EJERCICIOS DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

A. CANAHUIRE C.

Contenido

Lista de Figuras

Setiembre del 2017

Adolfo Canahuire Condori
Licenciado en Físico Matemáticas

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE PRIMER ORDEN

1 Ejercicios

1.1 Ecuaciones de variables separables

Este tipo de ecuaciones se presentan en la forma:

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}. \tag{1}$$

La función $y = y(x)$ debe ser diferenciable en un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Esta función y su derivada y' deben satisfacer la ecuación (1). La solución de la ecuación diferencial (1) se halla al integrar

$$g(y)dy = f(x)dx, \tag{2}$$

obteniéndose:

$$G(y) = F(x) + k. \tag{3}$$

Donde $G(y)$ y $F(x)$ son las antiderivadas de $g(y)$ y $f(x)$ respectivamente, y k representa la combinación de las constantes de integración.

Ejercicios

1. $(x+1)(y^2-1)\,dx - (x^3-1)\,dy = 0.$
2. $(y^2-25)\;dx + 10\sqrt{x^2-25}\;dy = 0.$
3. $xy(8-y^3)dx + (16-x^4)dy = 0.$
4. $y' = x(4-x^2)(5+8y+4y^2)$
5. $1 + \left[(9-x^2)(9-y^2)\right]^{3/2} yy' = 0$
6. $y' = \dfrac{xy(2+y^2)}{1-x^4}$
7. $y' = \dfrac{y(8-y^3)}{x(1+2x^3)}$
8. $y' = \dfrac{x(y^3-3y^2+3)}{y(x+2)^2(x+3)(y-2)}$

9. $y' + \dfrac{\tan^3 2x}{\sec^2 3y} = 0$

10. $\dfrac{\arctan \dfrac{x}{2}}{\ln(y-1)} + y' = 0$

11. $y' = \dfrac{\ln(x^2-25)}{\ln(y^2-25)}$

12. $y' = \dfrac{1}{(1+y)(1+\cos 2x)}\ ;\ y(0) = -1$

1.2 Ecuaciones reducibles al tipo de variables separables

Forma de la ecuación diferencial	Sustitución
$y' = f(ax+by+c)$	$u = ax+by+c$
$y' = f\left(\dfrac{ax+b}{cy+d}\right)$	$u = \dfrac{ax+b}{cy+d}$
$y' = x^{n-1}y^{1-m}f(ax^n+by^m)$	$u = ax^n+by^m$
$y' = y\,f(e^{ax}y^m)$	$u = e^{ax}y^m$
$y' = e^{ay}f(e^{ay}x)$	$u = e^{ay}x$
$y' = f(y+ax^n+b) - anx^{n-1}$	$u = y+ax^n$

Ejercicios

13. $y' = \tan^2(6x+6y+5)$

14. $y' = 1+\cos(2x-y+2)$

15. $y' = (x+2y-3)^{1/3}$

16. $y' = \dfrac{\cos(x-y)}{1+\cos(x-y)}$

17. $y' = \operatorname{csch}^2(x+y-3)$

18. $y' = \dfrac{1}{(x-4y+3)^2}$

19. $y' = \sqrt{5x + 2y + 10}$

20. $y' = \dfrac{1}{\ln\left[(x + y - 1)^2 + 1\right]} - 1$

21. $y' = 2\left(\dfrac{y-2}{2x+1}\right) + \cos\left(\dfrac{y-2}{2x+1}\right)$

22. $y' = \dfrac{x-2}{y+2} + \dfrac{y+2}{x-2}$

23. $2y' = \left(\dfrac{2y+1}{x+2}\right)\ \ln\left(\dfrac{2y+1}{x+2}\right)$

24. $y^3 y' = x^4(2x^5 + 3x^4)$

25. $yy' = x^2(3x^3 + 2y^2)^2$

26. $y' = x^2 y^3\left(\dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}y^{-2}\right)$

27. $y' = \dfrac{e^x y^4}{3}(e^x y^3 - 2)$

28. $y' = y\left(\dfrac{e^x y^2 - 1}{e^x y^2 + 1}\right)$

29. $y' = \dfrac{e^{6x} + 2e^{3x}y + 3y^2}{y}$

30. $y' = e^y(2e^y x - 3)$

31. $y' = e^y(x^2 e^{2y} - 2xe^y)$

32. $y' = e^y\ \left(\dfrac{xe^y - 1}{xe^y + 1}\right)$

33. $y' = \dfrac{\ln(xe^{-y}) + 1}{x}$

34. $y' = 2(y + 3x^5 + 15) - 15x^4$

35. $y' = (y - 2x^8 + 5)^2 - (y - 2x^8 + 5) + 16x^7$

1.3 Ecuaciones diferenciales homogéneas

Una función $z = f(x, y)$ se llama *función homogénea* de grado n, si cumple con la propiedad:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y). \tag{4}$$

$y' = f(x, y)$ es una ecuación diferencial homogénea, si la función $f(x, y)$ es homogénea de grado cero.
La ecuación diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ es homogénea, si las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son homogéneas del mismo grado.
La sustitución $y = vx$ hace que una ecuación diferencial homogénea pueda ser resuelta como una ecuación de variables separables. Se demuestra que una ecuación diferencial homogénea puede ser presentada en la forma:

$$y' = \phi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Ejercicios

36. $y(x^2 - y^2)dx + x(x^2 + y^2)dy = 0$
37. $y' = \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2}$
38. $y' = \dfrac{xy - y^2}{x^2 - xy + y^2}$
39. $y' = \dfrac{x^2y - 2xy^2 + y^3}{x^3 - x^2y + xy^2}$
40. $y' = \dfrac{x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4}{xy(x^2 + xy + y^2)}$
41. $\left(y + \sqrt{9x^2 - y^2}\right) dx - x\ dy = 0$
42. $xy' = y + xe^{-y/x}\left(\operatorname{sen}\dfrac{y}{x} + \cos\dfrac{y}{x}\right)^{-1}$
43. $(y - x)y' = x$
44. $y' = \dfrac{y}{x} + \sqrt{\dfrac{1 + \cos(y/x)}{1 - \cos(y/x)}}$

1.4 Ecuaciones reducibles a ecuaciones homogéneas

Una ecuación que se presente en la forma

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{5}$$

puede ser reducida a una ecuación diferencial homogénea si se traslada el origen de coordenadas $(0,0)$ al punto (x_0, y_0). El punto (x_0, y_0) es el punto de intersección de las rectas $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ y $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.
Luego de este traslado de coordenadas, los ejes x y y son sustituidos por ξ y ψ respectivamente, entonces:

$$x = \xi + x_0$$
$$y = \psi + y_0$$

La ecuación homogénea a resolverse será en términos de las variables ξ y ψ.
Por otro lado, se deben hacer las consideraciones pertinentes cuando las rectas $a_1x+b_1y+c_1 = 0$, $a_2x+b_2y+c_2 = 0$, son rectas paralelas; en este caso la ecuación es reducida a una ecuación diferencial de variables separables.

