura 3-82: Treliça plana

- 1) Calcule: as matrizes de rigidez no sistema local  $[S_L]$ , as matrizes de rotação  $[\mathcal{R}]$  e as matrizes no sistema global  $[S_G]$  dos elementos da treliça;
- 2) Forme a matriz de rigidez da estrutura  $[S^*]$  usando a regra da correspondência;
- 3) Obtenha a matriz de rigidez da estrutura restringida  $[S]$  e
- 4) Resolva o sistema de equações  $[S] \{D\} = \{A\}$ , obtendo o vetor de deslocamentos  $\{D\}$ .

Resolução:

Matrizes de Rigidez no Sistema Local

Para todos os elementos, tem-se que

$$\frac{(EA)_i}{l_i} = 1.$$

Portanto todas as matrizes no sistema local são iguais a

$$[S_L^{(1)}] = [S_L^{(2)}] = [S_L^{(3)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matrizes de Rotação

Elemento 1  $\theta = 90^\circ$   $\cos\theta = 0$   $\text{sen}\theta = 1$   $[R^{(1)}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Elemento 2  $\theta = 0^\circ$   $\cos\theta = 1$   $\text{sen}\theta = 0$   $[R^{(2)}] = [I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Elemento 3  $\theta = 53^\circ$   $\cos\theta = 0,6$   $\text{sen}\theta = 0,8$   $[R^{(3)}] = \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \\ 0 & 0 & -0,8 & 0,6 \end{bmatrix}$

Matrizes de Rigidez no Sistema Global

Elemento 1  $[S_G^{(1)}] = [R^{(1)}]^T [S_L^{(1)}] [R^{(1)}] =$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Elemento 2  $[S_G^{(2)}] = [R^{(2)}]^T [S_L^{(2)}] [R^{(2)}] = [S_L^{(2)}]$

$$[S_G^{(2)}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Elemento 3  $[S_G^{(3)}] = [R^{(3)}]^T [S_L^{(3)}] [R^{(3)}] =$

$$\begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & 0 & 0 \\ -0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & 0,8 \\ 0 & 0 & -0,8 & 0,6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,6 & -0,8 & 0 & 0 \\ 0,8 & 0,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,6 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0,8 & 0,6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 & -0,6 & -0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,6 & -0,8 & 0,6 & 0,8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 & -0,36 & -0,48 \\ 0,48 & 0,64 & -0,48 & -0,64 \\ -0,36 & -0,48 & 0,36 & 0,48 \\ -0,48 & -0,64 & 0,48 & 0,64 \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez da Estrutura

Regra da Correspondência

Elemento	(1)	(2)	(3)	GL elemento
J → K	2 → 1	3 → 2	3 → 1	{u <sub>G</sub> }
2J - 1	3	5	5	1
2J	4	6	6	2
2K - 1	1	3	1	3
2K	2	4	2	4

$$[S]^* = \begin{bmatrix} S_{G33}^{(1)} + S_{G33}^{(3)} & S_{G34}^{(1)} + S_{G34}^{(3)} & S_{G31}^{(1)} & S_{G32}^{(1)} & S_{G31}^{(3)} & S_{G32}^{(3)} \\ & S_{G44}^{(1)} + S_{G44}^{(3)} & S_{G41}^{(1)} & S_{G42}^{(1)} & S_{G41}^{(3)} & S_{G42}^{(3)} \\ & & S_{G11}^{(1)} + S_{G33}^{(2)} & S_{G12}^{(1)} + S_{G34}^{(2)} & S_{G31}^{(2)} & S_{G32}^{(2)} \\ & & & S_{G22}^{(1)} + S_{G44}^{(2)} & S_{G41}^{(2)} & S_{G42}^{(2)} \\ & \text{Simétrica} & & & S_{G11}^{(2)} + S_{G11}^{(3)} & S_{G12}^{(2)} + S_{G12}^{(3)} \\ & & & & & S_{G22}^{(2)} + S_{G22}^{(3)} \end{bmatrix}$$

Portanto, tem-se que

$$[S]^* = \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 & 0 & 0 & -0,36 & -0,48 \\ & 1,64 & 0 & -1 & -0,48 & -0,64 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & \text{Simétrica} & & 1 & 0 & 0 \\ & & & & 1,36 & 1,48 \\ & & & & & 0,64 \end{bmatrix}$$

Para se obter a matriz de rigidez da estrutura restringida deve-se eliminar na matriz acima as colunas (e as linhas também, devido à simetria) correspondentes às direções restringidas (3, 4, 5 e 6 neste exemplo), resultando em:

$$[S] = \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 \\ 0,48 & 1,64 \end{bmatrix}$$

O vetor de ações também deve ser restringido, eliminando-se as linhas 3, 4, 5 e 6:

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Pode-se então escrever o sistema de equações da estrutura restringida:

$$[S] \cdot \{D\} = \{A\} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 \\ 0,48 & 1,64 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo-se este sistema de equações, obtêm-se o vetor de deslocamentos nodais da estrutura:

$$\{D\} = [S]^{-1} \cdot \{A\} \quad \therefore \quad \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,36 & 0,48 \\ 0,48 & 1,64 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 82/9 \\ -8/3 \end{Bmatrix}$$

A partir deste vetor de deslocamentos nodais obtêm-se as reações de apoio da estrutura e os esforços nos seus elementos.

### 3.15.4. Exemplo 4 – Pórtico plano

Seja o pórtico da Figura 3-83 cujas barras têm seção transversal constante de  $12 \times 40$  cm e material homogêneo com módulo de elasticidade  $E = 5 \times 10^6$  kN/m<sup>2</sup>. Calcule os deslocamentos nodais e as reações de apoio do pórtico.

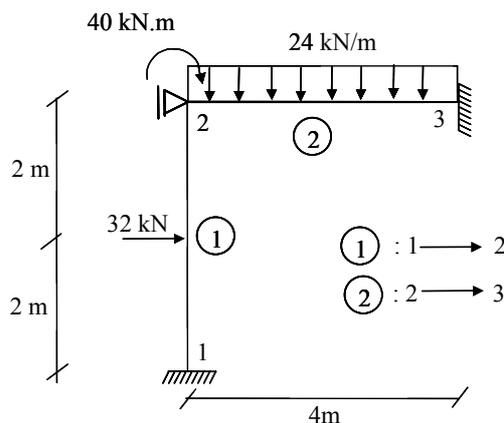


Figura 3-83: Pórtico plano

A estrutura é dividida em dois elementos e 3 nós. Cada nó tem três graus de liberdade, como mostra a Figura 3-84, logo o sistema de equações para a estrutura não-

restringida tem um total de 9 equações. Considerando os apoios restam apenas 2 direções livres, logo para o pórtico restringido o sistema de equações de equilíbrio terá 2 equações e 2 incógnitas, que são os deslocamentos do nó 2 nos graus de liberdade 5 e 6, mostrados na Figura 3-85.

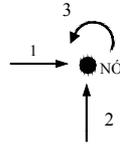


Figura 3-84: Graus de liberdade por nó

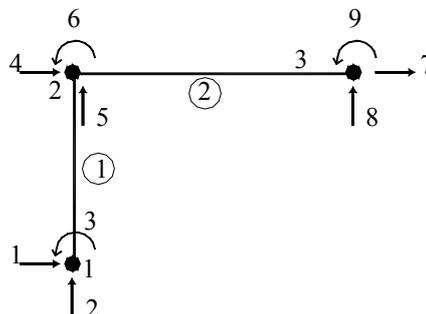


Figura 3-85 Graus de liberdade da estrutura

Matriz de rigidez dos elementos no sistema local

$$[S_L]^1 = [S_L]^2 = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 600 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 12 & 32 & 0 & -12 & 16 \\ -600 & 0 & 0 & 600 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 12 & 16 & 0 & -12 & 32 \end{bmatrix}$$

Matriz de rotação dos elementos

Elemento 1  $\theta = 90^\circ$   $\cos\theta = 0$   $\text{sen}\theta = 1$   $[R]^1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Elemento 2  $\theta = 0^\circ$   $[R]^2 = [I]$

Matriz de rigidez dos elementos no sistema global

$$[S_G]^1 = [R]^T [S_L]^1 [R] = 10^2 \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 6 & 0 & -12 & -6 & 0 & -12 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 600 & 0 & 0 & -600 & 0 \\ -12 & 0 & 32 & 12 & 0 & 16 \\ -6 & 0 & 12 & 6 & 0 & 12 \\ 0 & -600 & 0 & 0 & 600 & 0 \\ -12 & 0 & 16 & 12 & 0 & 32 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$[S_G]^2 = [S_L]^2 = 10^2 \cdot \begin{matrix} & \begin{matrix} 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 600 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 & -6 & 12 \\ 0 & 12 & 32 & 0 & -12 & 16 \\ -600 & 0 & 0 & 600 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 12 & 16 & 0 & -12 & 32 \end{matrix} & \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \end{matrix}$$

Regra da Correspondência

Elemento J→K	1 1→2	2 2→3	{u <sub>G</sub> }
3J-2	1	4	1
3J-1	2	5	2
3J	3	6	3
3K-2	4	7	4
3K-1	5	8	5
3K	6	9	6

Indicados nas matrizes  $[S_G]$  e nos vetores  $\{F_{GEP}\}$

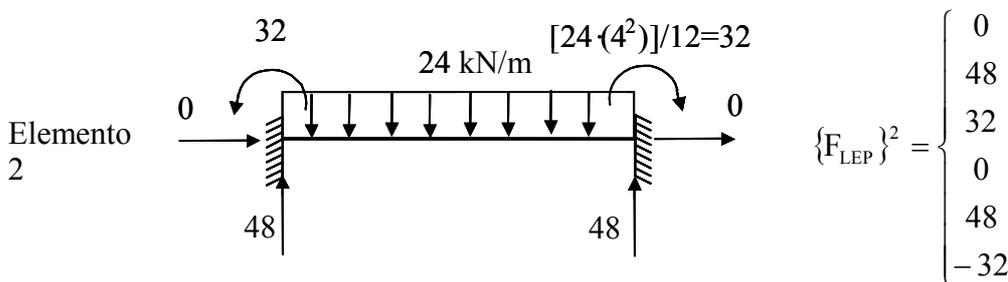
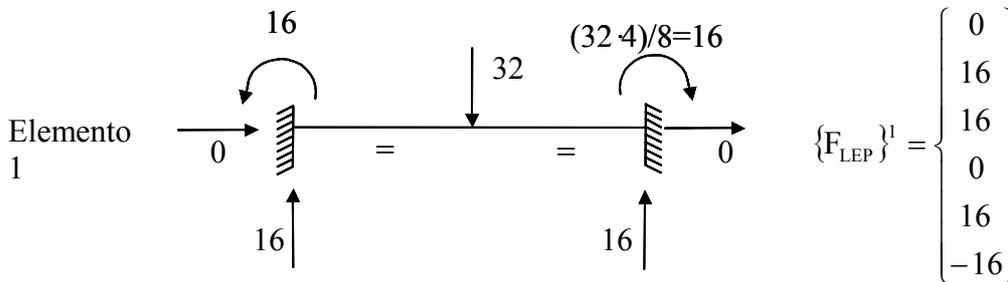
No vetor de ações aplicadas nos nós,  $\{A\}^*$ , conhece-se  $A_5=0$ ,  $A_6=-40$

E no vetor de deslocamentos nodais,  $\{D\}^*$ , são incógnitas  $D_5=?$ ,  $D_6=?$

Montagem da matriz de rigidez da estrutura  $[S]^*$

$$[S^*] = 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & -12 & -6 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 32 & 12 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 12 & 6+600 & 0+0 & 12+0 & -600 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & 0 & 0+0 & 600+6 & 0+12 & 0 & -6 & 12 \\ -12 & 0 & 16 & 12+0 & 0+12 & 32+32 & 0 & -12 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 & 600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -12 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 16 & 0 & -12 & 32 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Vetor de esforços de engastamento perfeito no sistema local:



Vetor de Esforços de Engastamento Perfeito no Sistema Global

Elemento 1

$$\{F_{GEP}\}^1 = [gR]^{1T} \{F_{LEP}\}^1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 16 \\ 16 \\ 0 \\ 16 \\ -16 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16 \\ 0 \\ 16 \\ -16 \\ 0 \\ -16 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\text{Elemento 2} \quad \{F_{GEP}\}^2 = \{F_{LEP}\}^2 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 48 \\ 32 \\ 0 \\ 48 \\ -32 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Vetor de Esforços de Engastamento Perfeito da Estrutura

$$\{F_{GEP}\}^* = \begin{Bmatrix} -16 \\ 0 \\ 16 \\ -16+0 \\ 0+48 \\ -16+32 \\ 0 \\ 48 \\ -32 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16 \\ 0 \\ 16 \\ -16 \\ 48 \\ 16 \\ 0 \\ 48 \\ -32 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix}$$

Sistema de equações de equilíbrio para a estrutura não-restringida

$$\begin{Bmatrix} -16 \\ 0 \\ 16 \\ -16 \\ 48 \\ 16 \\ 0 \\ 48 \\ -32 \end{Bmatrix} + 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 6 & 0 & -12 & -6 & 0 & -12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 600 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 0 & 32 & 12 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 12 & 606 & 0 & 12 & -600 & 0 & 0 \\ 0 & -600 & 0 & 0 & 606 & 12 & 0 & -6 & 12 \\ -12 & 0 & 16 & 12 & 12 & 64 & 0 & -12 & 16 \\ 0 & 0 & 0 & -600 & 0 & 0 & 600 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 & -12 & 0 & 6 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 16 & 0 & -12 & 32 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ D_3 \\ D_4 \\ D_5 \\ D_6 \\ D_7 \\ D_8 \\ D_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ 0 \\ -4 \\ R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{Bmatrix}$$

Restringe-se a estrutura impondo-se as condições de contorno na estrutura:  $D_1=D_2=D_3=D_4=D_7=D_8=D_9=0$ , o que corresponde a eliminar as colunas e linhas de  $[S]^*$  no sistema acima, correspondentes às direções restringidas por apoios. Obtém-se assim o sistema de equações equilíbrio de forças para a estrutura restringida:

$$\begin{Bmatrix} 48 \\ 16 \end{Bmatrix} + 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 606 & 12 \\ 12 & 64 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -40 \end{Bmatrix}$$

$$10^2 \cdot \begin{bmatrix} 606 & 12 \\ 12 & 64 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -48 \\ -56 \end{Bmatrix}$$

Resolva-se o sistema de equações, obtendo-se os deslocamentos nodais:

$$\begin{Bmatrix} D_5 \\ D_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{10^2} \cdot \frac{1}{38640} \begin{bmatrix} 64 & -12 \\ -12 & 606 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -48 \\ -56 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0,0621 \cdot 10^{-2} \\ -0,8634 \cdot 10^{-2} \end{Bmatrix}$$

$$D_5 \cong -0,06 \cdot 10^{-2} m = -0,62 mm$$

$$D_6 \cong -0,86 \cdot 10^{-2} rad = 0,5^\circ$$

Para se obter as reações de apoio, inserem-se estes deslocamentos no sistema de equações de equilíbrio para a estrutura não-restringida:

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -16 \\ 0 \\ 16 \\ -16 \end{Bmatrix} + 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ -600 & 0 \\ 0 & 16 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,062 \\ -0,863 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-2} = \begin{Bmatrix} -5,64 \\ 37,26 \\ 2,19 \\ -26,36 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{kN} \\ \text{kN} \\ \text{kN} \cdot \text{m} \\ \text{kN} \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} R_7 \\ R_8 \\ R_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 48 \\ -32 \end{Bmatrix} + 10^2 \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & -12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0,062 \\ -0,863 \end{Bmatrix} \cdot 10^{-2} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 58,73 \\ -46,56 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \text{kN} \\ \text{kN} \\ \text{kN} \cdot \text{m} \end{matrix}$$

As reações de apoio estão ilustradas na Figura 3-86. Recomenda-se verificar o equilíbrio da estrutura, aplicando-se as 3 equações de equilíbrio da estática.

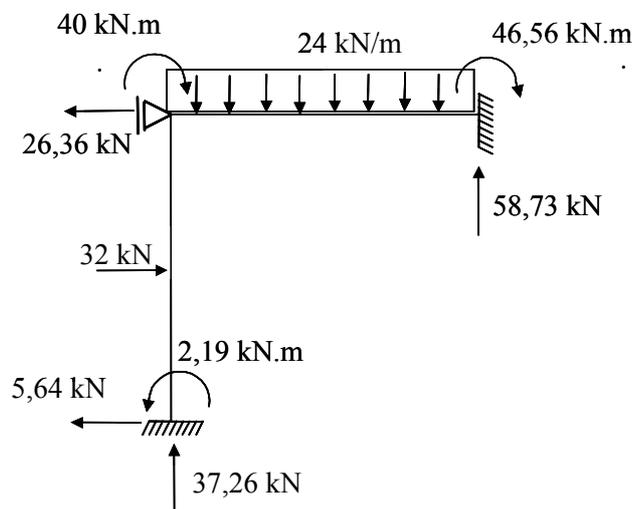


Figura 3-86 Reações de apoio no pórtico.

