

Ejercicios resueltos de selectividad  
Matemáticas II  
Universidad de Extremadura

---

2000-2006

Vicente González Valle  
I.E.S. Zurbarán (Badajoz)  
Abril 2007



# Prólogo

Este libro se ha hecho para uso y disfrute de los alumnos de segundo de bachillerato de la opción científico-tecnológica. Se trata de la segunda versión, por lo que espero tengáis la bondad de perdonar los errores que he cometido al hacerlo. También agradezco de corazón la colaboración de algunos compañeros y compañeras que tuvieron conocimiento de la primera versión gracias a la Sociedad Extremeña de Educación Matemática “Ventura Reyes Prósper”, la cual no sólo comunicó la primera edición, sino que además me permitió obtener los enunciados de todos los años y así ayudarme a clasificarlos.

Si quieres hacer algún comentario, comunicar algún error o decir algo que se te ocurra, puedes ponerte en contacto conmigo en [vgonzalezster@gmail.com](mailto:vgonzalezster@gmail.com).

Este libro se irá actualizando con los exámenes que cada año vaya poniendo la universidad, pudiendo obtenerse la versión actualizada en la página:

<http://www.telefonica.net/web2/vicentegonza/examenes.html>.

Este trabajo se ha hecho utilizando L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X y su frontend para linux Kile. Para los gráficos se ha usado el software de Geogebra. Gracias a todos los que han hecho posible estos programas y los han compartido gratuitamente con los demás.

He hecho una clasificación de los ejercicios por temas, esperando que la clasificación realizada sea del agrado de todos.

Se trata de un trabajo que ofrezco a la comunidad educativa, pero es conveniente saber que se emite bajo una licencia Creative Commons en la que tienes que tener presente que:

**Tu eres libre de:**

- copiar, distribuir, comunicar y ejecutar públicamente la obra.
- hacer obras derivadas.

**Bajo la siguientes condiciones:**

**Atribución** Debes reconocer y citar la obra de la forma especificada por el autor o el licenciente.

**No Comercial** No puedes utilizar esta obra para fines comerciales.

**Licenciar Igual** Si alteras o transformas esta obra, o generas una obra derivada, sólo puedes distribuir la obra generada bajo una licencia idéntica a ésta.

- Al reutilizar o distribuir la obra, tienes que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.
- alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.





A mi mujer M<sup>a</sup> Teresa,  
y a mis hijos Ana M<sup>a</sup>, Isabel y Vicente.

A los tios Manolo, Chencho, Pepi, Gonzalo y Modesto,  
y, como no, al abuelo Paco,  
los últimos que nos dejaron siendo testigos del amor.

Gracias a todos.



# Índice general

<b>1. Análisis</b>	<b>1</b>
1.1. Funciones y continuidad	1
1.1.1. Septiembre 00 - Ejercicio 2 - Repertorio A	1
1.1.2. Junio 01 - Ejercicio 2 - Repertorio A	2
1.1.3. Septiembre 01 - Ejercicio 1 - Repertorio A	3
1.1.4. Junio 03 - Ejercicio 1 - Repertorio B	4
1.1.5. Septiembre 04 - Ejercicio 1 - Repertorio B	4
1.2. Derivada y sus aplicaciones	5
1.2.1. Junio 00 - Ejercicio 4 - Repertorio A	5
1.2.2. Junio 00 - Ejercicio 1 - Repertorio B	6
1.2.3. Septiembre 00 - Ejercicio 1 - Repertorio B	6
1.2.4. Junio 01 - Ejercicio 3 - Repertorio B	6
1.2.5. Septiembre 01 - Ejercicio 3 - Repertorio B	7
1.2.6. Junio 02 - Ejercicio 1 - Repertorio A	8
1.2.7. Junio 02 - Ejercicio 1 - Repertorio B	8
1.2.8. Septiembre 02 - Ejercicio 1 - Repertorio A	9
1.2.9. Septiembre 02 - Ejercicio 1 - Repertorio B	10
1.2.10. Junio 03 - Ejercicio 3 - Repertorio A	10
1.2.11. Junio 03 - Ejercicio 3 - Repertorio B	11
1.2.12. Septiembre 03 - Ejercicio 2 - Repertorio A	12
1.2.13. Septiembre 03 - Ejercicio 4 - Repertorio B	12
1.2.14. Junio 04 - Ejercicio 3 - Repertorio A	13
1.2.15. Junio 04 - Ejercicio 4 - Repertorio B	14
1.2.16. Septiembre 04 - Ejercicio 4 - Repertorio A	15
1.2.17. Septiembre 04 - Ejercicio 4 - Repertorio B	16
1.2.18. Junio 05 - Ejercicio 3 - Repertorio A	16
1.2.19. Junio 05 - Ejercicio 3 - Repertorio B	16
1.2.20. Septiembre 05 - Ejercicio 1 - Repertorio A	17
1.2.21. Septiembre 05 - Ejercicio 2 - Repertorio B	17
1.2.22. Junio 06 - Ejercicio 1 - Repertorio A	18
1.2.23. Junio 06 - Ejercicio 1 - Repertorio B	18
1.2.24. Septiembre 06 - Ejercicio 3 - Repertorio A	18
1.2.25. Septiembre 06 - Ejercicio 3 - Repertorio B	18
1.3. Integral. Cálculo de áreas y volúmenes	20
1.3.1. Junio 00 - Ejercicio 1 - Repertorio A	20
1.3.2. Junio 00 - Ejercicio 4 - Repertorio B	20
1.3.3. Septiembre 00 - Ejercicio 3 - Repertorio A	22
1.3.4. Septiembre 00 - Ejercicio 3 - Repertorio B	22

1.3.5. Junio 01 - Ejercicio 4 - Repertorio A . . . . .	22
1.3.6. Junio 01 - Ejercicio 2 - Repertorio B . . . . .	23
1.3.7. Septiembre 01 - Ejercicio 4 - Repertorio A . . . . .	24
1.3.8. Septiembre 01 - Ejercicio 1 - Repertorio B . . . . .	25
1.3.9. Junio 02 - Ejercicio 3 - Repertorio A . . . . .	25
1.3.10. Junio 02 - Ejercicio 3 - Repertorio B . . . . .	26
1.3.11. Septiembre 02 - Ejercicio 2 - Repertorio A . . . . .	26
1.3.12. Septiembre 02 - Ejercicio 4 - Repertorio B . . . . .	27
1.3.13. Junio 03 - Ejercicio 2 - Repertorio A . . . . .	28
1.3.14. Junio 03 - Ejercicio 2 - Repertorio B . . . . .	28
1.3.15. Septiembre 03 - Ejercicio 3 - Repertorio A . . . . .	29
1.3.16. Septiembre 03 - Ejercicio 3 - Repertorio B . . . . .	29
1.3.17. Junio 04 - Ejercicio 1 - Repertorio A . . . . .	30
1.3.18. Junio 04 - Ejercicio 3 - Repertorio B . . . . .	31
1.3.19. Septiembre 04 - Ejercicio 3 - Repertorio A . . . . .	31
1.3.20. Septiembre 04 - Ejercicio 3 - Repertorio B . . . . .	32
1.3.21. Junio 05 - Ejercicio 2 - Repertorio A . . . . .	32
1.3.22. Junio 05 - Ejercicio 2 - Repertorio B . . . . .	33
1.3.23. Septiembre 05 - Ejercicio 4 - Repertorio A . . . . .	34
1.3.24. Septiembre 05 - Ejercicio 4 - Repertorio B . . . . .	34
1.3.25. Junio 06 - Ejercicio 2 - Repertorio A . . . . .	35
1.3.26. Junio 06 - Ejercicio 2 - Repertorio B . . . . .	35
1.3.27. Septiembre 06 - Ejercicio 4 - Repertorio A . . . . .	36
1.3.28. Septiembre 06 - Ejercicio 4 - Repertorio B . . . . .	36
<b>2. Álgebra</b> . . . . .	<b>39</b>
2.1. Matrices y determinantes . . . . .	39
2.1.1. Septiembre 00 - Ejercicio 1 - Repertorio A . . . . .	39
2.1.2. Septiembre 01 - Ejercicio 3 - Repertorio A . . . . .	39
2.1.3. Septiembre 01 - Ejercicio 2 - Repertorio B . . . . .	40
2.1.4. Junio 02 - Ejercicio 2 - Repertorio B . . . . .	40
2.1.5. Junio 03 - Ejercicio 4 - Repertorio B . . . . .	41
2.1.6. Septiembre 03 - Ejercicio 1 - Repertorio B . . . . .	41
2.1.7. Junio 04 - Ejercicio 4 - Repertorio A . . . . .	42
2.1.8. Junio 04 - Ejercicio 2 - Repertorio B . . . . .	42
2.1.9. Septiembre 04 - Ejercicio 1 - Repertorio A . . . . .	43
2.1.10. Septiembre 04 - Ejercicio 2 - Repertorio B . . . . .	43
2.1.11. Junio 06 - Ejercicio 4 - Repertorio A . . . . .	44
2.1.12. Septiembre 06 - Ejercicio 2 - Repertorio B . . . . .	44
2.2. Sistemas de ecuaciones . . . . .	45
2.2.1. Junio 00 - Ejercicio 2 - Repertorio A . . . . .	45
2.2.2. Junio 00 - Ejercicio 3 - Repertorio B . . . . .	45
2.2.3. Septiembre 00 - Ejercicio 2 - Repertorio B . . . . .	45
2.2.4. Junio 01 - Ejercicio 1 - Repertorio B . . . . .	46
2.2.5. Junio 02 - Ejercicio 2 - Repertorio A . . . . .	47
2.2.6. Septiembre 02 - Ejercicio 3 - Repertorio A . . . . .	49
2.2.7. Septiembre 02 - Ejercicio 2 - Repertorio B . . . . .	49
2.2.8. Junio 03 - Ejercicio 1 - Repertorio A . . . . .	50
2.2.9. Septiembre 03 - Ejercicio 1 - Repertorio A . . . . .	51



2.2.10. Junio 05 - Ejercicio 1 - Repertorio A . . . . .	51
2.2.11. Junio 05 - Ejercicio 1 - Repertorio B . . . . .	52
2.2.12. Septiembre 05 - Ejercicio 2 - Repertorio A . . . . .	53
2.2.13. Septiembre 05 - Ejercicio 1 - Repertorio B . . . . .	53
2.2.14. Junio 06 - Ejercicio 4 - Repertorio B . . . . .	54
2.2.15. Septiembre 06 - Ejercicio 1 - Repertorio A . . . . .	55
<b>3. Geometría</b>	<b>57</b>
3.1. Vectores, puntos, rectas y planos en el espacio . . . . .	57
3.1.1. Septiembre 00 - Ejercicio 4 - Repertorio A . . . . .	57
3.1.2. Septiembre 00 - Ejercicio 4 - Repertorio B . . . . .	58
3.1.3. Junio 01 - Ejercicio 3 - Repertorio A . . . . .	58
3.1.4. Junio 01 - Ejercicio 4 - Repertorio B . . . . .	59
3.1.5. Septiembre 01 - Ejercicio 2 - Repertorio A . . . . .	59
3.1.6. Septiembre 01 - Ejercicio 4 - Repertorio B . . . . .	60
3.1.7. Junio 02 - Ejercicio 4 - Repertorio A . . . . .	61
3.1.8. Junio 02 - Ejercicio 4 - Repertorio B . . . . .	61
3.1.9. Septiembre 02 - Ejercicio 4 - Repertorio A . . . . .	62
3.1.10. Septiembre 03 - Ejercicio 4 - Repertorio A . . . . .	63
3.1.11. Septiembre 03 - Ejercicio 2 - Repertorio B . . . . .	63
3.1.12. Junio 04 - Ejercicio 1 - Repertorio B . . . . .	64
3.1.13. Septiembre 04 - Ejercicio 2 - Repertorio A . . . . .	64
3.1.14. Septiembre 05 - Ejercicio 3 - Repertorio B . . . . .	65
3.1.15. Junio 06 - Ejercicio 3 - Repertorio A . . . . .	65
3.1.16. Junio 06 - Ejercicio 3 - Repertorio B . . . . .	66
3.1.17. Septiembre 06 - Ejercicio 1 - Repertorio B . . . . .	66
3.2. Problemas métricos . . . . .	68
3.2.1. Junio 00 - Ejercicio 3 - Repertorio A . . . . .	68
3.2.2. Junio 00 - Ejercicio 2 - Repertorio B . . . . .	68
3.2.3. Junio 01 - Ejercicio 1 - Repertorio A . . . . .	68
3.2.4. Septiembre 02 - Ejercicio 3 - Repertorio B . . . . .	69
3.2.5. Junio 03 - Ejercicio 4 - Repertorio A . . . . .	70
3.2.6. Junio 04 - Ejercicio 2 - Repertorio A . . . . .	70
3.2.7. Junio 05 - Ejercicio 4 - Repertorio A . . . . .	71
3.2.8. Junio 05 - Ejercicio 4 - Repertorio B . . . . .	71
3.2.9. Septiembre 05 - Ejercicio 3 - Repertorio A . . . . .	72
3.2.10. Septiembre 06 - Ejercicio 2 - Repertorio A . . . . .	72



# Capítulo 1

## Análisis

### 1.1. Funciones y continuidad

#### 1.1.1. Representar gráficamente la función

$$f(x) = 2x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{5}{27}$$

¿Cuántas raíces reales positivas tiene este polinomio?

(Septiembre 00)

- **Solución:**

Para poder representarla vamos a estudiar su derivada. Tenemos que

$$f'(x) = 6x^2 - x - 1$$

Igualando a cero resulta:

$$6x^2 - x - 1 = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12} = \begin{cases} \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \\ -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Construimos una tabla para estudiar el signo de la derivada y conocer así donde crece y donde decrece y sus máximos y mínimos.

	$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$6x^2 - x - 1$	+	-	+
	↗	↘	↗

En consecuencia:

- Crece  $\longrightarrow \left(-\infty, -\frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

- Decrece  $\longrightarrow \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$

- Máximo  $\longrightarrow \left(-\frac{1}{3}, \frac{7}{18}\right)$

- Mínimo  $\longrightarrow \left(\frac{1}{2}, -\frac{41}{216}\right)$

También es obvio que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  y que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Podemos hacer una tabla de valores para afinar la representación, pero aquí no la pondremos.

La gráfica resultante podemos verla en la figura 1.1

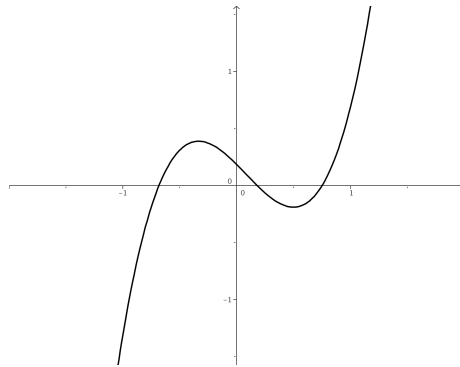


Figura 1.1: Representación gráfica de la función  $f(x) = 2x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{5}{27}$

Para ver la última parte del ejercicio usaremos el Teorema de Bolzano. Sabemos que como mucho tendrá tres raíces reales (pues es un polinomio de grado 3) y por los datos recabados con anterioridad y mirando la gráfica las raíces estarán en los intervalos  $(-\infty, -\frac{1}{3})$ ,  $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$  y  $(\frac{1}{2}, +\infty)$ . Es evidente que hay una positiva garantizada (la contenida en el último intervalo) y otra negativa (en el primero). Veamos que ocurre con la otra. Nos basaremos en el teorema de Bolzano para ir tanteando y comprobando donde está.

Tenemos que  $f(0) = \frac{5}{27} > 0$  y  $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{41}{216} < 0$ . Por tanto la tercera raíz se encuentra en el intervalo  $(0, \frac{1}{2})$  y es positiva.

### 1.1.2. Representa la gráfica del polinomio

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 0'2$$

¿Cuántas raíces reales negativas tiene este polinomio? ¿y cuántas positivas?

(Junio 01)

#### - Solución:

Vamos a hacer un breve estudio del polinomio para su representación:

- $Dom f = \mathbb{R} \rightarrow$  Como en todos los polinomios.
- Simetría  $\rightarrow$  No tiene.
- Continuidad  $\rightarrow$  Continua en todo  $\mathbb{R}$ .
- Asíntotas  $\rightarrow$  No tiene, como le ocurre a todos los polinomios.
- Corte con los ejes:
  - Eje X: Al ser un polinomio de grado 3 puede cortar al Eje X en un máximo de tres puntos. Vamos a orientarnos donde estarán usando el teorema de Bolzano.
    - $f(-2) = -16 + 12 - 0'2 < 0$
    - $f(-1) = -2 + 3 - 0'2 > 0$

- $f(0) = -0'2 < 0$
- $f(1) = 2 + 3 - 0'2 > 0$

Por tanto corta en un punto entre  $(-2, -1)$ , en otro entre  $(-1, 0)$  y en otro entre  $(0, 1)$ .

- Eje Y:  $(0, -0'2)$

- Vamos a estudiar la derivada:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x$$

Esta derivada se anula en  $x = 0$  y en  $x = -1$ . Por tanto:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
$6x^2 + 6x$	+	-	+
	↗	↘	↗

De aquí deducimos que:

- Crece  $\longrightarrow (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$
- Decece  $\longrightarrow (-1, 0)$
- Máximo  $\longrightarrow (-1, 0'8)$
- Mínimo  $\longrightarrow (0, -0'2)$

Su representación gráfica podemos verla en la figura 1.2

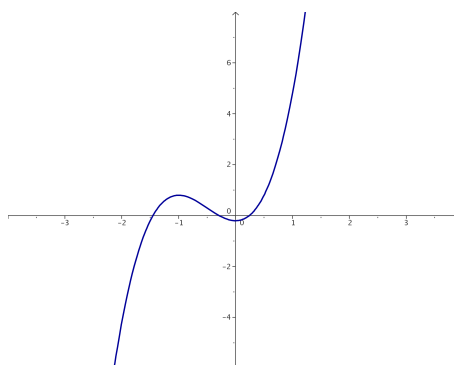


Figura 1.2: Representación gráfica de la función  $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 0'2$

La respuesta a las preguntas finales ya la hemos hecho cuando realizamos el estudio del corte con el Eje X, es decir, hay dos raíces negativas y una positiva.

**1.1.3. Enunciar el teorema de Bolzano. Calcular, con un error menor que una décima, una raíz positiva del polinomio  $x^3 + x - 1$**

*(Septiembre 01)*

- **Solución:**

La parte de teoría podemos encontrarla en cualquier libro.

Para buscar la raíz positiva que nos piden vamos a tantear utilizando el teorema de Bolzano. Nuestra función es  $f(x) = x^3 + x - 1$  y es fácil observar que la función es continua en todo  $\mathbb{R}$ , y por tanto, lo es en cualquier intervalo que cojamos. También se cumple que:

$$f(0) = -1 \text{ y } f(1) = 1$$

Vamos a comenzar a tantear para “acorralar” la raíz.

- $f(0'5) = -0'375 < 0 \implies$  La raíz está en el intervalo  $(0'5, 1)$ .
- $f(0'7) = 0'043 > 0 \implies$  La raíz está en el intervalo  $(0'5, 0'7)$ .
- $f(0'6) = -0'184 < 0 \implies$  La raíz está en el intervalo  $(0'6, 0'7)$ .

La raíz, con un error menor que 0'1 está contenida en el intervalo  $(0'6, 0'7)$ . Valdría cualquiera, pero parece que por el valor que toma la función en él podíamos tomar 0'7.