Ejercicios

45. $y' = \dfrac{2x - y + 3}{x + y - 6}$

46. $y' = \dfrac{2x - y + 3}{x - 2y - 3}$

47. $y' = \dfrac{x + y - 3}{x - 2} \ln\left(\dfrac{x + y - 3}{x - 2}\right) + \dfrac{y - 1}{x - 2}$

48. $y' = \dfrac{2x - y + 3}{4x - 2y + 5}$

49. $y' = \left(\dfrac{x - y - 1}{x + y + 1}\right)^2 - \dfrac{x - y - 1}{x + y + 1}$

50. $y' = \dfrac{x - y + 3}{x + y + 3} - \dfrac{x + y + 3}{x - y + 3}$

51. $y' = \dfrac{x + y - 1}{x - y - 1} - \left(\dfrac{x + y - 1}{x - y - 1}\right)^{-1}$

52. $y' = \left(\dfrac{x + y + 1}{x + y - 1}\right)^2 - \dfrac{x + y + 1}{x + y - 1} - 1$

1.5 Ecuaciones diferenciales homogéneas generalizadas

Estas ecuaciones se presentan como:

$$y' = \frac{y}{x} f(x^m y^n). \tag{6}$$

La sustitución $v = x^m y^n$ las transforma en ecuaciones diferenciales con variables separables.

Ejercicios

53. $y' = \frac{y}{x}(x^3y^2 + 1)$

54. $y' = \frac{y}{x(xy + 1)}$

55. $y' = \frac{y}{x}\left(x^4y^2 + 2x^2y - 1\right)$

56. $y(2xy + 1)\, dx + x(xy - 1)\, dy = 0$

57. $y(5x^3y - 2)dx + x(3x^3y - 2)dy = 0$

58. $(3x^2y^3 + 2y)dx + (5x^3y^2 + 3x)dy = 0$

59. $y' = \frac{y}{x}\left(\frac{x^6y^4 - 3x^3y^2 + 3}{x^6y^4 + 2x^3y^2 - 2}\right)$

60. $y' = \frac{y\left(2\sqrt{1 - x^6y^4} - 3\right)}{2x}$

61. $y' = \frac{4y \tanh(x^3y^4) - 3x^3y^5}{4x^4y^4}$

62. $y' = \frac{y}{x}\left[\left(\frac{y}{x^2}\right)^4 - \left(\frac{y}{x^2}\right)^2 + 2\right]$

63. $y' = \frac{\cos(x^3y^5 + 1) - 3x^3y^5}{5x^4y^4}$

64. $y' = \frac{y^4\left[4\left(\frac{x^4}{y^3}\right) - e^{x^4/y^3}\right]}{3x^5}$

1.6 Ecuaciones exactas – factores de integración

Una ecuación diferencial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \tag{7}$$

es exacta si

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y). \tag{8}$$

Si (7) no es exacta, pero,

$$\frac{1}{N}\Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big) = f(x) \quad \text{ó} \quad \frac{1}{M}\Big(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\Big) = -g(y). \tag{9}$$

Los factores de integración para (7) son:

$$\mu(x) = e^{\int f(x)dx} \quad \text{ó} \quad \mu(y) = e^{\int g(y)dy}. \tag{10}$$

En ciertos ejercicios, debe identificarse el diferencial de alguna expresión conocida.

Ejercicios

65. $(x^5 - y)dx - (x - y^5)dy = 0$
66. $(9 + x^2y^2)(dx + dy) = 3(xdy + ydx)$
67. $(2x + y\cos(xy))dx + (2y + x\cos(xy))dy = 0$
68. $x\,dy - y\,dx = x^2(dx - dy)\,;\; y(1) = 0$
69. $y(3x^2 + y^2)dx + x(x^2 + 3y^2)dy = 0\,;\; y(1) = 1$
70. $(3xy^2 - 1)dx + x^2y\,dy = 0$
71. $(y^2 + 2)dx + (xy - y^3)dy = 0$
72. $(xye^x + 10)dx + xe^x dy = 0$
73. $xy\,dx - (x^2 - y - 1)dy = 0$
74. $(x^2y^3 + 5)dx - x^3y^2dy = 0$
75. $\big[2 - (x+y)^3\big]dx + 2\,\big[1 - (x+y)^3\big]dy = 0$; Sugerencia: $\mu = \mu(x+y)$
76. $(xy - y^2 + 1)dx + (xy - x^2 + 1)dy = 0$; Sugerencia: $\mu = \mu(xy)$

1.7 Ecuaciones diferenciales lineales de primer orden

Estas ecuaciones se presentan como:

$$y' + p(x)\,y = q(x). \tag{11}$$

La solución de (11) se halla con la fórmula:

$$y = e^{-\varphi(x)}\left(\int e^{\varphi(x)}q(x)dx + k\right). \tag{12}$$

Donde: $\varphi(x) = \displaystyle\int p(x)dx$, y k es una constante de integración.
Por otro lado, si una ecuación diferencial se presenta en la forma:

$$y' = f(x)e^{ay} + g(x), \tag{13}$$

haciendo la sustitución $u = e^{-ay}$, esta ecuación puede ser resuelta como una ecuación lineal de primer orden.