## 4. PROCESSO DE CROSS

Baseado no método dos deslocamentos

Equação de equilíbrio de forças em torno dos nós

O Processo de Cross ou da Distribuição de Momentos consiste em obter os esforços nas barras por equilíbrio de nó, distribuindo o momento total no nó (o aplicado mais os de engastamento perfeito das barras que concorrem no nó) de acordo com a rigidez das barras. Este processo foi proposto por Hardy Cross, em 1932, no artigo intitulado *Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed End Moment*, publicado no Proceedings of American Society of Civil Engineers (Transactions). Concebidos principalmente para o cálculo de sistemas de nós fixos cujos nós estão submetidos unicamente a rotações, o método foi generalizado para os sistemas de nós deslocáveis, ou seja, que podem sofrer translações.

### 4.1. PRINCÍPIOS DO PROCESSO

O processo desenvolvido por Cross é inspirado em um processo matemático de resolução por aproximações sucessivas dos sistemas lineares. Supõe-se, inicialmente, que os nós da estrutura estão bloqueados e não podem sofrer nenhuma rotação. Depois da aplicação das cargas, os nós são liberados sucessivamente, os quais sofrem rotação. Em seguida, o nó liberado é bloqueado antes de passar ao nó seguinte. Estas operações são repetidas até que a liberação dos nós não provoque mais rotações. Isto significa que o estado de equilíbrio foi atingido.

Segundo Cross, a idéia principal do processo de resolução de estruturas hiperestáticas resume-se em simples operações aritméticas, o que não é inteiramente verdadeiro. O processo de Cross, para vigas de seção constante, depende da solução de três problemas: a determinação dos momentos de engastamento perfeito, da rigidez de cada viga e do fator de distribuição de carga de cada membro da estrutura em consideração.

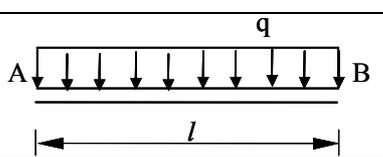
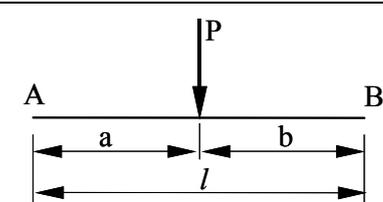
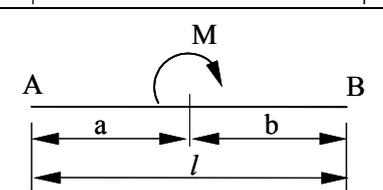
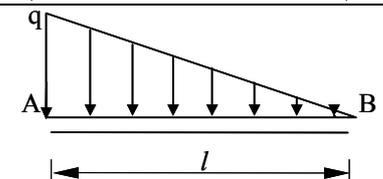
Sobre o Método de Distribuição de Momentos, Cross escreveu que deveria ser imaginado que todos os nós da estrutura não pudessem girar e que os momentos de engastamento perfeito nas extremidades das barras fossem calculados para esta condição. Para cada nó da estrutura, distribui-se os momentos de engastamento perfeito

desequilibrados entre os membros conectados na proporção de cada rigidez. Multiplica-se o momento distribuído para cada membro para o nó pelo fator de distribuição de carga. Distribui-se somente a carga recebida. Repete-se este processo até que os momentos transportados sejam tão pequenos que possam ser negligenciados. Somam-se todos os momentos das extremidades das barras de cada membro a fim de obter o momento verdadeiro. Para um estrutura com um único nó a solução é exata, mas para mais de um nó, a solução é aproximada (Processo Iterativo).

#### 4.2. MOMENTOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO

Os momentos de engastamento perfeito já são conhecidos e podem ser encontrados em tabelas na bibliografia indicada. A Tabela 4-1 apresenta a expressão de alguns momentos de engastamento em função do carregamento e do tipo de vinculação das barras.

Tabela 4-1: Momentos de engastamento perfeito

	A  B 	A  B 
	$M_A = +\frac{ql^2}{12}$ $M_B = -\frac{ql^2}{12}$	$M_A = +\frac{ql^2}{8}$
	$M_A = +\frac{Pab^2}{l^2}$ $M_B = -\frac{Pa^2b}{l^2}$	$M_A = +\frac{Pab}{2l^2}(l+b)$
	$M_A = -M\frac{b}{l}\left(2 - \frac{3b}{l}\right)$ $M_B = -M\frac{a}{l}\left(2 - \frac{3a}{l}\right)$	$M_A = +\frac{M}{2}\left(\frac{3b^2}{l^2} - 1\right)$
		

### 4.3. RIGIDEZ DAS BARRAS E COEFICIENTES DE TRANSMISSÃO

A rigidez de uma barra ( $k$ ) em nó é o valor do momento aplicado nesse nó capaz de provocar um giro unitário neste nó.

#### 4.3.1. Barra bi-engastada

A rigidez da barra bi-engastada (Figura 4-1b) é dado por

$$k = \frac{4EI}{l}, \quad (4.1)$$

o qual equivale ao momento que surge no nó A devido ao giro unitário desse mesmo nó.

O giro unitário do nó A produz o aparecimento de um momento no nó B de mesmo sentido da rotação em A (Figura 4-1b). Desta forma, o coeficiente de transmissão de um momento de um nó para outro nó engastado, supondo a barra com inércia constante, é definido como sendo a relação

$$t_{AB} = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{2}, \quad (4.2)$$

sendo  $M_B$  e  $M_A$  os momentos nas extremidades B e A da barra, devido ao giro unitário na extremidade A.

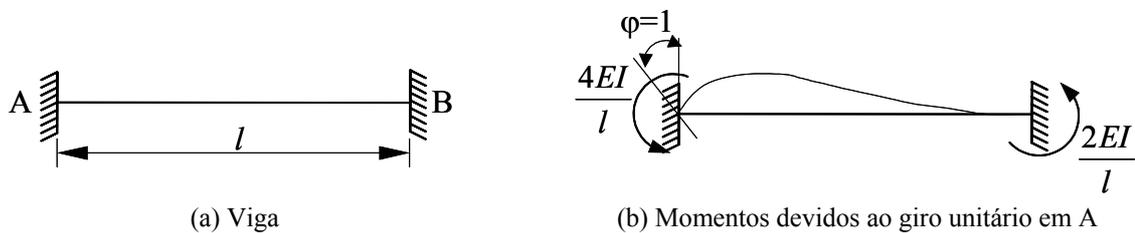


Figura 4-1: Viga bi-engastada

#### 4.3.2. Viga engastada-rotulada

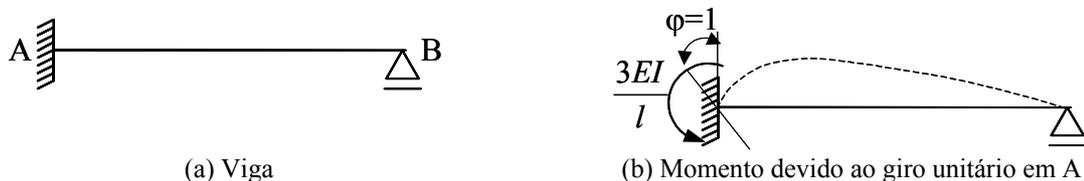


Figura 4-2: Viga engastada-rotulada

#### 4.4. CONVENÇÃO DE SINAIS

Será utilizada a convenção de Grinter. No cálculo de equilíbrio dos nós será considerado positivo o momento que atua no nó no sentido horário (mantendo a convenção de esforço positivo na extremidade da barra no sentido anti-horário).

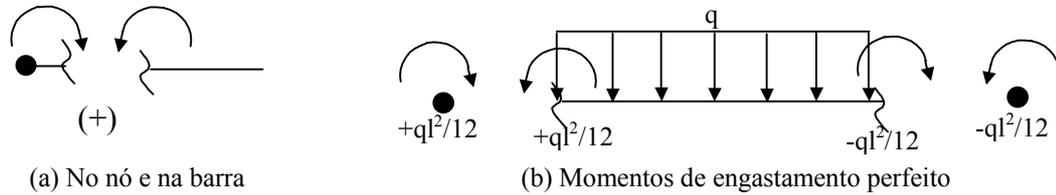


Figura 4-3: Convenção de momentos positivos

#### 4.5. COEFICIENTES DE DISTRIBUIÇÃO

Seja o pórtico plano indeslocável mostrado na Figura 4-4. O único grau de liberdade da estrutura é a rotação ( $\varphi$ ) do nó A.

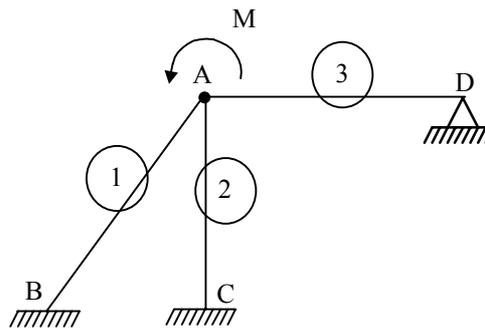


Figura 4-4: Pórtico plano indeslocável

Devido à atuação do binário M (Figura 4-5a), as barras irão se deformar e os esforços internos nas extremidades das mesmas serão proporcional à rigidez das mesmas e à rotação sofrida pelo nó A (Figura 4-5b).

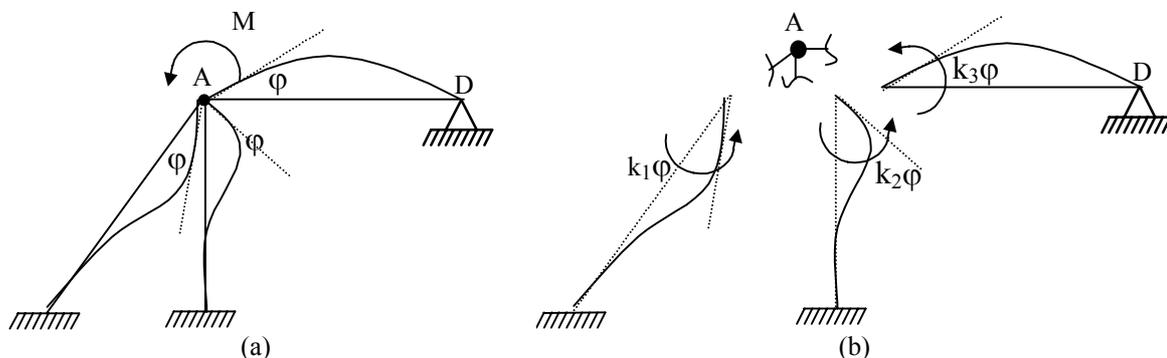


Figura 4-5: Pórtico sujeito a um binário M

No nó, estes momentos atuam com o sentido inverso pois representam os esforços das barras sobre o nó (Figura 4-6). Para que haja equilíbrio deve-se ter  $\sum M_A = 0$ .

$$k_1\varphi + k_2\varphi + k_3\varphi - M = 0 \text{ ou}$$

$$(k_1 + k_2 + k_3) \cdot \varphi = M . \tag{4.3}$$

ou

$$\sum k_i\varphi = M . \tag{4.4}$$

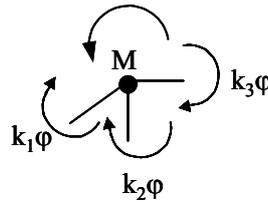


Figura 4-6: Momentos atuando no nó A da Figura 4-5b.

Como  $M$  e  $k_i$  são conhecidos, logo obtém-se o valor da rotação  $\varphi$  em A.

$$\varphi = \frac{M}{\sum k_i} . \tag{4.5}$$

Os momentos nas extremidades dos elementos são determinados por

$$M_1 = k_1\varphi = k_1 \frac{M}{\sum k_i} , \tag{4.6}$$

$$M_2 = k_2\varphi = k_2 \frac{M}{\sum k_i} \text{ e} \tag{4.7}$$

$$M_3 = k_3\varphi = k_3 \frac{M}{\sum k_i} . \tag{4.8}$$

Donde podemos concluir que um binário aplicado no nó irá se distribuir pelas barras que concorrem neste nó proporcionalmente à rigidez de cada uma das barras deste nó.

Chama-se de coeficiente de distribuição ( $\beta_i$ ), da barra  $i$ , a relação

$$\beta_i = \frac{k_i}{\sum k_i} . \tag{4.9}$$

Portanto

$$M_i = \beta_i M . \tag{4.10}$$

Já foram introduzidos todos os conceitos necessários à utilização do processo de Cross. No caso de existirem cargas atuando ao longo das barras, os esforços de engastamento perfeito devem ser levados em conta no equilíbrio dos nós.

#### 4.6. PROCESSO DE CROSS PARA ESTRUTURAS INDESLOCÁVEIS

##### 4.6.1. Processo de Cross para um nó apenas (um grau de liberdade-rotação)

O Processo de Cross é baseado no Método dos Deslocamentos. Consiste em obter os esforços nas barras fazendo-se equilíbrio de esforços (momentos) em torno dos nós: o momento atuante no nó (momento aplicado diretamente no nó + momento de engastamento perfeito, devido a cargas nas barras) é distribuído pelas barras que concorrem no nó de acordo com a rigidez das barras.

Fixando-se os nós, calculam-se os momentos de engastamento perfeito devidos às cargas nos elementos (transferidos para os nós utilizando-se a convenção de sinal de Grinter - horário +) e somam-se aos momentos aplicados nos nós. Depois calculam-se a rigidez das barras ( $k_i$ ), coeficientes de distribuição ( $\beta_i$ ) e coeficientes de transmissão ( $t_i$ ). Em seguida distribui-se o momento total no nó pelas barras usando-se os coeficientes de distribuição de forma a obter equilíbrio no nó ( $\sum M=0$ ). Os momentos obtidos nas barras ligadas ao nó devem ser transmitidos para a outra extremidade de acordo com seu coeficiente de transmissão. Finalmente, traça-se o diagrama de momentos fletores.

##### 4.6.1.1. Exemplo 1- Pórtico

Seja o pórtico indeslocável mostrado na Figura 4-7, cuja rigidez à flexão ( $EI$ ) é constante.

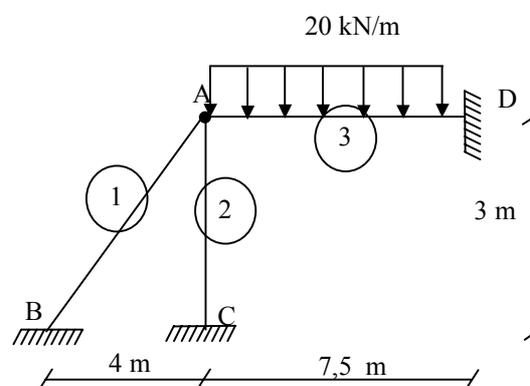


Figura 4-7: Pórtico indeslocável

Para resolver a estrutura da Figura 4-7 utilizando o Processo de Cross, primeiramente fixa-se o nó e calculam-se os momentos de engastamento perfeito da estrutura.

$$\begin{cases} M_A = \frac{+20 \cdot (7,5)^2}{12} = +93,75 \text{ kN.m} \\ M_D = -93,75 \text{ kN.m} \end{cases} \quad (4.11)$$

Após determinam-se as rigidezes das barras (Adotar  $EI=30$ ):

$$k_1 = \frac{4EI}{5} = 24, \quad (4.12)$$

$$k_2 = \frac{4EI}{3} = 40 \text{ e} \quad (4.13)$$

$$k_3 = \frac{4EI}{7,5} = 16. \quad (4.14)$$

O coeficiente de distribuição  $\beta_i$  é dado por

$$\beta_i = \frac{k_i}{\sum k_i}, \quad (4.15)$$

Logo,

$$\beta_1 = \frac{24}{80} = 0,30,$$

$$\beta_2 = \frac{40}{80} = 0,50 \text{ e}$$

$$\beta_3 = \frac{16}{80} = 0,20.$$

O somatório de todos os  $\beta_i$  deve ser 1:

$$\sum \beta_i = 1. \quad (4.16)$$

Em seguida efetua-se o equilíbrio do nó, obtendo-se assim o momento nas barras (Figura 4-8).

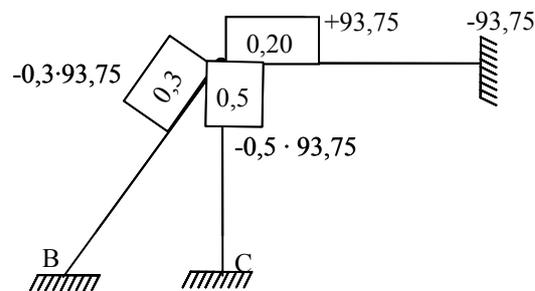


Figura 4-8: Equilíbrio do nó

Após os momentos nas barras terem sido determinados, efetua-se a transmissão dos momentos para as outras extremidades (Figura 4-9), obtendo-se os momentos finais. Nas barras, os momentos finais,  $M > 0$  (anti-horário +) e  $M < 0$  (horário -).