**1.1.4. Enunciar el teorema de Bolzano y determinar si el polinomio  $x^4 - 4x^2 - 1$  tiene alguna raíz real negativa.**

(Junio 03)

**- Solución:**

El teorema podemos encontrarlo en cualquier libro.

Vamos a aplicar el mismo para comprobar que la función tiene, al menos, una raíz negativa.

Este hecho es evidente, pues basta con comprobar que la función toma valores de distinto signo en  $-5$  y  $0$ .

$$- f(-5) = 625 - 100 - 1 > 0.$$

$$- f(0) = -1 < 0.$$

Luego, según el teorema de Bolzano, como  $f$  es continua en  $[-5, 0]$  y toma valores de signo contrario en  $-5$  y  $0$ , entonces existe un  $c \in (-5, 0)$  en el que  $f(c) = 0$ .

**1.1.5. Enunciar el teorema de Bolzano y usarlo para probar que la ecuación  $x = \cos x$  tiene solución positiva.**

(Septiembre 04)

**- Solución:**

El teorema de Bolzano puede encontrarse en cualquier libro.

Pasamos a la segunda parte.

Consideramos la función  $f(x) = \cos x - x$ . Evidentemente su dominio es todo  $\mathbb{R}$  y es también continua en todo su dominio. Además:

$$▪ f(0) = 1 - 0 = 1 > 0$$

$$▪ f(1) = \cos 1 - 1 = 0'999847 - 1 < 0$$

Por tanto, esta función cumple las hipótesis del teorema de Bolzano, y según el mismo, tiene que tener una raíz en el intervalo  $(0, 1)$ , y por tanto positiva.

Si no queremos apurar tanto podemos tomar  $x = 2, 3, \dots$  en lugar de  $x = 1$ , pues como el coseno está comprendido entre  $-1$  y  $1$ , al restarle la  $x$  elegida dará negativo.

## 1.2. Derivada y sus aplicaciones

**1.2.1.** Determinar el dominio de definición de la función  $f(x) = x - \ln(x^2 - 1)$  y representar su gráfica, calculando los intervalos de crecimiento y los extremos (máximos y mínimos relativos).

(Junio 00)

- **Solución:**

La función no existirá en los puntos en los que  $x^2 - 1 \leq 0$ . Vamos a ver donde ocurre. Para ello vamos a hacer una tabla con los puntos de corte.

$$x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1$$

La tabla queda:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x^2 - 1$	+	-	+

Luego el dominio de la función es  $Dom f = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .

Vamos a estudiar su derivada:

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 - 2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1}$$

Vamos a estudiar su signo. Para ello vamos a igualar la derivada a cero y tendremos en cuenta el dominio antes calculado y construiremos una tabla.

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} = 0 \implies x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

La tabla quedaría:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 1 + \sqrt{2})$	$(1 + \sqrt{2}, +\infty)$
$\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1}$	+	No existe	-	+
	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

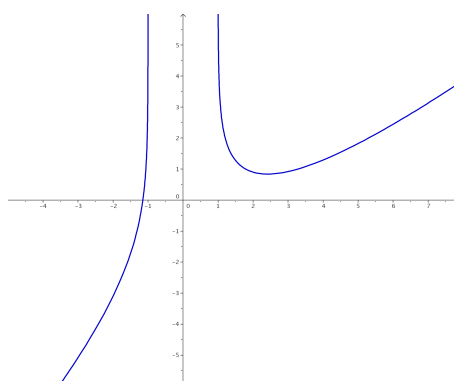


Figura 1.3: Representación gráfica de la función  $f(x) = x - \ln(x^2 - 1)$

Luego la función:

- Crece  $\longrightarrow (-\infty, -1) \cup (1 + \sqrt{2}, +\infty)$
- Decrece  $\longrightarrow (1, 1 + \sqrt{2})$

Hay un mínimo en  $(1 + \sqrt{2}, 0.84)$ . Para aproximar más es bueno hacer una tabla de valores, que aquí no haremos. También es evidente que en  $x = 1$  y en  $x = -1$  hay asíntotas verticales, pues las tiene el logaritmo.

- $x = 1 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$  (Por la izquierda no existe).
- $x = -1 \longrightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$  (Por la derecha no existe).

La representación gráfica podemos verla en la figura 1.3.

**1.2.2. Definir el concepto de derivada de una función  $f(x)$  en un punto  $x = a$ , y explicar su relación con los máximos relativos de la función.**

(Junio 00)

**- Solución:**

La solución de este ejercicio puede verse en cualquier libro.

**1.2.3. Calcular la derivada en el punto  $x = 1$  de la función  $f(x) = x^{-1/2} \ln x$ .**

(Septiembre 00)

**- Solución:**

Vamos a calcular la derivada y después sustituiremos  $x = 1$  en la función obtenida.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} \ln x + x^{-1/2} \frac{1}{x}$$

Sustituyendo obtenemos:

$$f'(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1^{-3/2} \ln 1 + 1^{-1/2} \cdot 1 = 1$$

**1.2.4. Dadas las funciones  $f(x) = x^2 + \pi$  y  $g(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x$ , calcula la derivada en  $x = 0$  de las funciones  $f(g(x))$  y  $g(f(x))$ .**

(Junio 01)

**- Solución:**

Tenemos dos formas de resolver este ejercicio. La primera consiste en calcular las composiciones requeridas y posteriormente derivar, y la segunda en derivar aplicando la regla de la cadena. Veamos la primera en ambas funciones:

$$f(g(x)) = (\operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x)^2 + \pi = \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{cos}^2 x}_1 + 2\operatorname{sen} x \operatorname{cos} x + \pi = \operatorname{sen} 2x + \pi + 1$$

Si derivamos esta expresión tendremos:

$$[(f \circ g)]'(x) = [f(g(x))]' = 2\operatorname{cos} 2x$$

Sustituyendo en  $x = 0$  resulta:

$$[(f \circ g)]'(0) = 2$$

Por otro lado, la otra composición nos daría:

$$g(f(x)) = \operatorname{sen}(x^2 + \pi) + \operatorname{cos}(x^2 + \pi)$$



Derivando obtenemos:

$$[(gof)]'(x) = 2x\cos(x^2 + \pi) - 2x\operatorname{sen}(x^2 + \pi)$$

Substituyendo en  $x = 0$  el resultado obtenido es:

$$[(gof)]'(0) = 0$$

Veamos ahora el otro método para la resolución del ejercicio. Lo haremos a modo de ejemplo sólo en el primer caso. Según la regla de la cadena

$$[(fog)]'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2(\operatorname{sen}x + \operatorname{cos}x)(\operatorname{cos}x - \operatorname{sen}x)$$

Si sustituimos en  $x = 0$  nos quedaría:

$$(fog)]'(0) = 2(\operatorname{sen}0 + \operatorname{cos}0)(\operatorname{cos}0 - \operatorname{sen}0) = 2$$

Obtenemos, obviamente, el mismo resultado.

### 1.2.5. Entre todos los rectángulos de área dada ¿cuál es el de perímetro mínimo?

(Septiembre 01)

- **Solución:**

Vamos a buscar una función a minimizar (que dependerá en un principio de dos variables) y una igualdad que ligue las variables. En nuestro caso son:

$$\left. \begin{array}{l} P(x, y) = 2x + 2y \\ A = x \cdot y \end{array} \right\} \begin{array}{l} \implies P(x) = 2x + \frac{2A}{x} = \frac{2x^2 + 2A}{x} \\ \implies y = \frac{A}{x} \quad (1) \end{array}$$

Vamos a derivar la función obtenida:

$$P'(x) = \frac{4x \cdot x - (2x^2 + 2A)}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 2A}{x^2} = \frac{2x^2 - 2A}{x^2}$$

Igualando la derivada a cero obtenemos:

$$\frac{2x^2 - 2A}{x^2} = 0 \implies 2x^2 - 2A = 0 \implies x^2 = A \implies x = \pm\sqrt{A}$$

De las dos obtenidas sólo vale la positiva. Vamos a calcular la segunda derivada para ver que hay un mínimo.

$$P''(x) = \frac{4x \cdot x^2 - 2x(2x^2 - 2A)}{x^4} = \frac{4x^3 - 4x^3 + 4Ax}{x^4} = \frac{4Ax}{x^4}$$

Substituyendo el valor de  $x$  obtenido tenemos:

$$P''(\sqrt{A}) = \frac{4A\sqrt{A}}{A^2} > 0$$

luego hay un mínimo. Substituyendo  $x = \sqrt{A}$  en (1) podemos calcular  $y$ .

$$x = \sqrt{A} \implies y = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$$

Se trata por tanto de un cuadrado de lado  $\sqrt{A}$ .

**1.2.6. Definir el concepto de derivada de una función  $f(x)$  en un punto  $x = a$  y explicar su relación con el crecimiento de la función.**

(Junio 02)

- **Solución:**

La respuesta puede encontrarse en cualquier libro.

**1.2.7. Representar la gráfica de la función  $f(x) = 2x + (2x)^{-1}$ , determinando los intervalos donde es creciente.**

(Junio 02)

- **Solución:**

Nuestra función podemos ponerla  $f(x) = 2x + (2x)^{-1} = 2x + \frac{1}{2x} = \frac{4x^2 + 1}{2x}$ .

Vamos a buscar algunos datos para poder representarla.

Es evidente que el dominio de la función es  $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$ . También es obvio que tiene una asíntota vertical en  $x = 0$ , que no corta al eje  $X$ , ni al eje  $Y$ .

Vamos a estudiar la derivada.

$$f'(x) = \frac{8x \cdot 2x - 2 \cdot (4x^2 + 1)}{4x^2} = \frac{16x^2 - 8x^2 - 2}{4x^2} = \frac{8x^2 - 2}{4x^2}$$

Igualando a cero tenemos:

$$\frac{8x^2 - 2}{4x^2} = 0 \implies 8x^2 - 2 = 0 \implies x^2 = \frac{1}{4} \implies x = \pm \frac{1}{2}$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada para especificar donde crece y donde decrece, así como los máximos y mínimos, si los tiene.

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 0)$	$(0, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$\frac{8x^2 - 2}{4x^2}$	+	-	-	+
	↗	↘	↘	↗

Para afinar la representación puede hacerse una pequeña tabla de valores, viendo la representación en la figura 1.4.

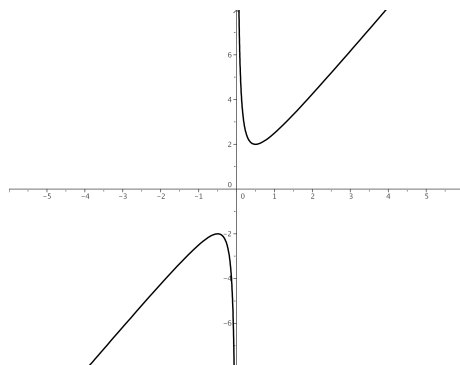


Figura 1.4: Representación gráfica de la función  $f(x) = 2x + (2x)^{-1}$

En cuanto al crecimiento y decrecimiento, así como del estudio de la derivada, concluimos:

- Crece  $\longrightarrow (-\infty, -1/2) \cup (1/2, +\infty)$ .
- Decrece  $\longrightarrow (-1/2, 0) \cup (0, 1/2)$ .
- Máximo  $\longrightarrow (-1/2, -2)$ .
- Mínimo  $\longrightarrow (1/2, 2)$ .

**1.2.8. Representar la gráfica de la función  $f(x) = x^3 + x^{-3}$ , determinando sus extremos (máximos y mínimos relativos).**

(Septiembre 02)

**- Solución:**

Nuestra función escrita en forma de fracción es:

$$f(x) = x^3 + x^{-3} = x^3 + \frac{1}{x^3} = \frac{x^6 + 1}{x^3}$$

Es evidente que su dominio es  $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$ . Además la función es impar, pues:

$$f(-x) = \frac{(-x)^6 + 1}{(-x)^3} = \frac{x^6 + 1}{-x^3} = -\frac{x^6 + 1}{x^3} = -f(x)$$

Vamos a ver los puntos de corte con los ejes:

- Eje X  $\longrightarrow$  Hacemos  $y = 0$ .

$$\frac{x^6 + 1}{x^3} = 0 \implies x^6 + 1 = 0 \implies \text{No corta.}$$

- Eje Y  $\longrightarrow$  Hacemos  $x = 0$ . En este caso no corta, pues  $x = 0$  no pertenece al dominio.

Vamos a calcular la primera derivada para hallar los máximos y los mínimos.

$$y' = \frac{6x^5 \cdot x^3 - 3x^2(x^6 + 1)}{x^6} = \frac{6x^8 - 3x^8 - 3x^2}{x^6} = \frac{3x^8 - 3x^2}{x^6}$$

Si igualamos a cero resulta

$$\frac{3x^8 - 3x^2}{x^6} = 0 \implies 3x^8 - 3x^2 = 0 \implies 3x^2(x^6 - 1) = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} x = 0 \implies \text{No pertenece al dominio.} \\ x^6 - 1 = 0 \implies x^6 = 1 \implies x = \pm 1 \end{cases}$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada y así podemos decidir los máximos y mínimos.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \infty)$
$\frac{3x^8 - 3x^2}{x^6}$	+	-	-	+
	↗	↘	↘	↗

De aquí deducimos que la función tiene:

- Un máximo en el punto  $(-1, -2)$ .
- Un mínimo en el punto  $(1, 2)$ .

Es fácil observar que la función tiene una asíntota vertical en la recta  $x = 0$  y que no tiene asíntotas ni horizontales, ni oblicuas.

Puede hacerse una tabla de valores para afinar más la representación gráfica, pero no la haremos aquí. La representación gráfica pedida podemos verla en la figura 1.5.

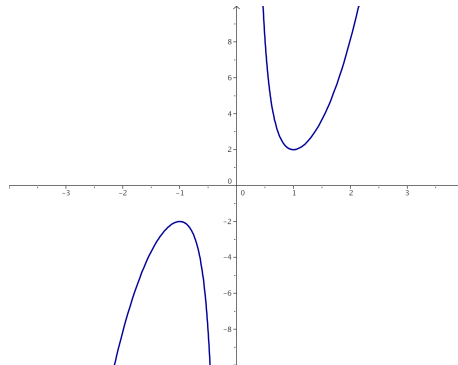


Figura 1.5: Representación gráfica de la función  $f(x) = x^3 + x^{-3}$

### 1.2.9. Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el límite

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(2\pi x)}{(x - 1)^2}$$

(Septiembre 02)

#### - Solución:

La parte teórica de la pregunta puede verse en cualquier libro. Vamos a resolver el límite.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(2\pi x)}{(x - 1)^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\pi \operatorname{sen}(2\pi x)}{2(x - 1)} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\pi^2 \cos(2\pi x)}{1} = 2\pi^2$$

### 1.2.10. Representar gráficamente la función $f(x) = e^x - ex$ , determinando sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos). ¿Existe algún valor de $x$ en que $f(x)$ sea negativo?

(Junio 03)

#### - Solución:

Vamos a empezar, como siempre, por ver su dominio.

- Es evidente que el  $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$ .

- Veamos ahora los cortes con los ejes:

- Eje X.  $\longrightarrow$  Hacemos  $y = 0$ .  
 $e^x - ex = 0 \implies e^x = ex \implies x = 1$
- Eje Y.  $\longrightarrow$  Hacemos  $x = 0$ .  
 $f(0) = 1$

- Vamos a realizar la derivada, la igualaremos a cero y la estudiaremos la misma.

$$f'(x) = e^x - e = 0 \implies e^x = e \implies x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$e^x - e$	-	+
	$\searrow$	$\nearrow$

También se puede observar de forma sencilla que no va a tener asíntotas.

Para afinar la representación vamos a hacer una tabla de valores:

$x$	-1	0	1	2	3
$y$	3.09	1	0	1.95	11.93

La representación gráfica podemos verla en la figura 1.6.

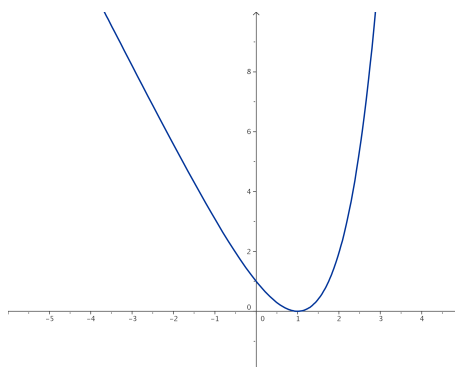


Figura 1.6: Representación gráfica de la función  $f(x) = e^x - ex$

En cuanto al interrogante que nos hacen la respuesta es evidente viendo la gráfica, pero también puede razonarse si tenemos en cuenta que tiene un mínimo en el punto  $(1, 0)$ . La respuesta obvia es no.

**1.2.11. Determinar una recta tangente a la parábola  $y = 2 - x^2$  que sea paralela a la recta de ecuación  $2x + y = 4$ .**

(Junio 03)

**- Solución:**

Como es paralela a la recta  $2x + y = 4$  la ecuación de la recta que buscamos tiene que ser de la forma  $2x + y = k$  y de aquí deducimos que su pendiente tiene que ser  $m = -2$ .

Vamos a ver donde tiene la función  $y = 2 - x^2$  una recta tangente con pendiente  $m = -2$ .

$$m_{tg} = f'(x) = -2x = -2 \implies x = 1$$

Luego el punto en el que se produce la tangente es  $f(1) = 2 - 1 = 1 \implies (1, 1)$ .

Por tanto, para calcular  $k$  basta con sustituir el punto en la ecuación de la recta  $2x + y = k$ .

$$2x + y = k \text{ en } (1, 1) \implies 2 + 1 = k \implies k = 3.$$

Luego la recta buscada es

$$2x + y = 3$$

**1.2.12.** Con un alambre de dos metros se desea formar un cuadrado y un círculo. Determinar el lado del cuadrado y el radio del círculo para que la suma de sus áreas sea mínima.

(Septiembre 03)

- **Solución:**

Para plantear el problema buscamos una función a minimizar (que estará en función de dos variables) y una ecuación que ligue las variables. Estas ecuaciones son:

$$\begin{aligned} A(l, r) &= l^2 + \pi r^2 \implies \text{Ecuación a minimizar.} \\ 4l + 2\pi r &= 2 \implies 2l + \pi r = 1 \implies \text{Ecuación que liga las variables.} \end{aligned}$$

Vamos a despejar  $l$  en la última ecuación, resultando:

$$l = \frac{1 - \pi r}{2} \quad (1.1)$$

Sustituyendo en la primera tenemos:

$$\begin{aligned} A(r) &= \left(\frac{1 - \pi r}{2}\right)^2 + \pi r^2 = \frac{1 + \pi^2 r^2 - 2\pi r}{4} + \pi r^2 = \frac{1 + \pi^2 r^2 - 2\pi r + 4\pi r^2}{4} = \\ &= \frac{(\pi^2 + 4\pi)r^2 - 2\pi r + 1}{4} \end{aligned}$$

Derivando la expresión obtenemos:

$$A'(r) = \frac{1}{2} \cdot [2(\pi^2 + 4\pi)r - 2\pi] = \frac{(\pi^2 + 4\pi)r - \pi}{2}$$

Igualando a cero resulta:

$$\begin{aligned} \frac{(\pi^2 + 4\pi)r - \pi}{2} = 0 &\implies (\pi^2 + 4\pi)r - \pi = 0 \implies (\pi^2 + 4\pi)r = \pi \implies \\ &\implies (\pi + 4)r = 1 \implies r = \frac{1}{\pi + 4} \text{ u.} \end{aligned}$$

Si hacemos la segunda derivada resulta:

$$A''(r) = \frac{\pi^2 + 4\pi}{2} > 0 \text{ para cualquier valor de } r.$$

En consecuencia para el valor de  $r$  que nosotros hemos calculado la función tiene un mínimo.