Ejercicios

77. $y' = (\csc x - \cot x)\,y + \tan(-x)$
78. $y' + \dfrac{2y}{x(2+3x)} = 3x$
79. $y' + \dfrac{y}{x\ln x} = x^2$
80. $y' + \dfrac{2}{x^2-1}\,y = x^2 - 1\,;\ y(2) = 0$
81. $y' + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+2x+2}} = \sqrt{x^2+2x+2} - x - 1$
82. $y' = (\tan x)y + x^2\cos^2 x$
83. $xy' + y = x^2\cos(x+2)$
84. $y' + \dfrac{8y}{x^2-16} = x$
85. $y' = \dfrac{xy}{x^2+1} + x(x^2+1)\,;\ y(0) = \dfrac{1}{3}$
86. $y' = x^3e^{2y} - x$
87. $y' = (\operatorname{sen} x + \cos x)e^y + \tan x$
88. $y' = \sqrt{x^2-1}\;e^{-y} + \dfrac{1}{x^2-1}$

1.8 Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

Tienen la forma:

$$y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n, \tag{14}$$

donde n es un número arbitrario. Con la sustitución $z = y^{1-n}$, la ecuación de Bernoulli (14) puede ser resuelta como una ecuación diferencial lineal de primer orden.

Ejercicios

89. $y' + \dfrac{y}{3x+1} = e^{3x}y^{-2}$

90. $y' + \dfrac{y}{16-x^2} = y^{-3}$

91. $y' - \dfrac{2xy}{x^2+4} = xy^{1/2}$

92. $y' + y\ \tanh\dfrac{x}{3} = y^{2/3}\ \operatorname{senh}\dfrac{x}{3}$

93. $y' + (\csc 2x)y = (\cot 2x)\,y^{-1}$

94. $y' - \dfrac{e^{2x}y}{3e^{2x}+4} = (\operatorname{sen} 5x)\,y^7$

95. $y' = (x-1)y^2 - \dfrac{y}{x}$

96. $y' + (\tan x)y = (e^{-x}\tan x)y^3$

97. $y' = (\cot x)y + y^2\,;\ y(\pi/2) = 1$

98. $(x^2+x+1)\,y' + (2x+1)\,y = (x^2+x+1)^{\sqrt{2}+1}y^{\sqrt{2}}$

99. $x^5yy' = x^2y^2 + 4$

100. La pendiente de la recta tangente en cualquier punto (x, y) perteneciente a una curva $\mathcal{C}$, es $\dfrac{y(xy-1)}{x}$. Si esta curva pasa por el punto $(1, 1)$, hallar su ecuación.

1.9 Ecuaciones diferenciales de Riccati

Una ecuación diferencial general de Riccati se presenta en la forma:

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x). \tag{15}$$

Si para esta ecuación se conoce una solución particular $y_1(x)$, la sustitución

$$y = z + y_1 \tag{16}$$

permite transformarla en una ecuación diferencial de Bernoulli.

Ejercicios

101. $y' = 2y^2 - \dfrac{3}{x^2}\,; \quad y_1 = -\dfrac{3}{2x}$

102. $y' = -2y^2 + \dfrac{1}{x^2}\,; \quad y_1 = -\dfrac{1}{2x}$

103. $y' = y^2 + \dfrac{1}{x}y + \dfrac{1}{x^2}\,; \quad y_1 = -\dfrac{1}{x}$

104. $y' = y^2 + (2e^x + 1)y + e^{2x}\,; \quad y_1 = -e^x$

105. $y' = \dfrac{1}{2x}y^2 + y - 1 - \dfrac{1}{2x}\,; \quad y_1 = 1$

106. $y' = \dfrac{1}{x^3}\,y^2 - \dfrac{1}{x}\,y + 2x\,; \quad y_1 = x^2$

107. $y' = \dfrac{1}{x^4 \ln x}\,y^2 - \dfrac{1}{x \ln x}\,y + 3x^2\,; \quad y_1 = x^3$

108. $y' = y^2 + \dfrac{2x}{x^2+1}\,y + \dfrac{2}{x^2+1}\,; \quad y_1 = -\dfrac{1}{x}\,; \quad y(1) = 1$

109. $y' = y^2 - \dfrac{4x}{x^4-1}\,y - \dfrac{4}{x^4-1}\,; \quad y_1 = -\dfrac{1}{x}$

110. $y' = \dfrac{1}{x^3-1}\,y^2 - \dfrac{3x^2}{x^3-1}\,y + 6x\,; \quad y_1 = 3x^2$

111. $y' = \dfrac{1}{10x+1}\,y^2 + \dfrac{1}{x+10}\,y - \dfrac{25}{10x+1} - \dfrac{5}{x+10}\,; \quad y_1 = 5$

112. $y' = -3x^2y^2 + \dfrac{1}{x}\,y - \dfrac{1}{x^4}\,; \quad y_1 = \dfrac{1}{x^3}$

1.10 Ecuaciones diferenciales de Lagrange y Clairaut

Una ecuación diferencial de Lagrange se presenta en la forma:

$$y = xf(y') + g(y'). \tag{17}$$

Haciendo $y' = p$,

$$y = xf(p) + g(p), \tag{18}$$

y derivando (18) con respecto a la variable p, y reordenando los términos se llega a la ecuación lineal,

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p - f(p)}\, x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}, \tag{19}$$

resolviéndola, se obtiene $x = x(p)$; y para hallar $y = y(p)$, se sustituye x en (17).
Una ecuación de Clairaut tiene la forma:

$$y = x\, y' + g(y'). \tag{20}$$

Siguiendo el mismo procedimiento hecho en la ecuación de Lagrange, se tiene:

$$\begin{cases} x = -g'(p) \\ y = xp + g(p) \end{cases} \quad \text{Haciendo } p = k, \quad \begin{cases} x = -g'(k) \\ y = -kg'(k) + g(k) \end{cases}$$

k es una constante, despejándola, se llega a la solución "singular" de (20).

Ejercicios

113. $y = x(y')^2 + y'$

114. $y = 2xy' + \dfrac{1}{y' - 1}$

115. $y = x(y' - \operatorname{sen} y') + (1 - \cos y')^2$

116. $y = xy' - (y' - 1)^2$

117. $y = xy' + \dfrac{1}{y' + 1}$

118. $y = xy' + \dfrac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$

119. $y = xy' + y'\sqrt{y'}$

120. Hallar la ecuación de una curva, tal que la suma de las interseciones de sus tangentes con los ejes coordenados es siempre igual a una constante c.

121. Hallar la ecuación de una curva, tal que el área del triángulo rectángulo formado por su tangente, con los ejes coordenados es constante, e igual a c^2.

1.11 Otras formas

- Si la ecuación diferencial es de la forma: $x = f(y')$, se introduce el parámetro p, haciendo $y' = p$, entonces:

$$\begin{aligned} x &= f(p) \\ y &= \int pf'(p)\ dp + k \end{aligned}$$

- Si la ecuación diferencial es de la forma: $y = f(y')$, se introduce el parámetro p, haciendo $y' = p$, entonces:

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{f'(p)}{p}\ dp + k \\ y &= f(p) \end{aligned}$$

- Si la ecuación diferencial es de la forma: $f(x, y') = 0$, y es posible despejar la variable x, entonces la ecuación se reduce una de la forma $x = g(y')$; en caso contrario se hace $y' = \Psi(t)$, obteniéndose $x = \varphi(t)$, luego:

$$y = \int \Psi(t)\varphi'(t)\ dt + k.$$

- Si la ecuación diferencial es de la forma: $f(y, y') = 0$, y es posible despejar la variable y, entonces la ecuación se reduce una de la forma $y = g(y')$. Si esto no es posible, se hace $y = \varphi(t)$, obteniendo $y' = \Psi(t)$, y:

$$x = \int \frac{\varphi'(t)}{\Psi(t)}\ dt + k$$

Ejercicios

122. $\ln(x - 2y') - (y')^2 = 0$

123. $y - (y')^2 e^{y'} = 0$

124. $(x^3 + 1)y'^{\,3} + 3xy'^{\,2} - 1 = 0$

125. $y^2 y'^{\,2} - y^2(y^2 y'^{\,3} - 1)^2 - 1 = 0$

126. $y' = \operatorname{arc\,sen}\left(\dfrac{x}{y'}\right)$

2 Soluciones

1. $\dfrac{(x-1)^6(y+1)^3}{(x^3-1)^2(y-1)^3} = k$

2. $\dfrac{(x+\sqrt{x^2-25}\,)(y-5)}{y+5} = k$

3. $\left(\dfrac{4+x^2}{4-x^2}\right)^3\left(\dfrac{y^3}{8-y^3}\right)^2 = k$

4. $(x^2-4)^2 + \arctan 2(y+1) = k$

5. $\dfrac{x}{9(9-x^2)^{1/2}} - \dfrac{(9-y^2)^{5/2}}{5} = k$

6. $\dfrac{(1+x^2)(2+y^2)}{(1-x^2)y^2} = k$

7. $\dfrac{x^{24}(8-y^3)}{y^3(1+2x^3)^8} = k$

8. $\ln\left[\dfrac{(x+3)^9(y^3-3y^2+3)}{(x+2)^9}\right] = \dfrac{6}{x+2} + k$

9. $3\tan^2 2x + 6\ln(\cos 2x) + 4\tan 3y = k$

10. $x\arctan\dfrac{x}{2} - y + \ln\left[\dfrac{(y-1)^{y-1}}{x^2+4}\right] = k$

11. $\dfrac{(x+5)^{x+5}(x-5)^{x-5}}{(y+5)^{y+5}(y-5)^{y-5}} = ke^{2(x-y)}$

12. $(1+y)^2 = \tan x$

13. $\operatorname{sen} 2(6x+6y+5) - 2(6x-6y-5) = k$

14. $x + \cot\dfrac{2x-y+2}{2} = k$

15. $3\left[2(x+2y-3)^{1/3}-1\right]^2 + 6\ln\left[2(x+2y-3)^{1/3}+1\right] = 16x + k$

16. $y - \operatorname{sen}(x-y) = k$

17. $y - \tanh(x+y-3) = k$

18. $4y - \ln \dfrac{x-4y+1}{x-4y+5} = k$

19. $2\sqrt{5x+2y+10} - 5\ln\left(5 + 2\sqrt{5x+2y+10}\right) = 2x + k$

20. $(x+y-1)\ln\left[(x+y-1)^2+1\right] + 2\arctan(x+y-1) = 3x+2y+k$

21. $\dfrac{1+\operatorname{sen}\left(\dfrac{y-2}{2x+1}\right)}{1-\operatorname{sen}\left(\dfrac{y-2}{2x+1}\right)} = k(2x+1)$

22. $\left(\dfrac{y+2}{x-2}\right)^2 = \ln(x-2)^2 + k$

23. $\ln\left(\dfrac{2y+1}{x+2}\right) = k(x+2)+1$

24. $5\ln(12x^5+18y^4+5) = 12x^5 + k$

25. $\arctan \dfrac{2(3x^3+2y^2)}{3} = 2x^3 + k$

26. $2(x^3+3)y^2 - 3 = ky^2e^{x^3/3}$

27. $\ln \dfrac{e^x y^3}{e^x y^3 - 1} - \dfrac{1}{e^x y^3 - 1} = x + k$

28. $\dfrac{(3e^x y^2 - 1)^4}{(e^x y^2)^3} = ke^{3x}$

29. $4x - 2ye^{-3x} + \ln(1+2ye^{-3x}) = k$

30. $\dfrac{1}{(2e^y x - 1)^2} = kx + 1$

31. $\left(\dfrac{e^y}{xe^y-1}\right)^{\sqrt{5}}\left(\dfrac{2xe^y-1-\sqrt{5}}{2xe^y-1+\sqrt{5}}\right) = k$

32. $\ln\left(\dfrac{e^{2y}}{x^2e^{2y}+1}\right) + 2\arctan(xe^y) = k$

33. $x(\ln x - y) = k$

34. $y + 3x^5 + 15 = ke^{2x}$

35. $\dfrac{y-2x^8+4}{y-2x^8+5} = ke^x$

36. $\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \ln(xy)^2 = k$

37. $\ln(x-y) - \dfrac{x}{y} = k$

38. $\left(\dfrac{x}{y}-1\right)^2 - \ln y^2 = k$

39. $\ln\left(\dfrac{x^2}{y}\right) + \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y} = k$

40. $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{y}{x}\right)^3 + \dfrac{y}{x} - \ln(y+x) = k$

41. $\ln x - \operatorname{arc\,sen}\dfrac{y}{3x} = k$

42. $e^{y/x}\operatorname{sen}\dfrac{y}{x} = \ln kx$

43. $\dfrac{2y-(1-\sqrt{5})x}{2y-(1+\sqrt{5})x}\ \left(y^2-xy-x^2\right)^{\sqrt{5}} = k$

44. $\cos\left(\dfrac{y}{x}\right) = kx-1$

45. $2x^2-2xy-y^2+6x+12y = k$

46. $x^2-xy+y^2+3x+3y = k$

47. $\ln\left(\dfrac{x+y-3}{x-2}\right) = k(x-2)$

48. $3(x-2y)+\ln(6x-3y+7) = k$

49. $\ln\left[(y+1)(3x^2+y^2+2y+1)\right] + 2\sqrt{3}\ \arctan\dfrac{y+1}{\sqrt{3}x} = k$

50. $y\left[y^2-5(x+3)^2\right]^2 = k$

51. $\dfrac{\left[y^2+3(x-1)^2\right]^2}{y} = k$

52. $(x+y-3)^2+8\ln(x+y+1) = 4x+k$

53. $\dfrac{y^2}{x^2(2x^3y^2+5)} = k$

54. $\dfrac{y(xy+2)}{x} = k$

55. $\dfrac{1}{x^2y+1} + \ln\dfrac{xy}{x^2y+1} = k$

56. $\dfrac{x(xy+2)^3}{y} = k$

57. $x^2y^2(x^3y-1) = k$

58. $\dfrac{x^8y^{12}}{2x^2y^2+1} = k$

59. $\ln\left(\dfrac{y}{x}\right)^2 + \dfrac{1}{x^3y^2}\left(\dfrac{1}{x^3y^2} - 2\right) = k$

60. $\dfrac{1-\sqrt{1-x^6y^4}}{x^3y^2} = kx^2$

61. $\operatorname{senh}(x^3y^4) = kx^4$

62. $\left(\dfrac{x^2}{y}\right)^2 + \ln\dfrac{y^2-x^4}{(xy)^2} = k$

63. $\sec(x^3y^5+1) + \tan(x^3y^5+1) = kx$

64. $e^{-x^4/y^3} + \ln x = k$

65. $x^6 - 6xy + y^6 = k$

66. $x + y = \arctan\dfrac{xy}{3} + k$

67. $x^2 + y^2 + \operatorname{sen}(xy) = k$

68. $y = \dfrac{x(x-1)}{x+1}$

69. $xy(x^2+y^2) = 2$

70. $x^5(5xy^2-2) = k$

71. $(3x-y^2+4)\sqrt{y^2+2} = k$

72. $ye^x + 10\ln x = k$

73. $\dfrac{x^2 - 2y - 1}{y^2} = k$

74. $\dfrac{x^2y^3 + 3}{x^5} = k$

75. $\dfrac{1}{(x+y)^2} + x + 2y = k$

76. $\dfrac{x+y}{\sqrt{2xy+1}} = k$

77. $y = \dfrac{\ln(\cos x) + \cos x + k}{1 + \cos x}$

78. $y = \dfrac{2+3x}{x}\left[\dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{2}{3}x + \dfrac{4}{9}\ln(2+3x) + k\right]$

79. $y = \dfrac{1}{\ln x}\left(\dfrac{1}{3}x^3\ln x - \dfrac{1}{9}x^3 + k\right)$

80. $y = \dfrac{(x+1)\left[(x-1)^3 - 1\right]}{3(x-1)}$

81. $y = \dfrac{x+k}{\sqrt{x^2+2x+2} + x + 1}$

82. $y = \cos x\left[(x^2-2)\operatorname{sen} x + 2x\cos x + k\right]$

83. $y = \dfrac{1}{x}\left[(x^2-2)\operatorname{sen}(x+2) + 2x\cos(x+2) + k\right]$

84. $y = \dfrac{x+4}{x-4}\left[\dfrac{x^2}{2} - 8x + 32\ln(x+4) + k\right]$

85. $y = \dfrac{1}{3}(x^2+1)^2$

86. $e^{-2y} = ke^{x^2} + x^2 + 1$

87. $e^{-y} = \cos x\big(\ln(\cos x) - x + k\big)$

88. $e^y = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\left(\dfrac{1}{2}x^2 + x + k\right)$

89. $y^3 = \dfrac{1}{3x+1}\big(3xe^{3x} + k\big)$

90. $y^4 = 4\sqrt{\dfrac{4-x}{4+x}}\left(4\operatorname{arc\,sen}\dfrac{x}{4} - \sqrt{16-x^2} + k\right)$

91. $2\sqrt{y} = \sqrt{x^2+4}\left(\sqrt{x^2+4} + k\right)$

92. $\cosh\dfrac{x}{3}\left(y^{1/3} - \dfrac{1}{2}\cosh\dfrac{x}{3}\right) = k$

93. $y^2 = \dfrac{2x + \cot 2x - \csc 2x + k}{\csc 2x - \cot 2x}$

94. $y^{-6} = \dfrac{1}{3e^{2x}+4}\left(k - \dfrac{18}{29}e^{2x}(2\operatorname{sen}5x - 5\cos 5x) - \dfrac{24}{5}\cos 5x\right)$

95. $y = \dfrac{1}{x(k - x + \ln x)}$

96. $y^2 = \dfrac{5\cos^2 x}{e^{-x}(2\cos 2x + \operatorname{sen}2x) + k}$

97. $y = \dfrac{\operatorname{sen}x}{1+\cos x}$

98. $y^{1-\sqrt{2}} = (x^2+x+1)^{\sqrt{2}-1}\left[k - (\sqrt{2}-1)\big(\dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + x\big)\right]$

99. $y^2 = \dfrac{k}{e^{x^{-2}}} - 4\big(x^{-2} - 1\big)$

100. $y = \dfrac{1}{x(1-\ln x)}$

101. $\dfrac{(2xy+3)x^5}{xy-1} = k$

102. $\dfrac{(xy-1)x^3}{2xy+1} = k$

103. $\dfrac{1}{xy+1} + \ln x = k$

104. $y = e^x\Big(\dfrac{1}{k-e^x} - 1\Big)$

105. $y = 1 + \dfrac{2xe^x}{k - e^x}$

106. $y = x^2\Big(1 + \dfrac{1}{kx+1}\Big)$

107. $y = x^3\Big(1 + \dfrac{3\ln x}{1+kx^3}\Big)$

108. $y = -\dfrac{2x-1}{x^2-x-1}$

109. $y = \dfrac{1}{x}\Big[\ \dfrac{x^2+1}{x^2-1}\ \Big(k - \dfrac{1}{x} - \ln\dfrac{x-1}{x+1}\Big)^{-1} - 1\Big]$

110. $y = 3x^2 + \dfrac{x^3-1}{k-x}$

111. $y = 5 + \dfrac{2(10x+1)(x+10)}{k-(x+10)^2}$

112. $y = \dfrac{1}{x^3}\Big(1 + \dfrac{2}{kx^2-3}\Big)$

113. $x = \dfrac{1}{(p-1)^2}\big(k - p - \ln p\big)$; $y = \dfrac{p^2}{(p-1)^2}\big(k - p - \ln p\big) + p$

114. $x = \dfrac{1}{p^2}\Big[\ln(p-1) - \dfrac{1}{p-1} + k\Big]$; $y = \dfrac{2}{p}\Big[\ln(p-1) - \dfrac{1}{p-1} + k\Big] + \dfrac{1}{p-1}$

115. $x = \dfrac{(1-\cos p)(p - \operatorname{sen} p\cos p + k)}{\operatorname{sen}^2 x}$

$y = \dfrac{(1-\cos p)(p-\operatorname{sen} p)(p - \operatorname{sen} p\cos p + k)}{\operatorname{sen}^2 p} + (1-\cos p)^2$

116. $(x+2)^2 = \dfrac{1}{4}(y+1)$

117. $y = 1 - (\sqrt{x} - 1)^2$

118. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

119. $4x^3 - 27y = 0$

120. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$

121. $y = \dfrac{c^2}{4x^3}$, para $x < 0$.

122. $x = p + 2pe^{p^2}$, $\quad y = \frac{1}{2}p^2 + (p^2 - 1)e^{p^2} + k$

123. $x = (p+1)e^p + k$, $\quad y = p^2 e^p$

124. $x = \frac{1}{t} - 1$; $\quad y = k - \ln t \quad \Rightarrow \quad y = \ln(x+1) + k$

125. $x = \frac{3}{5}\sec^5 t - \frac{4}{3}\tan^3 t + \sec t - \tan t + k$, $\quad y = \sec^3 t - \tan t$

126. $x = p \operatorname{sen} p$; $\quad y = (p^2 - 1)\operatorname{sen} p + p\cos p + k$

2.1 Explicación del ejercicio 27

$$y' = \frac{e^x y^4}{3}\big(e^x y^3 - 2\big).$$

En el resumen a donde pertenece este ejercicio, se menciona el siguiente caso: Si $y' = yf(e^{ax}y^m)$, la sustitución $u = e^{ax}y^m$ la convierte en una ecuación diferencial de variables separables.

$$y' = y\Big[\frac{e^x y^3}{3}\big(e^x y^3 - 2\big)\Big] = yf(e^x y^3) \quad \Rightarrow \quad u = e^x y^3$$

$$\begin{aligned} u' &= 3e^x y^2 y' + e^x y^3 \\ u' &= u^2(u-2) + u \\ u' &= u(u-1)^2 \\ \int \frac{du}{u(u-1)^2} &= \int dx + k \\ \ln\frac{u}{u-1} - \frac{1}{u-1} &= x + k \end{aligned}$$

Por consiguiente:

$$\ln\frac{e^x y^3}{e^x y^3 - 1} - \frac{1}{e^x y^3 - 1} = x + k,$$

es la solución de la ecuación diferencial.

2.2 Explicación del ejercicio 49

$$y' = \left(\frac{x-y-1}{x+y+1}\right)^2 - \frac{x-y-1}{x+y+1}.$$

Esta ecuación diferencial es reducible a una ecuación homogénea haciendo una traslación del coordenadas. El origen de las coordenadas xy debe ser trasladado al punto $(0,-1)$, este punto es la intersección de las rectas $x-y-1=0$ y $x+y+1=0$. Así, con $x=\xi$ y $y=\psi-1$, la ecuación planteada se transforma en una ecuación diferencial homogénea:

$$\psi' = \left(\frac{\xi-\psi}{\xi+\psi}\right)^2 - \frac{\xi-\psi}{\xi+\psi}\ ,$$

y con la sustitución $\psi = v\xi$, esta ecuación es reducida a una ecuación de variables separables.

$$\begin{aligned} v + \xi v' &= \frac{2v^2-2v}{(v+1)^2} \\ \xi v' &= \frac{2v^2-2v}{(v+1)^2} - v \\ \xi v' &= -\frac{v(v^2+3)}{(v+1)^2} \end{aligned}$$

Integrando,

$$\begin{aligned} \int \frac{d\xi}{\xi} + \int \frac{(v+1)^2 dv}{v(v^2+3)} &= c \\ \ln \xi + \frac{1}{3}\ln v + \frac{1}{3}\ln(v^2+3) + \frac{2}{\sqrt{3}}\ \arctan\frac{v}{\sqrt{3}} &= c \\ \ln \xi^3 v(v^2+3) + 2\sqrt{3}\ \arctan\frac{v}{\sqrt{3}} &= k \end{aligned}$$

Sustituyendo v por $\dfrac{\psi}{\xi}$,

$$\ln\psi(\psi^2+3\xi^2) + 2\sqrt{3}\arctan\frac{\psi}{\sqrt{3}\xi} = k.$$

Finalmente, recordando que $\xi = x$ y $\psi = y+1$, se llega a la solución general en su presentación implícita.

$$\ln\left[(y+1)(3x^2+y^2+2y+1)\right] + 2\sqrt{3}\ \arctan\frac{y+1}{\sqrt{3}x} = k.$$

2.3 Explicación del ejercicio 76

La ecuación
$$(xy - y^2 + 1)dx + (xy - x^2 + 1)dy = 0$$
no es exacta, pues las derivadas parciales $M_y = x - 2y$ y $N_x = y - 2x$ no son iguales. Pero:
$$\frac{M_y - N_x}{xM - yN} = \frac{3(x - y)}{2xy(x - y) + (x - y)} = \frac{3}{2xy + 1} = f(xy).$$
Esto hace pensar que el factor de integración para la ecuación diferencial planteada puede ser de la forma $\mu = \mu(xy)$.
La expresión
$$\frac{M_y - N_x}{xM - yN},$$
tiene su razón de ser. Pues si se asume que multiplicando una ecuación diferencial no exacta $Mdx + Ndy = 0$, por un factor de integración μ, la nueva ecuación
$$\mu\, Mdx + \mu\, Ndy = 0,$$
debe ser exacta, esto es: $\mu\, M_y + \mu_y\, M = \mu\, N_x + \mu_x\, N$, y suponiendo que $\mu = \mu(xy)$, entonces al aplicar la regla de la cadena en las derivadas,
$$\begin{aligned} \mu_y &= \mu'\, x, \\ \mu_x &= \mu'\, y, \end{aligned}$$
se deduce la fórmula para el factor de integración μ.
$$\begin{aligned} \mu\, M_y + \mu'\, xM &= \mu\, N_x + \mu'\, yN \\ \frac{\mu'}{\mu} &= -\frac{M_y - N_x}{xM - yN} = f(xy) \\ \mu &= e^{\int f(xy) d(xy)}. \end{aligned}$$
Volviendo a nuestro problema, $\mu = (2xy + 1)^{-3/2}$; ahora esto implica que la ecuación diferencial
$$\frac{xy - y^2 + 1}{(2xy + 1)^{3/2}}\, dx + \frac{xy - x^2 + 1}{(2xy + 1)^{3/2}}\, dy = 0$$
es exacta, y al resolverla como tal, se obtiene la solución pedida,
$$\frac{x + y}{\sqrt{2xy + 1}} = k.$$

2.4 Explicación del ejercicio 115

La ecuación diferencial de Clairaut planteado en este ejercicio es:

$$y = xy' - (y' - 1)^2.$$

Haciendo $y' = p$, se tiene $y = xp - (p-1)^2$, donde la función $g(p) = -(p-1)^2$ y $g'(p) = -2(p-1)$. Ahora la solución de la ecuación diferencial es hallada a partir de:

$$\begin{cases} x = -g'(k) \\ y = -kg'(k) + g(k) \end{cases} \quad \text{i.e.} \quad \begin{cases} x = 2(k-1) \\ y = 2k(k-1) - (k-1)^2 \end{cases}$$

Al despejar la constante k de las anteriores igualdades, se obtiene lo que viene a llamarse la solución "singular" de la ecuación diferencial propuesto en este ejercicio.

$$(x+2)^2 = \frac{1}{4}(y+1).$$

La parábola descrita por la ecuación anterior, es la "envolvente" de la familia de rectas $y = kx - (k-1)^2$, donde $k \in \mathbb{R}$. Esto se muestra en la Figura 1.

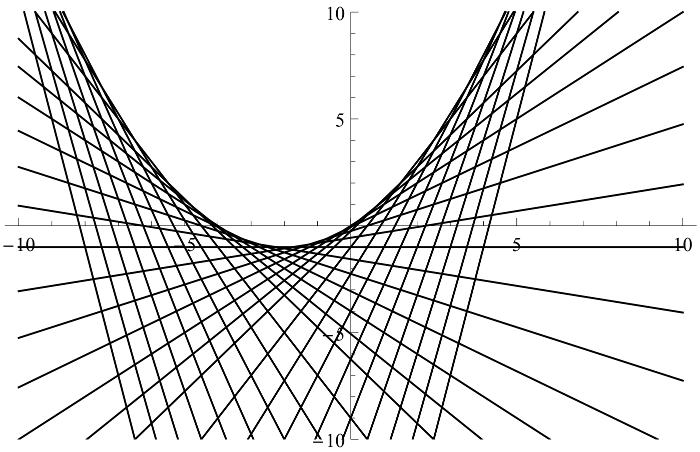

Figura 1: $(x+2)^2 = \dfrac{1}{4}(y+1)$ es la envolvente de la familia de rectas $y = kx - (k-1)^2$.

Recuérdese que la envolvente de una familia de curvas (rectas, circunferencias, hipérbolas, etc.), es una curva con la condición de cada miembro de la familia es tangente a esta envolvente en un determinado punto. En otras palabras: para cada punto perteneciente a la envolvente, existe un miembro de la familia de curvas que es tangente a esta envolvente.

2.5 Explicación del ejercicio 118

$$y = xy' + y'\sqrt{y'}.$$

Para resolver esta ecuación de Clairaut, se hace $y' = p$

$$y = xp + p\sqrt{p}\ , \qquad p > 0.$$

En este caso: $g(p) = p\sqrt{p}$, $g'(p) = \dfrac{3}{2}\sqrt{p}$. Luego:

$$\left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2}\sqrt{p} \\ \\ y = -\dfrac{1}{2}p\sqrt{p} \end{array}\right. \qquad \text{i.e.} \qquad \left\{\begin{array}{l} x = -\dfrac{3}{2}\sqrt{k} \\ \\ y = -\dfrac{1}{2}k\sqrt{k} \end{array}\right.$$

Donde k es una constante positiva, deduciéndose que $x < 0$, $y < 0$, y la solución singular es:

$$4x^3 - 27y = 0\ , \quad \text{donde}: \quad x < 0 \ \text{ y } \ y < 0.$$

La parábola cúbica $4x^3 - 27y = 0$ es la envolvente, en el tercer cuadrante, de la familia de rectas: $y = kx + k\sqrt{k}$, con $k \in \mathbb{R}$. Describiendo esta familia de rectas en la Figura 2: Todas las rectas tienen pendientes negativas, aquellas cuya pendiente k tome valores en el intervalo abierto $(-1, 0)$ son la que más se acercan al eje x; mientras que aquellas cuya pendiente pertenezca a $(-\infty, -1]$ se van haciendo paulatinamente más verticales. En el punto $(0, 0)$ la envolvente no es diferenciable.

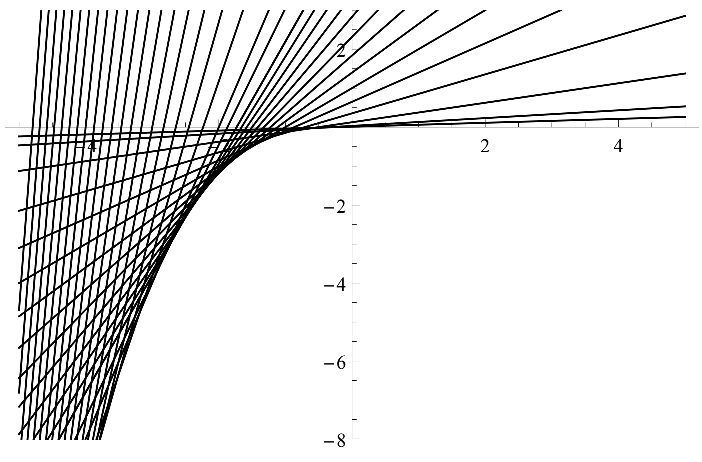

Figura 2: La curva $4x^3 - 27y = 0$ es la envolvente de la familia de rectas: $y = kx + k\sqrt{k}$

2.6 Explicación del ejercicio 119

$y - y_0 = y'(x_0)\,(x - x_0)$ es la ecuación de la recta tangente a la curva, asumiendo que esta recta corta al eje y en el punto A, e intersecta al eje x en el punto B, las coordenadas de estos punto se deducen de la siguiente forma:

$$x = 0 \;\Rightarrow\; y = y_0 + y'(x_0)(-x_0) \;\Rightarrow\; A = \big(0,\; y_0 - y'(x_0)x_0\big)$$

$$y = 0 \;\Rightarrow\; x = x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)} \;\Rightarrow\; B = \left(x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}, 0\right)$$

La condición del problema dice:

$$y_0 - y'(x_0)x_0 + x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)} = c,$$

pero, si estas consideraciones se hacen para cualquier punto (x, y) que se encuentre sobre la curva, el problema se simplifica a la ecuación diferencial:

$$y - y'x + x - \frac{y}{y'} = c.$$

Esta ecuación, es una ecuación diferencial de Clairaut,

$$y = xy' + \frac{cy'}{y'-1}.$$

Haciendo $y' = p$, su solución es:

$$x = \frac{c}{(p-1)^2},$$

$$y = \frac{cp}{(p-1)^2} + \frac{cp}{p-1};$$

siempre que $p \neq 1$. Finalmente se obtiene la ecuación:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}.$$

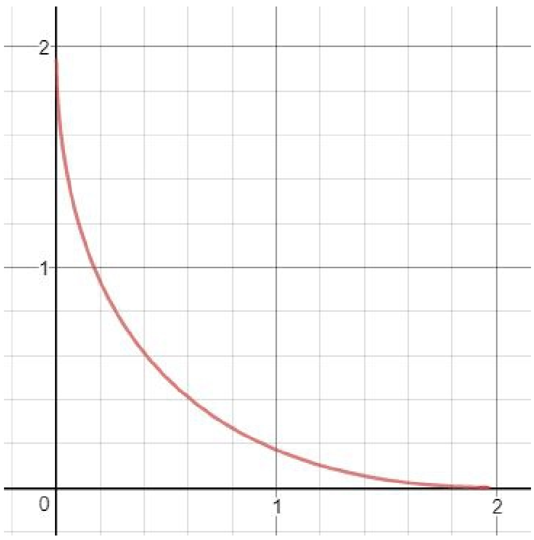

Figura 3: Curva $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{c}$, para $c = 2$.

2.7 Explicación del ejercicio 125

$$y^2y'^{\,2} - y^2(y^2y'^{\,3} - 1)^2 - 1 = 0.$$

Esta ecuación es de la forma $f(y, y') = 0$, al reescribirla como una diferencia de cuadrados igualado a la unidad,

$$(yy')^2 - \left[(yy')^3 - y\right]^2 = 1,$$

se puede recurrir a la identidad trigonométrica: $\sec^2 t - \tan^2 t = 1$.

$$\begin{aligned} yy' &= \sec t, \\ (yy')^3 - y &= \tan t, \end{aligned}$$

Al combinar conveniéntemente las anteriores igualdades, se obtiene:

$$y = \varphi(t) = \sec^3 t - \tan t,$$

$$y' = \Psi(t) = \frac{\sec t}{\sec^3 t - \tan t}.$$

Luego:

$$\begin{aligned} x &= \int \frac{\varphi'(t)}{\Psi(t)}\, dt + k \\ &= \int \frac{\sec^2 t(3\sec t\tan t - 1)}{\dfrac{\sec t}{\sec^3 t - \tan t}}\, dt + k \\ &= \int (3\sec^2 t\tan t - \sec t)(\sec^3 t - \tan t)\, dt + k \\ &= \frac{3}{5}\sec^5 t - \frac{4}{3}\tan^3 t + \sec t - \tan t + k \end{aligned}$$

Así, las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{5}\sec^5 t - \frac{4}{3}\tan^3 t + \sec t - \tan t + k, \\ y &= \sec^3 t - \tan t, \end{aligned}$$

son la solución del problema. La ecuación planteada en este ejercicio es una ecuación diferencial ordinaria de primer orden, pero no es lineal.

Bibliografía

[1] Espinoza Ramos, Eduardo, *Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones, para estudiantes de ciencias e ingeniería*, Lima (2004).

[2] Piaggio, M. A. *An Elementary Treatise on Differential Equations and their applications*, G. Bell and Sons, LTD. London (1921).

[3] Polyanin Andrei D. *The World of Mathematical Equations*, portal de Internet: `http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/ode.htm`

[4] Sevilla Lopez, José Manuel, *Ecuaciones Diferenciales, Tablas y otros datos matemáticos*, Editorial Paraninfo, Madrid (1981).

[5] Trench William F. *Elementary Differential Equations*, Department of Mathematics Trinity University, San Antonio, Texas, USA (2013).