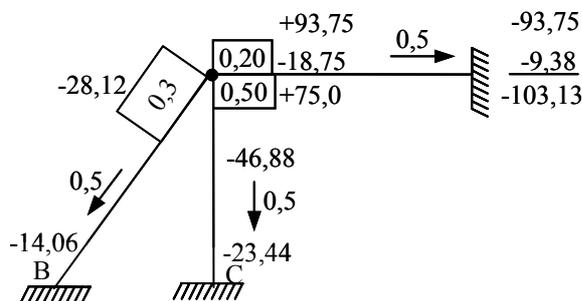


Figura 4-9: Distribuição dos momentos

O diagrama de momento fletor do pórtico da Figura 4-7 é mostrado na Figura 4-10.

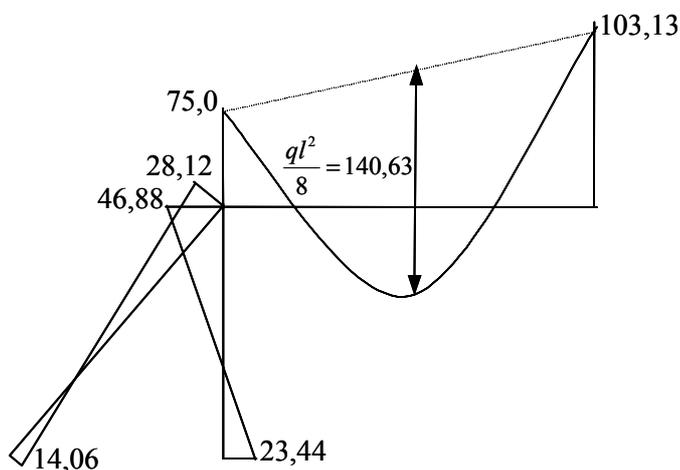


Figura 4-10: Diagrama de momentos fletores

O *site* <http://isabtp.univ-pau.fr/~clb/rdm/isa2/Codes/HTML/cross/cross.html> apresenta uma animação referente ao Processo de Cross para vigas contínuas. Ela permite ao aluno compreender a distribuição de momentos entre os nós quando utilizado o Processo de Cross. Aconselha-se descobrir o Processo de Cross através deste *site*, acompanhando os exercícios nele resolvidos e resolvendo aqueles que são propostos no estudo dirigido.

4.6.1.2. Exemplo 2 - Viga contínua

Seja a viga contínua mostrada na Figura 4-11, cuja rigidez à flexão ( $EI$ ) é constante.

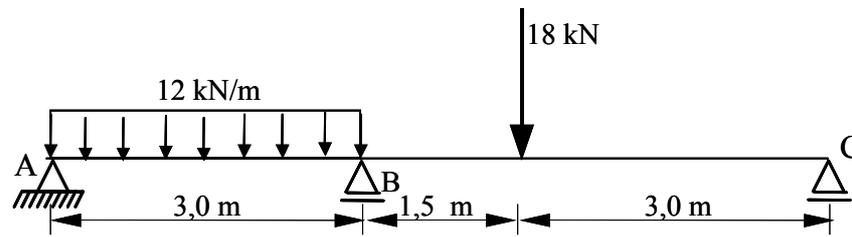


Figura 4-11: Viga contínua

Para resolver a viga contínua da Figura 4-11, primeiramente, fixa-se o giro do nó B (Figura 4-12a) e calculam-se momentos de engastamento perfeito devidos às cargas nas barras (Figura 4-12b e c). Ver Tabela I de SUSSEKIND, 1994, v.3, página 17.

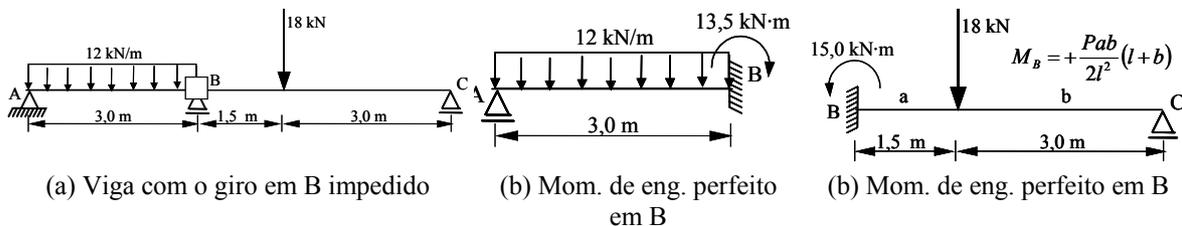


Figura 4-12: Viga contínua e os seus momentos de engastamento perfeito

Verifica-se que o nó B da viga está desequilibrado de uma parcela  $\Delta M_B$ , como ilustrado na Figura 4-13. Esta parcela desequilibrante do momento deve ser repartida entre as barras que concorrem neste nó na proporção dos coeficientes de distribuição.

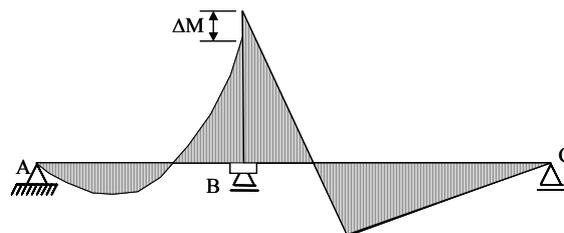


Figura 4-13: Viga contínua com os momentos de engastamento perfeito em cada tramo

Então calculam-se os coeficientes de distribuição a partir das rigidezes das barras (usar  $EI=9$ ) a fim de efetuar o equilíbrio do nó (Figura 4-14).

$$k_1 = \frac{3EI}{l_1} = \frac{3 \cdot 9}{3} = 9 \rightarrow \beta_1 = \frac{9}{15} = 0,6 \rightarrow t_1 = 0$$

$$k_2 = \frac{3EI}{l_2} = \frac{3 \cdot 9}{4,5} = 6 \rightarrow \beta_2 = \frac{6}{15} = 0,4 \rightarrow t_2 = 0$$

$$\sum k_i = 15$$

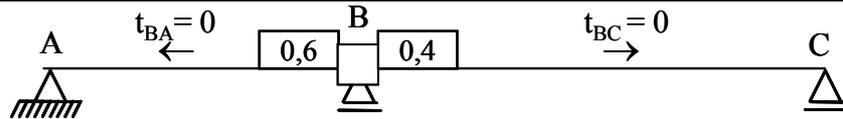


Figura 4-14: Coeficientes de distribuição e de transmissão

Após, calcula-se a parcela desequilibrante do momento no nó e distribui-se esta parcela entre as barras concorrentes a este nó, na proporção dos coeficientes de distribuição

$$\Delta M_B = 15 - 13,5 = 1,5$$

$$M_1 \rightarrow (-0,6) \cdot (1,5) = -0,9$$

$$M_2 \rightarrow (-0,4) \cdot (1,5) = -0,6$$

Efetuando-se o equilíbrio dos momentos, encontra-se o momento no apoio interno igual a 14,4 kN.m (Figura 4-15)

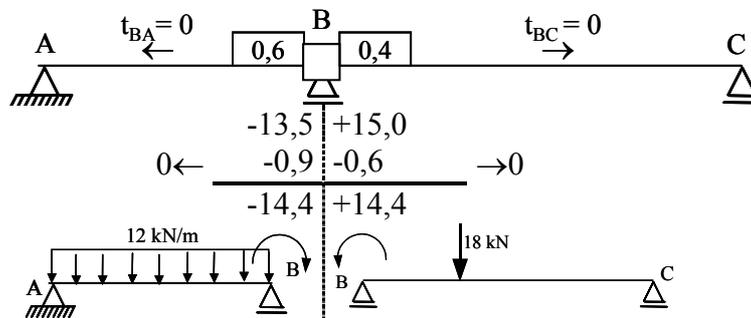


Figura 4-15: Equilíbrio e transmissão dos momentos

As reações podem ser obtidas a partir da equações de equilíbrio da estática, como mostrado na Figura 4-16. A partir dos valores das reações é possível determinar o ponto de momento máximo e traçar o diagrama de esforço cortante da viga.

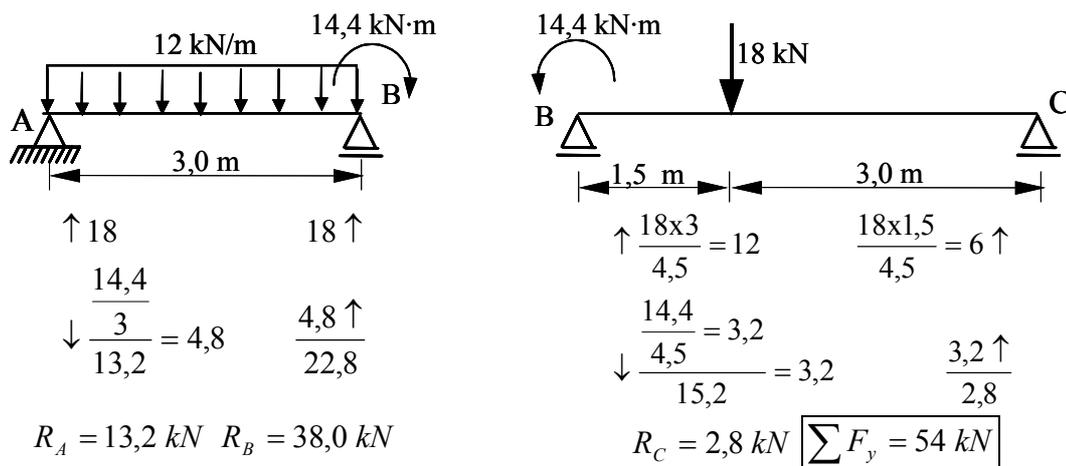


Figura 4-16: Reações da viga contínua

O diagrama de momentos fletores da viga contínua é ilustrado na Figura 4-17. O Aluno deve traçar o diagrama de esforços cortantes no espaço indicado desta mesma

figura, especificando a posição dos esforços cortantes nulos e calculando os valores dos momentos positivos máximos.

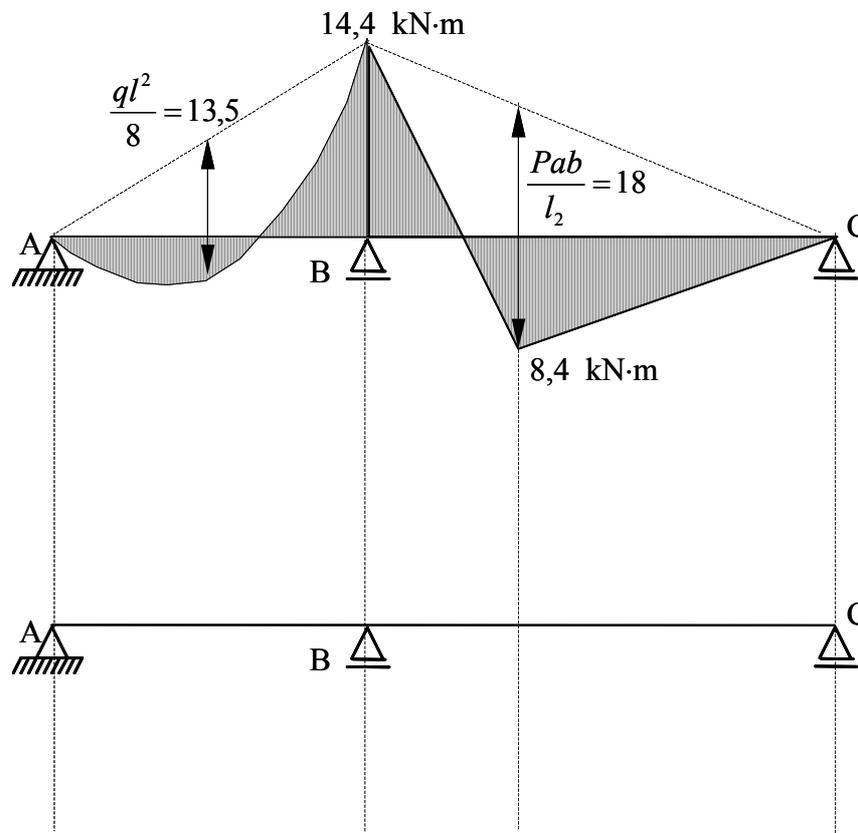


Figura 4-17: Diagramas finais de momentos fletores e esforços cortantes

#### 4.6.1.3. Exemplo 3 – Viga contínua com engaste

Seja a viga mostrada na Figura 4-18, cuja rigidez à flexão ( $EI$ ) é constante.

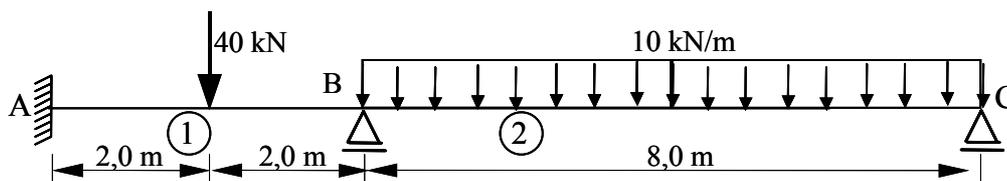


Figura 4-18: Viga contínua com engaste

Para resolver esta estrutura pelo Processo de Cross, inicialmente, fixam-se os nós deslocáveis. Neste caso, fixa-se o nó B (Figura 4-19) e determinam-se os momentos de engastamento perfeito em cada barra (Figura 4-20).

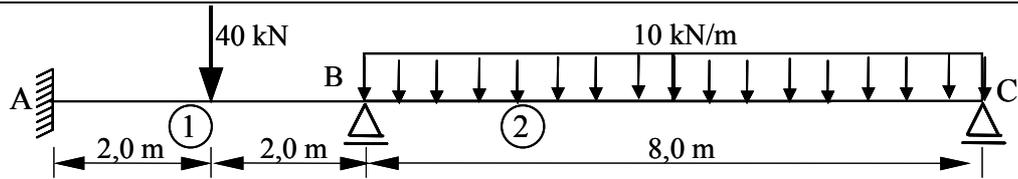


Figura 4-19: Viga com o giro do nó B restrigido

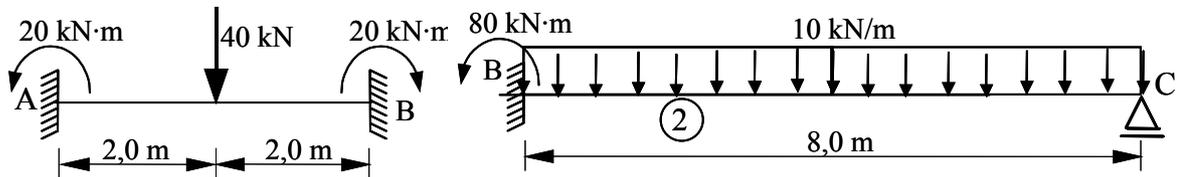


Figura 4-20: Momentos de engastamento perfeito

Após os momentos engastamento perfeito terem sido determinados, passa-se a determinação das rigidezes das barras. A partir delas serão calculados os coeficientes de distribuição ( $\beta_i$ ) e de transmissão (usar  $EI=8$ ).

$$k_1 = \frac{4EI}{l_1} = \frac{4 \cdot 8}{4} = 8$$

$$k_2 = \frac{3EI}{l_2} = \frac{3 \cdot 8}{8} = 3$$

$$\sum_{i=1}^2 k_i = 11$$

$$\beta_1 = \frac{8}{11} = 0,727$$

$$\beta_2 = \frac{3}{11} = 0,273$$

$$t_1 = 0,5 \text{ e } t_2 = 0.$$

De posse dos momentos de engastamento perfeito, do coeficiente de transmissão e de distribuição, passa-se ao equilíbrio do nó B e a transmissão dos momentos para as outras extremidades da barra.

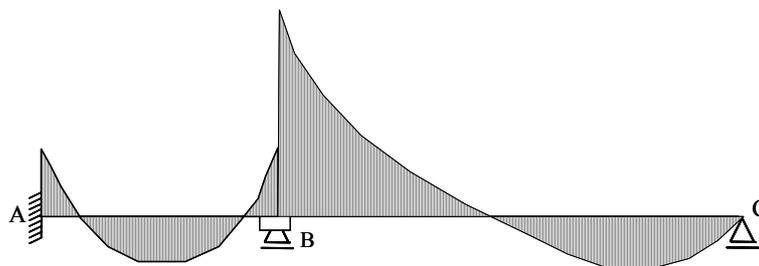


Figura 4-21: Momentos de engastamento perfeito

A diferença dos momentos aplicados no nó é  $\Delta M_B = +60$ , portanto a parcela que cabe a cada barra é  $M_1 = -0,727 \cdot 60 = -43,62$  e  $M_2 = -0,273 \cdot 60 = -16,38$  (Figura 4-22).