Vamos a calcular  $l$  sustituyendo en la igualdad (1.1).

$$l = \frac{1 - \pi \frac{1}{\pi+4}}{2} = \frac{1 - \frac{\pi}{\pi+4}}{2} = \frac{\pi+4 - \pi}{2\pi+8} = \frac{4}{2\pi+8} = \frac{2}{\pi+4} \text{ u.}$$

**1.2.13.** Determinar en qué puntos es negativa la derivada de la función  $f(x) = e^x x^{-2}$ .

(Septiembre 03)

- **Solución:**

Nuestra función es  $f(x) = \frac{e^x}{x^2}$ . Su derivada por tanto será:

$$f'(x) = \frac{e^x x^2 - 2xe^x}{x^4} = \frac{xe^x(x-2)}{x^4}$$

Vamos a estudiar su signo. Calculamos para ello las raíces del numerador y del denominador.

- Raíces del numerador:

$$xe^x(x-2) = 0 \implies \begin{cases} x = 0. \\ e^x = 0 \implies \text{No tiene solución.} \\ x - 2 = 0 \implies x = 2. \end{cases}$$

- Raíces del denominador:

$$x^4 = 0 \implies x = 0.$$

Con los valores obtenidos construimos una tabla para estudiar el signo de la derivada.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$\frac{xe^x(x-2)}{x^4}$	+	-	+

Por tanto es negativa en el intervalo  $(0, 2)$ .

**1.2.14. Determinar el mayor área que puede encerrar un triángulo rectángulo cuyo lado mayor mida 1 metro.**

(Junio 04)

- **Solución:**

La figura 1.7 nos muestra la idea.

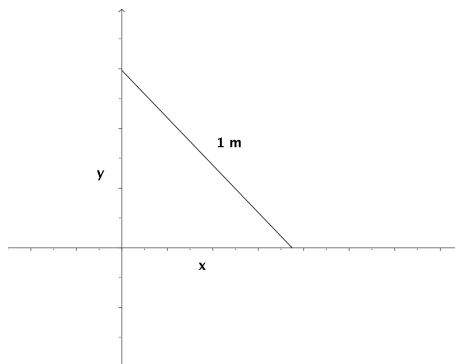


Figura 1.7: Visión gráfica del problema

Nosotros iremos moviendo la hipotenusa (lado mayor) haciendo variar  $x$  e  $y$ .

Necesitamos pues una función a maximizar (el área) y otra que ligue las dos variables. Dichas ecuaciones son:

$$A(x, y) = \frac{x \cdot y}{2} \quad (\text{Función a maximizar})$$

$$x^2 + y^2 = 1 \implies y = \sqrt{1 - x^2} \quad (\text{Ecuación que liga las variables})$$

Por tanto, si sustituimos la  $y$  en la primera función obtenemos:

$$A(x) = \frac{x \cdot \sqrt{1 - x^2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1 - x^2}$$

Vamos a derivar para ver los puntos que anulan dicha derivada. Entre estos valores se encuentran

los máximos y los mínimos.

$$A'(x) = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{1-x^2} + \frac{x \cdot (-2x)}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} \right] = \frac{1}{2} \left[ \frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} \right] = \frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$$

Igualando esta expresión a cero tenemos:

$$\frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \implies -2x^2 + 1 = 0 \implies 2x^2 = 1 \implies x^2 = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

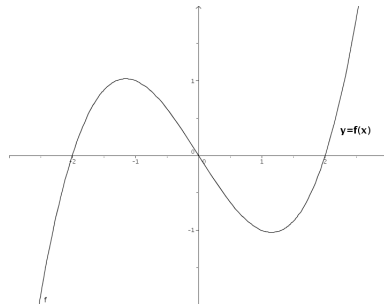
Para ver que tenemos en ese punto un máximo vamos a estudiar el signo de la derivada a ambos lados del número.

Tenemos que  $A'(0) = \frac{1}{2} > 0$  y  $A'(0.8) = \frac{-0.28}{1.2} < 0$  y por tanto hay un máximo.

En conclusión tenemos que:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ é } y = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

**1.2.15. Si la gráfica de una función  $f(x)$  es:**



representar aproximadamente la gráfica de la derivada  $f'(x)$ .

(Junio 04)

**- Solución:**

Observando la gráfica tenemos que la función tiene las siguientes características:

- Crece en  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \implies$  Luego ahí  $f'(x) > 0$ .
- Decrece en  $(-1, 1) \implies$  Luego ahí  $f'(x) < 0$ .
- Tiene un máximo en  $(-1, 1) \implies f'(-1) = 0$ .
- Tiene un mínimo en  $(1, -1) \implies f'(1) = 0$ .
- Es convexa en  $(-\infty, 0) \implies f''(x) < 0 \implies f'$  es decreciente en  $(-\infty, 0)$ .
- Es cóncava en  $(0, +\infty) \implies f''(x) > 0 \implies f'$  es creciente en  $(0, +\infty)$ .
- Hay un punto de inflexión en  $x = 0$  como conclusión de los puntos anteriores, por tanto tiene un mínimo en  $x = 0$ .

Con todos estos datos tenemos que la gráfica podría ser la que vemos en la figura 1.8.



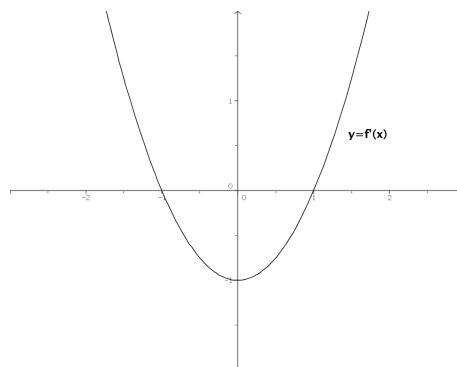
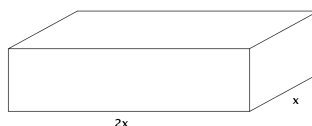


Figura 1.8: Representación aproximada de la función buscada

- 1.2.16.** Se desea construir un paralelepípedo rectangular de 9 litros de volumen y tal que un lado de la base sea doble que el otro. Determinar las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima.



(Septiembre 04)

- **Solución:**

Queremos minimizar el área total. Dicho área es la suma de las áreas de las seis caras. En el figura 1.9 podemos ver que este área es:

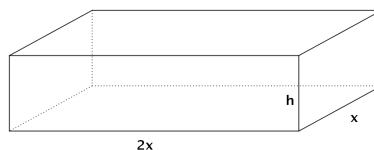


Figura 1.9: Visión gráfica del ejercicio

$$A(x, h) = 2 \cdot (2x \cdot h) + 2 \cdot (h \cdot x) + 2 \cdot (2x \cdot x) = 4xh + 2xh + 4x^2 = 4x^2 + 6xh$$

Para ligar las variables tenemos el volumen que cumple

$$V = A_b \cdot h = 2x \cdot x \cdot h = 2x^2 \cdot h = 9 \implies h = \frac{9}{2x^2}$$

Por tanto la función área queda:

$$A(x) = 4x^2 + \cancel{6x} \frac{9}{\cancel{2x^2}} = 4x^2 + \frac{27}{x} = \frac{4x^3 + 27}{x}$$

Si derivamos tendremos:

$$A'(x) = \frac{12x^2 \cdot x - (4x^3 + 27)}{x^2} = \frac{12x^3 - 4x^3 - 27}{x^2} = \frac{8x^3 - 27}{x^2} = 0$$

Por tanto, la derivada se anula cuando  $8x^3 - 27 = 0$ . De aquí deducimos que:

$$8x^3 - 27 = 0 \implies 8x^3 = 27 \implies x^3 = \frac{27}{8} \implies x = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2} \text{ dm.}$$

Si estudiamos el comportamiento de la derivada en puntos próximos al obtenido vemos que se trata de un mínimo.

$$A'(1) = \frac{-19}{1} < 0 \text{ y } A'(2) = \frac{37}{4} > 0$$

En conclusión tenemos que  $x = \frac{3}{2} \implies h = \frac{9}{2 \cdot \frac{9}{4}} = \frac{36}{18} = 2 \text{ dm.}$

Y estos eran los valores buscados.

**1.2.17. Determinar los puntos de la curva plana  $y^3 = 2x$  en que la recta tangente es perpendicular a la recta  $y + 6x = 0$ .**

(Septiembre 04)

- **Solución:**

La curva de la que hablamos tiene ecuación  $y^3 = 2x \implies y = \sqrt[3]{2x} = (2x)^{\frac{1}{3}}$ . Por otro lado tenemos que la recta es  $y + 6x = 0 \implies y = -6x \implies m = -6$ .

De aquí deducimos que la perpendicular tiene por pendiente  $m_{tg} = \frac{-1}{m} = \frac{1}{6}$ .

Vamos a ver en que puntos tiene la curva pendiente  $\frac{1}{6}$ . Para ello derivamos la función y la igualamos a  $\frac{1}{6}$ .

$$y' = \frac{1}{3}(2x)^{-2/3} \cdot 2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}} = m_{tg}$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}} = \frac{1}{6} \implies 3\sqrt[3]{4x^2} = 12 \implies \sqrt[3]{4x^2} = 4 \implies 4x^2 = 64 \implies x^2 = 16 \implies x = \pm 4$$

Por tanto, los puntos buscados son  $P_1(4, 2); P_2(-4, -2)$ .

**1.2.18. Hallar la derivada en  $x = 0$  de la función  $f(f(x))$ , donde  $f(x) = (1+x)^{-1}$ .**

(Junio 05)

- **Solución:**

Tenemos que  $f(x) = (1+x)^{-1} = \frac{1}{1+x} \implies f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}$ .

Es obvio que  $f(0) = 1$ , que  $f'(0) = -1$  y que  $f'(1) = -\frac{1}{4}$ .

Aplicamos la regla de la cadena:

$$[f(f(0))]' = f'(f(0)) \cdot f'(0) = f'(1) \cdot (-1) = \frac{-1}{4} \cdot (-1) = \frac{1}{4}$$

**1.2.19. Representar gráficamente la función  $f(x) = x - 2\text{sen}x$  en el intervalo  $-\pi < x < \pi$ , determinando sus extremos (máximos y mínimos relativos).**

(Junio 05)

- **Solución:**

Tenemos la función  $f(x) = x - 2\text{sen}x$  en el intervalo  $-\pi < x < \pi$

Es obvio que el dominio de esta función es todo  $\mathbb{R}$ . También es evidente que no hay asíntotas. Vamos a estudiar la derivada:

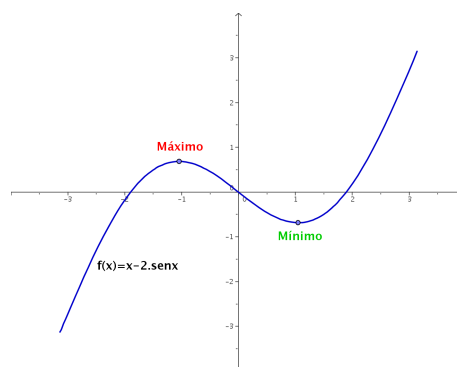
$$f'(x) = 1 - 2\cos x = 0 \implies -2\cos x = -1 \implies \cos x = \frac{1}{2} \implies x = \frac{\pi}{3} \text{ y } x = -\frac{\pi}{3}$$

	$\left(-\pi, -\frac{\pi}{3}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$
$1 - 2\cos x$	+	-	+
	↗	↘	↗

De este estudio deducimos que hay un máximo en  $x = -\frac{\pi}{3}$  y un mínimo en  $x = \frac{\pi}{3}$ . Para representarla tendríamos que hacer una tabla de valores:

$x$	0	2	-2	3	-3	$-\pi/3$	$\pi/3$
$y$	0	0'18	-0'18	2'71	-2'71	0'68	-0'68

Su representación gráfica sería:



**1.2.20. Enunciar el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial. Usarlo para demostrar que para cualesquiera números reales  $x < y$  se verifica que  $\cos y - \cos x \leq y - x$ .**

(Septiembre 05)

**- Solución:**

El enunciado del teorema puede encontrarse en cualquier libro.

Vamos a considerar la función  $f(x) = \cos x$  que es obviamente continua y derivable en todo  $\mathbb{R}$ , y por lo tanto lo será en cualquier intervalo  $[x, y]$ . En consecuencia:

$$\exists c \in (x, y) / f'(c) = \frac{\cos y - \cos x}{y - x}$$

$$\text{Ahora bien, } f'(x) = -\text{sen}x \implies f'(c) = -\text{sen}c \implies f'(c) \leq 1.$$

De aquí deducimos lo que queríamos:

$$\frac{\cos y - \cos x}{y - x} \leq 1 \implies \cos y - \cos x \leq y - x$$

**1.2.21. Hallar la derivada en el punto  $x = 0$  de la función  $f(f(x))$ , donde  $f(x) = \text{sen}x$ .**

(Septiembre 05)

- **Solución:**

Vamos a realizar la derivada por la regla de la cadena:

$$[(f \circ f)]'(0) = f'(f(0)) \cdot f'(0) = \cos(\operatorname{sen}(0)) \cdot \cos 0 = \cos 0 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1$$

**1.2.22. Calcula**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{\operatorname{sen}^2 x}$$

(Junio 06)

- **Solución:**

Vamos a resolver el límite por la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x - e^x}{\operatorname{sen}^2 x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{2 \operatorname{sen} x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^x}{\operatorname{sen} 2x} = \left[ \frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^x}{2 \cos 2x} = \frac{-1}{2}$$

**1.2.23. Define el concepto de máximo relativo de una función  $f(x)$  y enuncia su relación con las derivadas sucesivas de  $f(x)$ .**

(Junio 06)

- **Solución:**

Es una pregunta teórica que puede encontrarse en cualquier libro.

**1.2.24. Dada la función**

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+1)}{\operatorname{cos} x - \operatorname{cos}(x+1)}$$

**en el intervalo  $0 < x < 2\pi$ , calcula su derivada, simplificándola en lo posible.**

**¿Es constante esta función  $f(x)$ ?**

(Septiembre 06)

- **Solución:**

Vamos a calcular la derivada que nos piden.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{[\operatorname{cos} x + \operatorname{cos}(x+1)] \cdot [\operatorname{cos} x - \operatorname{cos}(x+1)] - [\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+1)] \cdot [-\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(x+1)]}{[\operatorname{cos} x - \operatorname{cos}(x+1)]^2} = \\ &= \frac{\operatorname{cos}^2 x - \operatorname{cos}^2(x+1) + \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2(x+1)}{[\operatorname{cos} x - \operatorname{cos}(x+1)]^2} = \frac{1 - 1}{[\operatorname{cos} x - \operatorname{cos}(x+1)]^2} = 0 \end{aligned}$$

De esto deducimos que la función es constante, pues su derivada es cero para cualquier valor de  $x$ .

**1.2.25. Calcula las asíntotas y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x) = (1+x^2)^{-1}x$ . A partir de los resultados obtenidos, dibuja la gráfica de la función  $f(x)$ .**

(Septiembre 06)

- **Solución:**

Nuestra función es  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . Es evidente que su dominio es todo  $\mathbb{R}$ , pues no se anula el denominador.

Vamos a hallar las asíntotas.

- Asíntotas verticales: Como no se anula el denominador no hay asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{1+x^2} = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{1+x^2} = 0.$

Luego la recta  $y = 0$  es una asíntota horizontal tanto en  $+\infty$ , como en  $-\infty$ .

- Asíntotas oblicuas: Al tener asíntotas horizontales no tiene oblicuas.

Vamos a estudiar su derivada:

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x \cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}$$

Veamos para que valores se anula la derivada:

$$\frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2} = 0 \implies -x^2+1=0 \implies x^2=1 \implies x=\pm 1$$

Estudiamos su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$\frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}$	-	+	-
	↘	↗	↘

De aquí deducimos que:

- La función crece en el intervalo  $(-1, 1)$ .
- La función decrece en  $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ .
- La función tiene un máximo en el punto  $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ .
- La función tiene un mínimo en el punto  $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ .
- También es evidente que corta a los ejes en el punto  $(0, 0)$ .

Por tanto su representación gráfica la podemos ver en la figura 1.10.

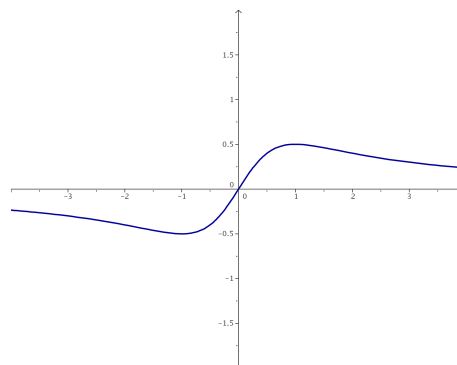


Figura 1.10: Representación gráfica de la función  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

### 1.3. Integral. Cálculo de áreas y volúmenes

1.3.1. Calcular, integrando por partes, el valor de

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx$$

(Junio 00)

- **Solución:**

Vamos a comenzar calculando una primitiva por partes.

$$u = \ln x \quad \implies \quad du = \frac{1}{x} dx$$

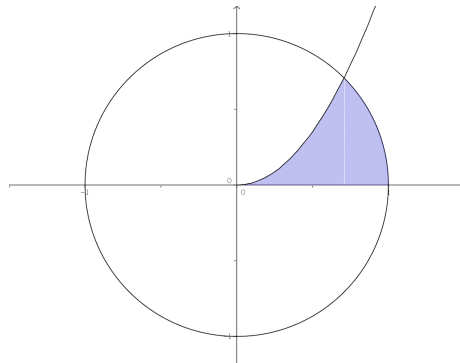
$$dv = x^2 dx \quad \implies \quad v = \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^{\frac{3}{3}}}{3} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$$

Luego:

$$\int_1^2 x^2 \ln x dx = \left[ \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right]_1^2 = \left( \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9} \right) - \left( 0 - \frac{1}{9} \right) = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$$

1.3.2. Calcular el área limitada por la parábola  $y = \sqrt{2}x^2$ , la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1$  y el eje  $OX$ , que aparece rayada en la figura .



(Junio 00)

- **Solución:**

Por lo que observamos en la figura del enunciado, nos piden que de la circunferencia consideremos la rama positiva, es decir, tomaremos  $y = \sqrt{1 - x^2}$ .

Es obvio que el área hay que dividirla en dos trozos, como podemos ver en la figura 1.11.