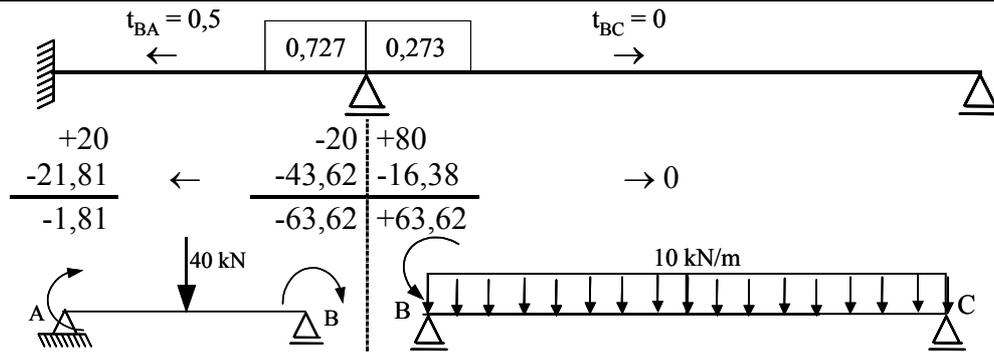


Figura 4-22: Equilíbrio do nó B e transmissão dos momentos

Efetuada o equilíbrio do nó B, obtêm-se os momentos no engaste A e no apoio B. Dessa forma, as reações nos apoios podem ser determinadas utilizando as equações de equilíbrio da estática e o diagrama de momentos pode ser traçado pendurando-se na linha de fechamento o diagrama de momentos das cargas atuantes nos tramos (Figura 4-23), considerando estes tramos vigas isostática. O aluno deve completar a Figura 4-23, indicando o valor dos momentos positivos nos tramos e traçando o diagrama de esforços cortantes no espaço indicado.

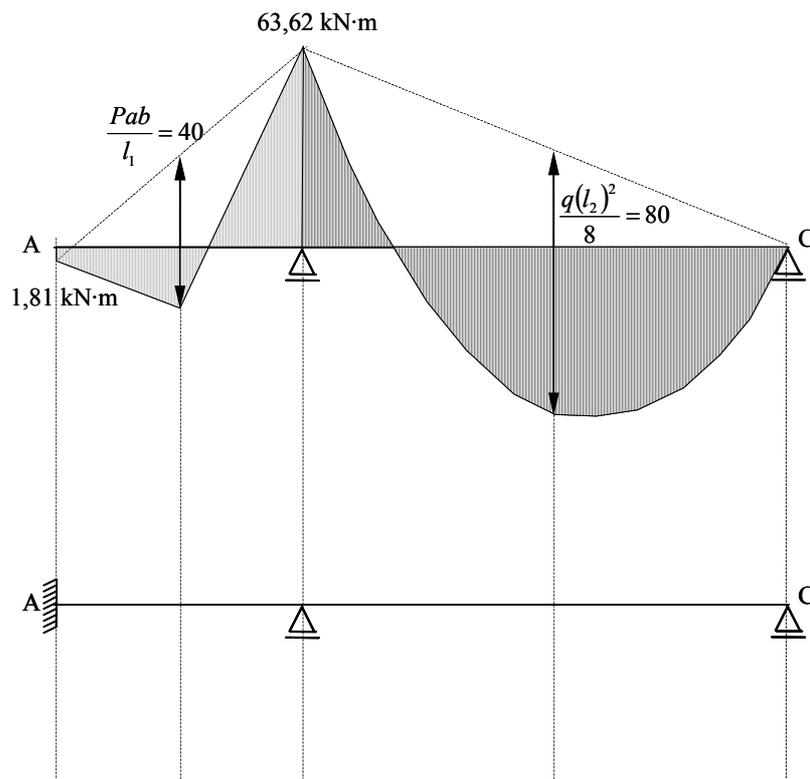


Figura 4-23: Diagramas finais de momentos fletores e de esforços cortantes

4.6.1.4. Viga contínua com balanço e momento aplicado no nó

Seja a viga mostrada na Figura 4-24, cuja rigidez à flexão ( $EI$ ) é constante.

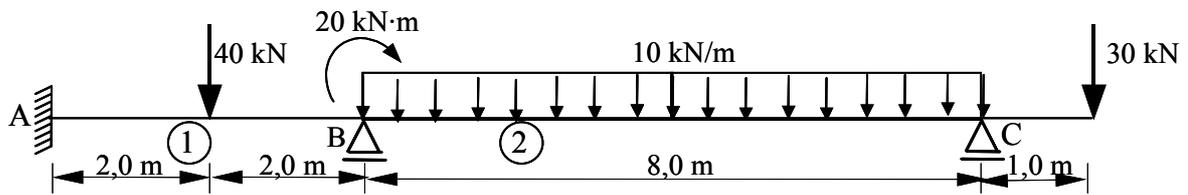


Figura 4-24: Viga contínua em balanço

Para resolver esta estrutura pelo Processo de Cross, fixam-se os nós deslocáveis (Figura 4-25). Neste caso, fixa-se o nó B e determinam-se os momentos de engastamento perfeito em cada barra (Figura 4-26). O balanço pode ser substituído por um sistema equivalente composto por uma força e um momento aplicado no apoio C (Figura 4-25).

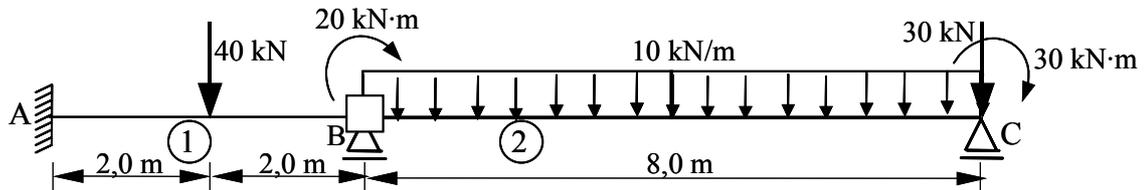


Figura 4-25: Viga contínua equivalente

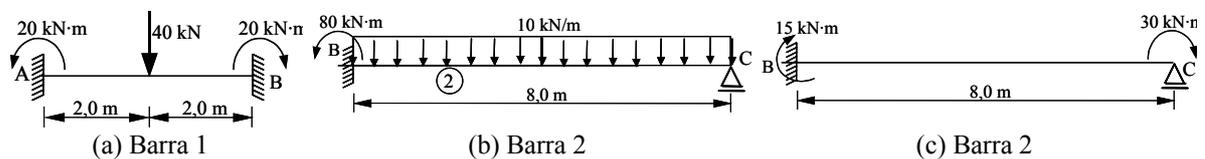
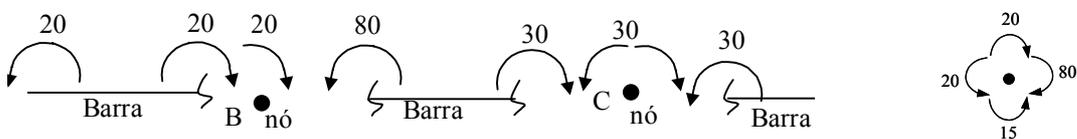


Figura 4-26: Momentos de engastamento perfeito nas barras

O momento do balanço (em C) de  $30 \text{ kN}\cdot\text{m}$  deve ser transmitido para a outra extremidade da barra BC ( $0,5 \cdot 30 \text{ kN}\cdot\text{m} = 15 \text{ kN}\cdot\text{m}$ ) (Figura 4-27b).



(a) Momentos nas extremidades das barras e nos nós (b) Momentos totais no nó B

Figura 4-27: Momentos nas extremidades das barras e nos nós

Nó B não está equilibrado (Figura 4-27b), sendo o momento desequilibrante dado por

$$\Delta M_B = +20 + 80 - 20 - 15 = +65 .$$

Para que haja equilíbrio, deve-se somar os momentos devido ao fato do nó ser deslocável e girar, causando esforços nas barras 1 e 2. O equilíbrio do nó é efetuado pela distribuição da parcela desequilibrante ( $\Delta M_B$ ) (Figura 4-28)

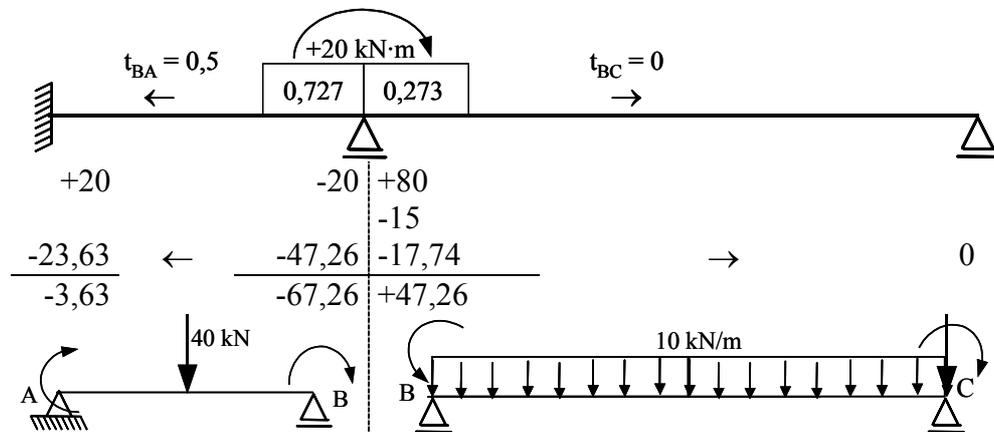


Figura 4-28: Equilíbrio do nó B e transmissão dos momentos

$$M_1 = -\beta_1 \cdot \Delta M_B = -0,727 \cdot 65 = -47,26 \text{ e}$$

$$M_2 = -\beta_2 \cdot \Delta M_B = -0,273 \cdot 65 = -17,74 .$$

O momento total na extremidade da barra (1) é

$$-20 - 47,28 = -67,26$$

e na barra (2) é

$$-15 + 80 - 17,74 = +47,26 .$$

A descontinuidade entre os esforços nas barras é devida ao momento aplicado (Figura 4-24).

O nó C não deve ser equilibrado, pois, a priori, ele já está equilibrado. Não há momento externo aplicado no nó ( $M=0$ ) e os esforços na barra à direita e à esquerda são conhecidos, iguais em módulo e de sentidos opostos. O apoio C está livre para girar, não surge nenhum esforço nas barras devido à rotação do apoio (é diferente do apoio B, que é um apoio interno e não está livre para girar). No entanto o esforço na barra (2) na extremidade direita devido ao balanço deve ser transmitido para a extremidade esquerda, uma vez que esta fica engastada ao fixarmos o nó B durante o Processo de Cross (ou Métodos dos deslocamentos).

Os momentos finais na estrutura são ilustrados na Figura 4-29. O aluno deve completar o gráfico de momentos, calculando os valores dos momentos positivos máximos. Deve também calcular as reações e os esforços cortantes que atuantes na

estrutura e traçar o gráfico correspondente os esforços cortantes no espaço reservado na Figura 4-29.

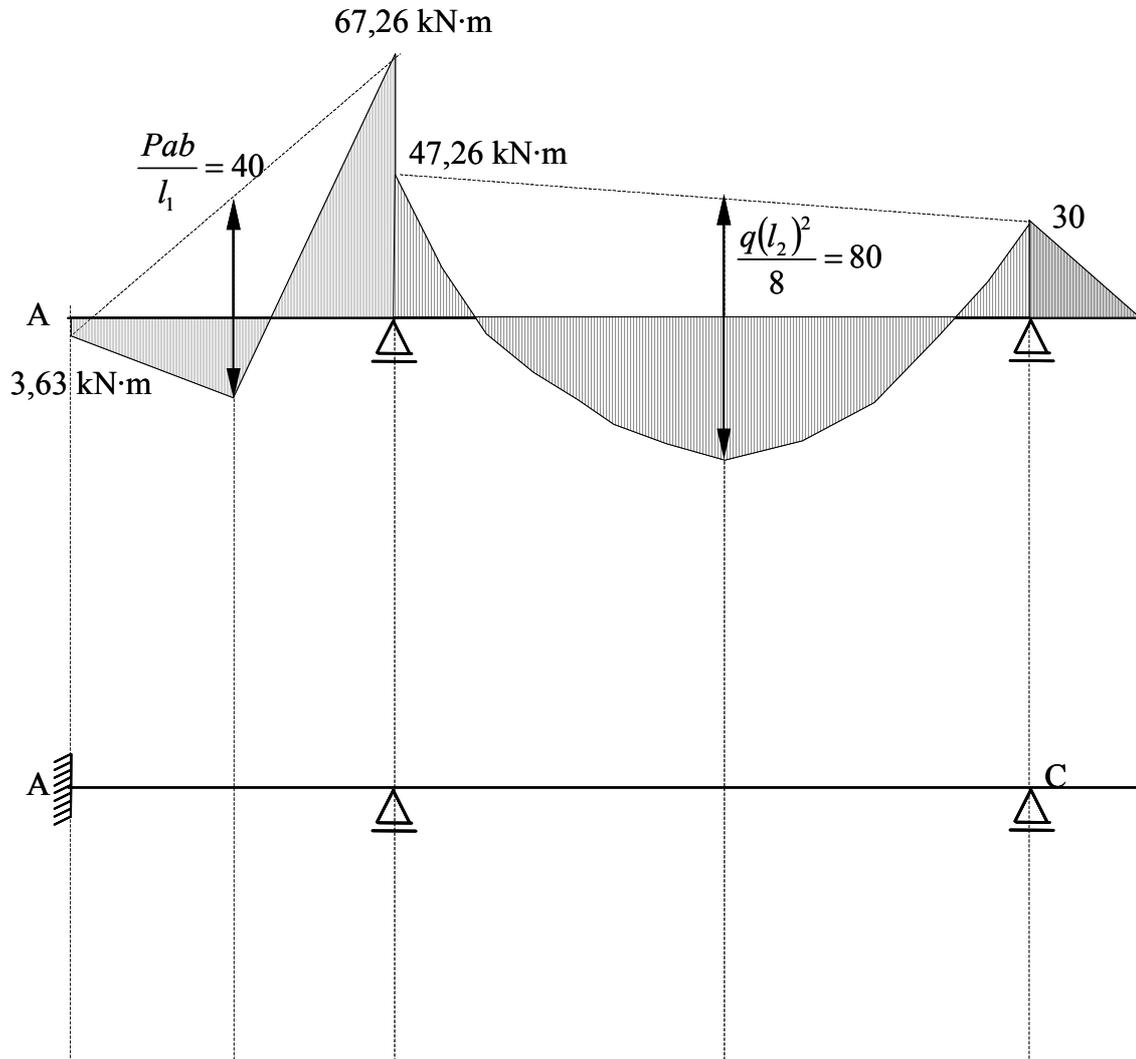


Figura 4-29: Diagrama final de momentos fletores da viga contínua

#### 4.6.2. Processo de Cross para dois ou mais nós

Agora estudar-se-á o Processo de Cross para dois ou mais nós. O processo é iniciado pelo nó mais desequilibrado e os momentos que surgem devido à rotação do nó são somados para equilibrar este nó. Estes momentos são transmitidos aos nós adjacentes pelos coeficientes de transmissão. Passa-se para o próximo nó desequilibrado e assim sucessivamente até se chegar a um valor desprezível de momento a ser transmitido ( $\sim 0,1$ ). Trata-se de um processo iterativo.

4.6.2.1. Exemplo 1 – Viga contínua

Seja a viga contínua mostrada na Figura 4-30, cuja inércia é constante. Para resolver esta estrutura pelo Processo de Cross, fixam-se os nós deslocáveis. Neste caso, fixam-se os nós B e C e determinam-se os momentos de engastamento perfeito em cada barra (Figura 4-31).