Vamos a calcular los puntos de corte:

$$\sqrt{2}x^2 = \sqrt{1 - x^2} \implies 2x^4 = 1 - x^2 \implies 2x^4 + x^2 - 1 = 0$$

Se trata de una ecuación bicuadrada, por lo que hacemos  $z = x^2$  y resolvemos.

$$2z^2 + z - 1 = 0$$

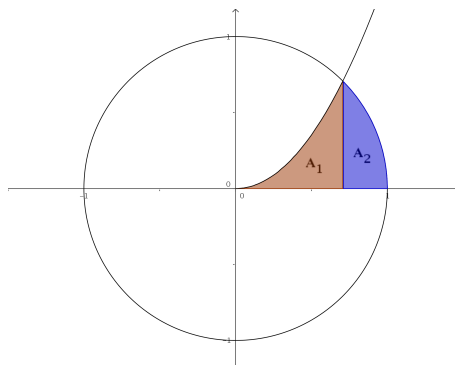


Figura 1.11: Representación detallada del área buscada

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 = \frac{-1-3}{4} = -1 \Rightarrow \text{No vale.} \end{cases}$$

Luego el área buscada, según vemos en la figura 1.11 es:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{2}x^2 dx + \int_{\sqrt{2}/2}^1 \sqrt{1-x^2} dx$$

Vamos a calcular cada una por separado, calculando previamente una primitiva en cada caso.

$$\int \sqrt{2}x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{3} x^3$$

Por tanto,

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{2}x^2 dx = \left[ \frac{\sqrt{2}}{3} x^3 \right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{6} u^2$$

Por otro lado tenemos:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

Vamos a utilizar el cambio  $x = \text{sent}$  para resolver la integral indefinida.

$$\begin{aligned} x &= \text{sent} \\ dx &= \text{cost} dt \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \int \sqrt{1-\text{sen}^2 t} \text{cost} dt = \int \text{cos}^2 t dt$$

Si aquí cambiamos  $\text{cos}^2 t = \frac{1}{2} + \frac{\text{cos}2t}{2}$  tendríamos:

$$\int \left( \frac{1}{2} + \frac{\text{cos}2t}{2} \right) dt = \frac{1}{2}t + \frac{\text{sen}2t}{4} = \frac{1}{2} \arcsen x + \frac{\text{sen}2(\arcsen x)}{4}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{\sqrt{2}/2}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \left[ \frac{1}{2} \arcsen x + \frac{\text{sen}2(\arcsen x)}{4} \right]_{\sqrt{2}/2}^1 = \\ &= \left( \frac{\pi}{4} + 0 \right) - \left( \frac{\pi}{8} + \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} u^2 \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{4 + 3\pi - 6}{24} = \frac{3\pi - 2}{24} u^2$$

**1.3.3. Determinar una función  $f(x)$  cuya segunda derivada sea  $f''(x) = xe^x$ .**

(Septiembre 00)

- **Solución:**

Habría que calcular una primitiva de la función que nos dan, que será  $f'$  y posteriormente calcular otra primitiva de ésta, que será la función que buscamos. La integral se calcula por partes:

$$\begin{aligned} u &= x & ; & \quad du = dx \\ dv &= e^x dx & ; & \quad v = e^x \end{aligned}$$

Por tanto:

$$f'(x) = \int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x$$

Hacemos de nuevo la integral de la función obtenida.

$$\int (xe^x - e^x) dx = \int xe^x dx - \int e^x dx = xe^x - e^x - e^x = xe^x - 2e^x$$

La función buscada es:

$$f(x) = xe^x - 2e^x$$

**1.3.4. Calcular, con el cambio de variable  $t^2 = x + 3$ , el valor de:**

$$\int_1^6 \frac{x dx}{\sqrt{x+3}}$$

(Septiembre 00)

- **Solución:**

Vamos a calcular primero una primitiva utilizando el cambio indicado:

$$\begin{aligned} t^2 = x + 3 & \implies x = t^2 - 3 \implies t = \sqrt{x+3} \\ 2t dt &= dx \end{aligned}$$

Realizando la sustitución:

$$\int \frac{(t^2 - 3) 2t dt}{t} = \int \frac{2t^3 - 6t}{t} dt = \int (2t^2 - 6) dt = \frac{2t^3}{3} - 6t = \frac{2\sqrt{(x+3)^3}}{3} - 6\sqrt{x+3}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \int_1^6 \frac{x dx}{\sqrt{x+3}} &= \left[ \frac{2\sqrt{(x+3)^3}}{3} - 6\sqrt{x+3} \right]_1^6 = \left( \frac{54}{3} - 18 \right) - \left( \frac{16}{3} - 12 \right) = \\ &= \frac{54 - 54 - 16 + 36}{3} = \frac{20}{3} \end{aligned}$$

**1.3.5. Determinar una constante positiva  $a$  sabiendo que la figura plana limitada por la parábola  $y = 3ax^2 + 2x$ , la recta  $y = 0$  y la recta  $x = a$  tiene área  $(a^2 - 1)^2$ .**

(Junio 01)



- **Solución:**

La figura 1.12 nos muestra una visión gráfica del problema planteado.

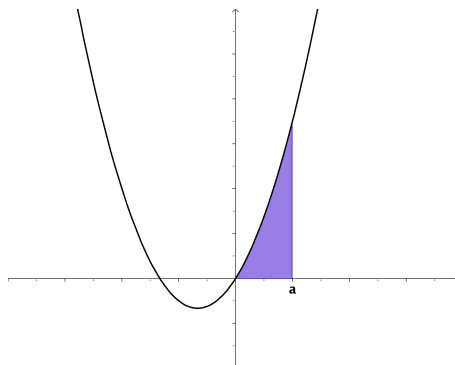


Figura 1.12: Representación detallada del área buscada

Como  $a > 0$  la función  $y = 3ax^2 + 2x$  corta al Eje X en  $x = 0$  y en  $x = -\frac{2}{3a}$  (que será un número negativo).

Luego el área buscada es la que aparece sombreada en la figura 1.12. Por tanto, tenemos que:

$$\int_0^a (3ax^2 + 2x)dx = (a^2 - 1)^2$$

Ahora bien,

$$\int_0^a (3ax^2 + 2x)dx = [ax^3 + x^2]_0^a = a^4 + a^2$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned} a^4 + a^2 &= (a^2 - 1)^2 \\ \cancel{a^4} + a^2 &= \cancel{a^4} + 1 - 2a^2 \\ 3a^2 &= 1 \\ a^2 &= \frac{1}{3} \\ a &= \pm\sqrt{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Como tiene que ser positivo el valor de  $a$ , tenemos que  $a = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

**1.3.6. Calcular el valor de:**

$$\int_0^1 \frac{x dx}{e^{x^2}}$$

(puede hacerse con el cambio de variable  $t = -x^2$  y con el cambio de variable  $t = x^2$ ).

(Junio 01)

- **Solución:**

Vamos a calcular una primitiva. Para ello vamos a utilizar el cambio  $t = x^2$ .

$$t = x^2 \implies dt = 2x dx$$

Sustituyendo tenemos:

$$\int \frac{1}{2e^t} dt = \frac{-1}{2} e^{-t} = \frac{-1}{2} e^{-x^2}$$

Por tanto:

$$\int_0^1 \frac{x dx}{e^{x^2}} = \left[ \frac{-1}{2} e^{-x^2} \right]_0^1 = \frac{-1}{2e} + \frac{1}{2}$$

**1.3.7. Representar gráficamente el recinto plano limitado por la curva  $y = x^3 - x$  y su tangente en el punto de abscisa  $x = 1$ . Calcular su área**

(Septiembre 01)

- **Solución:**

Vamos a calcular primero la recta tangente. Vamos a calcularla mediante la ecuación punto-pendiente. El punto lo obtenemos sustituyendo en la función  $x$  por 1. Dicho punto será  $P(1, 0)$ .

La pendiente de la recta tangente se obtiene sustituyendo en la derivada de la función:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \implies m_{tg} = f'(1) = 3 - 1 = 2$$

La ecuación de la recta será:

$$y - 0 = 2(x - 1) \implies y = 2x - 2$$

A continuación representaremos la zona que nos piden. Para pintar la recta basta con hacer una tabla de valores, pero para pintar la función será mejor estudiar su derivada. Vamos a calcularla y estudiaremos su signo para ver el crecimiento y los máximos y mínimos.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \implies 3x^2 - 1 = 0 \implies x^2 = \frac{1}{3} \implies x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Estudiamos el signo:

	$(-\infty, -\sqrt{3}/3)$	$(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$	$(\sqrt{3}/3, +\infty)$
$3x^2 - 1$	+	-	+
	↗	↘	↗

Luego:

- Crece  $\longrightarrow (-\infty, -\sqrt{3}/3) \cup (\sqrt{3}/3, +\infty)$ .

- Decrece  $\longrightarrow (-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$ .

- Máximo  $\longrightarrow (-\sqrt{3}/3, 0'38)$ .

- Mínimo  $\longrightarrow (\sqrt{3}/3, -0'38)$ .

Es evidente que se trata de una función impar y por tanto corta en el  $(0, 0)$ . La representación gráfica podemos verla en la figura 1.13.

Vamos ahora a calcular el área. Hallamos los puntos de corte de la función y la recta.

$$x^3 - x = 2x - 2 \implies x^3 - 3x + 2 = 0$$

Buscamos una raíz por Ruffini.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

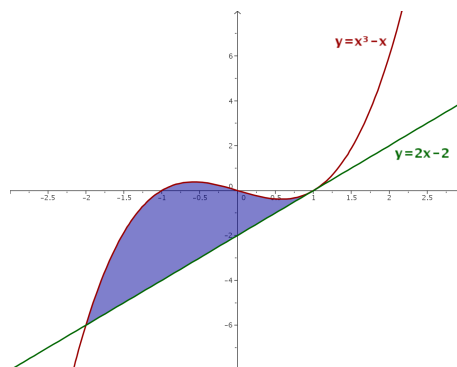


Figura 1.13: Representación detallada del área buscada

Calculamos después las otras dos:

$$x^2 + x - 2 = 0 \implies x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Luego los límites de integración son  $x = -2$  y  $x = 1$ . Vamos a calcular el área.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^1 [(x^3 - x) - (2x - 2)] dx = \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2) dx = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^1 = \\ &= \left( \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 \right) - \left( \frac{16}{4} - 6 - 4 \right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 8 = \frac{1 - 6 + 32}{4} = \frac{27}{4} u^2 \end{aligned}$$

**1.3.8. Definir el concepto de primitiva de una función y explicar su relación con el concepto de integral definida.**

(Septiembre 01)

- **Solución:**

La solución a este ejercicio podemos verla en cualquier libro.

**1.3.9. Representar gráficamente la figura plana limitada por las parábolas  $y = 4 - x^2$ ,  $y = x^2 - 4$ . Calcular su área.**

(Junio 02)

- **Solución:**

Las funciones que nos dan son dos parábolas cuyas representaciones gráficas podemos verla en la figura 1.14.

Vamos a calcular los puntos corte.

$$x^2 - 4 = 4 - x^2 \implies 2x^2 - 8 = 0 \implies x^2 = 4 \implies x = \pm 2$$

Calculemos ahora el área:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^2 [(4 - x^2) - (x^2 - 4)] dx = \int_{-2}^2 (-2x^2 + 8) dx = \left[ \frac{-2x^3}{3} + 8x \right]_{-2}^2 = \\ &= \left( \frac{-16}{3} + 16 \right) - \left( \frac{16}{3} - 16 \right) = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} u^2 \end{aligned}$$

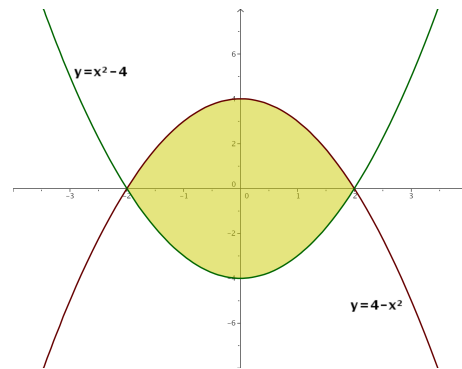


Figura 1.14: Representación gráfica de la región pedida.

### 1.3.10. Calcular el valor de la integral

$$\int_0^1 x e^{-x} dx$$

(Junio 02)

#### - Solución:

Vamos a calcular primero una primitiva. Esta integral hay que resolverla por partes.

$$\begin{aligned} u &= x & ; & \quad du = dx \\ dv &= e^{-x} dx & ; & \quad v = -e^{-x} \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int x e^{-x} dx = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x e^{-x} - e^{-x}$$

Retomamos la definida y tenemos:

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = [-x e^{-x} - e^{-x}]_0^1 = (-e^{-1} - e^{-1}) + 1 = \frac{-2}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$$

### 1.3.11. Representa gráficamente el recinto plano limitado, en la región donde la coordenada $x$ es positiva, por la recta $x = 1$ , la hipérbola $xy = 1$ , y la recta $6y - x + 1 = 0$ . Calcula su área.

(Septiembre 02)

#### - Solución:

Vamos a representar la región pedida haciendo una tabla de valores para cada caso:

a) Para la hipérbola  $xy = 1$  valdría:

$x$	0'1	0'5	1	2	3
$y$	10	5	1	1/2	1/3

b) Para la recta bastarían dos puntos:

$x$	0	3
$y$	-1/6	1/3

La representación gráfica podemos verla en la figura 1.15.

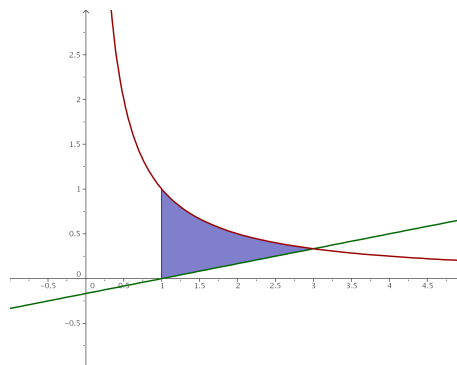


Figura 1.15: Representación gráfica de la región pedida.

Vamos a buscar los puntos de corte de las dos gráficas.

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} x \cdot y &= 1 \\ 6y - x &= -1 \end{aligned} \right] &\implies \left. \begin{aligned} x \cdot y &= 1 \\ x &= 6y + 1 \end{aligned} \right] \implies (6y + 1) \cdot y = 1 \implies 6y^2 + y - 1 = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} = \begin{cases} y = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Sustituyendo cada valor de  $y$  obtenemos uno de  $x$ .

$$\begin{aligned} y = -\frac{1}{2} &\implies x = -3 + 1 = -2 \implies \text{No nos sirve.} \\ y = \frac{1}{3} &\implies x = 2 + 1 = 3. \end{aligned}$$

Por tanto, mis límites de integración son  $x = 1$  y  $x = 3$ .

Observando la figura 1.15, podemos calcular el área de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \int_1^3 \left( \frac{1}{x} - \frac{x-1}{6} \right) dx &= \left[ \ln x - \frac{x^2}{12} + \frac{x}{6} \right]_1^3 = \left( \ln 3 - \frac{9}{12} + \frac{6}{12} \right) - \left( 0 - \frac{1}{12} + \frac{2}{12} \right) = \\ &= \ln 3 - \frac{4}{12} = \ln 3 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

**1.3.12. Calcular una primitiva de la función  $f(x) = (x^2 + 1)^{-1} x$  que se anule en  $x = 2$ .**

(Septiembre 02)

- **Solución:**

Vamos a calcular la integral indefinida y despues calcularemos el valor de la constante que hace que se anule en  $x = 2$ .

$$\int \frac{x}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + k$$

Si hacemos  $x = 2$  resulta:

$$\frac{1}{2} \ln 5 + k = 0 \implies k = -\ln \sqrt{5}$$

**1.3.13.** Representar gráficamente el recinto plano limitado por la recta  $y = x - 2$  y la parábola de ecuación  $y^2 = x$ . Calcular su área.

(Junio 03)

- **Solución:**

Son funciones suficientemente conocidas, por lo que con una tabla de valores se pueden representar. Sólo hay que tener en cuenta que de la parábola hay que considerar las dos ramas. La representación pedida la podemos ver en la figura 1.16.

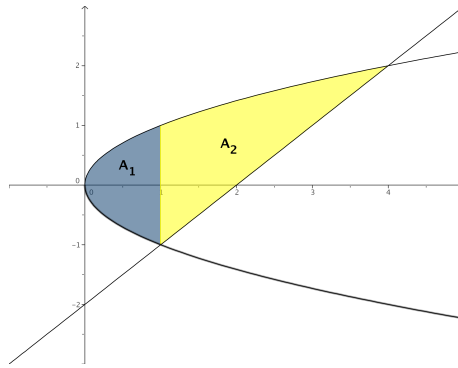


Figura 1.16: Representación gráfica de la región pedida.

Vamos a hallar los puntos de corte.

$$\left. \begin{array}{l} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow x = (x - 2)^2 \Rightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

Vamos a calcular el área. Observando la gráfica de la figura 1.16 vemos que hay que descomponer el área en dos trozos ( $A_1$  y  $A_2$ ).

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 [\sqrt{x} - (-\sqrt{x})] dx + \int_1^4 [\sqrt{x} - (x - 2)] dx = \int_0^1 2\sqrt{x} dx +$$

$$+ \int_1^4 [\sqrt{x} - x + 2] dx = \left[ \frac{4\sqrt{x^3}}{3} \right]_0^1 + \left[ \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_1^4 = \frac{4}{3} + \left( \frac{16}{3} - \frac{16}{2} + 8 \right) -$$

$$- \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2 \right) = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - \frac{16}{2} + 8 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{8 + 32 - 48 + 48 - 4 + 3 - 12}{6} = \frac{27}{6} u^2.$$

**1.3.14.** Calcular el valor de la siguiente integral, donde  $\ln$  denota el logaritmo neperiano:

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)}$$

(Junio 03)

**- Solución:**

Vamos a calcular primero una primitiva. Para eso vamos a hacer el cambio:

$$\begin{aligned}t &= \ln x \\ dt &= \frac{1}{x} dx\end{aligned}$$

Tenemos por tanto

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| = \ln|\ln|x||$$

Por tanto:

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)} = [\ln|\ln|x||]_e^{e^2} = \ln|\ln|e^2|| - \ln|\ln|e|| = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

**1.3.15. Calcular el valor de la integral (puede hacerse con el cambio de variable  $t = e^{-x}$ ):**

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$$

(Septiembre 03)

**- Solución:**

Vamos a calcular primero una primitiva. Aplicamos el cambio aconsejado:

$$\begin{aligned}t = e^{-x} &\implies e^x = \frac{1}{t} \\ dt = -e^{-x} dx &\implies dx = \frac{-dt}{t}\end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{e^x + 1} = \int \frac{-dt}{t \left( \frac{1}{t} + 1 \right)} = - \int \frac{dt}{1+t} = -\ln|1+t| = -\ln|1+e^{-x}|$$

Por tanto:

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = [-\ln|1+e^{-x}|]_0^1 = -\ln\left(1 + \frac{1}{e}\right) + \ln 2$$

**1.3.16. Representar gráficamente la figura plana limitada por la curva  $y = e^x$ , su recta tangente en el punto de abscisa  $x = 0$ , y la recta  $x = 1$ . Calcular su área.**

(Septiembre 03)

**- Solución**

Vamos a calcular en primer lugar la ecuación de la recta tangente a la curva en  $x = 0$ . Sabemos que dicha recta pasa por  $(0, e^0) = (0, 1)$  y que su pendiente es  $m_{tg} = f'(0) = e^0 = 1$ .

Por tanto la ecuación de dicha recta es:

$$y - 1 = 1(x - 0) \implies y = x + 1$$

La representación gráfica podemos verla en la figura 1.17.