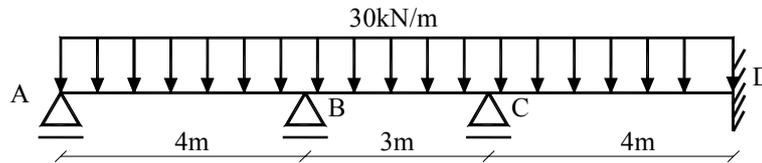


Figura 4-30: Viga contínua

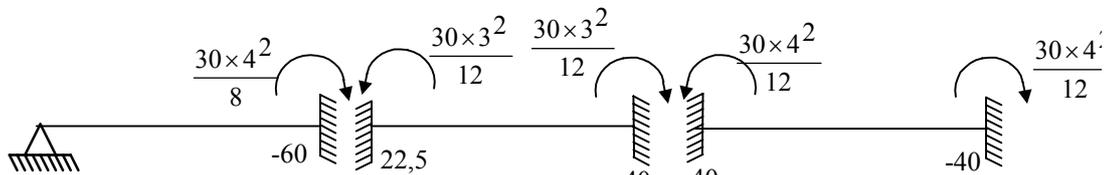


Figura 4-31: Momentos de engastamento perfeito das barras

Deve-se calcular a rigidez das barras, em seguida os coeficientes de distribuição e transmissão ( $EI=12$ ).

$$k_1 = \frac{3EI}{4m} = 9,$$

$$k_2 = \frac{4EI}{3m} = 16,$$

$$k_3 = \frac{4EI}{4m} = 12,$$

$$t_1 = 0, t_2 = 0,5 \text{ e } t_3 = 0,5.$$

Deve-se calcular a rigidez relativa das barras que concorrem em cada nó a fim de determinar o coeficiente de distribuição. No nó B, esses parâmetros são dados por

$$k_1 = 9, k_2 = 16,$$

$$\sum_{i=1}^{n^\circ \text{ no}} k_i = 25,$$

$$\beta_1 = 0,36 \text{ e } \beta_2 = 0,64.$$

No nó C, esses parâmetros são dados por

$$k_2 = 16, k_3 = 12,$$

$$\sum_{i=1}^{n^{\circ} \text{ no}} k_i = 28,$$

$$\beta_1 = 0,57 \text{ e } \beta_2 = 0,43.$$

Determinam-se as parcelas desequilibrantes nos nós B e C, respectivamente

$$\Delta M_B = -60 + 22,5 = -37,5 \text{ e}$$

$$\Delta M_C = +40 - 22,5 = +17,5.$$

Inicia-se o processo pelo nó mais desequilibrado (nó B). Como agora o equilíbrio do nó B depende não apenas da rotação em B, mas também da rotação em C, ao equilibrarmos o nó B, como anteriormente, não chegaremos aos esforços finais. No entanto, transmitindo-se o momento da barra (2) para o nó C, fazendo-se o equilíbrio deste, transmitindo o momento da barra (2) para B e assim sucessivamente, chega-se aos esforços finais nas barras, converge-se para o equilíbrio final dos nós. Cada vez que se procede a um equilíbrio de nó passa-se um traço abaixo dos momentos equilibrantes (Tabela 4-2)

Tabela 4-2: Processo de Cross para uma viga contínua

	0,36	0,64		0,57	0,43			
	△ A			△ B			△ C	D
		-60	+22,5		-22,5	+40,0		-40,0
$\Delta M_B = -37,5$		+13,5	+24,0	→	+12,0			
		+3,03	+5,38	→	+2,69		-6,34	$\Delta M_C = +29,5$
$\Delta M_B = -8,41$		+0,28	+0,49	→	+0,25		-0,58	$\Delta M_C = +2,69$
$\Delta M_B = -0,77$		+0,03	+0,04	→	+0,02		-0,06	$\Delta M_C = +0,25$
$\Delta M_B = -0,07$		-0,07	-0,11	←	-0,14	-0,11	→	
		-0,07	-0,11	←	-0,14	-0,11	→	
		+0,03	+0,04	→	+0,02		→	0
		+0,03	+0,04	→	+0,02		→	0
		-43,16	+43,16	0←	-26,04	-26,04	→	-46,98
		-43,16	+43,16		-26,04	+26,04		-46,98
		Momentos finais						

A partir dos momentos finais obtidos da Tabela 4-2, traça-se a linha de fechamento do gráfico de momento fletor e sobre essa linha penduram-se os diagramas de momentos devidos aos carregamentos.

#### 4.6.2.2. Exemplo 2 – Pórtico indeslocável

Seja o pórtico indeslocável mostrado na Figura 4-32, cujo módulo de elasticidade é constante.

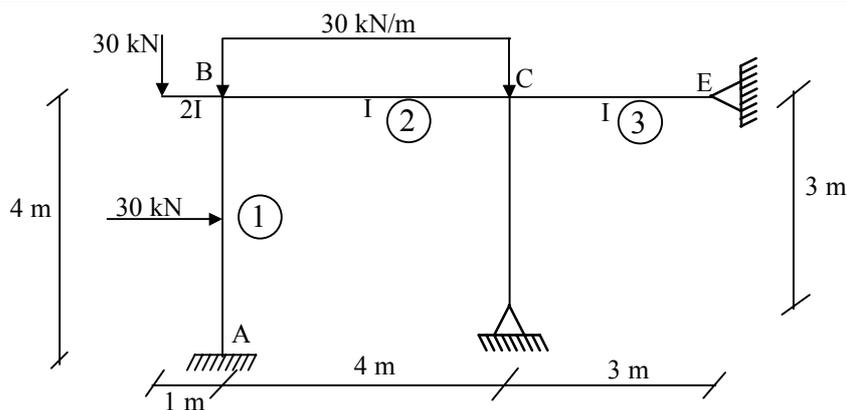


Figura 4-32: Pórtico indeslocável

Para resolver o pórtico da Figura 4-32, primeiramente fixam-se os nós B e C e determinam-se os momentos de engastamento perfeito nas barras e do balanço (Figura 4-33).

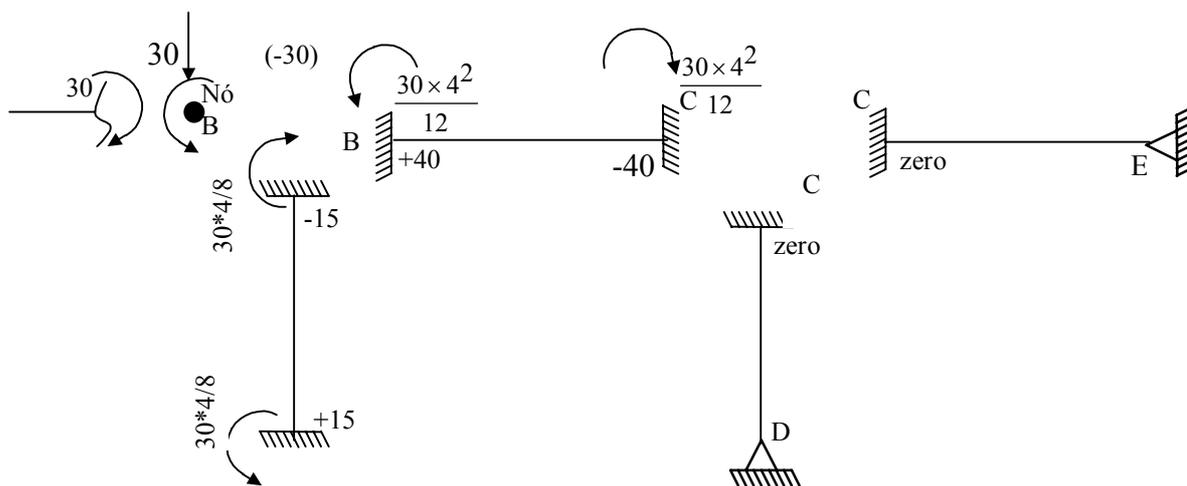


Figura 4-33: Momentos de engastamento perfeito das barras e do balanço

Determinam-se as rigidezes das barras para calcular os coeficientes de distribuição nos nós ( $EI = 1$ ).

$$k_1 = \frac{4EI}{4m} = 1,$$

$$k_2 = \frac{4EI}{4m} = 1,$$

$$k_3 = \frac{3EI}{3m} = 1,$$

$$k_4 = \frac{3EI}{3m} = 1.$$

No nó B

$$\beta_1 = \beta_2 = 0,5$$

$$t_1 = t_2 = 0,5$$

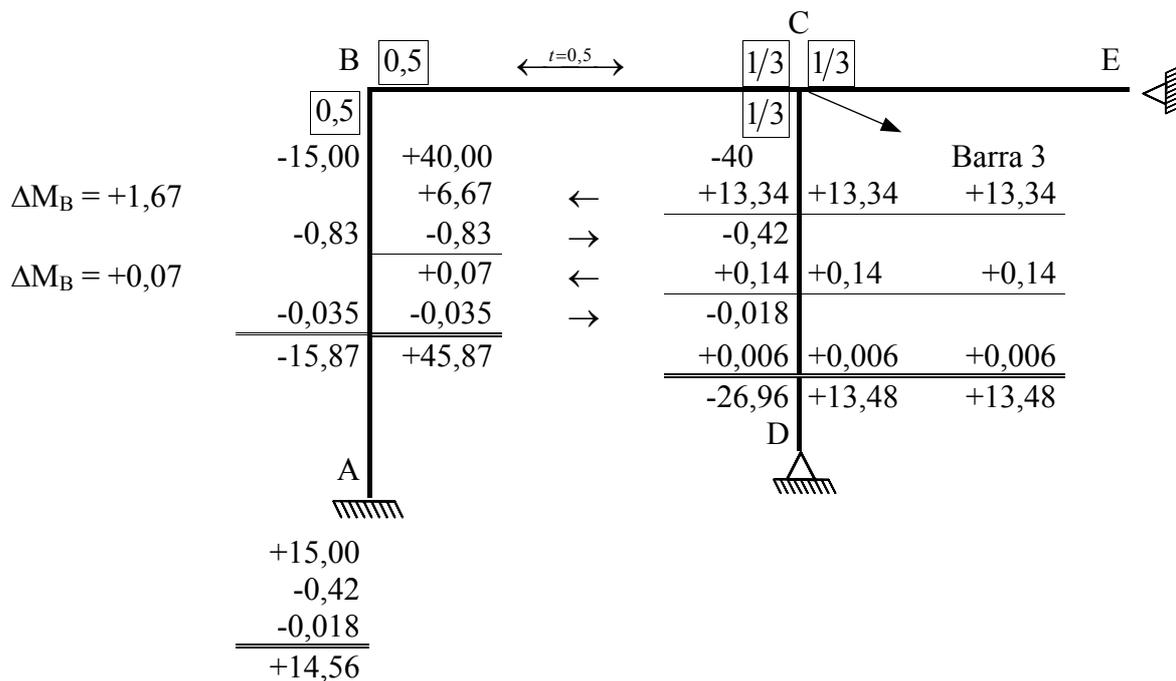
e no nó C

$$\beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = 1/3$$

$$t_2 = 0,5 \quad t_3 = t_4 = 0$$

O nó mais desequilibrado é o nó C e é a partir dele que se deve começar o Processo de Cross.

Tabela 4-3: Processo de Cross para o pórtico indeslocável



A Figura 4-34 ilustra os momentos que atuam nos nós em equilíbrio B e C. O somatório dos momentos e, cada nó é zero.



Figura 4-34: Momentos nos nós do pórtico indeslocável

Uma alternativa para a realização do Processo de Cross em pórticos é a realização da Tabela 4-4. Esta tabela de conter os nós ou apoios, as barras ou as suas extremidades, o

coeficiente de distribuição, o coeficiente de transmissão e os momentos de engastamento perfeito.

Tabela 4-4: Tabela de execução do Processo de Cross

		t = 0,5		t = 0,5				
		Nó A	Nó B (-30 kN·m)		Nó C		Nó D	Nó E
		Barra 1	Barra 1	Barra 2	Barra 2	Barra 3	Barra 4	Barra 3
Coef. distr.			0,5	0,5	(1/3)	(1/3)	(1/3)	
Mom. gng.		+15	-15	+40	-40			
$\Delta M_B = +1,67$				+6,67	$\leftarrow +13,34$	+13,33	+13,33	
		-0,42	$\leftarrow -0,83$	$-0,83 \rightarrow$	-0,42			
$\Delta M_B = +0,07$				+0,07	$\leftarrow +0,14$	+0,14	+0,14	
		-0,018	$\leftarrow -0,035$	$-0,035 \rightarrow$	-0,018			
					+0,006	+0,006	+0,006	
		+14,56	-15,87	+45,87	-26,96	+13,48	+13,48	

Atingido o equilíbrio dos nós do pórtico, determinam-se os momentos nas extremidades das barras. Estes momentos formam a linha de fechamento do diagrama de momentos. Sobre as linhas de fechamento penduram-se os diagramas de momentos originários do carregamento externo (Figura 4-35)

Como exercício, o aluno deverá traçar os gráficos de esforços normais e esforços cortantes (Figura 4-36 e Figura 4-37), localizando, com as distâncias, os pontos de esforços nulos e conseqüentemente os pontos de momentos fletores máximos. Os valores dos momentos máximos devem ser calculados e especificados na Figura 4-35.

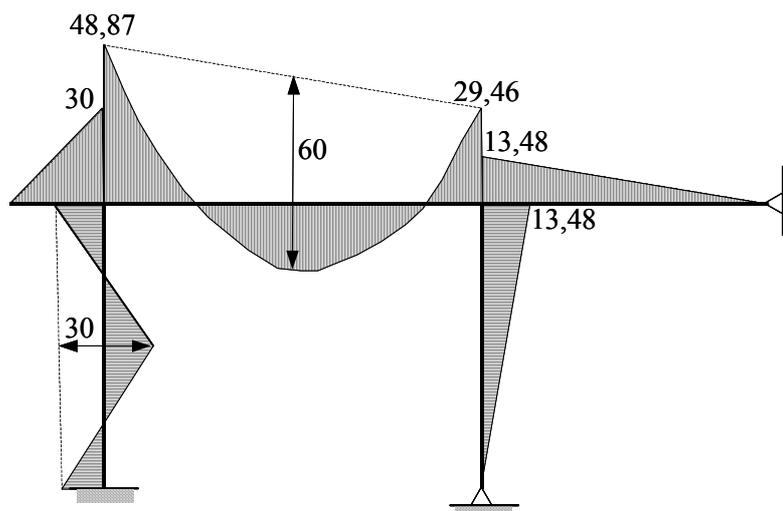


Figura 4-35: Diagrama final dos momentos fletores do pórtico indeslocável

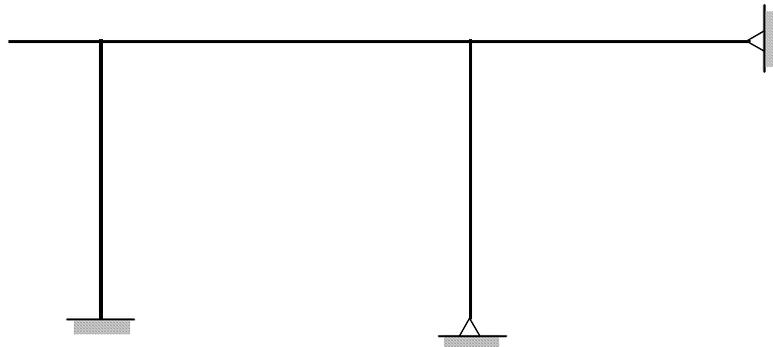


Figura 4-36: Diagrama de esforços normais

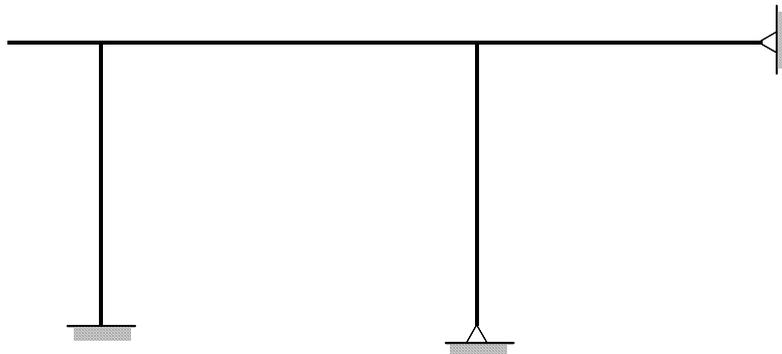


Figura 4-37: Diagramas de esforços cortantes

Para estruturas com mais de 2 nós, aplica-se o mesmo procedimento. Inicia-se pelo nó mais desequilibrado e passa-se para os demais, sempre na mesma seqüência como ilustrado na Figura 4-38 Ver SUSSEKIND (1994), Vol. 3 – 4 Ex II.1, página 198.

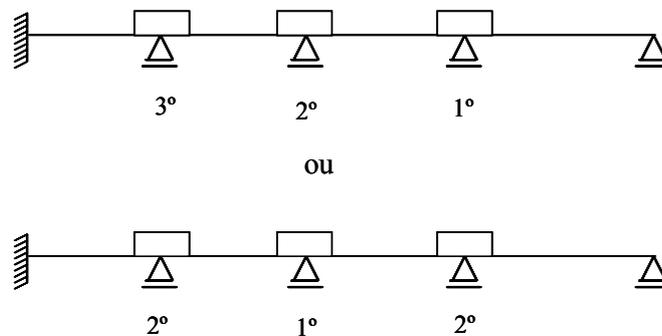


Figura 4-38: Seqüência de distribuição de momentos

4.6.3. Exercícios propostos

4.6.3.1. Exercícios 1

Determine as reações e os diagramas de esforços normais e cisalhantes e de momentos fletores do pórtico plano indicado na Figura 4-39 (os gráficos devem ser feitos em escala). A tabela para efetuar o Processo de Cross necessita ser completada com os coeficientes de distribuição e os momentos de engastamento perfeito. As barras do pórtico têm rigidez à flexão constante.

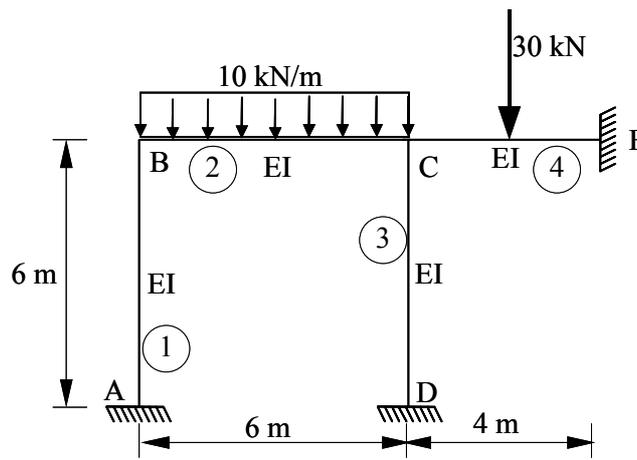


Figura 4-39

		t = 0,5		t = 0,5		t = 0,5		
		Nó A	Nó B		Nó C		Nó E	Nó D
		Barra 1	Barra 1	Barra 2	Barra 2	Barra 3	Barra 4	Barra 3
Coef. distr. Mom. eng.								

4.6.3.2. Exercício 2

Determine as reações e os diagramas de esforços normais e cisalhantes e de momentos fletores do pórtico plano indicado na Figura 4-40 (os gráficos devem ser feitos em escala). A tabela para efetuar o Processo de Cross necessita ser completada com os coeficientes de distribuição e os momentos de engastamento perfeito. A rigidez flexão dos pilares é o dobro das vigas.

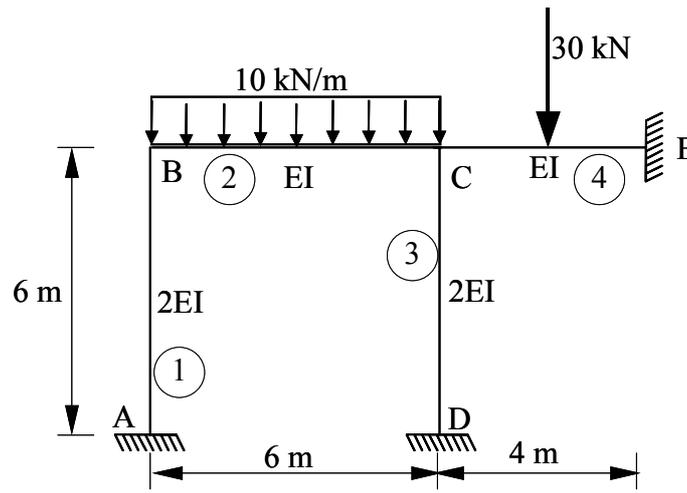


Figura 4-40

		t = 0,5		t = 0,5		t = 0,5		
		Nó A	Nó B		Nó C		Nó E	Nó D
		Barra 1	Barra 1	Barra 2	Barra 2	Barra 3	Barra 4	Barra 3
Coef. distr. Mom. eng.								

4.6.3.3. Exercício 3

Uma viga contínua de 3 vãos iguais (Figura 4-41), dos quais um é submetido a uma carga concentrada e outro a uma carga distribuída. O seu módulo de elasticidade é  $E$  e a inércia da seção transversal é  $I$ . Pede-se resolver a estrutura pelo processo de Cross, traçar em escala os diagramas de momento fletor e cortante e determinar o valor das reações de apoio.

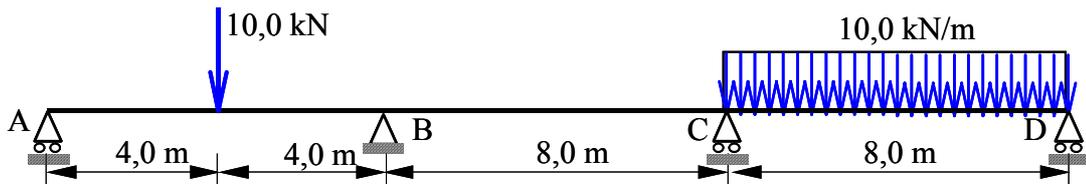


Figura 4-41: Viga contínua de 3 vãos

Resposta parcial :

Nó A	Nó B		Nó C		Nó D	Nós Barras Coef. Dist MEP
AB	BA	BC	CB	CD	DC	
	3/7	4/7	4/7	3/7		
	-15 +6,43	+8,57→	+4,29	+80		
	+10,32	-24,09 +13,77→	←-48,17	-36,12		
	+0,84	-1,97 +1,13→	←-3,94	-2,95		
			←-0,33	-0,24		
0	+2,59	-2,59	-40,69	+40,69	0	

4.6.3.4. Exercício 4

Uma viga contínua de 3 vãos iguais (Figura 4-42) tem módulo de elasticidade  $E$  e inércia da seção transversal  $I$ . Pede-se resolver a estrutura pelo processo de Cross, traçar em escala os diagramas de momento fletor e cortante e determinar o valor das reações de apoio.

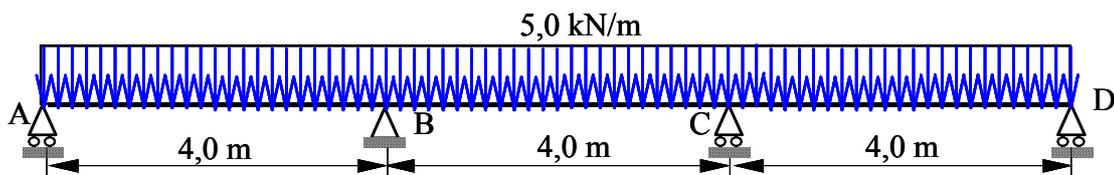


Figura 4-42: Viga contínua com 3 vãos

Resposta parcial: Observar que o carregamento e a estrutura podem ser considerados simétricos, portanto os momentos fletores nos nós B e C devem ser iguais. A precisão dos resultados vai depender do número de iterações efetuadas.

Nó A	Nó B		Nó C		Nó D	Nós Barras Coef. Dist MEP
AB	BA	BC	CB	CD	DC	
	3/7	4/7	4/7	3/7		
	-10 +1,43	+6,66 +1,91→	-6,66 +0,95	+10 -1,84		
	+0,53	-1,23 +0,70	←-2,45			
0	-8,04	+8,04	-8,16	+8,16	0	

#### 4.6.3.5. Exercício 5

Uma viga contínua de 3 três vãos iguais (Figura 4-43) tem módulo de elasticidade E e inércia da seção transversal I. Pede-se resolver a estrutura pelo processo de Cross, traçar em escala os diagramas de momento fletor e cortante e determinar o valor das reações de apoio.

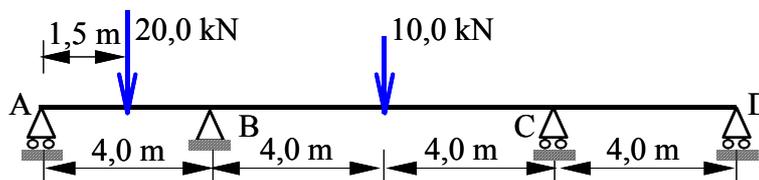


Figura 4-43

Resposta parcial:

Nó A	Nó B		Nó C		Nó D	Nós Barras Coef. Dist MEP
AB	BA	BC	CB	CD	DC	
	3/5	2/5	2/5	3/5		
	-15 +3,0	+10 +2,0→	-10 +1,0			
	-1,08	+1,84 +0,72→	←-3,6	+5,4		
	-13,08	+13,08	-5,4	+5,4		

#### 4.6.3.6. Exercício 6

As vigas contínuas a seguir (Figura 4-44, Figura 4-45 e Figura 4-46) têm módulo de elasticidade E e inércia da seção transversal I. Pede-se para resolver as estruturas pelo

processo de Cross, traçar em escala os seus respectivos diagramas de momento fletor e cortante e determinar o valor de suas reações de apoio.

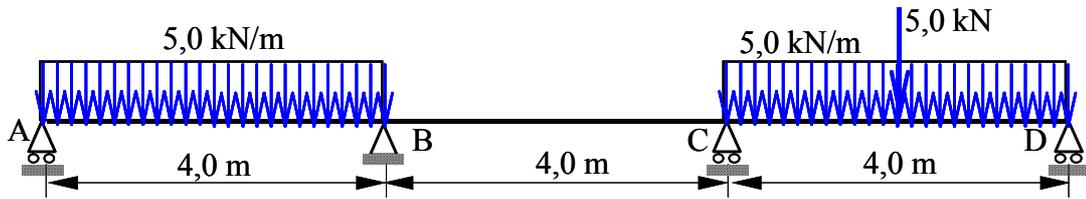


Figura 4-44

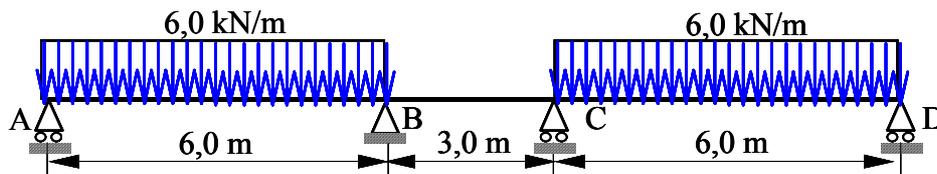


Figura 4-45

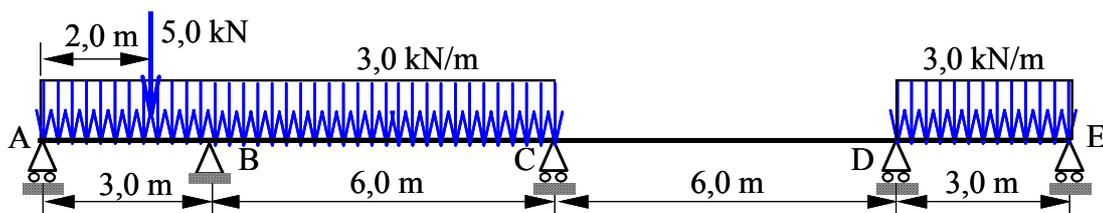


Figura 4-46

## 1.6. EXPLORANDO A SIMETRIA

### 1.6.1. Vigas contínuas simétricas

#### 1.6.1.1. Eixo de simetria passando por um apoio – Carregamento simétrico

Seja a viga contínua com carregamento simétrico mostrada na Figura 4-47. Como o esforço axial não está sendo considerado, a estrutura pode ser considerada simétrica. Lembrando que  $M$  e  $N$  são simétricos e  $V$  anti-simétrico, para carregamento simétrico, pode-se considerar metade da estrutura e substituir o apoio  $C$  por um engaste.

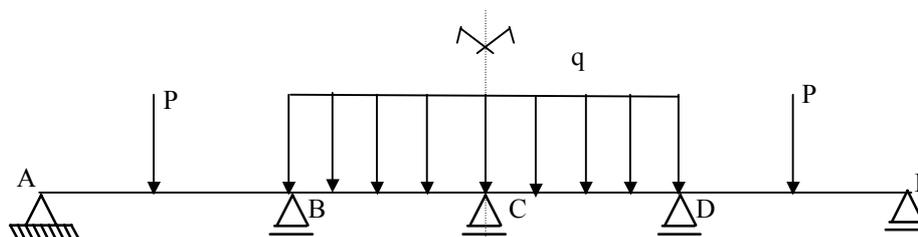


Figura 4-47: Viga com carregamento simétrico

Resolve-se esta metade, fazendo equilíbrio do nó B (1 nó, lembrando que o DMF da estrutura toda será simétrico e o DEC será anti-simétrico)

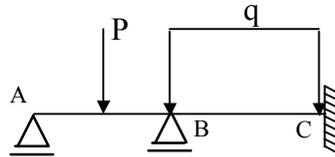


Figura 4-48: Sistema equivalente da viga mostrada pela Figura 4-47

É bom lembrar que sobre o eixo de simetria de uma viga a rotação é nula (Figura 4-49)

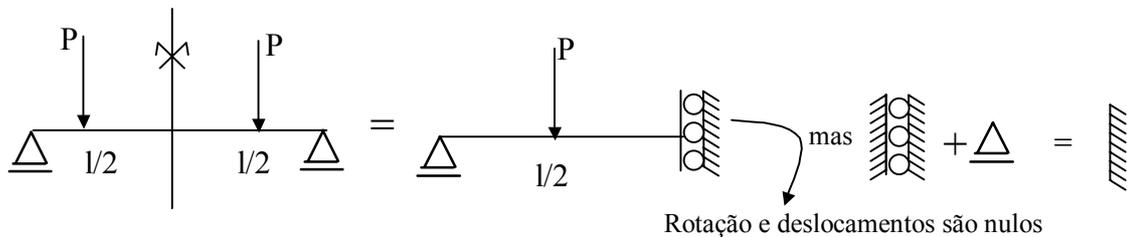


Figura 4-49: Viga simétrica e seu sistema equivalente

### 1.6.1.2. Eixo de simetria passando por um apoio – Carregamento anti-simétrico

Seja a viga contínua com carregamento simétrico mostrada na Figura 4-50. Considerando a estrutura simétrica e lembrando que para carregamento anti-simétrico M e N são anti-simétricos e V, simétrico, pode-se considerar metade da estrutura deixando C como apoio simples. É como se rotulássemos o apoio C (→ ←) = (→ Δ ←) uma vez que C o momento fletor deve ser nulo. Resolve-se apenas esta metade (Figura 4-52), lembrando que, para a estrutura toda, o DMF será anti-simétrico e o DEC, simétrico.

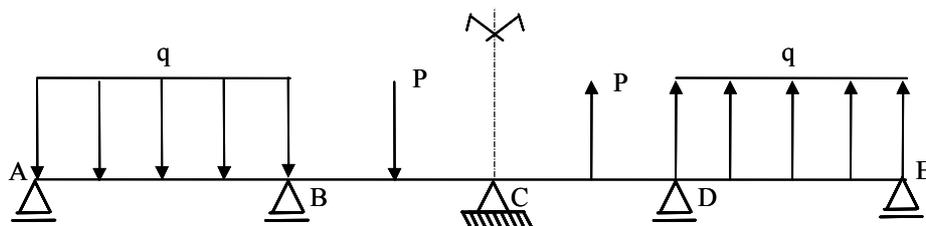


Figura 4-50: Viga contínua com carregamento anti-simétrico

Lembrando que, em uma viga simétrica com carregamento anti-simétrico, o deslocamento vertical sobre o eixo de simetria é nulo (Figura 4-51).

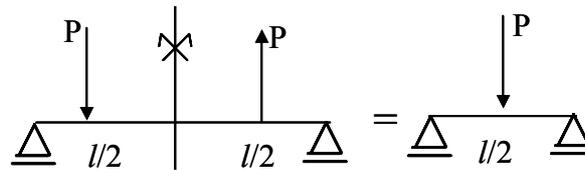


Figura 4-51: Viga simétrica com carregamento anti-simétrico e sistema equivalente

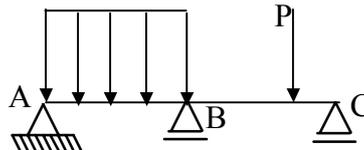


Figura 4-52: Estrutura equivalente da viga mostrada na Figura 4-50.

Na viga da Figura 4-50, se houver um momento ( $M_0$ ) aplicado em C, resultará em um momento  $\frac{M_0}{2}$  com o mesmo sentido na metade da estrutura. Devido à simetria da estrutura, cada metade resiste à metade do momento aplicado. Como ilustrado na Figura 4-53.

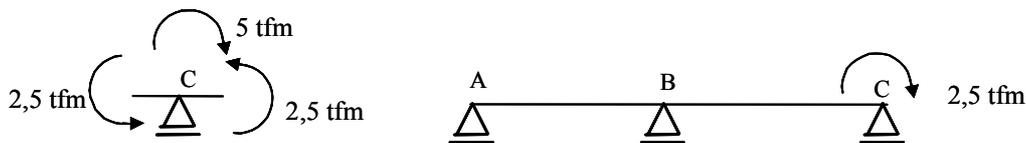


Figura 4-53: Momento fletor aplicado em um nó

### 1.6.1.2.1. Exemplo

Seja a viga da Figura 4-54, cuja rigidez à flexão ( $EI$ ) é constante. (Ver SUSSEKIND. Vol. 3 Exemplo II.2 pág. 201). Determine seu o diagrama de momentos.