En la gráfica puede verse que no hay más punto de corte que  $x = 0$ , por tanto el área que queremos es:

$$A = \int_0^1 [e^x - (x + 1)] dx = \int_0^1 (e^x - x - 1) dx = \left[ e^x - \frac{x^2}{2} - x \right]_0^1 = \left( e - \frac{1}{2} - 1 \right) - 1 =$$

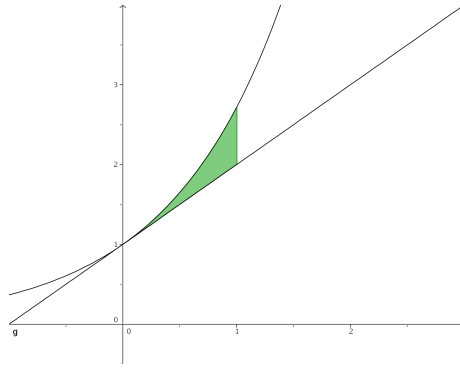


Figura 1.17: Representación gráfica de la región pedida.

$$= e - \frac{5}{2} u^2.$$

**1.3.17.** Definir el concepto de primitiva de una función. ¿Existe alguna primitiva de la función  $f(x) = x^{-1}$  que no tome ningún valor positivo en el intervalo  $1 \leq x \leq 2$ ?

(Junio 04)

- **Solución:**

El concepto teórico puede encontrarse en cualquier libro. Vayamos a lo práctico.

Tenemos la función  $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$ .

Si hayamos las primitivas de la función nos sale:

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + k$$

La gráfica de  $y = \ln x$  podemos verla en la figura 1.18.

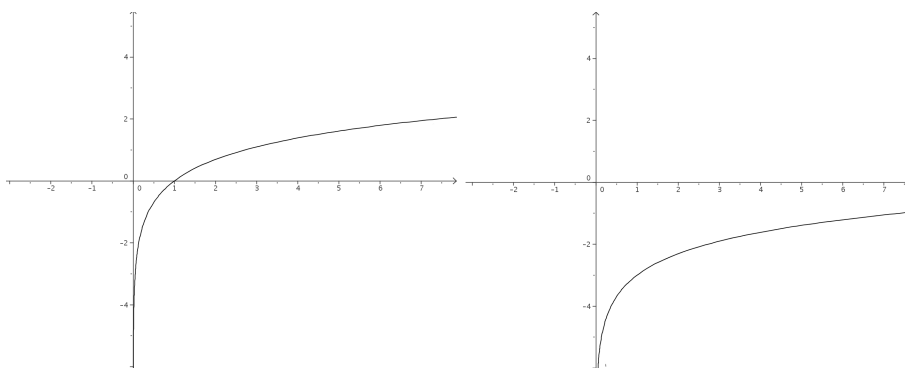


Figura 1.18: Gráfica de  $y = \ln x$  y de  $y = \ln(x-3)$

Como sabemos,  $k$  desplaza verticalmente dicha gráfica, por tanto, si a  $k$  le doy, por ejemplo, el valor  $-3$ , es decir,  $f(x) = \ln x - 3$ , la gráfica se desplazará 3 unidades hacia abajo, resultando la gráfica de la derecha de la figura 1.18.

Hay que tener en cuenta que la función  $y = \ln x$  es una función creciente y que  $\ln 1 = 0$  y  $\ln 2 = 0.693147\dots$ , por tanto  $y = \ln x - 3$  será negativa en todo el intervalo (Observar la gráfica de la derecha la figura 1.18). De hecho bastaría con tomar  $k < -\ln 2$ .



**1.3.18.** Representa gráficamente el recinto plano limitado, en la región donde la abscisa  $x$  es positiva, por la curva  $y = x^3 + x$ , y por la recta  $y = 2x$ . Calcular el área.

(Junio 04)

- **Solución:**

Tenemos que las funciones que encierran el área son  $y = x^3 + x$  e  $y = 2x$ . Para representar  $y = x^3 + x$  bastará con calcular sus máximos y mínimos, los puntos de corte con los ejes y, si es necesario, una tabla de valores.

Vamos a empezar hallando los puntos de corte con el eje X haciendo  $y=0$ .

$$x^3 + x = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \implies \text{No tiene solución} \end{cases}$$

Vamos a ver donde se anula su derivada:

$$y' = 3x^2 + 1 \implies 3x^2 + 1 = 0 \implies \text{No tiene solución}$$

La gráfica de las dos funciones podéis verla en la gráfica 1.19

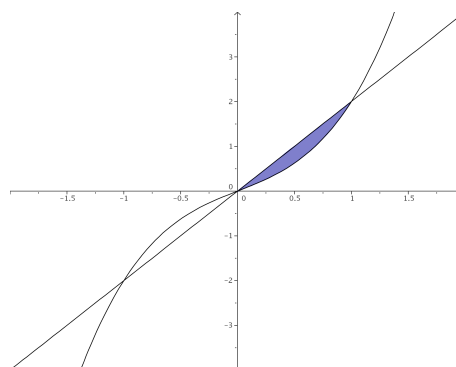


Figura 1.19: Visión gráfica del problema

Vamos a hallar los puntos de corte de las dos funciones:

$$x^3 + x = 2x \implies x^3 - x = 0 \implies x \cdot (x^2 - 1) = 0 \implies \begin{cases} x = 0. \\ x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1. \end{cases}$$

Vamos a calcular el área, que será el comprendida entre 0 y 1 por las dos funciones. Como la recta está por encima ponemos:

$$A = \int_0^1 [2x - (x^3 + x)] dx = \int_0^1 (x - x^3) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} u^2$$

**1.3.19.** Representar gráficamente la figura plana limitada en el primer cuadrante ( $x \geq 0, y \geq 0$ ) por la recta  $y = x$  y la curva  $x = y^3$ . Calcular su área.

(Septiembre 04)

- **Solución:**

Tenemos que ( $x \geq 0, y \geq 0$ ), es decir, el primer cuadrante. Tenemos también la función  $y = x$  y la función  $x = y^3 \implies y = \sqrt[3]{x}$ .

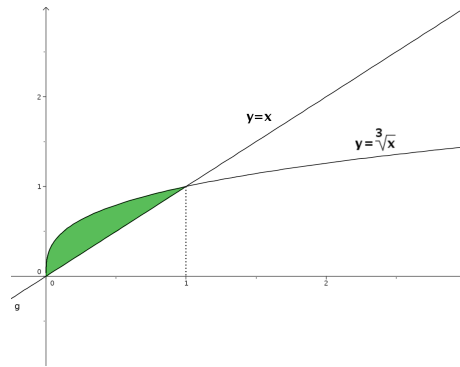


Figura 1.20: Representación detallada

El área que queremos calcular es la que nos muestra la figura 1.20. Buscamos los puntos de corte de ambas funciones:

$$x = \sqrt[3]{x} \implies x^3 = x \implies x^3 - x = 0 \implies \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \implies x = \pm 1 \end{cases}$$

Como  $x \geq 0; y \geq 0$ , sobra la raíz  $x = -1$  y tenemos que:

$$A = \int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x) dx = \int_0^1 (x^{\frac{1}{3}} - x) dx = \left[ \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \left[ \frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} u^2$$

**1.3.20. Calcular el valor de la siguiente integral:**

$$\int_1^2 x \sqrt[3]{x^2 - 1} dx$$

(puede hacerse con el cambio de variable  $x^2 - 1 = t^3$ .)

(Septiembre 04)

- **Solución:**

Vamos a resolver primero la indefinida.

Hacemos el cambio que nos recomiendan:

$$\begin{aligned} t^3 &= x^2 - 1 \implies t = \sqrt[3]{x^2 - 1} \\ 3t^2 dt &= 2x dx \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\int x \sqrt[3]{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int 3t^2 \sqrt[3]{t^3} dt = \frac{3}{2} \int t^3 dt = \frac{3}{2} \frac{t^4}{4} + k = \frac{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}{8} + k$$

En consecuencia tendríamos:

$$\int_1^2 x \sqrt[3]{x^2 - 1} dx = \left[ \frac{3 \sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}{8} \right]_1^2 = \frac{3 \sqrt[3]{81}}{8} = \frac{9 \sqrt[3]{3}}{8}$$

**1.3.21. Representar gráficamente el recinto plano limitado por las curvas  $y = e^x$ ,  $y = e^{-x}$ , y por la recta  $x = 1$ . Calcular su área.**

(Junio 05)

- **Solución:**

Vamos a representar las funciones haciendo una tabla de valores:

$$y = e^x \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & e^{-2} & e^{-1} & 1 & e & e^2 \end{array}$$

$$y = e^{-x} \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & e^2 & e & 1 & e^{-1} & e^{-2} \end{array}$$

La representación gráfica y el área buscada la vemos en la figura 1.21.

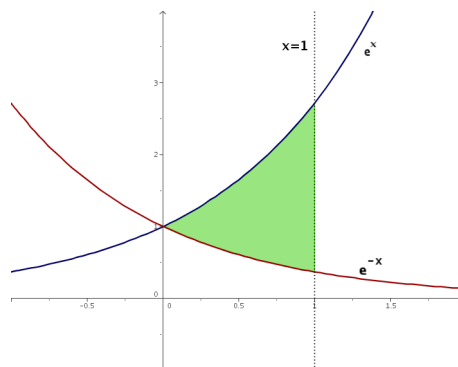


Figura 1.21: Área encerrada por las exponenciales y  $x=1$ .

Vamos a encontrar los puntos de corte:

$$e^x = e^{-x} \Rightarrow \frac{e^x}{e^{-x}} = 1 \Rightarrow e^x \cdot e^x = 1 \Rightarrow e^{2x} = 1 = e^0 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Luego los límites de integración son  $x = 0$  y  $x = 1$ . Por tanto:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (e^x - e^{-x}) dx &= [e^x + e^{-x}]_0^1 = (e^1 + e^{-1}) - (1 + 1) = \\ &= e + \frac{1}{e} - 2 = \frac{e^2 + 1 - 2e}{e} \end{aligned}$$

**1.3.22. Calcular el valor de la siguiente integral:**

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx$$

(puede hacerse por partes).

(Junio 05)

- **Solución:**

Vamos a resolver la integral como nos indican, por partes. Para ello vamos a derivar el logaritmo y a integrar el polinomio.

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x^2} dx \quad \Rightarrow \quad v = \frac{-1}{x}$$

Vamos a empezar por encontrar una primitiva:

$$\int \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{-\ln x}{x} - \int \frac{-1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{-\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2} dx = \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{-\ln x - 1}{x}$$

Por tanto:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx = \left[ \frac{-\ln x - 1}{x} \right]_1^e = \frac{-\ln e - 1}{e} - \frac{-\ln 1 - 1}{1} = \frac{-2}{e} + 1$$

**1.3.23. Calcular una primitiva de la función  $f(x) = (x+1)^2 x^{-1/2}$  que se anule en  $x = 1$ .**

(Septiembre 05)

- **Solución:**

Tenemos que nuestra función es:

$$f(x) = (x+1)^2 x^{-1/2} = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x}} = x^{3/2} + 2x^{1/2} + x^{-1/2}$$

Vamos a calcular la integral indefinida:

$$\int (x^{3/2} + 2x^{1/2} + x^{-1/2}) dx = \frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{4x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} + k$$

Según el enunciado tiene que anularse en  $x = 1$ , por tanto:

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{3} + 2 + k = 0 \implies k = -\frac{2}{5} - \frac{4}{3} - 2 = \frac{-6 - 20 - 30}{15} = \frac{-56}{15}$$

La primitiva buscada es:

$$F(x) = \frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{4x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} - \frac{56}{15}$$

**1.3.24. Representar gráficamente el recinto plano limitado por la recta  $x - y = 1$  y por la curva de ecuación  $y = \sqrt{x-1}$ . Calcular su área.**

(Septiembre 05)

- **Solución:**

Ambas funciones son conocidas y su representación puede hacerse por una sencilla tabla de valores que voy a omitir. Tras eso la representación gráfica podemos verla en la figura 1.22.

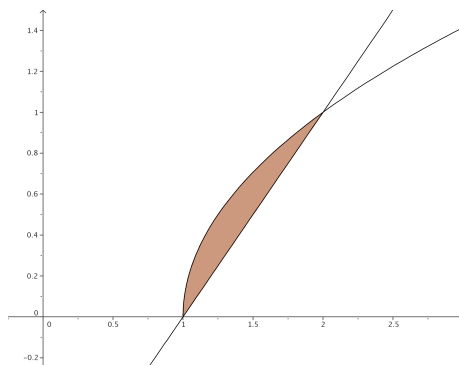


Figura 1.22: Representación detallada del área buscada

A continuación vamos a calcular el área encerrada por las dos funciones. Empezaremos por calcular los puntos de corte para delimitar los límites de integración.

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &= x-1 \\ x-1 &= (x-1)^2 \\ x-1 &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0 \implies \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Por tanto el área quedaría:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 [\sqrt{x-1} - (x-1)] dx = \left[ \frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_1^2 = \\ &= \left( \frac{2}{3} - 2 + 2 \right) - \left( -\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{4+3-6}{6} = \frac{1}{6} u^2 \end{aligned}$$

**1.3.25. Representa gráficamente la figura plana limitada por la curva  $y = x^4$ , su recta tangente en el punto  $(1, 1)$  y el eje  $OY$ . Calcular su área.**

(Junio 06)

- **Solución:**

La función  $y = x^4$  es de fácil representación, basta con dar algunos valores. Vamos a calcular la recta tangente que nos piden y posteriormente realizaremos la representación de la zona buscada.

Sabemos que la pendiente de dicha recta es la derivada de la función en el punto, por tanto:

$$f'(x) = 4x^3 \implies m_{tg} = f'(1) = 4$$

Como la recta pasa por el punto  $(1, 1)$  y tiene la pendiente anterior, tenemos que la recta buscada es:

$$y - 1 = 4(x - 1) \implies y - 1 = 4x - 4 \implies y = 4x - 3$$

En consecuencia, la representación gráfica de ambas funciones y la zona pedida la podemos ver en la figura 1.23.

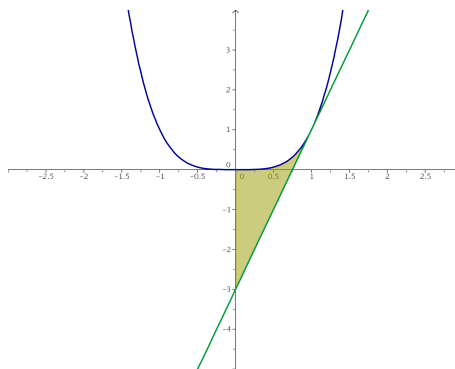


Figura 1.23: Representación gráfica de la región pedida.

Vamos a calcular el área que nos piden:

$$\int_0^1 [x^4 - (4x - 3)] dx = \left[ \frac{x^5}{5} - 2x^2 + 3x \right]_0^1 = \frac{1}{5} - 2 + 3 = \frac{6}{5} u^2$$

**1.3.26. Halla una primitiva de la función  $f(x) = xe^x$ .**

(Junio 06)

**- Solución:**

Es una integral típica para resolverla por partes, en la que tenemos que derivar el polinomio e integrar la exponencial.

$$\left. \begin{array}{l} u = x \quad ; \quad du = dx \\ dv = e^x dx \quad ; \quad v = e^x \end{array} \right] \\ \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x$$

No es necesario terminar el resultado sumando una constante pues nos piden una primitiva, no todas.

**1.3.27. Enuncia la regla de Barrow. Representa la gráfica de la función**

$$f(x) = \int_1^x t dt$$

(Septiembre 06)

**- Solución:**

La regla de Barrow puede verse en cualquier libro.

Vamos a calcular cual es nuestra función:

$$f(x) = \int_1^x t dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

De su ecuación deducimos que se trata de una parábola. Para representarla vamos a calcular la coordenada x del vértice y haremos una tabla de valores.

$$\text{Coordenada x del vértice} \rightarrow x = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{1} = 0$$

La tabla de valores que utilizaremos es:

$x$	0	-1	1	-2	2	-3	3
$y$	-1/2	0	0	3/2	3/2	4	4

La representación gráfica la tenemos en la figura 1.24

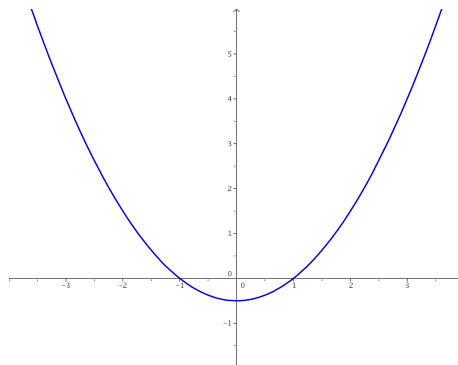


Figura 1.24: Representación gráfica de la función  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$

**1.3.28. Representa la figura plana limitada por la gráfica de la función  $f(x) = \cos x$ , en el intervalo  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ , y por la recta  $y = \frac{1}{2}$ . Calcular su área.**

(Septiembre 06)

**- Solución:**

La representación del área pedida no es complicada, pues se suponen conocidas ambas funciones. Dicha representación la encontramos en la figura 1.25.

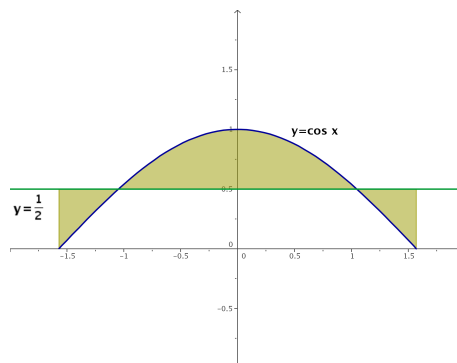


Figura 1.25: Representación gráfica de la región pedida.

Vamos a encontrar los puntos de corte que nos dirán cuales son los límites de integración.

$$\cos x = \frac{1}{2} \implies x = \pm \frac{\pi}{3}$$

Para hallar el área consideramos la función  $g(x) = \cos x - \frac{1}{2}$ . Vamos a calcular una primitiva de dicha función.

$$G(x) = \int \left( \cos x - \frac{1}{2} \right) dx = \operatorname{sen} x - \frac{x}{2}$$

Sustituimos en los distintos puntos que tenemos resultando:

$$G\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{2}\right) - \frac{-\pi}{2} = -1 + \frac{\pi}{4} = -0'2146$$

$$G\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{3}\right) - \frac{-\pi}{3} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = -0'3424$$

$$G\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = 0'3424$$

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4} = 0'2146$$

Para calcular el área hacemos:

$$G\left(\frac{-\pi}{3}\right) - G\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -0'3424 + 0'2146 = -0'1278$$

$$G\left(\frac{\pi}{3}\right) - G\left(\frac{-\pi}{3}\right) = 0'3424 + 0'3424 = 0'6848$$

$$G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0'2146 - 0'3424 = -0'1278$$

Y el área buscada será:

$$A = |-0'1278| + 0'6848 + |-0'1278| = 0'9404 \text{ u}^2$$





## Capítulo 2

# Álgebra

### 2.1. Matrices y determinantes

2.1.1. Definir la suma y el producto de matrices. Dar un ejemplo de dos matrices que no pueden sumarse ni multiplicarse.

(Septiembre 00)

- **Solución:**

La parte teórica puede encontrarse en cualquier libro.

Como ejemplo de matrices que no pueden sumarse ni multiplicarse tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Es evidente que estas matrices no pueden sumarse, pues no son de la misma dimensión. De forma análoga no es difícil comprobar que no pueden multiplicarse, pues para eso es necesario que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda, cosa que no ocurre en ninguno de los casos.

2.1.2. Determinar todos los números reales  $x$  para los que es positivo el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix}$$

(Septiembre 01)

- **Solución:**

Vamos a calcular el valor del determinante en función de  $x$  para luego estudiar la inecuación resultante.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} &= 3x(x+1) + 6 - 2x(x+1) + 3x(1-x) = \\ &= 3x^2 + 3x + 6 - 2x^2 - 2x + 3x - 3x^2 = -2x^2 + 4x + 6 \end{aligned}$$

Vamos a ver donde  $-2x^2 + 4x + 6 > 0$ . En primer lugar buscaremos las raíces y con ellas

construiremos la tabla para estudiar el signo de la función.

$$-2x^2 + 4x + 6 = 0 \implies x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}$$

Vamos a estudiar el signo de la función:

		(-∞, -1)		(-1, 3)		(3, +∞)
-2x <sup>2</sup> + 4x + 6		-		+		-

Luego el determinante es positivo en (-1, 3).

### 2.1.3. Calcular todas las matrices $X$ tales que $AX + B = X$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 01)

- **Solución:**

Empezaremos por despejar la  $X$  y después realizaremos las operaciones que sean necesarias:

$$AX + B = X \implies AX - X = -B \implies (A - I)X = -B \implies X = (A - I)^{-1} \cdot (-B)$$

El último paso sólo podemos hacerlo si la matriz  $A - I$  es regular, cuestión que veremos a continuación.

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es evidente que esta matriz es regular, pues su determinante es distinto de cero. Vamos a calcular la inversa. Supongamos que dicha matriz es:

$$(A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Dicha matriz cumplirá:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies (A - I)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, sustituyendo tenemos:

$$X = (A - I)^{-1} \cdot (-B) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

### 2.1.4. Calcular la matriz $X$ tal que $AX = B$ , donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(Junio 02)

**- Solución:**

Como la matriz  $A$  es invertible (pues  $|A| = 1 \neq 0$ ) podemos despejar la matriz  $X$  multiplicando por la izquierda por la inversa de  $A$ .

$$A \cdot X = B \implies A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \implies X = A^{-1} \cdot B$$

Vamos a calcular la inversa de  $A$ .

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} x = 1 \\ 2x + y = 0 \implies y = -2 \\ z = 0 \\ 2z + t = 1 \implies t = 1 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

**2.1.5. Calcular dos números naturales  $a, b$  menores que 10 y tales que la siguiente matriz  $A$  tenga rango 2:**

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$$

(Junio 03)

**- Solución:**

Es evidente que  $Rg(A) \geq 2$ , pues  $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$ . Calculemos el valor del  $|A|$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 10b + 6a - 15b - 2a = -5b + 4a$$

Los números que buscamos tienen que ser **naturales, menores que 10 y anular el determinante**. Por tanto:

$$-5b + 4a = 0 \implies 4a = 5b \implies b = \frac{4a}{5}$$

Esto sólo es posible si  $a = 5$  y  $b = 4$ .

**2.1.6. Definir el producto de matrices. Dar un ejemplo de dos matrices  $A, B$  con 2 filas y 2 columnas, tales que  $A \cdot B$  no coincida con  $B \cdot A$ .**

(Septiembre 03)

**- Solución:**

La parte teórica puede encontrarse en cualquier libro.

Lo más natural sería que al elegir dos matrices el producto no sea conmutativo. Vamos a encontrar dos matrices que cumplan lo que piden y vamos a comprobar que así ocurre. Tomamos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Realicemos ambos productos para ver que no coinciden:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

**2.1.7. Determinar todas las matrices  $X$  tales que  $A \cdot X = X \cdot A$ , donde:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Junio 04)

- **Solución:**

Supongamos que nuestra matriz  $X$  tiene la forma:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Siendo  $A$  como es tenemos que:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$X \cdot A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$$

Buscamos que  $A \cdot X = X \cdot A$ , por tanto igualando tenemos:

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$$

De lo que deducimos que:

$$a+c = a+b \implies c = b$$

$$b+d = a+b \implies a = d$$

$$a+c = c+d \implies a = d$$

$$b+d = c+d \implies c = b$$

Por tanto la matriz  $X$  buscada tiene la siguiente forma:

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

**2.1.8. Hallar una matriz con tres filas y tres columnas que tenga tres elementos nulos y tal que ninguno de sus menores de orden dos sea nulo.**

(Junio 04)

- **Solución:**

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**2.1.9. Definir el concepto de rango de una matriz. Dar un ejemplo de una matriz con 3 filas y 4 columnas que tenga rango 2.**

(Septiembre 04)

- **Solución:**

La parte de teoría se puede consultar en cualquier libro.

Para el segundo interrogante basta con coger las dos primeras filas que den rango 2 y la tercera sea combinación lineal de estas dos, por ejemplo, la suma de las dos:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1-1 & 3+1 & 2+0 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

**2.1.10. ¿Puede aumentar el rango de una matriz cuadrada de 3 filas al sustituir un coeficiente no nulo por 0? ¿y permanecer igual?. Justificar las respuestas.**

(Septiembre 04)

- **Solución:**

En ambos casos la respuesta es SI. Veámoslo con un ejemplo.

En el primer caso, supongamos una matriz de rango 2 en la que la tercera fila sea suma de las dos primeras. si en la tercera fila cambiamos un número por cero es posible que el rango sea tres. Veamos un ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 2, mientras que la matriz  $\mathbf{A}'$  que mencionamos a continuación tiene rango 3:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \implies |\mathbf{A}'| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 16 + 27 - 12 - 6 \neq 0$$

En el segundo caso veamos el ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 3, pues  $|\mathbf{A}| = 2 \neq 0$

Además si cambio un 1 por un 0, como en el ejemplo que sigue, tenemos:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que también tiene rango 3, pues  $|\mathbf{A}'| = 1 \neq 0$

**2.1.11.** Sea  $A$  una matriz cuadrada tal que  $A^2 = A + I$ , donde  $I$  es la matriz unidad. Demuestra que la matriz  $A$  es invertible.

(Junio 06)

- **Solución:**

Una posible manera de resolverlo es comprobar que la matriz  $B = A - I$  es la inversa de  $A$ . Vamos a comprobarlo.

$$A \cdot B = A \cdot (A - I) = A^2 - A = \cancel{A} + I - \cancel{A} = I$$

$$B \cdot A = (A - I) \cdot A = A^2 - A = \cancel{A} + I - \cancel{A} = I$$

Luego la matriz  $B$  así construida es la inversa de  $A$  y por tanto  $A$  es invertible.

Otra forma de resolverlo sería la siguiente:

Tenemos que  $A^2 = A + I$ , por tanto:

$$A^2 - A = I \implies A(A - I) = I$$

Como ambas matrices son iguales, sus determinantes son iguales y operando llegamos a lo que queremos.

$$|A(A - I)| = |I| \implies |A| |A - I| = |I| = 1$$

En consecuencia ninguno de los factores puede ser cero al ser el producto 1 y de ahí deducimos que  $|A| \neq 0 \implies A$  es invertible.

**2.1.12.** Escribe un ejemplo de una matriz de rango 2, con 3 filas y 4 columnas, que no tenga ningún coeficiente nulo.

(Septiembre 06)

- **Solución:**

Basta con tomar las dos primeras filas linealmente independientes sin coeficientes nulos y sumarlas para obtener la tercera, como por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

## 2.2. Sistemas de ecuaciones

**2.2.1.** La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es  $M$ . Hallar un sistema equivalente tal que todos los elementos de la diagonal principal de la nueva matriz asociada sean nulos:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(Junio 00)

- **Solución:**

Vamos a aplicar el método de Gauss para hacer los ceros que nos piden.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=F_2-F_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=3F_1-F_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es:

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**2.2.2.** Dar un ejemplo de un sistema de 2 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea incompatible.

(Junio 00)

- **Solución:**

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\}$$

**2.2.3.** Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el parámetro  $a$ :

$$\begin{array}{rcl} (a-3)x & + & 4z = 2 \\ x & - & 2 = -1 \\ -x & + & ay + 2z = a \end{array}$$

(Septiembre 00)

- **Solución:**

La matriz asociada al sistema es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} a-3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & a & 2 & a \end{array} \right)$$

Vamos a empezar por estudiar el rango de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4a + 2a(a-3) = 4a + 2a^2 - 6a = 2a^2 - 2a$$

Igualando a cero resulta:

$$2a^2 - 2a = 0 \implies (2a - 2)a = 0 \implies \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Vamos pues a estudiar cada caso.

- Si  $a \neq 0, 1 \implies RgA = RgA' = 3 = n^\circ$  de incógnitas  $\implies$  S. C. Determinado.
- Si  $a = 0$  la matriz que resulta es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$$

Las filas segunda y tercera hacen que el sistema sea incompatible.

- Si  $a = 1$  la matriz que obtenemos es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

Vamos a estudiar el rango de  $A$  y  $A'$  para ver como sería.

Es evidente que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, pues tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Vamos a ver que pasa con la matriz ampliada. Su rango es igual a dos, pues las filas primera y segunda son proporcionales.

Por tanto el sistema es compatible indeterminado, pues

$$RgA = 2 = RgA' < 3 = n^\circ \text{ de incógnitas}$$

#### 2.2.4. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el valor del parámetro $a$ :

$$\left. \begin{array}{rclcl} ax & - & ay & + & az & = & a \\ & & & & (3-2a)z & = & 1 \\ x & + & (a-1)y & & & = & 0 \end{array} \right\}$$

(Junio 01)



**- Solución:**

La matriz asociada a nuestro sistema es:

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} a & -a & a & a \\ 0 & 0 & 3-2a & 1 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Veamos donde el determinante de la matriz de los coeficientes es cero.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a & -a & a \\ 0 & 0 & 3-2a \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix} &= -a(3-2a) - a(a-1)(3-2a) = -3a + 2a^2 - (3a^2 - 2a^3 - 3a + 2a^2) = \\ &= -3a + 2a^2 - 3a^2 + 2a^3 + 3a - 2a^2 = 2a^3 - 3a^2 = 0 \implies \begin{cases} a^2 = 0 \implies a = 0 \\ 2a - 3 = 0 \implies a = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Por tanto:

- Si  $a \neq 0, \frac{3}{2} \implies RgA = RgA' = 3 = n^\circ$  incógnitas  $\implies$  Sistema Compatible Determinado.
- Si  $a = 0$  la matriz es:

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Como la primera fila es entera de ceros, y es evidente que hay menores de orden 2 distintos de cero, por lo que tenemos que:

$$RgA = 2 = RgA' < n^\circ \text{ incógnitas} \implies \text{Sistema compatible indeterminado.}$$

- Si  $a = \frac{3}{2}$  la matriz que resulta es:

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Como la segunda fila crea una imposibilidad tenemos que el sistema es incompatible para dicho valor.

**2.2.5. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el valor del parámetro  $a$ :**

$$\begin{array}{rclcl} & a & y & + & (a+1) & z & = & a \\ a & x & & & & & + & z & = & a \\ & x & & & & a & & z & = & a \end{array}$$

(Junio 02)

**- Solución:**

La matriz asociada al sistema es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & a & a+1 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a & a \end{array} \right)$$

Vamos a empezar por estudiar el rango de  $A$ , ya que es una matriz cuadrada.

$$\left| \begin{array}{ccc} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{array} \right| = a - a^3 = 0 \implies a(1 - a^2) = 0 \implies \begin{cases} a = 0 \\ 1 - a^2 = 0 \implies a = \pm 1 \end{cases}$$

Luego:

- Si  $a \neq 0, 1, -1 \implies RgA = 3 = RgA' = n^\circ$  incógnitas  $\implies$  S. C. Determinado.

- Si  $a = 0$  la matriz que nos queda es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

El sistema es compatible por ser homogéneo. Además la 1ª y la 2ª fila son iguales y hay un menor de orden dos que es distinto de cero (formado por las filas 1 y 3, y las columnas 1 y 3). Por tanto el  $RgA = 2$ . En consecuencia:

$$RgA = 2 = RgA' < 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \implies \text{S. C. Indeterminado.}$$

- Si  $a = 1$  la matriz es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

Las filas 2ª y 3ª son iguales, pero hay un menor de orden dos que es distinto de cero (formado por las filas 1 y 2, y las columnas 2 y 3). Por tanto el  $RgA = 2$ . Veamos el rango de la ampliada.

$$\left| \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right| = 1 - 1 = 0$$

Luego el  $RgA' = 2$  y por tanto:

$$RgA = 2 = RgA' < 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \implies \text{S. C. Indeterminado.}$$

- Si  $a = -1$  la matriz resultante es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Es fácil observar que las filas 2ª y 3ª son incompatibles, luego el sistema, para este valor, es incompatible.

**2.2.6.** La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es  $M$ . Hallar un sistema equivalente tal que los tres coeficientes que están por encima de la diagonal principal de la nueva matriz asociada sean nulos:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 02)

- **Solución:**

Vamos a conseguir los ceros que nos piden utilizando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 4F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 = 4F_1 - F_3 \\ F_2 = 8F_2 + F_3}} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Esta sería la matriz asociada al sistema buscado.

**2.2.7.** Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro  $a$ :

$$\begin{aligned} ay + az &= 0 \\ x + z &= 0 \\ 4x - 2y + az &= a \end{aligned}$$

(Septiembre 02)

- **Solución:**

La matriz asociada al sistema es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & a & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{array} \right)$$

Vamos a ver el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & a \end{vmatrix} = 4a - 2a - a^2 = -a^2 + 2a$$

Igualando a cero obtenemos los valores que anulan el determinante.

$$-a^2 + 2a = 0 \implies \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

En consecuencia tenemos que:

- Si  $a \neq 0, 2$  el sistema va a ser compatible determinado.

- Si  $a = 0$  la matriz asociada es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Se trata de un sistema homogéneo. Tiene una fila de ceros, luego el rango no puede ser tres y además  $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ . Por tanto el sistema es compatible indeterminado y necesita un parámetro.

$$RgA = RgA' = 2 < 3 = n^\circ \text{ de incógnitas.}$$

- Si  $a = 2$  la matriz queda:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

El rango de la matriz de los coeficientes es dos, pues  $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ .

En cambio la matriz ampliada tiene rango tres, pues

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \implies RgA = 2 \neq 3 = RgA'$$

Por tanto el sistema para este valor es incompatible.

### 2.2.8. Determinar el valor del parámetro $a$ para que las siguientes ecuaciones lineales sean linealmente dependientes

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 3x + 2y + z &= 1 \\ y + 2z &= a \end{aligned}$$

(Junio 03)

#### - Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a \end{array} \right)$$

Para que ocurra lo que nos piden, el sistema ha de ser compatible indeterminado, es decir,  $RgA = RgA' < n^\circ$  de incógnitas. Veamos cuanto vale el rango de  $A$ .

-  $RgA \geq 2$  pues  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ .

-  $RgA = 2$  pues:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 6 - 1 = 0$$

Por tanto se producirá lo que piden si el  $RgA' = 2$ , es decir, si

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a + 3 - 3a - 1 = -a + 2 = 0 \implies a = 2$$

**2.2.9. Dar un ejemplo de una sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea compatible e indeterminado. Interpretalo geoméricamente.**

(Septiembre 03)

- **Solución:**

Un ejemplo válido es:

$$\left. \begin{array}{rcl} x & + & y & + & z & = & 1 \\ 2x & - & y & & & = & 3 \\ 3x & & & + & z & = & 4 \end{array} \right\}$$

En este ejemplo hemos elegido dos ecuaciones independientes y la tercera la hemos obtenido sumando las dos primeras.

Geoméricamente hablando pueden existir varias posibilidades.

- Pueden ser tres planos que se cortan en una recta (para ejemplo vale el anterior).
- Pueden ser también tres planos coincidentes (tres ecuaciones proporcionales).
- Pueden ser dos planos coincidentes y otro que los corte (dos ecuaciones proporcionales y una independiente de ellas).

**2.2.10. Determinar un valor del parámetro  $a$  para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible e indeterminado.**

$$\begin{array}{rcl} x & +y & +z & = & a \\ x & -y & +z & = & 1 \\ x & -3y & +z & = & 0 \end{array}$$

(Junio 05)

- **Solución:**

La matriz asociada al sistema será:

$$\mathbf{A} = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Vamos a estudiar el rango de la matriz de los coeficiente y despues veremos la ampliada.

-  $RgA \geq 2$  pues tenemos que  $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$

Además el  $RgA = 2$ , pues las columnas primera y tercera de la matriz de los coeficiente son iguales.

Para que el sistema sea compatible e indeterminado la matriz ampliada tiene que tener rango 2, es decir,

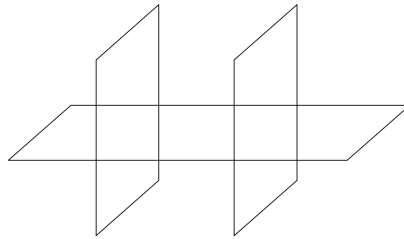
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 3a + a + 3 = -2a + 4 = 0 \implies a = 2$$

**2.2.11. Dar un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea incompatible. Interprétalo geoméricamente.**

(Junio 05)

- **Solución:**

Tenemos varias opciones. Por ejemplo, podemos considerar dos planos paralelos y uno que corte a ambos.

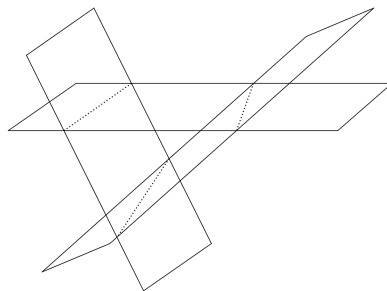


$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ x + y + z = 5 \\ 2x - y + z = 3 \end{array} \right\}$$

En este ejemplo, las dos primeras ecuaciones representan planos paralelos y la tercera corta a los dos. Es obvio que no tienen ningún punto en común, por lo que el sistema es incompatible.

Otra opción es coger dos planos que se corten, sumar sus ecuaciones (con lo que obtendríamos un plano que se corta en la misma recta que los anteriores) y al resultante cambiarle el término independiente, con lo que obtenemos un plano paralelo al último que no pasaría por la recta de corte de los dos planos, y con ello no tendrían ningún punto en común.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x + 2z = 8 \end{array} \right\}$$



Otra posibilidad son dos planos coincidentes y uno paralelo, o bien tres planos paralelos.

**2.2.12. Resolver el sistema de ecuaciones lineales**

$$\begin{aligned}y - x &= z \\x - z &= y \\y + z &= x\end{aligned}$$

(Septiembre 05)

**- Solución:**

La matriz asociada al sistema es:

$$A = \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Se trata de un sistema homogéneo, luego es compatible. Veremos cuanto vale el  $RgA$  para decidir si es determinado o indeterminado.

Es evidente que  $RgA \geq 2$  pues

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Veamos cuanto vale el  $|A|$ .

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

Luego resulta que el  $RgA = 2 \implies$  El sistema es compatible indeterminado y necesita un parámetro.

Vamos a resolverlo:

Hacemos  $x = \lambda$ . Para eso usamos las filas que dan rango 2 y resolviendo por reducción tenemos:

$$\begin{array}{rcl} \cancel{y} & -z & = \lambda \\ \cancel{y} & -z & = \cancel{\lambda} \\ \hline & -2z & = 0 \\ & z & = 0 \end{array}$$

Si  $x = \lambda$ ;  $z = 0 \implies y = \lambda$ .

Por tanto la solución es  $(\lambda, \lambda, 0)$ .

**2.2.13. Dar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea compatible e indeterminado. Interpretarlo geoméricamente.**

(Septiembre 05)

**- Solución:**

El sistema será compatible cuando los rangos de la matriz de coeficientes y la ampliada coincidan y será indeterminado cuando éste sea menor que el número de incógnitas. En nuestro caso ocurrirá cuando el rango de la matriz de los coeficientes valga 1 ó 2. Por tanto, o bien tomamos dos ecuaciones linealmente independientes y las sumamos ( $RgA = 2$ ), o bien cogemos una ecuación y la repetimos dos veces multiplicada por distintos números ( $RgA = 1$ ). También vale para el primer caso dos ecuaciones proporcionales y una que sea linealmente independiente con ellas.

Valdrían como ejemplo los siguientes:

Para  $RgA = 2$  tendríamos:

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x + 3y - 2z & = & 3 \\ x - y + z & = & 4 \\ 3x + 2y - z & = & 7 \end{array} \right\}$$

Para  $RgA = 1$  nos vale:

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x + 3y - 2z & = & 3 \\ 4x + 6y - 4z & = & 6 \\ -2x - 3y + 2z & = & -3 \end{array} \right\}$$

Geoméricamente el primer caso representa tres planos que se cortan en una recta, o dos coincidentes y uno que los corta y el segundo tres planos coincidentes.

#### 2.2.14. Discute el sistema de ecuaciones lineales

$$\left[ \begin{array}{rcl} x + 2y - z & = & 2 \\ x + (1+b)y - bz & = & 2b \\ x + by + (1+b)z & = & 1 \end{array} \right]$$

según los valores de  $b$ .

(Junio 06)

- **Solución:**

La matriz asociada al sistema es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{array} \right)$$

Vamos a calcular el determinante de la matriz de coeficientes para realizar el estudio.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix} = (1+b)^2 - 2b - b + (1+b) - 2(1+b) + b^2 = 1 + b^2 + 2b - 2b - b + 1 + b^2 - 2 - 2b + b^2 = 2b^2 - 2b = 0 \implies b = 0 \text{ y } b = 1$$

Luego:

- Si  $b \neq 0, 1 \implies$  El sistema es compatible determinado.
- Si  $b = 0$  la matriz quedaría:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

En este caso tenemos que  $RgA = 2$  pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$



Veamos cuanto vale el  $RgA'$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 = -3 \neq 0$$

Por tanto  $RgA = 2 \neq 3 = RgA' \implies$  El sistema es incompatible.

- Si  $b = 1$  a matriz quedaría:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right)$$

En este caso  $RgA = 2$ , pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

y a su vez coincide con el  $RgA'$ , ya que la primera y la segunda fila coinciden.

Por tanto  $RgA = 2 = RgA' < 3 = n^\circ$  de incógnitas  $\implies$  El sistema es compatible indeterminado y necesita un parámetro para su resolución.

### 2.2.15. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{rcl} x & +2y & -z = 1 \\ x & +y & -z = 1 \\ x & & -z = 1 \end{array}$$

(Septiembre 06)

- **Solución:**

La matriz asociada al sistema es:

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

Vamos a resolverlo por el método de Gauss, pues parece cómodo.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}]{F_2=F_2-F_1} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Las filas segunda y tercera son proporcionales, luego sobra una y el sistema es compatible indeterminado.

De la segunda ecuación deducimos que  $y = 0$ . Si en la primera ecuación sustituimos  $y = 0$  y hacemos  $z = \lambda$  resulta:

$$x - \lambda = 1 \implies x = 1 + \lambda$$

Por tanto la solución del sistema es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right\}$$



## Capítulo 3

# Geometría

### 3.1. Vectores, puntos, rectas y planos en el espacio

3.1.1. Hallar la ecuación de una circunferencia que, siendo tangente a la recta  $y = \sqrt{3}x$ , sea tangente al eje de abscisas en el punto  $(3, 0)$ . (Indicación:  $\operatorname{tg}60^\circ = \sqrt{3}$ ,  $\operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ )

(Septiembre 00)

- Solución:

La figura 3.1 nos muestra una visión del problema.

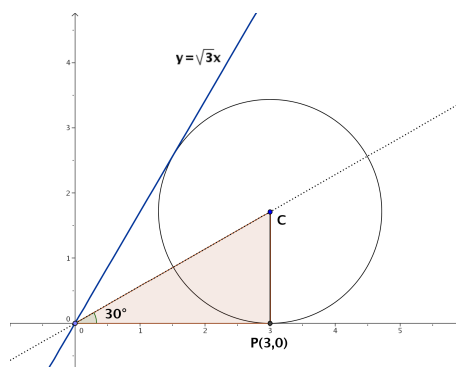


Figura 3.1: Representación detallada del problema

Vamos a utilizar propiedades conocidas de las circunferencias. Se sabe que la recta que pasa por el centro de la circunferencia y por el punto de corte de las dos tangentes (en nuestro caso el origen de coordenadas) es la recta bisectriz del ángulo formado por las tangentes. Como la recta  $y = \sqrt{3}x$  forma un ángulo con la horizontal de  $60^\circ$ , se deduce que la recta anteriormente citada forma un ángulo de  $30^\circ$  con la horizontal (ver figura 3.1). También es obvio que el radio es perpendicular con la horizontal en el punto de tangencia (por ser el eje de abscisas una de las tangentes), luego tenemos el triángulo rectángulo que podemos ver en la figura 3.1.

De aquí deducimos:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{r}{3} \implies r = 3 \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Por tanto el centro es  $C(3, \sqrt{3})$  y la ecuación buscada es:

$$(x - 3)^2 + (y - \sqrt{3})^2 = 3$$

**3.1.2. Determinar una recta que sea paralela al plano de ecuación  $x + y + z = 3$ , que corte a la recta de ecuaciones  $x = 0, z = 0$ , y que también corte a la recta de ecuaciones  $z = 1, y = 0$ .**

(Septiembre 00)

**- Solución:**

Vamos a coger un plano paralelo al que nos dan. Luego vamos a cortarlo con las dos rectas indicadas. La recta que pasa por estos dos puntos está contenida en este último plano, por tanto es paralela al plano que nos dan y por supuesto corta a las rectas indicadas.

Como plano paralelo vale el plano  $x + y + z = 1$ . Si cortamos este plano con las rectas obtenemos:

- Con  $x = 0, z = 0 \implies A(0, 1, 0)$ .
- Con  $z = 1, y = 0 \implies B(0, 0, 1)$ .

La recta buscada pasa por los puntos  $A$  y  $B$ , por tanto queda definida por  $A(0, 1, 0)$  y por  $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1)$ .

En forma paramétrica, la ecuación resultante es:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\}$$

**3.1.3. Calcular alguna recta que sea paralela al plano de ecuación  $x - 2y + z = 1$  y que también sea paralela al plano que pasa por los puntos de coordenadas  $(2, 0, 1), (0, 2, 1)$  y  $(1, -1, 0)$ .**

(Junio 01)

**- Solución:**

Bastará con coger planos paralelos a los dos que nos dan y el corte de dichos planos será la recta que busquemos.

Vamos a empezar por calcular la ecuación general del plano que pasa por los tres puntos, que denominaremos:  $A(2, 0, 1), B(0, 2, 1), C(1, -1, 0)$ .

Como vectores directores de este plano tomamos  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$ , cuyas coordenadas serán:

$$\overrightarrow{AB} = (-2, 2, 0) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-1, -1, -1)$$

Por tanto, la ecuación del plano vendrá determinada por  $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ .

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{ccc} x-2 & -2 & -1 \\ y & 2 & -1 \\ z-1 & 0 & -1 \end{array} \right| &= -2(x-2) + 2(z-1) + 2(z-1) - 2y = \\ &= -2x + 4 + 2z - 2 + 2z - 2 - 2y = -2x - 2y + 4z - 2 = 0 \end{aligned}$$

Por tanto podemos tomar como ecuación de dicho plano  $x + y - 2z + 1 = 0$ .

Tenemos por tanto dos planos que son:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2z + 1 = 0 \end{array} \right\}$$

Para conseguir nuestra recta cogemos dos planos paralelos a ellos, para lo que basta con cambiar el término independiente:

$$\left. \begin{array}{r} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x + y - 2z + 8 = 0 \end{array} \right]$$

Está sería la ecuación de la recta buscada.

**3.1.4. Calcular un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores de coordenadas  $(1, 0, 2)$  y  $(2, 1, 0)$ .**

(Junio 01)

- **Solución:**

Vamos a realizar el producto vectorial de los dos vectores, pues el vector así obtenido será ortogonal a los dos. Después normalizaremos ese vector y obtendremos el vector buscado.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{j} + \vec{k} - 2\vec{i}$$

Luego un vector ortogonal a ambos sería  $\vec{w} = (-2, 4, 1)$ .

Vamos a normalizarlo. Su módulo vale  $|\vec{w}| = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}$ .

Dividiendo el vector por su módulo obtenemos el vector  $\vec{\sigma}$  buscado:

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \left( \frac{-2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}} \right)$$

**3.1.5. Calcular alguna recta que sea paralela al plano de ecuación  $x + z = 2$  y corte perpendicularmente a la recta de ecuaciones  $x + y = 0, y + z = 2$ .**

(Septiembre 01)

- **Solución:**

El procedimiento que vamos a seguir lo narro a continuación. Nuestra recta va a ser el corte de dos planos, uno paralelo al primero (con eso garantizamos que la recta es paralela al plano) y el otro va a pertenecer al haz de planos que obtenemos a partir de los planos que definen la segunda recta. De esa forma, como nuestra recta estará contenida en dicho plano cortará a la que nos dan. El plano que elijiremos será aquel que haga que la recta obtenida corte perpendicularmente a la dada en el enunciado.

Dicho esto nos ponemos manos a la obra. Es fácil obtener un plano paralelo al que nos dan, valdría  $x + z = 0$ . Vamos a por el otro. El haz de planos a que nos referíamos tendría la siguiente forma:

$$\alpha(x + y) + y + z - 2 = 0$$

Luego nuestra recta quedará definida por los planos:

$$\left. \begin{array}{r} x + z = 0 \\ \alpha(x + y) + y + z - 2 = 0 \end{array} \right] \implies \left. \begin{array}{r} x + z = 0 \\ \alpha x + (\alpha + 1)y + z = 2 \end{array} \right] \quad (3.1)$$

Vamos a buscar cual es el vector director de las rectas (en función de  $\alpha$ ) para después decidir cual es el perpendicular a la recta dada. Resolviendo el sistema tenemos:

$$\left. \begin{array}{r} x + z = 0 \\ \alpha x + (\alpha + 1)y + z = 2 \end{array} \right] z = \lambda \implies x = -\lambda$$

Sustituyendo:

$$\alpha(-\lambda) + (\alpha + 1)y + \lambda = 2 \implies (\alpha + 1)y = 2 - \lambda + \alpha\lambda \implies y = \frac{2}{\alpha + 1} + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\lambda$$

Luego la ecuación de la recta en forma paramétrica, en función de  $\alpha$ , será:

$$\left. \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = \frac{2}{\alpha + 1} + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\} \implies \vec{v} = \left( -1, \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}, 1 \right)$$

Vamos a encontrar el vector director de la recta que nos dieron.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 0 \\ y + z = 2 \end{array} \right\} y = \lambda \implies x = -\lambda, z = 2 - \lambda$$

$$\left. \begin{array}{l} x = -\lambda \\ y = \lambda \\ z = 2 - \lambda \end{array} \right\} \implies \vec{u} = (-1, 1, -1)$$

Nos falta por encontrar el valor de  $\alpha$  que hace que  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  sean perpendiculares, es decir, que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 1, -1) \cdot \left( -1, \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}, 1 \right) = 1 + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} - 1 = 0 \implies \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = 0 \implies \alpha = 1$$

Luego, si sustituimos  $\alpha = 1$  en la ecuación (3.1), la recta pedida es:

$$\left. \begin{array}{l} x + z = 0 \\ x + 2y + z = 2 \end{array} \right\}$$

### 3.1.6. ¿Qué ángulo deben formar dos vectores no nulos $\vec{e}$ y $\vec{v}$ para que ambos tengan el mismo módulo que su diferencia $\vec{e} - \vec{v}$

(Septiembre 01)

- Solución:

Queremos que:

$$|\vec{e}| = |\vec{v}| = |\vec{e} - \vec{v}| \quad (3.2)$$

Sabemos que

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{w}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{w}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{w}|}$$

Si aplicamos esta última fórmula a los vectores  $\vec{e} - \vec{v}$  y  $\vec{e} - \vec{v}$  tendremos:

$$\begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{e} - \vec{v}, \vec{e} - \vec{v}}) &= \frac{(\vec{e} - \vec{v}) \cdot (\vec{e} - \vec{v})}{|\vec{e} - \vec{v}| \cdot |\vec{e} - \vec{v}|} = \frac{\vec{e} \cdot \vec{e} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 2\vec{e} \cdot \vec{v}}{|\vec{e} - \vec{v}| \cdot |\vec{e} - \vec{v}|} = \\ &= \frac{|\vec{e}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{e}| \cdot |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{e}, \vec{v}})}{|\vec{e} - \vec{v}| \cdot |\vec{e} - \vec{v}|} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta 3.2 y que  $\cos(\widehat{\vec{e} - \vec{v}, \vec{e} - \vec{v}}) = 1$ , resulta:

$$1 = \frac{|\vec{e}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2|\vec{e}|^2 \cos(\widehat{\vec{e}, \vec{v}})}{|\vec{e}|^2} \implies 2|\vec{e}|^2 - 2|\vec{e}|^2 \cos(\widehat{\vec{e}, \vec{v}}) = |\vec{e}|^2 \implies$$

$$\implies 2 - 2 \cos(\widehat{\vec{e}, \vec{v}}) = 1 \implies -2 \cos(\widehat{\vec{e}, \vec{v}}) = -1 \implies \cos(\widehat{\vec{e}, \vec{v}}) = \frac{1}{2}$$

Luego el ángulo buscado es:

$$(\widehat{\vec{e}, \vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$$

**3.1.7. Hallar dos vectores linealmente independientes que sean ortogonales al vector  $\vec{e}$  de coordenadas  $(1, 1, 3)$ .**

(Junio 02)

- **Solución:**

Sean  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  los vectores buscados.

Para que sean linealmente independientes basta con no ser proporcionales y para ser ortogonales tiene que cumplirse

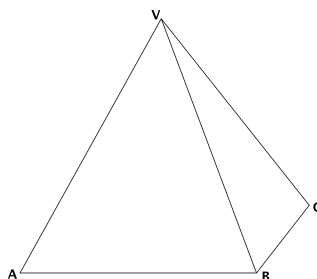
$$\vec{u} \cdot \vec{e} = \vec{v} \cdot \vec{e} = 0$$

Dos vectores válidos para lo que buscamos serían:

$$\vec{u} = (2, 1, -1) \implies \vec{u} \cdot \vec{e} = (2, 1, -1) \cdot (1, 1, 3) = 2 + 1 - 3 = 0$$

$$\vec{v} = (1, 2, -1) \implies \vec{v} \cdot \vec{e} = (1, 2, -1) \cdot (1, 1, 3) = 1 + 2 - 3 = 0$$

**3.1.8. La base de una pirámide es un cuadrado  $ABCD$  de 2 metros de largo y su vértice  $V$  está situado a una altura de 3 metros sobre el centro de la base. Calcular el ángulo que forman los planos  $ABV$  y  $BCV$ .**



(Junio 02)

- **Solución:**

Vamos a asignarle coordenadas a los puntos que nos dan.  $A(2, 0, 0)$ ;  $B(2, 2, 0)$ ;  $C(0, 2, 0)$  y  $V(1, 1, 3)$ .

Vamos a calcular los planos.

- Sea  $\pi \equiv ABV$ . Para calcular la ecuación de este plano vamos a usar el punto  $A$  y los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AV}$ , es decir  $A(2, 0, 0)$ ;  $\overrightarrow{AB} = (0, 2, 0)$  y  $\overrightarrow{AV} = (-1, 1, 3)$ . Por tanto:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & -1 \\ y & 2 & 1 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-2) + 2z = 6x - 12 + 2z = 0$$

Luego la ecuación del primer plano será  $\pi \equiv 3x + z = 6$ .

- Sea  $\pi' \equiv BCV$ . Para calcular éste usaremos  $B$  y los vectores  $\overrightarrow{BC}$  y  $\overrightarrow{BV}$ , es decir,  $B(2, 2, 0)$ ;  $\overrightarrow{BC} = (-2, 0, 0)$  y  $\overrightarrow{BV} = (-1, -1, 3)$ . Por tanto:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ y-2 & 0 & -1 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2z + 6(y-2) = 2z + 6y - 12 = 0$$

Luego la ecuación del segundo plano es  $\pi' \equiv 3y + z = 6$

Vamos a calcular ahora el ángulo que nos piden, es decir el ángulo que forman  $\pi$  y  $\pi'$ . Sus vectores normales son  $\vec{n} = (3, 0, 1)$  y  $\vec{n}' = (0, 3, 1)$ . En consecuencia:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{n}'|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n}'|} = \frac{1}{\sqrt{10} \sqrt{10}} = \frac{1}{10} \implies \alpha = 84^\circ 15' 39''$$

**3.1.9. Determinar si el plano  $3x - 2y + z = 1$  es perpendicular a la recta de ecuaciones  $-x = 3y + 3z, y + 2z = -1$ . Determinar también si es paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas  $(1, -1, 1)$  y  $(-1, -1, 0)$ .**

(Septiembre 02)

- **Solución:**

Veamos lo primero.

Vamos a calcular el vector director de la recta ( $\vec{u}$ ) como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan.

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y + 3z = 0 \\ y + 2z = -1 \end{array} \right\} \implies \vec{n}_1 = (1, 3, 3) \\ \implies \vec{n}_2 = (0, 1, 2)$$

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + \vec{k} - 2\vec{j} - 3\vec{i} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \implies \vec{u} = (3, -2, 1)$$

Como el vector normal al plano era el mismo, deducimos que la recta es perpendicular al plano.

Veamos ahora lo segundo. Llamemos  $P(1, -1, 1)$  y  $Q(-1, -1, 0)$ . Por tanto la recta tendrá como vector director  $\overrightarrow{PQ} = (-2, 0, -1)$ .

Para ver si la recta es paralela al plano vamos a ver si  $\vec{n}$  es ortogonal a  $\overrightarrow{PQ}$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = (3, -2, 1) \cdot (-2, 0, -1) = -6 - 1 = -7 \neq 0$$

Luego no son paralelos.



- 3.1.10.** Sabiendo que los lados de un rectángulo  $ABCD$  miden 1 y 3 metros, calcular el producto escalar de los vectores  $\overrightarrow{CB}$  y  $\overrightarrow{AD}$ , y el módulo del producto vectorial de los vectores  $\overrightarrow{CB}$  y  $\overrightarrow{BA}$ .



(Septiembre 03)

- **Solución:**

Vamos a asignarles coordenadas a los puntos:

$$D(0, 0, 0), A(3, 0, 0), B(3, 1, 0), C(0, 1, 0).$$

Vamos a ver paso a paso cada una de las dos cosas que nos piden calcular:

- Para hallar el producto escalar pedido vamos a calcular primero los vectores y a continuación haremos el producto.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{CB} = (3, 0, 0) \\ \overrightarrow{AD} = (-3, 0, 0) \end{array} \right] \Rightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD} = (3, 0, 0) \cdot (-3, 0, 0) = -9$$

- Para calcular el producto vectorial es necesario calcular el vector  $\overrightarrow{BA}$ , pues el vector  $\overrightarrow{CB}$  ya lo calculamos antes.

$$\overrightarrow{BA} = (0, -1, 0)$$

Ahora realizaremos el producto vectorial y posteriormente calcularemos el módulo.

$$\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{BA} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{k}$$

$$\text{Por tanto } |\overrightarrow{CB} \wedge \overrightarrow{BA}| = 3.$$

- 3.1.11.** Determinar un plano que, pasando por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta de ecuaciones  $x + y = 1, y + z = 2$ , y también sea paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas  $(1, 1, 0)$  y  $(0, 1, 1)$ .

(Septiembre 03)

- **Solución:**

Para calcular el plano usaremos un punto y dos vectores. Como punto usaremos el origen y como vectores los vectores directores de las dos rectas. Vamos a calcular estos últimos:

- Empezamos por la primera recta, multiplicando los vectores normales asociados a los planos que la definen.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = 2 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1, 1, 0) \\ \vec{n}_2 = (0, 1, 1) \end{array} \Rightarrow \vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} - \vec{j}$$

Luego el primer vector buscado es  $\vec{u} = (1, -1, 1)$ .

- En la segunda recta un vector válido es:

$$\vec{v} = (0, 1, 1) - (1, 1, 0) = (-1, 0, 1)$$

Por tanto la ecuación del plano es:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -x - y - z - y = -x - 2y - z$$

es decir, valdría

$$x + 2y + z = 0$$

### 3.1.12. ¿Qué relación hay entre los coeficientes de las ecuaciones

$$ax + by + cz = d, \quad a'x + b'y + c'z = d'$$

de dos planos paralelos? Razonar la respuesta.

(Junio 04)

#### - Solución:

La relación que deben guardar es:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$$

Ello se debe a:

1. La doble igualdad implica que los vectores normales son proporcionales y por tanto paralelos.
2. La desigualdad hace que no hablemos del mismo plano.

### 3.1.13. Determinar una recta que sea paralela al plano que pasa por los puntos de coordenadas $(1, 1, 0)$ ; $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$ , que también sea paralela al plano $x + 2y + 3z = 0$ , y que no esté contenida en ninguno de estos dos planos.

(Septiembre 04)

#### - Solución:

Para eso vamos a considerar sendos planos paralelos a los que nos dan y la recta en que se cortan es paralela a ambos planos y no está en ninguno.

Empezamos por calcular la ecuación del plano que pasa por los tres puntos. Dichos puntos son  $A(1, 1, 0)$ ;  $B(1, 0, 1)$  y  $C(0, 1, 1)$ . Para hallar la ecuación del plano vamos a considerar el punto A y los vectores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$

Los vectores son  $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1)$  y  $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$ . Por tanto la ecuación del plano es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(x-1) - (y-1) - z = -x+1-y+1-z=0 \implies \\ \implies x+y+z-2=0$$

Tenemos, en consecuencia, dos planos y voy a coger dos planos paralelos a ellos para construir la recta:

$$\text{Plano } 1^\circ \longrightarrow x+y+z-2=0 \longrightarrow x+y+z+3=0 \text{ (Paralelo)}$$

$$\text{Plano } 2^\circ \longrightarrow x+2y+3z=0 \longrightarrow x+2y+3z-1=0 \text{ (Paralelo)}$$

Por tanto, una recta posible es:

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z+3=0 \\ x+2y+3z-1=0 \end{array} \right\}$$

**3.1.14. Hallar un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores de coordenadas  $(0, 1, 1)$  y  $(2, 1, 0)$ .**

(Septiembre 05)

- **Solución:**

Una forma posible es calcular el producto vectorial de los vectores y obtendremos un vector ortogonal a ambos, después lo normalizamos y terminamos.

Vamos a llamar  $\vec{u} = (0, 1, 1)$  y  $\vec{v} = (2, 1, 0)$ .

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{j} - 2\vec{k} - \vec{i} \implies \vec{w} = (-1, 2, -2)$$

El vector que buscamos lo obtenemos dividiendo  $\vec{w}$  entre su módulo.

$$\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{(-1, 2, -2)}{\sqrt{1+4+4}} = \left( \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3} \right)$$

**3.1.15. Determina la relación que debe existir entre  $a$  y  $b$  para que los puntos de coordenadas  $(1, 0, 0)$ ,  $(a, b, 0)$ ,  $(a, 0, b)$  y  $(0, a, b)$  estén en un plano.**

(Junio 06)

- **Solución:**

Para que ocurra lo que nos piden los vectores  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  y  $\overrightarrow{AD}$  tiene que ser linealmente dependientes. Veamos cuales son esos vectores e impongamos que el determinante que los tiene como filas valga 0.

$$\overrightarrow{AB} = (a-1, b, 0); \overrightarrow{AC} = (a-1, 0, b) \text{ y } \overrightarrow{AD} = (-1, a, b)$$

Su determinante es

$$\begin{vmatrix} a-1 & b & 0 \\ a-1 & 0 & b \\ -1 & a & b \end{vmatrix} = -b^2 - b^2(a-1) - ab(a-1) = 0 \implies \cancel{b^2} - ab^2 + \cancel{b^2} - a^2b + ab = 0 \implies$$

$$\implies ab(-b - a + 1) = 0$$

**3.1.16.** Determina el plano que pasa por el punto de coordenadas  $(1, 2, 3)$  y por la recta de ecuaciones  $x + y = 1, y + z = 1$ .

(Junio 06)

- **Solución:**

Vamos a llamar  $A$  al punto que nos dan. Vamos a pasar a paramétricas la ecuación de la recta y así tendremos un punto (que llamaremos  $B$ ) y el vector director ( $\vec{u}$ ) de la misma. Para encontrar la ecuación del plano usaremos  $A, \overrightarrow{AB}, \vec{u}$ .

Hacemos  $y = \lambda$  y nos resulta:

$$\begin{array}{l} x + \lambda = 1 \\ y = \lambda \\ \lambda + z = 1 \end{array} \implies \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{array} \implies \begin{cases} B(1, 0, 1) \\ \vec{u} = (-1, 1, -1) \end{cases}$$

De aquí deducimos que el plano queda determinado por:

$$A(1, 2, 3)$$

$$\overrightarrow{AB} = (0, -2, -2)$$

$$\vec{u} = (-1, 1, -1)$$

Por tanto la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & 0 & -1 \\ y - 2 & -2 & 1 \\ z - 3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2(x - 1) + 2(y - 2) - 2(z - 3) + 2(x - 1) = \\ = 2x - 2 + 2y - 4 - 2z + 6 + 2x - 2 = 4x + 2y - 2z - 2 = 0$$

Una ecuación más simple sería

$$2x + y - z - 1 = 0$$

**3.1.17.** Determina el plano que pase por los puntos de coordenadas  $(1, 0, 0)$  y  $(0, 1, 0)$ , y sea paralelo a la recta

$$\begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 2 \end{array}$$

(Septiembre 06)

- **Solución:**

Supongamos que nuestros puntos son  $A(1, 0, 0)$  y  $B(0, 1, 0)$ .

El plano que buscamos va a quedar definido por uno de los puntos (por ejemplo  $A$ ), por el vector  $\overrightarrow{AB}$  y por el vector director de la recta ( $\vec{u}$ ).

Vamos a calcular primero los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\vec{u}$ .

- $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ .

- El vector  $\vec{u}$  lo obtenemos al hacer el producto vectorial de los vectores normales a los planos

que definen la recta.

$$\left. \begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 2 \end{array} \right] \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \vec{n}_1 = (1, 1, 1) \\ \vec{n}_2 = (1, -1, 1) \end{array} \right] \Rightarrow \vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$$

Por tanto,

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} - \vec{k} - \vec{j} + \vec{i} = 2\vec{i} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{u} = (2, 0, -2)$$

Por tanto la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 2 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2(x-1) - 2z - 2y = -2x + 2 - 2z - 2y = 0$$

En consecuencia el plano buscado tiene ecuación

$$x + y + z - 1 = 0$$

### 3.2. Problemas métricos

**3.2.1. Calcular la distancia del punto de coordenadas  $(1, 1, 2)$  al plano que pasa por los puntos de coordenadas  $(1, 1, 0)$ ;  $(1, 0, 1)$  y  $(0, 1, 1)$ .**

(Junio 00)

- **Solución:**

Vamos a asignarles un nombre a los puntos  $A(1, 1, 2)$ ;  $B(1, 1, 0)$ ;  $C(1, 0, 1)$  y  $D(0, 1, 1)$ .

Vamos a calcular la ecuación del plano que pasa por  $B, C$  y  $D$ . Para ello vamos a usar  $B, \overrightarrow{BC}$  y  $\overrightarrow{BD}$ . Empecemos por calcular los vectores, que tendrían por coordenadas  $\overrightarrow{BC}(0, -1, 1)$  y  $\overrightarrow{BD}(-1, 0, 1)$ .

Por tanto la ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(x-1) - (y-1) - z = -x+1 - y+1 - z = -x-y-z+2$$

Por tanto vale como ecuación  $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$ .

Vamos a calcular la distancia.

$$d(A, \pi) = \frac{|1+1+2-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ u}$$

**3.2.2. Calcular la distancia del punto de coordenadas  $(3, 5, 0)$  a la recta que pasa por los puntos de coordenadas  $(0, 1, 2)$  y  $(0, 1, 1)$ .**

(Junio 00)

- **Solución:**

A los puntos vamos a designarlos por  $A(3, 5, 0)$ ,  $B(0, 1, 2)$  y  $C(0, 1, 1)$ . La recta que pasa por  $B$  y  $C$  queda definida por  $B(0, 1, 2)$  y  $\overrightarrow{BC} = (0, 0, -1)$ . La distancia la calculamos por la fórmula conocida.

$$d(A, r) = \frac{|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{BC}|}$$

donde  $\overrightarrow{AB} = (-3, -4, 2)$ . El producto vectorial del numerador queda:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 3\vec{j} \implies \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = (4, -3, 0)$$

Luego:

$$d(A, r) = \frac{\sqrt{16+9}}{\sqrt{1}} = 5 \text{ u.}$$

**3.2.3. Definir el producto escalar de vectores y enunciar su relación con los conceptos de ángulo y distancia entre dos puntos.**

(Junio 01)

- **Solución:**

Al ser una pregunta teórica puedes encontrar la solución en cualquier libro.

**3.2.4. Calcular el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de coordenadas  $(1, 0, 1)$ ,  $(2, 0, 2)$ ,  $(3, 1, 3)$  y  $(1, 2, 1)$ .**

(Septiembre 02)

- **Solución:**

Para que formen un cuadrilátero tienen que ser coplanarios. Vamos a empezar por comprobar esto. Para eso vamos a asignarles nombre a los puntos  $A(1, 0, 1)$ ;  $B(2, 0, 2)$ ;  $C(3, 1, 3)$  y  $D(1, 2, 1)$ . Vamos a considerar los vectores  $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 1)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (2, 1, 2)$  y  $\overrightarrow{AD} = (0, 2, 0)$ .

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

En consecuencia los vectores son linealmente dependientes y por tanto los puntos son coplanarios. La figura 3.2 nos muestra el cuadrilátero.

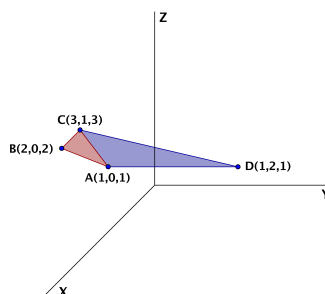


Figura 3.2: Representación gráfica del cuadrilátero.

Para calcular el área vamos a dividir el cuadrilátero, como observamos en la figura 3.2, en dos triángulos que serían  $ABC$  y  $ACD$ , después calcularemos el área de cada uno y por último sumaremos las dos para obtener el área que nos solicitan.

- Área de  $ABC$

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{j} + \vec{k} - 2\vec{j} - \vec{i} \implies \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$$

Luego:

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} |(-1, 0, 1)| = \frac{1}{2} \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ u}^2$$

- Área de  $ACD$

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}|$$

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{k} - 4\vec{i} \implies \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = (-4, 0, 4)$$

Luego:

$$A_{ACD} = \frac{1}{2} |(-4, 0, 4)| = \frac{1}{2} \sqrt{32} = 2\sqrt{2} \text{ u}^2$$

Luego el área que nos pedían es:

$$A = A_{ABD} + A_{ACD} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ u}^2$$

**3.2.5. Determinar una constante  $a$  para que el plano de ecuación  $ax + y + z = 2$  forme un ángulo de  $\pi/3$  radianes con el plano  $z = 0$ .**

(Junio 03)

- **Solución:**

Sabemos que la fórmula para hallar el ángulo es:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Los vectores normales de cada plano son:

$$\begin{aligned} ax + y + z = 2 &\implies \vec{n}_1 = (a, 1, 1) \\ z = 0 &\implies \vec{n}_2 = (0, 0, 1) \end{aligned}$$

Luego tenemos que

$$\cos\alpha = \frac{|(a, 1, 1) \cdot (0, 0, 1)|}{|(a, 1, 1)| \cdot |(0, 0, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2} \cdot 1}$$

Como  $\alpha = \pi/3$ , sustituyendo resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + 2}} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Luego

$$\sqrt{a^2 + 2} = 2 \implies a^2 + 2 = 4 \implies a^2 = 2 \implies a = \pm\sqrt{2}$$

**3.2.6. Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos de coordenadas  $(1, 0, 0)$ ;  $(0, 1, 1)$ ;  $(1, 2, 0)$ . Determinar la distancia del punto  $(2, 1, 1)$  a dicho plano.**

(Junio 04)

- **Solución:**

Vamos a calcular la ecuación del plano que pasa por los tres puntos. Para ello vamos a considerar los tres puntos con los siguientes nombres:  $A(1, 0, 0)$ ;  $B(0, 1, 1)$ ;  $C(1, 2, 0)$ . Dicho esto, vamos a calcular la ecuación del plano que pasa por el punto  $A$  y tiene como vectores directores  $\vec{AB}$  y  $\vec{AC}$ .

Por tanto tenemos  $A(1, 0, 0)$ ,  $\vec{AB} = (-1, 1, 1)$  y  $\vec{AC} = (0, 2, 0)$ .

$$\pi = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2z - 2(x-1) = -2x - 2z + 2 = 0 \implies x + z - 1 = 0$$

Una vez hallada la ecuación del plano vamos a calcular la distancia del punto  $P(2, 1, 1)$  a dicho plano.

$$d(P, \pi) = \frac{|2 + 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ u.}$$



**3.2.7. Determinar las coordenadas de un punto que diste 2 unidades de la recta**

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

(Junio 05)

**- Solución:**

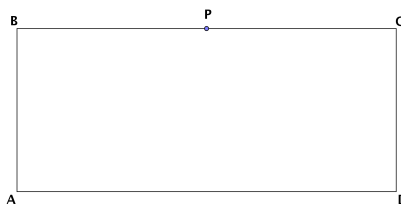
Basta con tomar un vector perpendicular al vector director de la recta ( $\vec{u}$ ) y un punto  $A$  de la misma. Le sumamos a dicho punto un vector de módulo 2 y que tenga la dirección y sentido del vector perpendicular calculado. De entrada tenemos que el punto  $A$  puede ser  $A(1, 0, 1)$  y que el vector director puede ser  $\vec{u} = (1, 1, -1)$ . Un vector perpendicular a  $\vec{u}$  puede ser  $\vec{v} = (0, 1, 1)$ , pues tenemos que:

$$\vec{u} \perp \vec{v}, \text{ pues } (0, 1, 1) \cdot (1, 1, -1) = 0$$

Falta por encontrar un vector de la dirección de  $\vec{v}$  pero de módulo 2. Por ejemplo podemos tomar  $\vec{w} = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ .

Con estos datos, el punto buscado es:

$$P = A + \vec{w} = (1, 0, 1) + (0, \sqrt{2}, \sqrt{2}) = (1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$$

**3.2.8. Si los lados de un rectángulo  $ABCD$  miden 1 cm y 4 cm, calcular el coseno del ángulo  $PAC$ , donde  $P$  es el punto medio del lado  $BC$ :**

(Junio 05)

**- Solución:**

El ángulo al que nos referimos viene representado en la figura 3.3

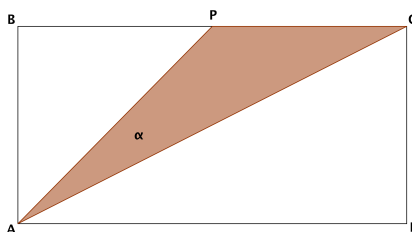


Figura 3.3: Visión del ángulo

Para resolverlo vamos a asignarle coordenadas a los puntos:

$$A(0, 0, 0); B(0, 0, 1); C(0, 4, 1); D(0, 4, 0); P(0, 2, 1).$$

El ángulo que buscamos sería el formado por los vectores  $\overrightarrow{AP} = (0, 2, 1)$  y  $\overrightarrow{AC} = (0, 4, 1)$ . Por tanto tendríamos:

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AP}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(0, 2, 1) \cdot (0, 4, 1)}{\sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 4^2 + 1^2}} = \frac{0 + 8 + 1}{\sqrt{4 + 1} \cdot \sqrt{16 + 1}} = \frac{9}{\sqrt{85}}$$

En consecuencia:

$$\alpha = \arccos \frac{9}{\sqrt{85}} = 12^\circ 31' 44''$$

**3.2.9.** Si A, B y C son los puntos de coordenadas (1, 0, 0); (0, 1, 0) y (0, 0, 1) respectivamente

- Calcular el área del triángulo que forman los puntos A, B y C.
- Determinar el ángulo que forman los vectores  $\overrightarrow{AB}$  y  $\overrightarrow{AC}$ .

(Septiembre 05)

- **Solución:**

- Empezaremos por calcular el área del triángulo. Dicho área se calcula con la fórmula:

$$A_T = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}|$$

Vamos a calcular los vectores y a realizar el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0) \text{ y } \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1).$$

Por tanto:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} + \vec{j} \implies \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$$

En consecuencia, el área buscada es:

$$A_T = \frac{|(1, 1, 1)|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} u^2$$

- Vamos a calcular ahora el ángulo que nos piden. para ello usamos la fórmula conveniente que es:

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{|1 + 0 + 0|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$\alpha = \arccos \frac{1}{2} = 60^\circ$$

**3.2.10.** Calcula el ángulo que forma el plano  $x + y + z = 0$  con la recta de ecuaciones  $x + y = 1$ ,  $y + z = 1$ .

(Septiembre 06)

- **Solución:**

Para hallar el ángulo vamos a utilizar la fórmula:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

donde  $\vec{u}$  es el vector director de la recta y  $\vec{n}$  el vector normal al plano. Vamos a calcularlos.

- Empezemos por el plano  $x + y + z = 0$ , cuyo vector normal es  $\vec{n} = (1, 1, 1)$ .
- El vector director de la recta vamos a obtenerlo haciendo el producto vectorial de los vectores normales ( $\vec{n}_1$  y  $\vec{n}_2$ ) de los planos que determinan la recta. Dichos vectores normales son:

$$x + y = 1 \implies \vec{n}_1 = (1, 1, 0)$$

$$y + z = 1 \implies \vec{n}_2 = (0, 1, 1)$$

Por tanto el vector director será:

$$\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} - \vec{j} \implies \vec{u} = (1, -1, 1)$$

Por tanto el coseno del ángulo buscado es:

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|(1, 1, 1) \cdot (1, -1, 1)|}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{|1-1+1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

En consecuencia:

$$90^\circ - \alpha = \arccos \frac{1}{3} \implies 90^\circ - \alpha = 70^\circ 31' 42'' \implies \alpha = 90^\circ - 70^\circ 31' 42'' = 19^\circ 28' 18''$$