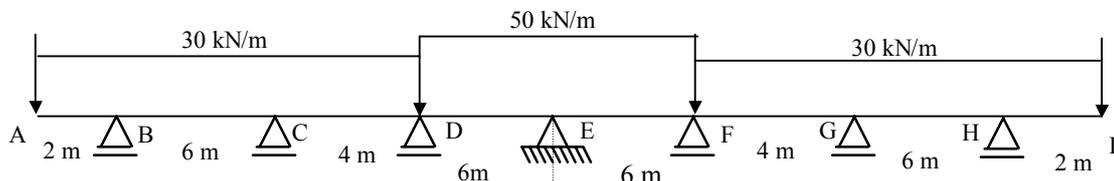


Figura 4-54: Viga contínua simétrica com carregamento simétrico

A viga da Figura 4-54 pode ser resolvida utilizando a estrutura simplificada apresentada na Figura 4-55. (Resposta:  $M_C = -69 \text{ kN} \cdot \text{m}$ ,  $M_D = -92 \text{ kN} \cdot \text{m}$  e  $M_E = -178 \text{ kN} \cdot \text{m}$ )

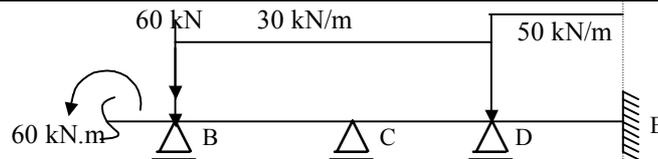


Figura 4-55: Estrutura equivalente da viga mostrada na Figura 4-54

### 1.6.1.3. Eixo de simetria não passa por um apoio – Carregamento simétrico

Para resolver uma estrutura simétrica quando o eixo de simetria não passa por um apoio (Figura 4-56), pode-se considerar metade da modificando-se a rigidez da barra seccionada em função do carregamento (se simétrico ou anti-simétrico).

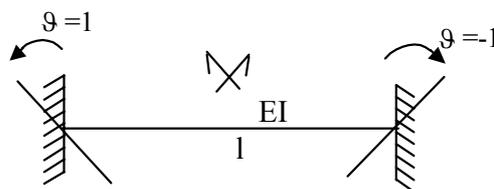


Figura 4-56: Viga bi-engastada

Quando a estrutura tiver carregamento simétrico, é bom lembrar que as rotações nos apoios da viga (Figura 4-57) têm sentidos contrários. Para determinar a rigidez da estrutura simplificada, pode-se empregar o princípio da superposição dos efeitos como mostrado Figura 4-58, resultando nos esforços mostrados na Figura 4-58c, ou seja, a rigidez da barra para o carregamento simétrico  $k = \frac{2EI}{l}$ .

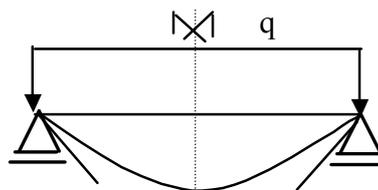


Figura 4-57: Rotações nos apoios

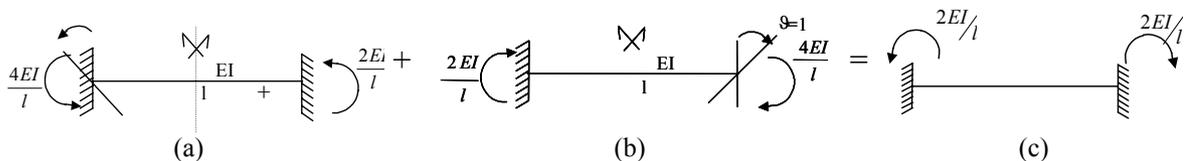


Figura 4-58: Superposição das rotações da viga mostrada na Figura 4-56

#### 1.6.1.3.1. Exemplo

Seja a viga contínua ilustrada na Figura 4-59, cuja rigidez à flexão ( $EI$ ) é constante. Pode-se calcular esta viga utilizando-se a estrutura simplificada ilustrada na Figura 4-60. Sabe-se que o DMF é simétrico e o DEC é anti-simétrico.

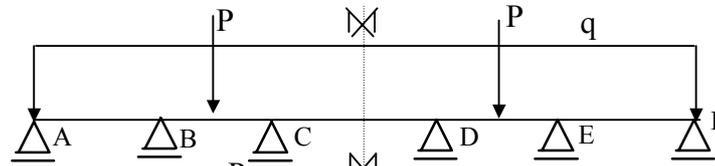


Figura 4-59

No sistema da Figura 4-60, efetua-se somente o equilíbrio de dois nós: o nó B e o nó C. Considera-se o comprimento total da barra CD para o cálculo do momento de engastamento perfeito em C. As rigidezes das barras são  $k_1 = \frac{3EI}{1,5}$ ,  $k_2 = \frac{4EI}{2,5}$  e  $k_3 = \frac{2EI}{4}$ .

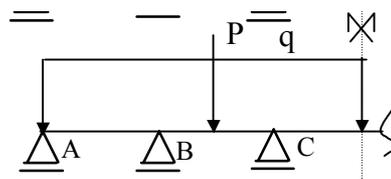


Figura 4-60

#### 1.6.1.4. Eixo de simetria não passa por um apoio – Carregamento anti-simétrico

No caso de viga com eixo de simetria que não passa por um apoio e o carregamento é anti-simétrico, também se pode considerar metade da estrutura para carregamento, modificando-se a rigidez da barra seccionada em função do carregamento.

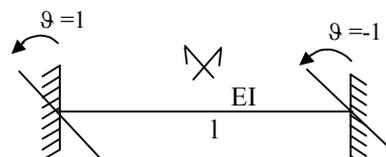


Figura 4-61: Viga bi-engastada

Pode-se empregar o princípio da superposição dos efeitos como mostrado Figura 4-62, resultando nos esforços mostrados na Figura 4-62c, ou seja, a rigidez da barra para o carregamento anti-simétrico  $k = \frac{6EI}{l}$ .

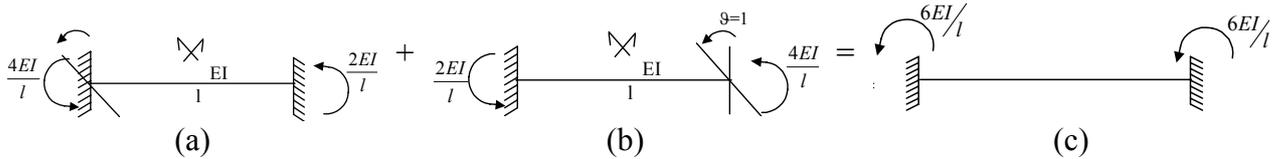


Figura 4-62: Superposição de efeitos da viga da Figura 4-61

### 1.6.1.4.1. Exemplo

Seja a viga contínua ilustrada na Figura 4-63, cuja rigidez à flexão ( $EI$ ) é constante. Pode-se calcular esta viga utilizando-se a estrutura equivalente ilustrada na Figura 4-64. O DMF é anti-simétrico e o DEC é simétrico.

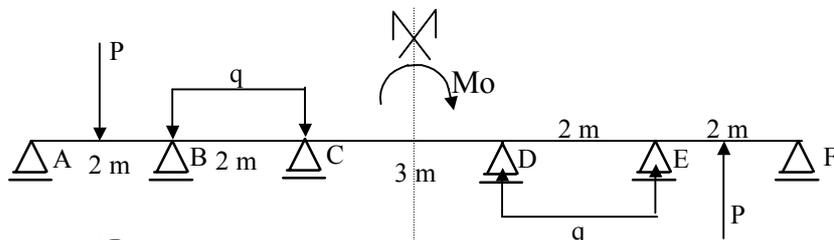


Figura 4-63: Viga simétrica com carregamento anti-simétrico

No sistema da Figura 4-64, efetua-se somente o equilíbrio de dois nós: o nó B e o nó C. Considera-se toda a barra CD para o cálculo do momento de engastamento perfeito em C. As rigidezes das barras são  $k_1 = \frac{3EI}{2}$ ,  $k_2 = \frac{4EI}{2}$  e  $k_3 = \frac{6EI}{3}$ . No caso do binário

aplicado  $M_c = M_c = -\frac{M_0}{4}$

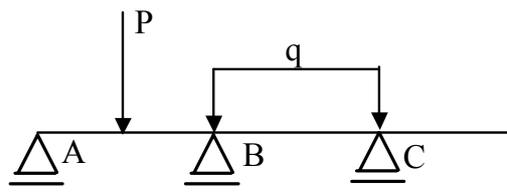


Figura 4-64: Viga equivalente

## 1.6.2. Pórticos planos simétricos

### 1.6.2.1. Eixo de simetria que passa por uma barra vertical

Seja o pórtico plano mostrado na Figura 4-65, cujo módulo de elasticidade ( $E$ ) é constante. O momento de inércia  $I_{AB} = I_{DE}$ ,  $I_{BC} = I_{CD}$  e  $I_{BF} = I_{DH}$ .

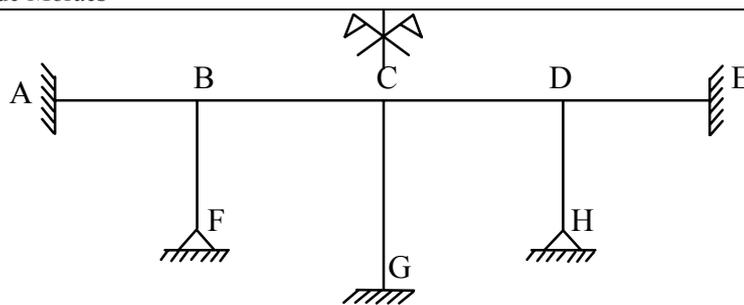


Figura 4-65: Pórtico plano simétrico

Se o carregamento for simétrico, considera-se metade da estrutura engastada em C (Figura 4-66). Neste caso, o diagrama de momento fletor da estrutura é simétrico e o diagrama de esforço cortante é anti-simétrico.

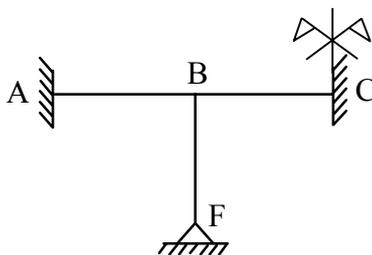


Figura 4-66: Estrutura equivalente do pórtico plano

Observa-se que, devido à simetria, deve-se ter  $M_{BC} = M_{CD}$ , portanto para que haja equilíbrio no nó C, deve-se ter  $M_{CG} = 0$  (Figura 4-67)

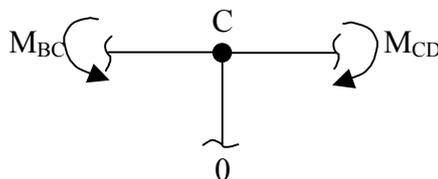


Figura 4-67: Momentos fletores no nó C

Se o carregamento for anti-simétrico, considera-se metade da estrutura e a barra vertical CG com metade da inércia original. As demais barras não mudam (Figura 4-68). O diagrama de momento fletor da estrutura inteira é anti-simétrico, enquanto que o diagrama de esforço cortante é simétrico. Observa-se, no entanto, que o momento fletor final na barra vertical CG será o dobro do valor encontrado no esquema acima.

Se houver um binário ( $M_0$ ) aplicado em C, deve-se dividi-lo ao meio e aplicar  $M_0/2$  em C no esquema simplificado da Figura 4-67.

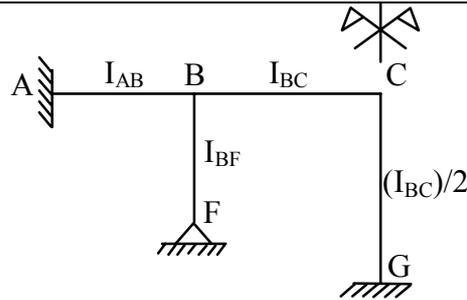


Figura 4-68: Estrutura equivalente do pórtico plano

Visto que  $M_{BC} = M_{CD}$  (mesmo sentido) devido à anti-simetria, na estrutura real (Figura 4-69a)

$$2 \cdot M_{BC} + M_{CG} = M_0,$$

enquanto que, na estrutura simplificada (Figura 4-69a), tem-se a metade da equação acima

$$M_{BC} + \frac{M_{CG}}{2} = \frac{M_0}{2}.$$

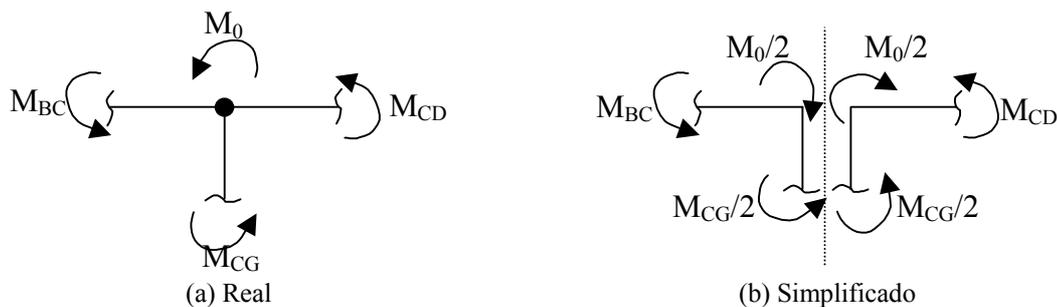


Figura 4-69: Momento aplicado em um nó situado no eixo de simetria

### 1.6.2.2. Eixo de simetria que passa por uma barra

É análogo ao caso da viga simétrica visto na seção 1.6.1. Resolve-se a metade da estrutura. Para um carregamento simétrico a rigidez da barra BC é  $k_{BC} = \frac{2EI_{BC}}{l_{BC}}$  e para um

carregamento anti-simétrico é  $k_{BC} = \frac{6EI_{BC}}{l_{BC}}$ .

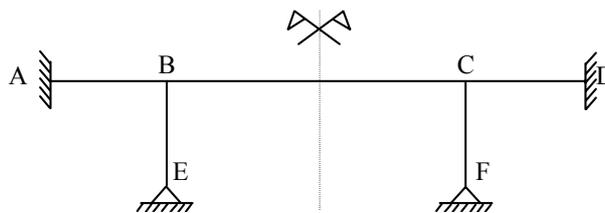


Figura 4-70: Pórtico plano com um eixo de simetria

### 1.7. MOMENTOS DE ENGASTAMENTO PERFEITO PARA O CASO DE RECALQUES

Em vigas bi-engastadas (Figura 4-71), os momentos de engastamento perfeito para o caso de recalque em um dos apoios são  $M_A = M_B = +\frac{6EI}{l^2} \Delta$



Figura 4-71: Viga bi-engastada

Em vigas engastadas-apoiadas, para o recalque B (Figura 4-72), o momento de engastamento perfeito é  $M_A = +\frac{3EI}{l^2} \Delta$ ; para o recalque em A é  $M_A = -\frac{3EI}{l^2} \Delta$  (Figura 4-73).

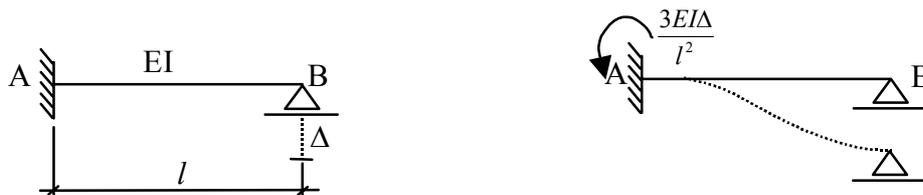


Figura 4-72: Viga engastada-apoiada com recalque no apoio B



Figura 4-73: Viga engastada-apoiada com recalque no apoio A

### 1.8. PROCESSO DE CROSS PARA ESTRUTURAS DESLOCÁVEIS

Serão considerados apenas pórticos planos como exemplos (Figura 4-74a). O esforço axial será desprezado. As deslocabilidades tratam-se apenas de translações no Processo de Cross. Estas deslocabilidades devem ser impedidas através de apoios do 1º gênero, surgindo reações de apoio (Figura 4-74b).

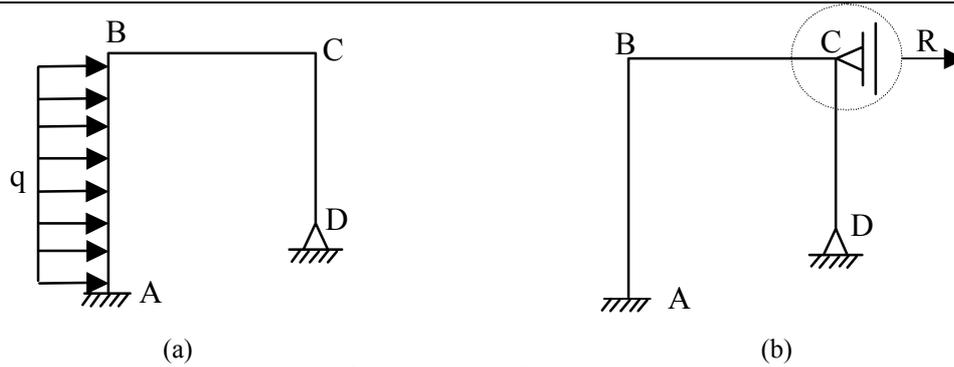


Figura 4-74: Pórtico plano

Aplica-se em seguida o método dos deslocamentos considerando superposição de efeitos. Fixa-se a estrutura e calcula-se a reação de apoio devido ao carregamento  $R_{10}$  e o diagrama de momento fletores  $M_{10}$  usando o processo de Cross (Figura 4-75)

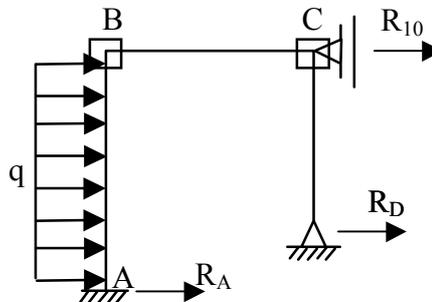


Figura 4-75: Pórtico plano com deslocamento restringido

$$\begin{aligned} \text{Cross} \rightarrow M_{BA}, M_{CD} \\ M_{BA} &= R_A \cdot l_{AB} - \frac{ql_{AB}^2}{2} + M_{AB} \\ R_A &= \frac{M_{BA} - M_{AB} + \frac{ql_{AB}^2}{2}}{l_{AB}} \\ M_{CD} &= R_D \cdot l_{CD} \\ R_D &= \frac{M_{CD}}{l_{CD}} \\ \sum F_x = 0 &\rightarrow R_{10} = \dots \end{aligned}$$

Após impõe-se a deslocabilidade  $\Delta_1$  na direção restringida (Figura 4-76) e obtém-se, por Cross,  $M_1$  e  $R_1$ . Deve-se utilizar tabelas para obtenção de momentos para engastamento perfeitos nas barras devido a recalques impostos.

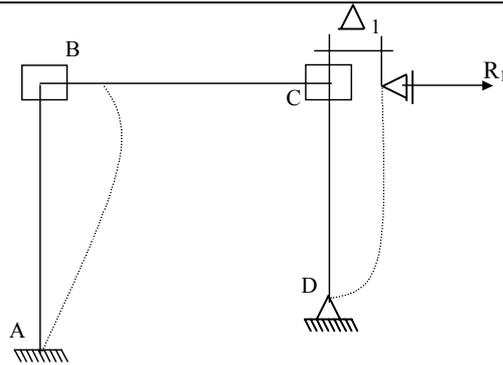


Figura 4-76: Pórtico plano com deslocamento imposto

Como  $\Delta_1$  não é conhecido, impõe-se uma deslocabilidade unitária e calculam-se os momentos  $M_1$  e  $R_{11}$  nas barras usando Cross. A reação final será  $M_1 \cdot \Delta_1$  e  $R_{11} \cdot \Delta_1$ . Faz-se em seguida o equilíbrio de forças horizontais no nó C, usando superposição de efeitos.

$$R_{10} + R_{11} \cdot \Delta_1 = 0,$$

$$\Delta_1 = -\frac{R_{10}}{R_{11}},$$

sendo  $R_{10}$  é a parcela de reação devido ao carregamento externo e  $R_{11}$  é a parcela de reação devido a deslocabilidade.

Os momentos finais no pórtico são encontrados por superposição de efeitos:

$$M = M_0 + M_1 \cdot \Delta_1.$$

No caso de mais de uma deslocabilidade, procede-se analogamente (Figura 4-77):

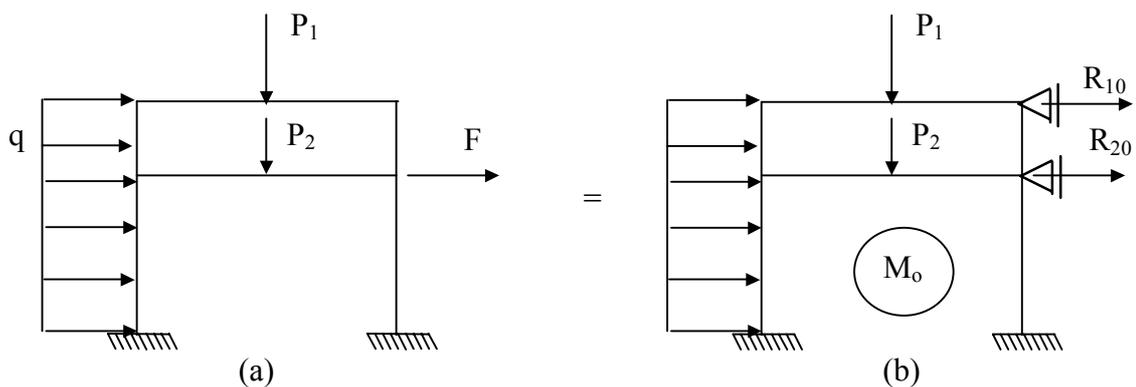


Figura 4-77: Pórtico plano com mais de uma deslocabilidade

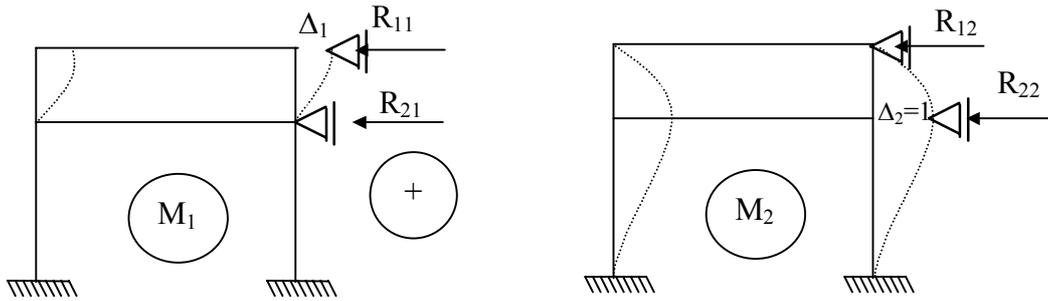


Figura 4-78: Liberação das deslocabilidades do pórtico

As equações de equilíbrio são

$$R_{10} + R_{11}\Delta_1 + R_{12}\Delta_2 = 0$$

$$R_{20} + R_{21}\Delta_1 + R_{22}\Delta_2 = F$$

ou matricialmente:

$$\begin{Bmatrix} R_{10} \\ R_{20} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ F \end{Bmatrix}$$

Resolvendo-se o sistema de equações obtém-se  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ .

Para a determinação do momentos finais dos pórticos com mais de duas deslocabilidades, procede-se analogamente ao que já foi explicado, sendo os momentos finais do pórtico dados por

$$M = M_0 + M_1\Delta_1 + M_2\Delta_2$$

### 1.8.1. Exemplo

Seja o pórtico plano da Figura 2-1, cuja rigidez à flexão é constante.

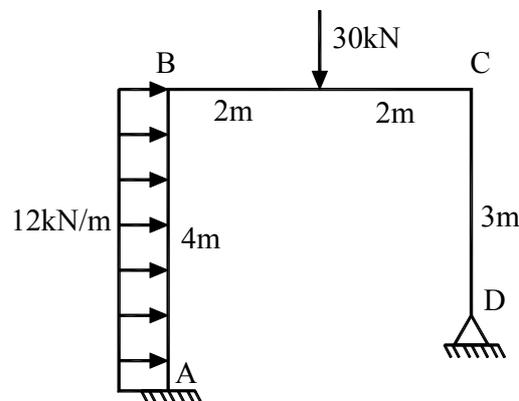


Figura 4-79: Pórtico plano com nós deslocáveis

Para se resolver o pórtico mostrado na Figura 4-79, primeiramente impedem-se os deslocamentos por meio de apoios do primeiro tipo (nos quais vão aparecer reações). Em seguida fixa-se a estrutura e calcula-se a reação de apoio ( $R_{10}$ ) devido ao carregamento (situação 0) e o diagrama de momentos fletores ( $M_{10}$ ), usando o Processo de Cross (Figura 4-80, Tabela 4-5).

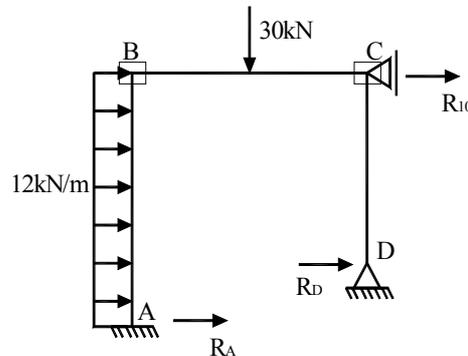


Figura 4-80: Pórtico com a deslocabilidade do nó C restringida (sistema 0)

Tabela 4-5: Processo de Cross para o pórtico para o sistema 0

	0,5		0,5	
	+15	-15	0	
	-16	+3,75 ←	+7,5	+7,5
↓	-1,37	-1,38 →	-0,69	+0,35
		+0,17 ←	+0,34	+0,02
↓	-0,08	-0,09 →	-0,04	(7,87)
	(-17,45)	(+17,45)	+0,02	(-7,87)
	+16			
	-0,69			
	-0,04			
	(15,27)			

O cálculo dos esforços nas barras e reações para o sistema (0) é feito separando-se as barras e aplicando-se os momentos encontrados pelo Processo de Cross (Tabela 4-5), como ilustrado pela Figura 4-81.

$$R_A(4\text{ m}) + 15,27 + 12 \cdot (4\text{ m}) \cdot 2 = 0$$

$$R_A = -\frac{93,82}{4} = -23,46\text{ kN}$$

$$R_D(3\text{ m}) + 7,87 = 0$$

$$R_D = -2,62\text{ kN}$$

Fazendo o somatório de forças na direção  $x$

$$-23,46 - 2,62 + 48 + R_{10} = 0$$

$$R_{10} = -21,92 \text{ kN}$$

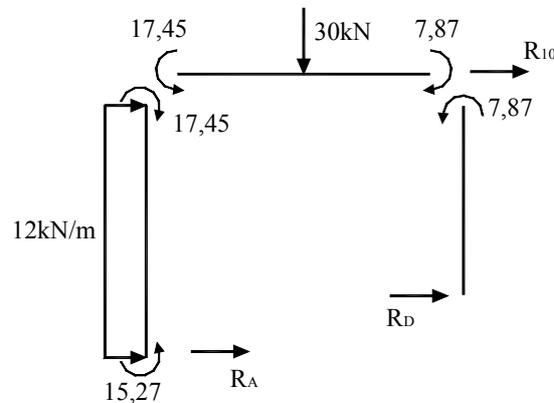


Figura 4-81: Carregamentos e momentos internos atuantes nas barras do pórtico

Agora, impõe-se a deslocabilidade  $\Delta_1 = 1$  na direção restringida (Figura 4-82) e obtém-se  $M_{11}$  e  $R_{11}$  pelo Processo de Cross (sistema I) (Tabela 4-6). Os momentos devidos a recalques nas barras são

$$M_{BA} = M_{AB} = \frac{6EI\Delta_1}{L_{AB}^2} = 54 (+)$$

$$M_{DC} = \frac{3EI}{L_{CD}^2} = 48 (+)$$

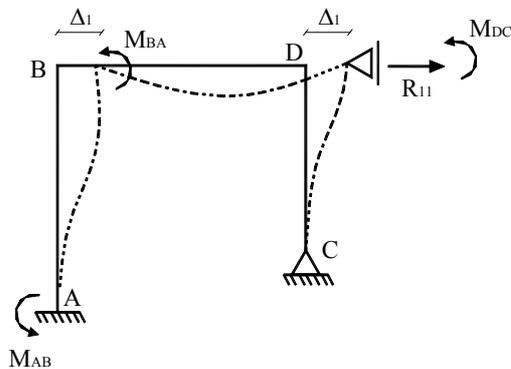
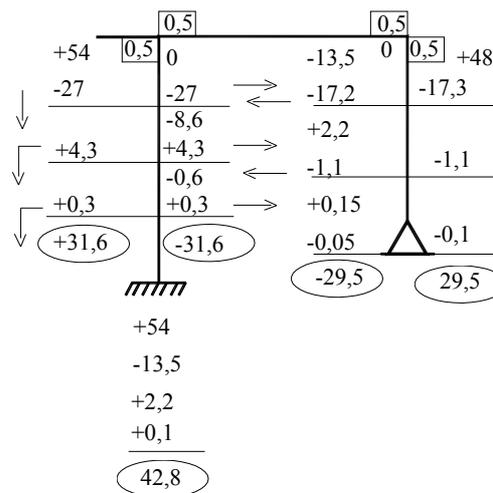


Figura 4-82: Deslocabilidade  $\Delta_1$  imposta ao pórtico

Tabela 4-6: Processo de Cross para o sistema I



O cálculo dos esforços nas barras e reações para a situação (I) é feito separando-se as barras e aplicando-se os momentos encontrados pelo Processo de Cross (Tabela 4-6), como ilustrado pela Figura 4-83.

$$R_A(4\text{ m}) = 42,8 + 31,6 = 74,4$$

$$R_A = 18,6\text{ kN}$$

$$R_C(3\text{ m}) - 29,5 = 0$$

$$R_C = 9,83\text{ kN}$$

Fazendo o somatório de forças na direção  $x$

$$R_{11} - R_A - R_C = 0$$

$$R_{11} = 28,43\text{ kN}$$

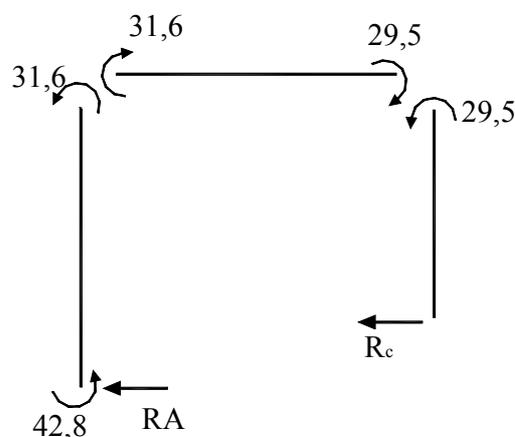


Figura 4-83: Esforços nas barras devidos à situação I

O valor de  $\Delta_1$  é dado por

$$R_{10} + R_{11} \cdot \Delta_1 = 0$$

$$-21,92 + 28,43 \cdot \Delta_1 = 0$$

$$\Delta_1 = 0,77$$

Os momentos finais são dados por

$$M = M_0 + 0,77 \cdot M_1.$$

Para a barra AB, o momento em A é

$$M_A^{AB} = M_{A0}^{AB} + 0,77 \cdot M_{A1}^{AB},$$

$$M_A^{AB} = 15,27 + 0,77 \cdot 42,8 = 48,23.$$

O momento em B é

$$M_B^{AB} = -17,45 + 0,77 \cdot 31,6 = 6,88$$

E o momento em C da barra CD é

$$M_C^{CD} = 7,87 + 0,77 \cdot 29,5 = 30,59.$$

De posse desses momentos pode-se traçar o diagrama de momentos fletores do pórtico

$$\text{FLECHAS} \begin{cases} \frac{30,4}{4} = 30 \\ \frac{12,4^2}{8} = 24 \end{cases}$$

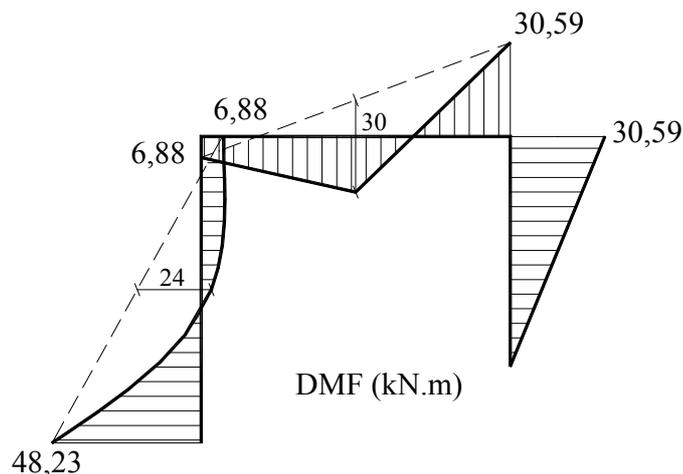


Figura 4-84: Diagrama final de momentos fletores do pórtico da Figura 4-79

## 2. BIBLIOGRAFIA

- BEER, F.P. e JOHNSTON JR, E. R. (1989). **Resistência dos materiais**. 2ª ed. São Paulo: McGraw-Hill.
- CAMPANARI, Flávio Antônio.(1985). **Teoria das estruturas**. v.1, 2, 3 e 4. Ed. Guanabara Dois.
- POPOV, Egor P. (1978). **Introdução à mecânica dos sólidos**. São Paulo: Edgard Blücher.
- SILVA, Jaime Ferreira da. **Método de Cross**. Ed. McGraw-Hill do Brasil.
- SUSSEKIND, José Carlos. (1983). **Curso de análise estrutural**. v.1. 6ª ed. Porto Alegre: Ed.Globo.
- SUSSEKIND, José Carlos. (1994a). **Curso de análise estrutural**. v.2. 11ª ed.São Paulo: Ed.Globo.
- SUSSEKIND, José Carlos. (1994b). **Curso de análise estrutural**. v.3. 9ª ed.São Paulo: Ed.Globo.
- TIMOSHENKO, Stephen P. (1967). **Resistência dos materiais**. v.1. 3ª ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico.