Ejercicios resueltos de selectividad y EBAU
Matemáticas II
Universidad de Extremadura

PAU: 2000-2016
EBAU: 2017-2018

Vicente González Valle
I.E.S. Zurbarán (Badajoz)
Agosto 2018

Prólogo

Este libro se ha hecho para uso y disfrute de los alumnos de segundo de bachillerato de la opción científico-tecnológica. Se trata de la decimotercera edición. Espero que tengáis la bondad de perdonar los errores que he cometido al hacerlo.

También agradezco de corazón la colaboración de algunos compañeros y compañeras que tuvieron conocimiento de la primera versión gracias a la Sociedad Extremeña de Educación Matemática "Ventura Reyes Prósper", la cual no sólo comunicó la primera edición, sino que además me permitió obtener los enunciados de todos los años y así ayudarme a clasificarlos. Agradecer a Batildo Requejo Fernández, coordinador de selectividad, el aportarme los enunciados de los ejercicios. Destacar el ofrecimiento gratuito de Bernardo Calero Primo para elaborar las gráficas antiguas que estaban un poco cutres.

También agradecer las correcciones, aportaciones e ideas de la coordinadora permanente de selectividad, así como de todos aquellos que los vais viendo y me los comunicáis.

La posibilidad de trabajar por exámenes y volver a los enunciados, tras consultar la solución, es una idea de mi alumna Ana Villalba, un enlace al final de la solución de cada problema que te lleva de nuevo al examen de partida.

Algunos ejercicios tienen incorporado un vídeo que te explica el mismo. Mi intención es que poco a poco todos lo tengan. A lo largo de este año iré aumentando el número de ejercicios que lo tienen.

Si quieres hacer algún comentario, comunicar algún error o decir algo que se te ocurra, puedes ponerte en contacto conmigo en vicente@vicentegonzalezvalle.es.

Este libro se irá actualizando con los exámenes que cada año vaya poniendo la universidad, incorporando este año los del curso 2018, los segundos de la EBAU. Además este año se ha actualizado ***el resumen teórico y de la materia***. Puedes obtener la versión actualizada en la página http://www.vicentegonzalezvalle.es.

Por si te es útil te recomiendo ver el curso de moodle que tengo ubicado en el aula virtual de mi centro En el podrás encontrar más material, así como vídeos de muchos tipos de ejercicios. Para acceder pulsa en la categoría de 2º de bachillerato y después en el curso de Matemáticas II que me tiene como profesor. Cuando te pida la contraseña accede como invitado.

Este trabajo se ha hecho utilizando LaTeX y su frontend para linux Kile. Para los gráficos se ha usado el software de Geogebra. Gracias a todos los que han hecho posible estos programas y los han compartido gratuitamente con los demás.

Este año sigue teniendo un índice que nos permite elegir cada uno de los exámenes y desde ahí acceder a las soluciones de los problemas, y al final un índice temático, clasificando los ejercicios en cuatro bloques: Análisis, álgebra, Geometría y Probabilidad y Estadística.

Se trata de un trabajo que ofrezco a la comunidad educativa, pero es conveniente saber que se emite bajo una licencia Creative Commons en la que tienes que tener presente que:

A mi mujer Mª Teresa,
y a mis hijos Ana Mª, Isabel y Vicente.

A las abuelas Tere y Carmen

A los tios Manolo, Chencho, Pepi, Gonzalo, Aurín,
Modesto, Fernando, Caito, Marcial y Antonio
y, como no, al abuelo Paco,
los últimos que nos dejaron siendo testigos del amor.

En especial a mi padre Juan Antonio, ya fallecido,
que me enseño a servir y actuar gratuitamente en esta vida

Gracias a todos.

ÍNDICE

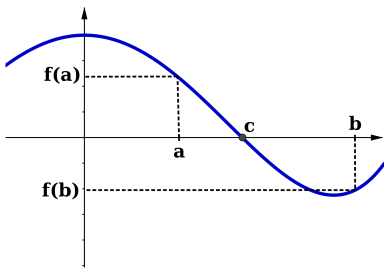
RESUMEN TEÓRICO

1. **Definición de función continua:** Una función es continua en un punto a si existe el valor de la función en dicho punto, el límite de la función cuando x tiende a a y ambos valores son iguales, es decir:

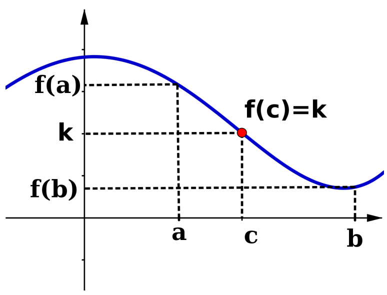
$$f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$$

Una función es continua en un intervalo abierto si lo es en cada uno de sus puntos. Será continua en el intervalo cerrado si lo es en el intervalo abierto y es continua por la derecha en a y por la izquierda en b.

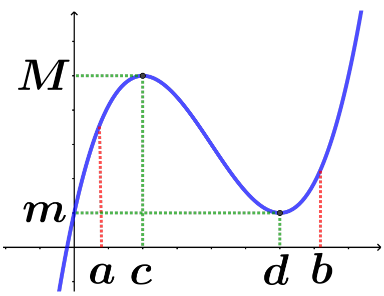
2. **Teorema de Bolzano:** Si f(x) es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma en sus extremos valores de signo contrario, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$



3. **Teorema de los valores intermedios (Teorema de Darboux):** Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y k es cualquier número tal que $f(a) < k < f(b)$, entonces existe al menos un número $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = k$.



4. **Teorema de Weierstrass:** Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, la función toma un valor que es máximo absoluto y otro valor que es mínimo absoluto en $[a, b]$, es decir, existen dos valores c y d en $[a, b]$ tal que $f(d) = m \leq f(x) \leq M = f(c)$ para todo $x \in [a, b]$.



5. **Definición de derivada:** Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $[a, b]$ y sea $x_0 \in (a, b)$. Se dice que f es derivable en x_0, si existe el límite:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si hacemos $h = x - x_0$ es evidente que cuando $x \to x_0$ tenemos que $h \to 0$. En ese caso el límite anterior quedaría:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Podemos utilizar cualquiera de los dos límites para calcular una derivada.

6. **Interpretación geométrica de la derivada:** La derivada de la función en un punto $(a, f(a))$ es la pendiente de la recta tangente a la curva en dicho punto:

$$m_{tg} = f'(a)$$

Usando la ecuación punto pendiente tendríamos que la ecuación de la recta tangente se calcularía:

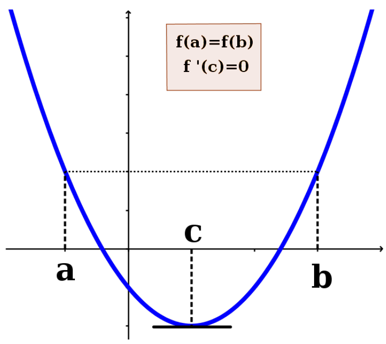
$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

7. **Continuidad y derivabilidad:** Si una función $f(x)$ es derivable en $x = a$, entonces $f(x)$ es continua en $x = a$.
Por el contrario una función puede ser continua en un punto y no ser derivable. Digamos que ser derivable es "pedirle" algo más a la función que ser continua.

8. **Regla de la cadena:** La regla de la cadena es una fórmula para derivar funciones compuestas. Si tenemos dos funciones **g** y **f** tenemos que:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

9. **Teorema de Rolle:** Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.



10. **Teorema del valor medio del cálculo diferencial o de Lagrange:** Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Puedes verlo gráficamente en la figura 1

11. **Monotonía:** Estudiar la monotonía de una función es estudiar en qué intervalos la función es creciente y en cuales es decreciente.

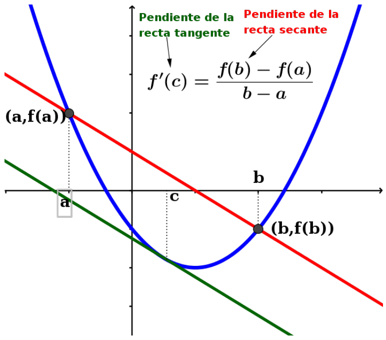


Figura 1: Vista gráfica del teorema del valor medio

a) *Función creciente:* Una función f es creciente en un intervalo (a, b) si para cualquier par de números x_1, x_2 del intervalo (a, b), $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
Si f es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) > 0$ en todo el intervalo, entonces la función es creciente en $[a, b]$.

b) *Función decreciente:* Una función f es decreciente en un intervalo (a, b) si para cualquier par de números x_1, x_2 del intervalo (a, b), $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$.
Si f es una función continua en $[a, b]$, derivable en (a, b) y $f'(x) < 0$ en todo el intervalo, entonces la función es decreciente en $[a, b]$.

12. **Máximos y mínimos relativos:**

a) *Máximo relativo:* Una función f tiene un máximo relativo en $x = c$ si existe un intervalo abierto (a, b) tal que $c \in (a, b)$ y $f(c) > f(x)$ para todo $x \in (a, b); x \neq c$.
Si f es derivable en $x = c$, $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$ habrá un máximo relativo en $x = c$.

b) *Mínimo relativo:* Una función f tiene un mínimo relativo en $x = c$ si existe un intervalo abierto (a, b) tal que $c \in (a, b)$ y $f(c) < f(x)$ para todo $x \in (a, b); x \neq c$.
Si f es derivable en $x = c$, $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$ habrá un mínimo relativo en $x = c$.

13. **Puntos de inflexión:** Un punto de inflexión es un punto en el que la gráfica cambia de tipo de curvatura.
Si f es derivable hasta la tercera derivada y en un punto x se cumplen que $f''(x) = 0$ y $f'''(x) \neq 0$, entonces la función tiene un punto de inflexión en x.

14. **Regla de L'Hôpital:** Sean f y g dos funciones derivables en un entorno de a.
Si el $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ y el $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$, y existe el $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, entonces:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

También es aplicable, como se menciona antes, a la indeterminación del tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$. Con ciertas modificaciones pueden resolverse el resto de los tipos de indeterminación.

15. **Función primitiva:** Una primitiva de una función $f(x)$ es otra función $F(x)$ tal que $F'(x) = f(x)$.

16. **Integral indefinida:** La integral indefinida de una función $f(x)$ es el conjunto $F(x) + K$ de todas sus primitivas. Se representa por:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + K \qquad \text{tal que } F'(x) = f(x) \text{ y } K \in \mathbb{R}$$

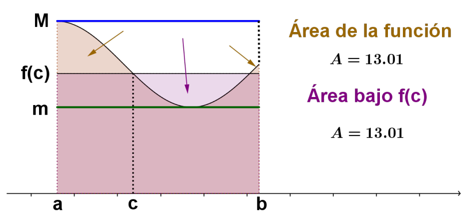
17. **Integración por partes:** El método de integración por partes se basa en la derivada de un producto y se utiliza para resolver algunas integrales de productos. Hay que descomponer la integral en dos partes, a una la llamaremos **u** y a la otra **dv**. Aplicaremos la siguiente fórmula:

$$\int u\,dv = u \cdot v - \int v\,du$$

18. **Teorema del valor medio del cálculo integral:** Si f es una función continua en $[a,b]$, entonces existe un $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Puedes verlo gráficamente en la figura



19. **Regla de Barrow:** Si f es una función continua en $[a,b]$ y G es una primitiva suya, entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$$

20. **Definición de matriz:** Una matriz es una tabla de números distribuidos en filas y columnas. Se representa por:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se dice que es de dimensión $m \times n$, es decir, que tiene m filas y n columnas.

21. **Matriz traspuesta:** Dada una matriz de dimensión $m \times n$ se llama matriz traspuesta a la matriz de orden $n \times m$ que se obtiene al intercambiar las filas por las columnas.

22. **Producto de matrices:** Dadas dos matrices A y B, tales que el número de columnas de la matriz A es igual al número de filas de la matriz B, es decir,

$$A \in M_{m\times n} \text{ y } B \in M_{n\times p}$$

se puede realizar el producto $A \cdot B$, resultando una matriz C que tiene el mismo número de filas que A y el mismo número de columnas que B, es decir, $C \in M_{m\times p}$.
Cada elemento de esta matriz C se obtiene multiplicando cada fila de A por todas y cada una de las columnas de B.

23. **Matriz inversa:** Una matriz cuadrada de orden n se dice que es regular o invertible, si existe otra matriz cuadrada del mismo orden, a la que denominamos A^{-1}, de tal forma que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

siendo I la matriz unidad de orden n, esto es,

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Para que una matriz tenga inversa tiene que cumplir que $|A| \neq 0$. En este caso la matriz inversa se calcula de la siguiente forma:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t$$

donde Adj(A) es la matriz adjunta de A, cuyo elemento ij-ésimo es el menor de orden n-1 obtenido quitando a la matriz A la fila y la columna en las que está dicho elemento.

24. **Propiedades de los determinantes:**

a) *Línea nula:* Si una línea es nula el valor del determinante es cero.

b) *Línea igual o proporcional:* Si tenemos dos líneas iguales o proporcionales el determinante vale cero.

c) *Línea combinación lineal de las demás:* Si hay una línea que es combinación lineal de las demás el determinante vale cero.

d) *Cambiar dos líneas paralelas:* Si intercambiamos dos líneas paralelas, su determinante cambia de signo.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \Longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -27$$

e) *Cambiar una línea por una combinación lineal:* Si en una matriz se cambia una línea por una combinación lineal de ella (sin multiplicarla ni dividirla por ningún número) con las restantes, su determinante no varía. Esto nos permite hacer ceros aplicando Gauss siempre que no multipliquemos por nada la línea que vamos a cambiar.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} \overset{F_2=F_2-2F_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

f) *Determinante de la matriz traspuesta:* El determinante de una matriz y su traspuesta coinciden.

$$|A| = |A^t|$$

g) *Determinante de la matriz inversa:* El determinante de la matriz inversa es igual al inverso del determinante de la matriz.

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

h) *Multiplicación por un número:* Si multiplicamos una línea de una matriz por un número, el valor del determinante de dicha matriz queda multiplicado por dicho número.

$$\begin{vmatrix} 1 & 10 & 3 \\ 4 & 25 & 6 \\ 7 & 40 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

El primer determinante se diferencia del segundo en que hemos multiplicado la segunda columna por 5. En la práctica lo que podemos hacer es lo que vemos en el ejemplo anterior, es decir, sacar factor común un número que esté multiplicando a línea.

i) *Determinante del producto de dos matrices:* El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes.

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$$

25. **Rango de una matriz:** El rango de una matriz es el número máximo de columnas (filas respectivamente) que son linealmente independientes. El rango de una matriz es el máximo orden de sus menores no nulos.

26. **Sistemas de Cramer:** Un sistema decimos que es de Cramer si tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de lo coeficientes es distinto de cero. En un sistema de Cramer, cada incógnita es el cociente de dos determinantes:

    a) El determinante del denominador es el determinante de la matriz de los coeficientes.

    b) El determinante del numerador es el que resulta de sustituir, en el determinante de los coeficientes, la columna correspondiente a los coeficientes de la incógnita que se despeja, por lo términos independientes.
    $$x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$$
    Donde $x_1, x_2, \cdots, x_n$ son las incógnitas del sistema.

27. **Teorema de Rouché-Fröbenius:** Un sistema de ecuaciones lineales es compatible si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes (C) es igual al rango de la ampliada (A):

$$\text{Un sistema es compatible } \Longleftrightarrow Rg(C) = Rg(A)$$

Consecuencias del teorema: Sea $A \cdot X = B$ un sistema de ecuaciones y n el número de incógnitas. Entonces ocurre:

    a) Si $Rg\,C = Rg\,A = n \Longrightarrow$ El sistema es compatible determinado.

    b) Si $Rg\,C = Rg\,A < n \Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

    c) Si $Rg\,C < Rg\,A \Longrightarrow$ El sistema es incompatible.

28. **Definición de vector:** Un vector fijo es una segmento orientado. Se representa por $\overrightarrow{AB}$. El punto A es el origen y el punto B el extremo. Las características de un vector son:

    a) *Módulo:* Es su longitud. Se representa por $|\overrightarrow{AB}|$.

    b) *Dirección* Es la dirección de la recta que lo contiene.

    c) *Sentido* El que va del origen al extremo.

Un vector libre es, pues, el conjunto de los vectores del espacio que tienen mismo módulo, misma dirección y mismo sentido. Y cada vector fijo que pertenezca al vector libre lo llamaremos representante de ese vector libre.

29. **Combinación lineal:** Un vector $\vec{v}$ es *combinación lineal* de un conjunto de vectores $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \cdots, \vec{u_n}$ si podemos encontrar números reales $x_1, x_2, \cdots, x_n$ de tal forma que:

$$\vec{v} = x_1 \cdot \vec{u_1} + x_2 \cdot \vec{u_2} + \cdots + x_n \cdot \vec{u_n}$$

30. **Operaciones con vectores:**

    a) *Suma de vectores:* Para sumar o restar vectores analíticamente se suman o se restan sus coordenadas.
    Geométricamente se haría como se ve en la gráfica 2.

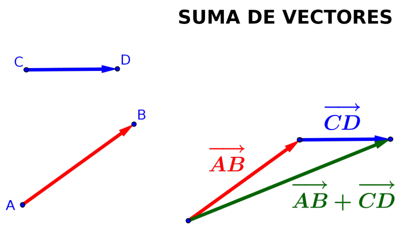
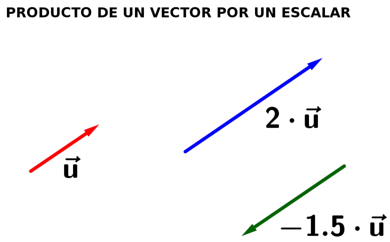


Figura 2: Suma y resta de vectores

    b) *Producto de vectores por un escalar:* Para multiplicar analíticamente un número por un vector, se multiplica el número por las coordenadas del vector..
    Geométricamente el resultado es un vector que tendría la misma dirección que el vector, el módulo queda multiplicado por el número y el sentido será el mismo si el número es positivo y el contrario si es negativo.



31. **Propiedades de las operaciones con vectores:**

    a) *Suma:*
    - Asociativa: $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w})$
    - Elemento neutro: $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$
    - Elemento opuesto: $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$
    - Conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

    b) *Producto por escalares:*
    - Asociativa: $k \cdot (k' \cdot \vec{u}) = (k \cdot k') \cdot \vec{u}$
    - Distributiva respecto a la suma de vectores: $k \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = k \cdot \vec{u} + k \cdot \vec{v}$
    - Distributiva respecto a los escalares: $(k + k') \cdot \vec{u} = k \cdot \vec{u} + k' \cdot \vec{u}$
    - Elemento unidad: $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

32. **Dependencia e independencia lineal de vectores:** Dado un conjunto de vectores $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n}$, se dice que estos vectores son *linealmente dependientes* si existen números $a_1, a_2, \cdots, a_n$, no todos iguales a cero, tal que:

$$a_1 \cdot \vec{v}_1 + a_2 \cdot \vec{v}_2 + \cdots + a_n \cdot \vec{v}_n = \vec{0}$$

Si la única forma de conseguir eso es que todos sean nulos decimos que los vectores son *linealmente independientes.*
Más concretamente, un conjunto de vectores es *linealmente dependiente* si uno de ellos puede ponerse como combinación lineal de los demás. Si ninguno puede ponerse como combinación de los demás el conjunto se dice que es *linealmente independiente.*

33. **Producto escalar. Propiedades.** El producto escalar de dos vectores no nulos, es el número que se obtiene al realizar el siguiente producto:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot cos\alpha$$

donde α es el ángulo que forman los dos vectores.
Si alguno de los vectores es el vector nulo el producto escalar es cero.
Si tenemos las coordenadas de los vectores, es decir, si $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ el producto escalar queda:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$$

El producto escalar tiene las siguientes propiedades:

a) El producto escalar de un vector por si mismo es un número real positivo: $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 > 0$
Si $\vec{u} = \vec{0}$ el producto escalar será cero.

b) Conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

c) Asociativa: $k \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k \cdot \vec{v})$

d) Distributiva: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

34. **Producto vectorial. Propiedades:** El producto vectorial de dos vectores linealmente independientes es un vector que se representa por $\vec{u}$ x $\vec{v}$ que tiene las siguientes características:

a) *Módulo:* Se obtiene con el siguiente producto:

$$|\vec{u} \text{ x } \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot sen\alpha$$

donde α es el ángulo que forman los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

b) *Dirección:* La ortogonal a los dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) *Sentido:* El de avance de un tornillo que rota de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

Si los vectores son linealmente dependientes el producto vectorial es el $\vec{0}$.
Analíticamente, si tenemos que $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$, el producto vectorial se calcula usando la siguiente fórmula:

$$\vec{u} \text{ x } \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$$

El producto vectorial tiene las siguientes propiedades:

a) Anticonmutativa: $\vec{u} \text{ x } \vec{v} = -\vec{v} \text{ x } \vec{u}$

b) Asociativa: $k \cdot (\vec{u} \text{ x } \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \text{ x } \vec{v} = \vec{u} \text{ x } (k \cdot \vec{v})$

c) Distributiva: $\vec{u} \text{ x } (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \text{ x } \vec{v} + \vec{u} \text{ x } \vec{w}$

d) *Interpretación geométrica:* El módulo del producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el área del paralelogramo definido por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$A = |\vec{u} \text{ x } \vec{v}|$$

Análogamente, el área de un triángulo determinado por tres puntos A, B y C se calcula usando la fórmula:

$$A = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \text{ x } \overrightarrow{AC} \right|$$

35. **Producto mixto:** El producto mixto de tres vectores es el número que se obtiene al realizar las siguientes operaciones:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \cdot (\vec{v} \text{ x } \vec{w})$$

Analíticamente, si tenemos que $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ y $\vec{w} = (x_3, y_3, z_3)$, el producto mixto se calcula usando la siguiente fórmula:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Interpretación geométrica: El volumen de un paralelepípedo determinado por tres vectores, $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$, es el valor absoluto del producto mixto de esos tres vectores.

$$V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$$

Análogamente, el volumen de un tetraedro determinado por cuatros puntos A, B, C y D se calcula usando la fórmula:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \left| \left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} \right] \right|$$

36. **Ecuaciones de la recta:** Una recta queda determinada por un punto y un vector director. cualquier otra forma puede reducirse a esta. Sea $A(a_1, a_2, a_3)$ dicho punto y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ el vector. Las distintas ecuaciones de la recta son:

a) *Ecuación vectorial:* $\vec{x} = \vec{a} + t \cdot \vec{v}$ donde $t \in \mathbb{R}$. En coordenadas tendríamos, $(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + t(v_1, v_2, v_3)$

b) *Ecuaciones paramétricas:* Igualando coordenada a coordenada obtendríamos la dicha ecuación:

$$r : \begin{cases} x = a_1 + t \cdot v_1 \\ y = a_2 + t \cdot v_2 \\ z = a_3 + t \cdot v_3 \end{cases} ;\ t \in \mathbb{R}$$

c) *Ecuación continua:* El parámetro t tiene que valer lo mismo en todas las ecuaciones, luego despejando en cada una e igualando todo obtenemos esta ecuación. Si una coordenada del vector es cero se 'permite' poner cero en el denominador.

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} = \frac{z - a_3}{v_3}$$

d) *Ecuaciones implícitas:* De la anterior doble igualdad sacamos, igualando dos a dos, dos ecuaciones. Otra forma de expresar las ecuaciones implícitas es poner la recta como corte de dos planos, es decir,

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$$

37. **Ecuaciones del plano:** Un plano queda determinado por un punto y dos vectores o un punto y su vector normal. Cualquier otra forma puede reducirse a esta. Sea $A(a_1, a_2, a_3)$ dicho punto y $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ los vectores citados.

   a) *Ecuación vectorial:* $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v}$, donde $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. En coordenadas tendríamos,

   $$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + \mu(v_1, v_2, v_3)$$

   b) *Ecuaciones paramétricas:* Igualando coordenada a coordenada obtendríamos la dicha ecuación:

   $$\pi : \begin{cases} x = a_1 + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1 \\ y = a_2 + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2 \\ z = a_3 + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3 \end{cases} ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

   c) *Ecuación general o implícita:* Tiene la siguiente forma $Ax + By + Cz + D = 0$. Para obtenerla, se desarrolla el determinante:

   $$\begin{vmatrix} x - a_1 & y - a_2 & z - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$$

   d) *Ecuación si conozco el vector normal:* El vector normal, $\vec{n}(A, B, C)$, es ortogonal a cualquier vector $\overrightarrow{AX}$ donde A y X son puntos del plano, por tanto la ecuación saldrá de

   $$A(x - a_1) + B(y - a_2) + C(z - a_3) = 0$$

   Es obvio observar que las coordenadas del vector normal coincidirán con los coeficientes de x, y y z respectivamente.

38. **Posiciones relativas entre rectas y planos:**

   a) *Posición relativa entre dos rectas:* Si la recta r viene determinada por $A(a_1, a_2, a_3)$ y por $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ y la recta s por $B(b_1, b_2, b_3)$ y por $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, para estudiar la posición relativa de las dos rectas seguiremos los siguientes pasos:

      - Si el vector $\vec{u}$ y el vector $\vec{v}$ son proporcionales entonces las rectas son paralelas o coincidentes. Para distinguir esto último utilizamos el vector $\overrightarrow{AB}$. Si este también es proporcional a los anteriores entonces serán coincidentes. Si no lo es serán paralelas.
      - Si los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son proporcionales entonces las rectas se cortan o se cruzan. En el primer caso los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{AB}$ son linealmente dependientes (están en el mismo plano) y en el segundo, dichos vectores serán linealmente independientes. En la práctica calcularemos el determinante:

      $$M = \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

      Si sale cero las rectas se cortan, pero si sale distinto de cero las rectas se cruzan.

   b) *Posición relativa entre una recta y un plano:* Si la recta viene determinada por $A(a_1, a_2, a_3)$

y por $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$ y el plano tiene ecuación general $\pi \equiv Ax + By + Cz = D$, es decir, el vector normal es $\vec{n}(A, B, C)$ se tiene que

- Si $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0 \Longrightarrow \vec{v} \perp \vec{n}$ se pueden dar dos casos:
  - Si $A \in \pi \Longrightarrow$ la recta está contenida en el plano.
  - Si $A \notin \pi \Longrightarrow$ la recta es paralela al plano.
- Si $\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0 \Longrightarrow$ la recta corta al plano en un punto.

c) *Posición relativa de dos planos:* Dados los planos $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ y $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$ pueden darse tres casos.

- Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} = \dfrac{D}{D'} \Longrightarrow$ los planos son coincidentes.
- Si $\dfrac{A}{A'} = \dfrac{B}{B'} = \dfrac{C}{C'} \neq \dfrac{D}{D'} \Longrightarrow$ los planos son paralelos.
- Si $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{B}{B'}$ o bien $\dfrac{A}{A'} \neq \dfrac{C}{C'} \Longrightarrow$ los planos se cortan en una recta.

d) *Posición relativa de tres planos:* Consideremos los planos $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0$, $\pi' \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0$ y $\pi'' \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0$. Para estudiar la posición relativa de estos tres planos vamos a considerar el sistema que forman dichos planos. Tendremos en cuenta también lo visto en el apartado anterior.

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} Ax & + & By & + & Cz & + & D & = & 0 \\ A'x & + & B'y & + & C'z & + & D' & = & 0 \\ A''x & + & B''y & + & C''z & + & D'' & = & 0 \end{array}\right\}$$

Se nos pueden producir los siguientes casos:

- $RgC = RgA = 1 \Longrightarrow$ El sistema será compatible indeterminado y necesitaremos 2 parámetros, por lo que el conjunto de soluciones será un plano (uno cualquiera de ellos). Este caso es fácil distinguirlo, pues las ecuaciones de lo tres planos serán proporcionales.
- $RgC = 1 \neq 2 = RgA \Longrightarrow$ El sistema será incompatible y pueden producirse dos casos que distinguiremos mirando las ecuaciones de los planos y comparándolas dos a dos (aplicamos lo visto en el apartado anterior)
  - Tres planos paralelos.
  - Dos coincidentes y uno paralelo a ellos.
- $RgC = 2 = RgA \Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado y necesitará un parámetro. Por tanto los planos se cortan en una recta. Una vez más pueden producirse dos casos, que distinguiremos mirando las ecuaciones de los planos:
  - Dos coincidentes y uno que los corta.
  - Los tres planos son distintos y se cortan en una recta.
- $RgC = 2 \neq 3 = RgA \Longrightarrow$ El sistema será incompatible y distinguiremos de nuevo dos casos, que una vez más aclararemos mirando las ecuaciones de los planos.
  - Los tres planos se cortan dos a dos formando una superficie prismática.
  - Dos planos son paralelos y uno los corta.
- $RgC = 3 = RgA \Longrightarrow$ Sistema compatible determinado y por lo tanto los tres planos se cortan en un punto.

39. **Distancias:** En este apartado vamos a ver las fórmulas que nos permiten calcular las distancias entre los distintos elementos del espacio. Vamos a considerar los puntos $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$ y $P(p_1, p_2, p_3)$. Así mismo serán $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores directores de rectas. Tendremos

a) *Distancia entre dos puntos:* La distancia entre dos puntos es el módulo del vector que une los dos puntos:

$$d(A,B) = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}} = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$$

b) *Distancia de un punto a una recta:* Si el punto es P y la recta viene determinada por el punto A y el vector $\vec{v}$, la fórmula que nos permite calcular la distancia es

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP}\, x\, \vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$$

c) *Distancia entre dos rectas:* La distancia entre dos rectas es la menor distancia entre ellas. Por tanto, si las rectas se cortan o son coincidentes la distancia es cero. Si son paralelas será la distancia de un punto cualquiera de una de ellas a la otra. Si las rectas se cruzan la distancia la calcularemos con la siguiente fórmula:

$$d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\, x\, \vec{v}|}$$

d) *Distancia de un punto a un plano:* Si tenemos el punto $P(p_1,p_2,p_3)$ y el plano $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ la distancia viene dada por:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ap_1+Bp_2+Cp_3+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

e) *Distancia de una recta a un plano:* Si la recta está contenida en el plano o lo corta la distancia será cero. Si la recta es paralela al plano la distancia será la de cualquier punto de la recta al plano.

f) *Distancia entre dos planos:* Si los planos se cortan o son coincidentes la distancia será cero. Si los planos son paralelos la distancia será la de cualquier punto de uno de los planos al otro.

40. **Ángulos:** Para el caso de las rectas y los planos vamos a utilizar los vectores directores de las rectas ($\vec{u}$, $\vec{v}$) y los vectores normales de los planos ($\vec{n}$, $\vec{n'}$). Comencemos por el cálculo del ángulo que forman dos vectores.

a) *Ángulo formado por dos vectores:* Para calcular el ángulo que forman dos vectores usamos la expresión del producto escalar

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha \Longrightarrow \cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \Longrightarrow \alpha = \arccos\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

b) *Ángulo formado por dos rectas:* Si las rectas son paralelas o coincidentes el ángulo formado es cero. Si se cortan o se cruzan el ángulo se calcula con la siguiente fórmula:

$$cos\,\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \Longrightarrow \alpha = \arccos\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$$

c) *Ángulo formado por una recta y un plano:* Si la recta está contenida en el plano o es paralela a él, el ángulo será cero. Si la recta corta al plano el ángulo formado se calcula usando la siguiente fórmula:

$$sen\,\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} \Longrightarrow \alpha = \operatorname{arc\,sen}\frac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|}$$

d) *Ángulo formado por dos planos:* Si los planos son coincidentes o paralelos el ángulo será cero. Si los planos se cortan el ángulo se calcula usando la siguiente fórmula:

$$cos\,\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{n'}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n'}|} \Longrightarrow \alpha = \arccos\frac{|\vec{n}\cdot\vec{n'}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{n'}|}$$

41. **Paralelismo y perpendicularidad:**

a) *Paralelismo:*

- *Entre rectas:* Dos rectas son paralelas si sus vectores directores son proporcionales.
- *Recta y plano:* Una recta es paralela a un plano si su vector director es ortogonal al vector normal del plano.
- *Entre planos:* Dos planos son paralelos si sus vectores normales son proporcionales.

b) *Perpendicularidad:*

- *Entre rectas:* Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son ortogonales.
- *Entre recta y plano:* Una recta es perpendicular a un plano si el vector director de la recta es proporcional al vector normal del plano.
- *Entre planos:* Dos planos son perpendiculares si sus vectores normales son ortogonales.

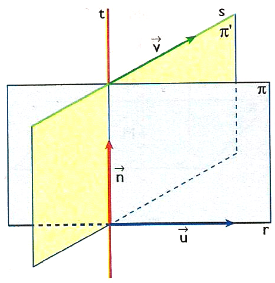
42. **Recta que corta perpendicularmente a otras dos:** Para calcular dicha recta vamos a seguir los siguientes pasos:

a) Se hallan los vectores directores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ de las rectas **r** y **s**.

b) Un vector director de la recta que estamos buscando sería el producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$: $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v}$.

c) Vamos a expresar la ecuación de la recta en forma general, es decir, como corte de dos planos:

- El plano π que contiene a la recta **r** y al vector $\vec{n}$.
- El plano π' que contiene a la recta **s** y al vector $\vec{n}$.



43. **Regla de Laplace:** La probabilidad de un suceso A, de un espacio muestral E, formado por sucesos elementales *equiprobables*, es igual al número de casos favorables dividido por el número de casos posibles.

$$P(A) = \frac{\text{N}^{\text{o}} \text{ de casos favorables al suceso A}}{\text{N}^{\text{o}} \text{ de casos posibles}}$$

44. **Probabilidad condicionada:** La **probabilidad del suceso** B **condicionada por el suceso** A es la probabilidad de que se realice B sabiendo que ha ocurrido A.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Las probabilidades condicionadas, en los diagramas de árboles, son las probabilidades de las segundas ramas y sucesivas.

45. **Sucesos dependientes e independientes:** Los sucesos A y B son **independientes** si la probabilidad de uno de ellos no depende de que se haya verificado el otro. En otro caso se llaman **dependientes**.

46. **Regla del producto o de la probabilidad compuesta:** Dicha regla dice que si $A_1, A_2, A_3, \cdots A_n$ son sucesos dependientes, entonces:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n) =$$

$$= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cap A_2) \cdots P(A_n/A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1})$$

En la práctica, dice que la probabilidad de un camino es igual al producto de las probabilidades de las ramas que forman dicho camino.

47. **Regla de la suma o de la probabilidad total:** En la práctica dice que si un suceso está formado por varios caminos, la probabilidad de dicho suceso es igual a la suma de las probabilidades de los caminos que lo forman.

48. **Teorema de Bayes:** El teorema de Bayes dice que si $A_1, A_2, \cdots A_n$ es un sistema completo de sucesos y S es un suceso cualquiera para el que se conocen las $P(S/A_i)$, entonces:

$$P(A_i/S) = \frac{P(A_i \cap S)}{P(S)}$$

En la práctica se tienen que dividir la probabilidad del camino que contiene a A_i y a S entre la probabilidad de que ocurra S, que no es otra que la suma de todos los caminos que contiene a S.

49. **Distribución de probabilidad de una variable discreta:** La función de probabilidad de una variable discreta es una distribución teórica que asocia a cada valor, x_i, de la variable aleatoria su probabilidad, p_i. Se representa por $f(x_i) = P(x_i) = p_i$

50. **Parámetros de una variable discreta:** Podemos dar como calcular tres parámetros:

   - Media: $\mu = \sum_{i=1}^{n} p_i\, x_i$
   - Varianza: $V = \sum_{i=1}^{n} f_i\, x_i^2 - \mu^2$
   - Desviación típica: $\sigma = \sqrt{V}$

51. **Distribución binomial. Características:** Una **distribución binomial** de n pruebas o ensayos es una distribución discreta que se representa por $B(n, p)$ y tiene las siguientes características:

   a) El suceso de cada prueba solo tiene dos posibilidades: El suceso A, que se llama éxito y su contrario que se llama fracaso.

b) La probabilidad de éxito se representa por $P(A) = p$ y la probabilidad de fracaso por $P(\overline{A}) = q$, donde $q = 1 - p$. Dichas probabilidades son constantes durante cada prueba del experimento.

c) El resultado de cada prueba es independiente de los resultados obtenidos en las pruebas anteriores.

52. **Cálculo de la probabilidad en una distribución binomial:** Si tenemos una distribución binomial $B(n,p)$ cuya variable es x, la probabilidad de obtener k éxitos es:

$$P(x = k) = \left(\begin{array}{c} n \\ p \end{array} \right) p^k \, q^{n-k}$$

53. **Parámetros de una distribución binomial:** En este caso concreto los parámetros podemos calcularlos con las siguientes fórmulas:

- Media o esperanza matemática: $\mu = n\,p$
- Varianza: $V = n\,p\,q$
- Desviación típica: $\sigma = \sqrt{V}$

54. **Distribución de probabilidad de una variable continua:** Una función de probabilidad de una variable continua es una distribución teórica que está caracterizada por dos funciones: la función de densidad y la función de distribución.

a) **Función de densidad:** Es una función que tiene las siguientes características:

i) $f(x) \geqslant 0$ para todo valor x de la variable.

ii) El área comprendida entre el eje X y la función $f(x)$ en su dominio es 1.

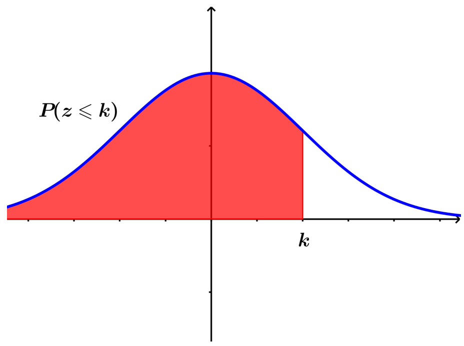
b) **Función de distribución:** Es la función que mide la probabilidad de que la variable tome valores menores o iguales que un cierto valor de x:

$$F(x) = P(x_i \leqslant x)$$

55. **Distribución** $N(0,1)$**:** Una **distribución normal estándar** es la que tiene $\mu = 0$, y desviación típica $\sigma = 1$. La variable se representa por la letra z y su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

56. **Cálculo de la probabilidad en una distribución normal estándar. Caso general:** Dicho caso es aquel en el que se cumple $k > 0$, $P(z \leqslant k) = P(z < k)$



Estas probabilidades se calculan utilizando una tabla. Los demás casos pueden reducirse a aplicaciones de este.

57. **Distribución** $N(\mu, \sigma)$**. Tipificación de la variable:** Si la distribución normal no es estándar, puede tipificarse, es decir, transformar en una distribución $N(0, 1)$. Para ello se aplica el cambio de variable:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

JUNIO 2000

Opción A

1. Calcular, integrando por partes, el valor de

$$\int_1^2 x^2 lnx dx$$

Solución

2. La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es M. Hallar un sistema equivalente tal que todos los elementos de la diagonal principal de la nueva matriz asociada sean nulos:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

3. Calcular la distancia del punto de coordenadas $(1,1,2)$ al plano que pasa por los puntos de coordenadas $(1,1,0)$; $(1,0,1)$ y $(0,1,1)$.

Solución

4. Determinar el dominio de definición de la función $f(x) = x - ln\left(x^2 - 1\right)$ y representar su gráfica, calculando los intervalos de crecimiento y los extremos (máximos y mínimos relativos).

Solución

JUNIO 2000

Opción B

1. Definir el concepto de derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = a$, y explicar su relación con los máximos relativos de la función.

Solución

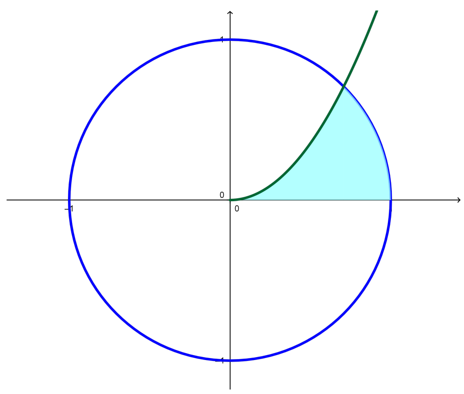
2. Calcular la distancia del punto de coordenadas $(3, 5, 0)$ a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(0, 1, 2)$ y $(0, 1, 1)$.

Solución

3. Dar un ejemplo de un sistema de 2 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea incompatible.

Solución

4. Calcular el área limitada por la parábola $y = \sqrt{2}x^2$, la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ y el eje OX, que aparece rayada en la figura .



Solución

SEPTIEMBRE 2000

Opción A

1. Definir la suma y el producto de matrices. Dar un ejemplo de dos matrices que no pueden sumarse ni multiplicarse.

Solución

2. Representar gráficamente la función

$$f(x) = 2x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{5}{27}$$

¿Cuántas raíces reales positivas tiene este polinomio?

Solución

3. Determinar una función $f(x)$ cuya segunda derivada sea $f''(x) = xe^x$.

Solución

4. Hallar la ecuación de una circunferencia que, siendo tangente a la recta $y = \sqrt{3}\, x$, sea tangente al eje de abcisas en el punto $(3, 0)$. (Indicación: $tg 60^o = \sqrt{3}$, $tg 30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$)

Solución

SEPTIEMBRE 2000

Opción B

1. Calcular la derivada en el punto $x = 1$ de la función $f(x) = x^{-1/2} lnx$.

Solución

2. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el parámetro a:

$$\begin{array}{rcrcrcr} (a-3)x & & & + & 4z & = & 2 \\ x & & & - & 2z & = & -1 \\ -x & + & ay & + & 2z & = & a \end{array}$$

Solución

3. Calcular, con el cambio de variable $t^2 = x + 3$, el valor de:

$$\int_1^6 \frac{xdx}{\sqrt{x+3}}$$

Solución

4. Determinar una recta que sea paralela al plano de ecuación $x + y + z = 3$, que corte a la recta de ecuaciones $x = 0$, $z = 0$, y que también corte a la recta de ecuaciones $z = 1$, $y = 0$.

Solución

JUNIO 2001

Opción A

1. Definir el producto escalar de vectores y enunciar su relación con los conceptos de ángulo y distancia entre dos puntos.

Solución

2. Representa la gráfica del polinomio

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 0'2$$

¿Cuántas raíces reales negativas tiene este polinomio? ¿y cuántas positivas?

Solución

3. Calcular alguna recta que sea paralela al plano de ecuación $x - 2y + z = 1$ y que también sea paralela al plano que pasa por los puntos de coordenadas $(2, 0, 1), (0, 2, 1)$ y $(1, -1, 0)$.

Solución

4. Determinar una constante positiva a sabiendo que la figura plana limitada por la parábola $y = 3ax^2 + 2x$, la recta $y = 0$ y la recta $x = a$ tiene área $(a^2 - 1)^2$.

Solución

JUNIO 2001

Opción B

1. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el valor del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} ax & - & ay & + & az & = a \\ & & & & (3-2a)z & = 1 \\ x & + & (a-1)y & & & = 0 \end{array}\right\}$$

Solución

2. Calcular el valor de:

$$\int_0^1 \frac{xdx}{e^{x^2}}$$

(puede hacerse con el cambio de variable $t = -x^2$ y con el cambio de variable $t = x^2$).

Solución

3. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + \pi$ y $g(x) = senx + cosx$, calcula la derivada en $x = 0$ de las funciones $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

Solución

4. Calcular un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores de coordenadas $(1, 0, 2)$ y $(2, 1, 0)$.

Solución

SEPTIEMBRE 2001

Opción A

1. Enunciar el teorema de Bolzano. Calcular, con un error menor que una décima, una raíz positiva del polinomio $x^3 + x - 1$

Solución

2. Calcular alguna recta que sea paralela al plano de ecuación $x + z = 2$ y corte perpendicularmente a la recta de ecuaciones $x + y = 0, y + z = 2$.

Solución

3. Determinar todos los números reales x para los que es positivo el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix}$$

Solución

4. Representar gráficamente el recinto plano limitado por la curva $y = x^3 - x$ y su tangente en el punto de abscisa $x = 1$. Calcular su área.

Solución

SEPTIEMBRE 2001

Opción B

1. Definir el concepto de primitiva de una función y explicar su relación con el concepto de integral definida.

Solución

2. Calcular todas las matrices X tales que $AX + B = X$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución

3. Entre todos los rectángulos de área dada ¿cuál es el de perímetro mínimo?

Solución

4. ¿Qué ángulo deben formar dos vectores no nulos $\vec{e}$ y $\vec{v}$ para que ambos tengan el mismo módulo que su diferencia $\vec{e} - \vec{v}$.

Solución

JUNIO 2002

Opción A

1. Definir el concepto de derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ y explicar su relación con el crecimiento de la función.

Solución

2. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el valor del parámetro a:

$$\begin{array}{rrcrr} & a\,y & + & (a+1)\,z & = a \\ a\,x & & + & z & = a \\ x & & + & a\,z & = a \end{array}$$

Solución

3. Representar gráficamente la figura plana limitada por las parábolas $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 4$. Calcular su área.

Solución

4. Hallar dos vectores linealmente independientes que sean ortogonales al vector $\vec{e}$ de coordenadas $(1, 1, 3)$.

Solución

JUNIO 2002

Opción B

1. Representar la gráfica de la función $f(x) = 2x + (2x)^{-1}$, determinando los intervalos donde es creciente.

Solución

2. Calcular la matriz X tal que $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

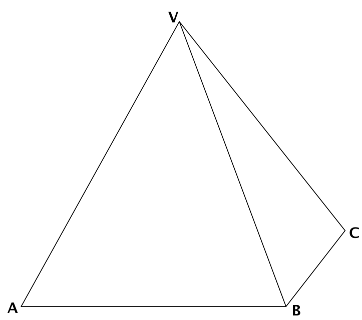
Solución

3. Calcular el valor de la integral

$$\int_0^1 xe^{-x}dx$$

Solución

4. La base de una pirámide es un cuadrado $ABCD$ de 2 metros de largo y su vértice V está situado a una altura de 3 metros sobre el centro de la base. Calcular el ángulo que forman los planos ABV y BCV.



Solución

SEPTIEMBRE 2002

Opción A

1. Representar la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^{-3}$, determinando sus extremos (máximos y mínimos relativos).

Solución

2. Representa gráficamente el recinto plano limitado, en la región donde la coordenada x es positiva, por la recta $x = 1$, la hiperbola $xy = 1$, y la recta $6y - x + 1 = 0$. Calcula su área.

Solución

3. La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es M. Hallar un sistema equivalente tal que los tres coeficientes que están por encima de la diagonal principal de la nueva matriz asociada sean nulos:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Solución

4. Determinar si el plano $3x-2y+z = 1$ es perpendicular a la recta de ecuaciones $-x = 3y + 3z, y + 2z = -1$. Determinar también si es paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(1, -1, 1)$ y $(-1, -1, 0)$.

Solución

SEPTIEMBRE 2002

Opción B

1. Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - cos(2\pi x)}{(x-1)^2}$$

Solución

2. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro a:

$$\begin{array}{rcrcrl} & & ay & + & az & = 0 \\ x & & & + & z & = 0 \\ 4x & - & 2y & + & az & = a \end{array}$$

Solución

3. Calcular el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de coordenadas $(1, 0, 1)$, $(2, 0, 2), (3, 1, 3)$ y $(1, 2, 1)$.

Solución

4. Calcular una primitiva de la función $f(x) = \left(x^2 + 1\right)^{-1} x$ que se anule en $x = 2$.

Solución

JUNIO 2003

Opción A

1. Determinar el valor del parámetro a para que las siguientes ecuaciones lineales sean linealmente dependientes

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & = 1 \\ & & y & + & 2z & = a \end{array}$$

Solución

2. Representar gráficamente el recinto plano limitado por la recta $y = x - 2$ y la parábola de ecuación $y^2 = x$. Calcular su área.

Solución

3. Representar gráficamente la función $f(x) = e^x - ex$, determinando sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos). ¿Existe algún valor de x en que $f(x)$ sea negativo?

Solución

4. Determinar una constante a para que el plano de ecuación $ax + y + z = 2$ forme un ángulo de $\pi/3$ radianes con el plano $z = 0$.

Solución

JUNIO 2003

Opción B

1. Enunciar el teorema de Bolzano y determinar si el polinomio $x^4 - 4x^2 - 1$ tiene alguna raiz real negativa.

Solución

2. Calcular el valor de la siguiente integral, donde ln denota el logaritmo neperiano:

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(lnx)}$$

Solución

3. Determinar una recta tangente a la parábola $y = 2 - x^2$ que sea paralela a la recta de ecuación $2x + y = 4$.

Solución

4. Calcular dos números naturales a, b menores que 10 y tales que la siguiente matriz A tenga rango 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$$

Solución

SEPTIEMBRE 2003

Opción A

1. Dar un ejemplo de una sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea compatible e indeterminado. Interprétalo geométricamente.

Solución

2. Con un alambre de dos metros se desea formar un cuadrado y un círculo. Determinar el lado del cuadrado y el radio del círculo para que la suma de sus áreas sea mínima.

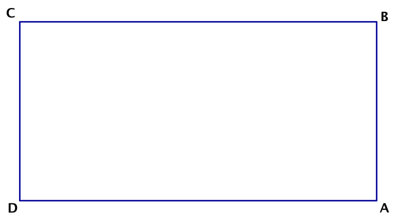
Solución

3. Calcular el valor de la integral (puede hacerse con el cambio de variable $t = e^{-x}$):

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$$

Solución

4. Sabiendo que los lados de un rectángulo $ABCD$ miden 1 y 3 metros, calcular el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{AD}$, y el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{BA}$.



Solución

SEPTIEMBRE 2003

Opción B

1. Definir el producto de matrices. Dar un ejemplo de dos matrices A, B con 2 filas y 2 columnas, tales que $A \cdot B$ no coincida con $B \cdot A$.

Solución

2. Determinar un plano que, pasando por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta de ecuaciones $x + y = 1, y + z = 2$, y también sea paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$.

Solución

3. Representar gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = e^x$, su recta tangente en el punto de abcisa $x = 0$, y la recta $x = 1$. Calcular su área.

Solución

4. Determinar en qué puntos es negativa la derivada de la función $f(x) = e^x x^{-2}$.

Solución

JUNIO 2004

Opción A

1. Definir el concepto de primitiva de una función. ¿Existe alguna primitiva de la función $f(x) = x^{-1}$ que no tome ningún valor positivo en el intervalo $1 \leq x \leq 2$?

Solución

2. Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos de coordenadas $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 1)$; $(1, 2, 0)$. Determinar la distancia del punto $(2, 1, 1)$ a dicho plano.

Solución

3. Determinar el mayor área que puede encerrar un triángulo rectángulo cuyo lado mayor mida 1 metro.

Solución

4. Determinar todas las matrices X tales que $A \cdot X = X \cdot A$, donde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

JUNIO 2004

Opción B

1. ¿Qué relación hay entre los coeficientes de las ecuaciones

$$ax + by + cz = d\ ,\ a'x + b'y + c'z = d'$$

de dos planos paralelos? Razonar la respuesta.

Solución

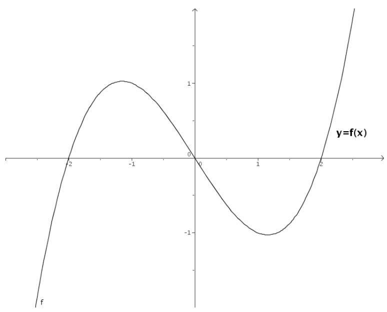
2. Hallar una matriz con tres filas y tres columnas que tenga tres elementos nulos y tal que ninguno de sus menores de orden dos sea nulo.

Solución

3. Representa gráficamente el recinto plano limitado, en la región donde la abcisa x es positiva, por la curva $y = x^3 + x$, y por la recta $y = 2x$. Calcular el área.

Solución

4. Si la gráfica de una función $f(x)$ es:



representar aproximadamente la gráfica de la derivada $f'(x)$.

Solución

SEPTIEMBRE 2004

Opción A

1. Definir el concepto de rango de una matriz. Dar un ejemplo de una matriz con 3 filas y 4 columnas que tenga rango 2.

Solución

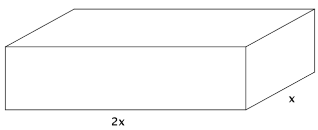
2. Determinar una recta que sea paralela al plano que pasa por los puntos de coordenadas $(1, 1, 0); (1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$, que también sea paralela al plano $x + 2y + 3z = 0$, y que no esté contenida en ninguno de estos dos planos.

Solución

3. Representar gráficamente la figura plana limitada en el primer cuadrante ($x \geq 0, y \geq 0$) por la recta $y = x$ y la curva $x = y^3$. Calcular su área.

Solución

4. Se desea construir un paralelepípedo rectangular de 9 litros de volumen y tal que un lado de la base sea doble que el otro. Determinar las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima.



Solución

SEPTIEMBRE 2004

Opción B

1. Enunciar el teorema de Bolzano y usarlo para probar que la ecuación $x = cosx$ tiene solución positiva.

Solución

2. ¿Puede aumentar el rango de una matriz cuadrada de 3 filas al sustituir un coeficiente no nulo por 0?¿y permanecer igual?. Justificar las respuestas.

Solución

3. Calcular el valor de la siguiente integral:

$$\int_1^2 x\sqrt[3]{x^2-1}dx$$

(puede hacerse con el cambio de variable $x^2 - 1 = t^3$.

Solución

4. Determinar los puntos de la curva plana $y^3 = 2x$ en que la recta tangente es perpendicular a la recta $y + 6x = 0$.

Solución

JUNIO 2005

Opción A

1. Determinar un valor del parámetro a para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible e indeterminado.

$$\begin{array}{llll} x & +y & +z & = a \\ x & -y & +z & = 1 \\ x & -3y & +z & = 0 \end{array}$$

Solución

2. Representar gráficamente el recinto plano limitado por las curvas $y = e^x$, $y = e^{-x}$, y por la recta $x = 1$. Calcular su área.

Solución

3. Hallar la derivada en $x = 0$ de la función $f(f(x))$, donde $f(x) = (1 + x)^{-1}$.

Solución

4. Determinar las coordenadas de un punto que diste 2 unidades de la recta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

Solución

JUNIO 2005

Opción B

1. Dar un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea incompatible. Interprétalo geométricamente.

Solución

2. Calcular el valor de la siguiente integral:

$$\int_1^e \frac{lnx}{x^2}dx$$

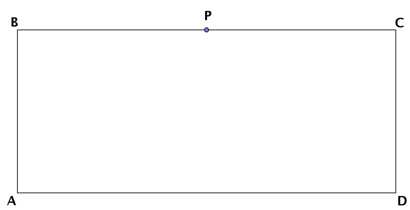
(puede hacerse por partes).

Solución

3. Representar gráficamente la función $f(x) = x - 2senx$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$, determinando sus extremos (máximos y mínimos relativos).

Solución

4. Si los lados de un rectángulo $ABCD$ miden 1 cm y 4 cm, calcular el coseno del ángulo PAC, donde P es el punto medio del lado BC:



Solución

SEPTIEMBRE 2005

Opción A

1. Enunciar el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial. Usarlo para demostrar que para cualesquiera números reales $x < y$ se verifica que $cosy - cosx \leq y - x$.

Solución

2. Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{lll} y & -x & = z \\ x & -z & = y \\ y & +z & = x \end{array}$$

Solución

3. Si A, B y C son los puntos de coordenadas $(1, 0, 0); (0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ respectivamente

   a) Calcular el área del triángulo que forman los puntos A, B y C.

   b) Determinar el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Solución

4. Calcular una primitiva de la función $f(x) = (x + 1)^2 x^{-1/2}$ que se anule en $x = 1$.

Solución

SEPTIEMBRE 2005

Opción B

1. Dar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea compatible e indeterminado. Interpretarlo geométricamente.

Solución

2. Hallar la derivada en el punto $x = 0$ de la función $f(f(x))$, donde $f(x) = senx$.

Solución

3. Hallar un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores de coordenadas $(0, 1, 1)$ y $(2, 1, 0)$.

Solución

4. Representar gráficamente el recinto plano limitado por la recta $x - y = 1$ y por la curva de ecuación $y = \sqrt{x - 1}$. Calcular su área.

Solución

JUNIO 2006

Opción A

1. Calcula
$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{sen^2 x}$$

Solución

2. Representa gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = x^4$, su recta tangente en el punto $(1, 1)$ y el eje OY. Calcular su área.

Solución

3. Determina la relación que debe existir entre a y b para que los puntos de coordenadas $(1, 0, 0), (a, b, 0), (a, 0, b)$ y $(0, a, b)$ estén en un plano.

Solución

4. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A + I$, donde I es la matriz unidad. Demuestra que la matriz A es invertible.

Solución

JUNIO 2006

Opción B

1. Define el concepto de máximo relativo de una función $f(x)$ y enuncia su relación con las derivadas sucesivas de $f(x)$.

Solución

2. Halla una primitiva de la función $f(x) = xe^x$.

Solución

3. Determina el plano que pasa por el punto de coordenadas $(1, 2, 3)$ y por la recta de ecuaciones $x + y = 1, y + z = 1$.

Solución

4. Discute el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & + & (1+b)y & - & bz & = & 2b \\ x & + & by & + & (1+b)z & = & 1 \end{array}\right]$$

según los valores de b.

Solución

SEPTIEMBRE 2006

Opción A

1. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{llll} x & +2y & -z & = 1 \\ x & +y & -z & = 1 \\ x & & -z & = 1 \end{array}$$

Solución

2. Calcula el ángulo que forma el plano $x + y + z = 0$ con la recta de ecuaciones $x + y = 1$, $y + z = 1$.

Solución

3. Dada la función
$$f(x) = \frac{senx + sen(x+1)}{cosx - cos(x+1)}$$
en el intervalo $0 < x < 2\pi$, calcula su derivada, simplificándola en lo posible. ¿Es constante esta función $f(x)$?

Solución

4. Enuncia la regla de Barrow. Representa la gráfica de la función
$$f(x) = \int_1^x t dt$$

Solución

SEPTIEMBRE 2006

Opción B

1. Determina el plano que pase por los puntos de coordenadas $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$, y sea paralelo a la recta
$$\begin{array}{cccc} x & +y & +z & =2 \\ x & -y & +z & =2 \end{array}$$

Solución

2. Escribe un ejemplo de una matriz de rango 2, con 3 filas y 4 columnas, que no tenga ningún coeficiente nulo.

Solución

3. Calcula las asíntotas y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = (1 + x^2)^{-1}x$. A partir de los resultados obtenidos, dibuja la gráfica de la función $f(x)$.

Solución

4. Representa la figura plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = cos x$, en el intervalo $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, y por la recta $y = \frac{1}{2}$. Calcular su área.

Solución

JUNIO 2007

Opción A

1. a) Enuncia la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

   b) Dada la función $h(x) = e^{sen(f(x))}$, calcula el valor de su derivada en $x = 0$, sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

Solución

2. Representa gráficamente el recinto plano limitado por las parábolas $y = 1 - x^2$ e $y = 2x^2$ y calcula su área.

Solución

3. a) Calcula el rango de la matriz A, según los valores del parámetro a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

   b) Escribe las propiedades del rango que hayas usado.

Solución

4. Determina la relación que debe existir entre a y b para que el punto $P = (0, a, b)$ esté en el plano determinado por los puntos $A = (1, 0, 0), B = (1, 1, 1)$ y $C = (0, 2, 1)$.

Solución

JUNIO 2007

Opción B

1. Determina los puntos de la parábola $y = x^2$ que están a mínima distancia del punto $P = (0, 1)$.

Solución

2. Calcula el valor de la integral

$$\int_3^{10} (x-2)^{1/3} dx$$

Solución

3. a) Enuncia el Teorema de Rouché-Frobenius.

   b) Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales, según los valores del parámetro a:

$$\begin{array}{llll} x & +y & +z & = a \\ x & +y & +az & = 1 \\ x & +ay & +z & = 1 \end{array}$$

Solución

4. Escribe un vector de módulo 1 que sea ortogonal al vector de coordenadas $(1, 2, 1)$.

Solución

SEPTIEMBRE 2007

Opción A

1. a) Enuncia el Teorema de Rolle.

   b) Prueba que la función $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ satisface las hipótesis en el intervalo $[-1, 1]$ y calcula un punto del intervalo abierto $(-1, 1)$ cuya existencia asegura el Teorema de Rolle.

Solución

2. Representa gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = 2x^3$, su recta tangente en el origen de coordenadas y la recta $x = 2$. Calcula su área.

Solución

3. Sea A una matriz cuadrada de orden 3.

   a) Si sabemos que el determinante de la matriz $2A$ es $|2A| = 8$. ¿Cuánto vale el determinante de A? Escribe la propiedad de los determinantes que hayas usado para obtener este valor.

   b) Calcula para qué valores de x se cumple que $|2A| = 8$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

4. Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano $x + y + z = 1$ con los ejes coordenados.

Solución

SEPTIEMBRE 2007

Opción B

1. a) Enuncia el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

   b) Calcula el punto al que se refiere dicho teorema para la función $f(x) = 3x^2 + 1$ en el intervalo $[0,3]$

Solución

2. Para la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$:

   a) Comprueba que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en $+\infty$.

   b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

   c) Con los datos anteriores, haz una representación aproximada de la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

Solución

3. Calcula la matriz X tal que $A^2 \cdot X = A$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

4. a) Determina la posición relativa de plano $x - y + z = 2$ y la recta de ecuaciones

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$$

   b) Calcula la distancia entre la recta y el plano anteriores.

Solución

JUNIO 2008

Opción A

1. a) Enuncia la condición que se debe cumplir para que una recta $y = l$ sea asíntota horizontal de una función $f(x)$ en $+\infty$.

   b) Calcula las asíntotas verticales y horizontales (en $+\infty$ y en $-\infty$) de la función

$$f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

Solución

2. Calcula el valor de la siguiente integral (puede hacerse con el cambio de variable $t = ln(x)$)

$$\int_1^e \frac{1}{x\,(1+ln(x))}dx$$

donde ln denota el logaritmo neperiano.

Solución

3. Discute, en función del parámetro a, el sistema de ecuaciones (NO es necesario resolverlo en ningún caso)

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ ax & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & & & + & (a-1)z & = & 2 \end{array}$$

Solución

4. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales de módulo 4 y 3 respectivamente. Calcula el módulo de los vectores $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{u}-\vec{v}$, indicando los resultados teóricos en que te basas para ello.

Solución

JUNIO 2008

Opción B

1. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{(e^x - 1)^2}{e^{x^2} - 1}$$

Solución

2. a) Representa gráficamente el recinto plano limitado por la recta $y+2x-6=0$ y la parábola $y=-x^2+2x+3$.

   b) Calcula su área.

Solución

3. Determina el rango de la matriz A según los valores de b:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & b \\ b & b-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

4. Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no proporcionales del espacio real tridimensional. ¿Qué relación existe entre las direccciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y la dirección de su producto vectorial? ¿Cuánto vale el módulo del producto vectorial de $\vec{a}$ y $\vec{b}$?

Solución

SEPTIEMBRE 2008

Opción A

1. a) Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{ln\left(x^2+1\right)}{x}$$

   b) Indica, razonadamente, el valor que debe tomar a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} a & si \quad x = 0 \\ \dfrac{ln\left(x^2+1\right)}{x} & si \quad x \neq 0 \end{cases}$$

   Nota: ln denota el logaritmo neperiano.

Solución

2. Calcula la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$ (es decir, $f(0) = 1$) y que tiene como derivada la función $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Solución

3. a) Define el concepto de rango de una matriz.

   b) Determina razonadamente si la tercera fila de la matriz A es combinación lineal de las dos primeras

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución

4. a) Determina la recta que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular al plano $x+y=1$.

   b) Calcula el punto donde la recta obtenida corta al plano dado $x+y=1$.

Solución

SEPTIEMBRE 2008

Opción B

1. Halla los puntos de la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + 1$ donde la recta tangente es paralela a la recta $y + x - 2 = 0$.

Solución

2. a) Define el concepto de primitiva de una función.

   b) Di, razonando la respuesta, si las funciones $F_1(x) = sen^2 x$ y $F_2(x) = -cos^2 x$ son primitivas de una misma función.

Solución

3. Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales, según el valor del parámetro a:

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & ay & = & 0 \\ x & + & z & = & a \\ -2y & + & az & = & a \end{array}$$

   No es necesario resolver el sistema en ningún caso.

Solución

4. a) Determina el plano que pasa por el punto de coordenadas $(1, 1, 1)$ y corta perpendicularmente a la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{1}$$

   b) Calcula el punto donde se cortan la recta y el plano.

Solución

JUNIO 2009

Opción A

1. Sea A una matriz cuadrada de orden 3. Sabemos que el determinante de A es $|A| = 2$. Calcula los siguientes determinantes:

   a) $|2A|$.

   b) $\left|A^{-1}\right|$.

   c) $|A \cdot A^t|$ (A^t es la traspuesta de la matriz A).

   d) Determinante de la matriz obtenida al intercambiar las dos primeras columnas de A.

   e) Determinante de la matriz que se obtiene al sumar a la primera fila de A la segunda multiplicada por 2.

Solución

2. Dadas las rectas

$$r : \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right. \quad , \quad r' : \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = 0 \\ ax & + & & + & bz & = 0 \end{array} \right.$$

   determine la relación que debe existir entre a y b para que:

   a) r y r' sean paralelas.

   b) r y r' sean perpendiculares.

Solución

3. a) Diga cuando un punto $(x_0, f(x_0))$ es de inflexión para una función $f(x)$.

   b) Calcule los coeficientes a y b del polinomio $p(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1$ para que su gráfica pase por el punto $(1, 1)$, teniendo aquí un punto de inflexión.

   c) Diga, razonadamente, si en el punto $(1, 1)$ la función $p(x)$ es creciente o decreciente.

Solución

4. a) Exprese $f(x) = x \cdot |x|$ como una función definida a trozos y dibuje su gráfica de forma aproximada.

   b) Calcule la integral definida $\int_{-1}^{1} x \cdot |x| \, dx$.

   c) Calcule el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX, la recta $x = -1$ y la recta $x = 1$.

Solución

JUNIO 2009

Opción B

1. Calcule los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = \frac{x}{2} + cosx$ en el intervalo $0 < x < 2\pi$. Tenga en cuenta que los ángulos se miden en radianes.

Solución

2. a) Escriba la fórmula, o regla, de integración por partes.

   b) Aplíquela para calcular la siguiente integral indefinida

$$\int x^2 cosx dx$$

Solución

3. Determine el rango de la matriz A siguiente según los valores del parámetro b:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 1 & 0 & 1 \\ b & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución

4. a) Calcule el punto de corte del plano $\Pi : x + y = 0$ y la recta

$$r : \begin{cases} x = & & & \lambda \\ y = & -2 & & \\ z = & 1 & + & \lambda \end{cases}$$

   b) Determine la recta s que está contenida en el plano Π y corta perpendicularmente a r.

Solución

SEPTIEMBRE 2009

Opción A

1. Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   a) Diga razonadamente cuál es el rango de la matriz $A \cdot B$.

   b) Clasifique y resulva el sistema de ecuaciones:

$$A \cdot B \cdot X = O$$

Solución

2. Considere las rectas $r : \begin{cases} x = & & \lambda \\ y = & - & \lambda \\ z = & 1 & \end{cases}$ y $s : \begin{cases} x + y = 0 \\ x - z = 1 \end{cases}$

   a) Compruebe que r y s son coplanarias.

   b) Obtenga las ecuaciones de la recta que corta a r y a s, y es perpendicular a ambas.

Solución

3. a) Enuncie el teorema de Rolle.

   b) Aplique dicho teorema para probar que, cualquiera que sea el valor del número real a, la ecuación $x^3 - 12x + a = 0$ no puede tener dos soluciones distintas en el intervalo cerrado $[-2, 2]$.

Solución

4. Dada la parábola de ecuación $y = -x^2 - 2x + 3$, sea r su recta tangente en $x = -1$ y sea s su recta tangente en $x = 1$.

   a) Calcule las ecuaciones de r y de s.

   b) Represente, de forma aproximada, el recinto plano limitado por la parábola, la recta r y la recta s.

   c) Calcule el área de dicho recinto.

Solución

SEPTIEMBRE 2009

Opción B

1. a) Calcule el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

   b) Diga, razonadamente, el valor que debe tomar c para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ \\ c & si \quad x = 0 \end{cases}$$

Solución

2. a) Calcule una primitiva de la función racional

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

   b) Calcule la integral $\int \frac{1}{cosx} dx$ (puede utilizarse el cambio de variable $t = senx$).

Solución

3. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

   a) Calcule el determinante de A y compruebe la igualdad

$$|A| = (b - a)(c - a)(c - b)$$

   b) ¿Qué relación debe existir entre a, b y c para que el rango de la matriz A sea igual a 1? Justifique la respuesta.

Solución

4. a) Compruebe que la recta $r : \begin{cases} x = & 1 & + & \lambda \\ y = & & & \lambda \\ z = & & & \lambda \end{cases}$ es perpendicular al plano $\Pi : x + y + z = 1$.

   b) Calcule los dos puntos de la recta r cuya distancia al plano Π es igual a $\sqrt{3}$ unidades.

Solución

JUNIO 2010

FASE GENERAL

Opción A

1. a) Enuncie el teorema de Bolzano.

   b) Aplique el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $e^x = -2x^2+2$ tiene soluciones. (Puede ser útil dibujar las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = -2x^2 + 2$.)

   c) Determine un intervalo de longitud 1 donde se encuentre alguna solución de la ecuación $e^x = -2x^2 + 2$.

Solución

2. a) Represente, de forma aproximada, la recta $x = 1$ y las curvas $y = \dfrac{x^2}{2}$, $y = \dfrac{4}{x}$, y señale el recinto plano limitado por ellas.

   b) Calcule el área de dicho recinto.

Solución

3. a) Discute el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

   b) Resuelve el anterior sistema.

Solución

4. Calcula el ángulo que forma el plano $\sqrt{3}x - z = 3$ con la recta de ecuaciones $x + y = 1$, $y - x = -1$ (Los ángulos se miden en radianes)

Solución

JUNIO 2010

FASE GENERAL

Opción B

1. a) Escriba la "regla de la cadena" para la derivación de funciones compuestas.

   b) Calcule, y simplifique en lo posible, la derivada de la función

$$f(x) = ln\left(\frac{1-cosx}{1+cosx}\right), \qquad 0 < x < \pi$$

Solución

2. a) Diga cuándo una función $F(x)$ es primitiva de otra función $f(x)$.

   b) Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = xe^{x^2}$ que cumpla $F(0) = 0$.

Solución

3. Determine el rango de la matriz A según los valores de b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b & b-1 \end{pmatrix}$$

Solución

4. De todos los planos que pasan por los puntos $P = (0, 0, -1)$ y $Q = (1, 0, 0)$, calcule uno que sea paralelo a la recta de ecuaciones $x + y = 1$, $x - z = 0$

Solución

JUNIO 2010

FASE ESPECÍFICA

Opción A

1. Calcule el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - xcosx - 1}{senx - x + 1 - cosx}$$

Solución

2. Calcule, utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x^2e^{-x}$ que cumpla $F(0) = 0$.

Solución

3. a) Defina el concepto de rango de una matriz.

   b) Calcule el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

   c) Diga, razonadamente, si la segunda columna de la matriz A anterior es combinación lineal de las otras dos columnas.

Solución

4. Determine la relación que deben cumplir λ y μ para que la distancia del punto $P = (\lambda, 1, \mu)$ al plano determinado por los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 0)$ y $C = (0, 2, 1)$ sea igual a 1.

Solución

JUNIO 2010

FASE ESPECÍFICA

Opción B

1. a) Defina la noción de mínimo relativo de una función.

   b) Para cada x sea $h(x)$ la suma de las coordenadas del punto $(x, f(x))$ de la gráfica de $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$. Calcule los extremos relativos de $h(x)$.

   - ¿Tiene $h(x)$ algún extremo absoluto? Razone la respuesta.

Solución

2. a) Represente, de forma aproximada, la curva $y = x^4 + 2x^2 + 1$ y la recta tangente a dicha curva en el punto $Q_0 = (-1, 4)$.

   b) Señale el recinto plano limitado por el eje OY y por la curva y la recta del apartado anterior, y calcule el área de dicho recinto.

Solución

3. Discute, en función del parámetro b, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} bx & + & by & & & = & 1 \\ 3x & & & + & bz & = & b-2 \\ & - & y & + & z & = & b-3 \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

Solución

DD

4. Dados los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 0)$ y $C = (0, 2, 1)$, sea r la recta que pasa por A y B, y sea Π el plano que pasa por C y es perpendicular a r. Calcule el punto P_0 en el que se cortan r y Π.

Solución

SEPTIEMBRE 2010

FASE GENERAL

Opción A

1. Diga, razonando la respuesta, qué valor debe tomar c para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} c & \text{si } x = 0 \\ \\ \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Solución

2. Calcule el valor de la integral

$$\int_1^2 \left(\frac{x-1}{8}\right)^{2/3} dx$$

Solución

3. a) Diga, justificando la respuesta, si es de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} & & y & - & z & = & 1 \\ -x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

   b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.

Solución

4. Fijados los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$, obtenga la relación que deben cumplir los número reales λ y μ para que el punto $P = (\lambda, \mu, 0)$ sea tal que el triángulo ABP tenga área igual a 1.

Solución

SEPTIEMBRE 2010

FASE GENERAL

Opción B

1. Halle todos los puntos de la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ en los que su recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $2x - y = 0$.

Solución

2. a) Represente, de forma aproximada, el recinto plano limitado por la parábola $y = 2x^2$ y la parábola $y = x^2 + 4$.

   b) Calcule el área de dicho recinto.

Solución

3. a) Sean B y C matrices cuadradas de orden 3. Diga cuándo, por definición, C es la matriz inversa de B.

   b) Diga razonadamente si la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   tiene inversa, y si la respuesta es afirmativa calcule la matriz A^{-1}.

Solución

4. Sea θ el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (\lambda, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, \mu, 0)$, donde λ y μ son número reales.

   a) Obtenga la relación que deben cumplir λ y μ para que se cumpla que $cos\theta = 0$.

   b) Obtenga la relación que deben cumplir λ y μ para que se cumpla que $sen\theta = 0$.

Solución

SEPTIEMBRE 2010

FASE ESPECÍFICA

Opción A

1. Considere las funciones $f(x) = sen^2 x$ y

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{2(1-t)}\,dt,\ 0 < x < 1$$

Calcule la derivada de la función $F(x) = g(f(x))$, $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Simplifique en lo posible dicha derivada.

Solución

2. a) Represente, de forma aproximada, la figura plana limitada por la hipérbola $xy = 1$, su recta tangente en el punto $(1, 1)$ y la recta $x = 2$

   b) Calcule el área de dicha región plana.

Solución

3. Discuta, en función del parámetro a, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcc} x & + & y & & & = & a+1 \\ -2x & - & y & + & az & = & -2 \\ (a+1)x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

Solución

4. Considere las rectas $r : \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = z \end{array}\right.$ y $s : \left\{\begin{array}{l} y = 0 \\ x = z \end{array}\right.$.

Obtenga un punto P de r y un punto Q de s tales que el vector $\overrightarrow{PQ}$ tenga módulo igual a 1 y sea ortogonal al vector $(-1, 0, 1)$

Solución

SEPTIEMBRE 2010

FASE ESPECÍFICA

Opción B

1. a) Estudie el dominio, los extremos relativos, la curvatura (intervalos de concavidad y de convexidad) y los puntos de inflexión de la función $f(x) = ln(1 + x^2)$ (ln denota el logaritmo neperiano).

   b) Represente la gráfica de $f(x) = ln(1 + x^2)$ utilizando los datos obtenidos en el apartado (a).

Solución

2. Calcule las primitivas de la función

$$f(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}},\ x > 0$$

(Puede utilizarse el cambio de variable $t = e^x$.)

Solución

3. Determine el rango de la matriz A según los valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a+1 & -1 & a-2 \\ -1 & a+1 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución

4. a) Determine el plano Π que pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es perpendicular a la recta de ecuaciones $x + y + z = 0$, $x - z = 1$.

   b) Calcule el punto en el que se cortan r y Π.

Solución

JUNIO 2011

Opción A

1. a) Enuncie el teorema de Rolle.

   b) Pruebe que cualquiera que sea la constante a la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ cumple las hipótesis de dicho teorema en el intervalo $[1, 3]$. Calcule un punto del intervalo abierto $(1, 3)$ cuya existencia asegura el teorema de Rolle.

Solución

2. a) Represente, de forma aproximada, la figura plana limitada por la curva $y = -2(x-1)^3$, su recta tangente en el punto $(1, 0)$ y la recta $x = 0$ (Puede ser útil calcular los cortes de la curva $y = -2(x-1)^3$ con los ejes coordenados.)

   b) Calcule el área de dicha figura plana.

Solución

3. Calcule las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación:

$$X \cdot X^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde X^t es la matriz traspuesta de X

Solución

4. a) Estudie, en función de los parámetros a y b, la posición relativa de la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$ y el plano $\Pi \equiv x + y + az = b$.

   b) Para cada una de las posiciones obtenidas, diga cómo es el sistema formado por las tres ecuaciones

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad x + y + az = b$$

Solución

JUNIO 2011

Opción B

1. a) Enuncie el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

   b) Calcule el punto al que se refiere dicho teorema para la función $f(x) = e^x + 1$ en el intervalo $[0, 1]$.

Solución

2. a) Estudie las asíntotas, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = xe^{-x}$.

   b) Represente, utilizando los datos obtenidos en el apartado anterior, la gráfica de la función $f(x) = xe^{-x}$.

Solución

3. Discuta, en función del parámetro a, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & + & z & = & a \\ x & + & (a-1)y & + & az & = & 0 \\ ax & + & 2y & + & z & = & -1 \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

Solución

4. Considere las rectas $r : \left\{\begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - z = 1 \end{array}\right.$ y $r : \left\{\begin{array}{l} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array}\right.$

   a) Determine el plano Π que contiene a la recta r y corta perpendicularmente a la recta s.

   b) Calcule el punto donde se cortan el plano Π y la recta s.

Solución

SEPTIEMBRE 2011

Opción A

1. a) Diga, razonadamente, si la tercera columna de la matriz A siguiente es combinación lineal de las dos primeras columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

   b) Calcule el rango de la matriz A.

Solución

2. Sea r la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (1, -1, 0)$, y sea s la recta que pasa por los puntos $C = (0, 1, 1)$ y $D = (1, 0, -1)$.

   a) Calcule el plano Π que contiene a s y es paralelo a r.

   b) Calcule la distancia entre las rectas r y s.

Solución

3. Determine valores de los parámetros a y b para que la función $f(x) = a\ cos^2 x + bx^3 + x^2$ tenga un punto de inflexión en $x = 0$.

Solución

4. Calcule, utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x^2 \cdot lnx^2$ que cumpla $F(1) = 0$.

Solución

SEPTIEMBRE 2011

Opción B

1. Discuta, en función del parámetro b, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{ccccccc} & & y & + & bz & = & 1+b \\ x & & & + & z & = & 3-b \\ bx & - & by & & & = & 1-b \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

Solución

2. a) Calcule las ecuaciones implicitas de la recta r que pasa por los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B(-1, 0, -1)$.

   b) De todos los planos que contienen a la recta r, obtenga uno cuya distancia al punto $C = (0, -1, 0)$ sea igual a 1.

Solución

3. Calcule el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{sen^2 x}$$

Solución

4. a) Represente, de forma aproximada, la gráfica de la función $f(x) = xe^{x^2-1}$. Señale el recinto plano limitado por dicha gráfica, el eje OX, la recta $x = -1$ y la recta $x = 1$.

   b) Calcule el área del recinto del apartado anterior.

Solución

JUNIO 2012

Opción A

1. Discuta, en función del parámetro a, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & y & - & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & (1+a)z & = & -1 \end{array}\right\}$$

(no hay que resolverlo en ningún caso).

Solución

2. Calcule todos los vectores de módulo 2 que son ortogonales a los vectores $\vec{u} = (1, -1, -1)$ y $\vec{v} = (-1, 2, 1)$.

Solución

3. a) Determine el punto (x, y) de la parábola $y = x^2$ en el que la suma $x + y$ alcanza su mínimo valor.

   b) Explique por qué dicho mínimo es absoluto.

Solución

4. a) Calcule los puntos de corte de la recta $2y - x = 3$ y de la recta $y = 1$ con la rama hiperbólica $xy = 2$, $x > 0$.

   b) Dibuje el recinto plano limitado por las tres curvas del apartado anterior.

   c) Calcule el área de dicho recinto.

Solución

JUNIO 2012

Opción B

1. Calcule la matriz inversa de la matriz $A = B^2 - 2 \cdot C$, siendo

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución

2. Calcule la distancia del punto $P = (3, -1, 2)$ a la recta

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases} .$$

Solución

3. Considere la función $f(x) = |x| + |x - 2|$.

   a) Exprese $f(x)$ como una función definida a trozos.

   b) Dibuje la gráfica de $f(x)$.

   c) Escriba el intervalo abierto de la recta real formado por los puntos en los que $f(x)$ es derivable y se anula su derivada.

Solución

4. Calcule la siguiente integral de una función racional:

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\, dx.$$

Solución

SEPTIEMBRE 2012

Opción A

1. a) Calcule el siguiente límite (ln denota el logaritmo neperiano):

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot ln\, x$$

   b) Estudie los extremos relativos, las asíntotas y el signo de la función $f(x) = x \cdot ln\, x$ definida en el intervalo abierto $(0, +\infty)$.

   c) Utilizando los datos obtenidos en los apartados **a)** y **b)** represente de forma aproximada la gráfica de la función $f(x)$ del apartado b)

Solución

2. a) Diga cuando una función $F(x)$ es una primitiva de otra función $f(x)$.

   b) Haciendo el cambio de variable $t = \sqrt{x-1}$, calcule la primitiva de la función $f(x) = x \cdot \sqrt{x-1}$ cuya gráfica pasa por el punto $(1, 0)$ del plano.

Solución

3. Calcule los valores de a para los que el determinante de la matriz B es igual a 32, $|B| = 32$, siendo $B = 2 \cdot A^2$ y

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución

4. Dados el plano Π de ecuación $x + z = 1$ y los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (0, 1, 0)$, calcule los valores de c para los que el punto $P = (0, 0, c)$ cumple “área del triángulo ABP”=“distancia de P a Π”.

Solución

SEPTIEMBRE 2012

Opción B

1. a) Estudie las asíntotas de la función $f(x) = e^{-x^2}$.

   b) Calcule los extremos relativos y los puntos de inflexión de $f(x)$.

   c) Utilizando los datos obtenidos en los apartados **a)** y **b)**, haga la representación gráfica aproximada de la función $f(x)$.

Solución

2. Calcule, utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva $F(x)$ de la fucnión $f(x) = (x+1)^2 \cdot sen\, x$ que cumpla $F(0) = 1$.

Solución

3. ¿Existe alguna matriz $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}$ que cumpla

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y sea NO nula? Razone la respuesta.

Solución

4. Sea Π el plano determinado por los puntos $A = (1,0,0)$, $B = (0,1,0)$ y $P = (0,0,c)$, y sea la recta $r : \left\{ \begin{array}{l} x - y = 3 \\ 2x - z = 3 \end{array} \right.$

   a) Obtenga la ecuación implícita de Π.

   b) Determine los valores de c para los que r y Π son paralelos.

   c) Determine los valores de c para los que r y Π son perpendiculares.

Solución

JUNIO 2013

Opción A

1. a) Encuentre, razonadamente, un valor del parámetro a para el que sea compatible determinado el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} ax & + & 2y & + & z & = & a+1 \\ (a+1)x & - & y & - & az & = & -1 \\ -x & + & y & + & z & = & 2a \end{array}\right\}$$

   b) Resuelva el sistema para el valor de a encontrado.

Solución

2. Sean en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{e} = (2, 0, 0)$, $\vec{u} = (1, 0, -1)$ y $\vec{v} = (-2, 3, -2)$.

   a) Calcule el producto vectorial $\vec{e} \times \vec{u}$.

   b) Calcule el seno del ángulo θ que forman $\vec{e}$ y $\vec{u}$.

   c) Calcule el ángulo ϕ que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Solución

3. Estudie si la recta r de ecuación $y = 4x-2$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ en alguno de sus puntos.

Solución

4. a) Halle, utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva de la función $f(x) = 1 + \ln x$.

   b) Calcule el área de la región plana limitada por la curva $y = \ln x$, la recta horizontal $y = -1$, y las rectas verticales $x = 1$ y $x = e$.

Solución

JUNIO 2013

Opción B

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pruebe que la matriz inversa de A es $A^{-1} = -A^2 + A + 2\,I$.

Solución

2. a) Calcule las ecuaciones implícitas de la recta r que pasa por el punto $P = (1, -1, 0)$ y es paralela a los planos $\Pi_1 \equiv x + y = 2$ y $\Pi_2 \equiv x - y + z = 1$.

   b) Calcule también las ecuaciones paramétricas de r y un vector director de r.

Solución

3. a) Enuncie el *teorema de Bolzano*.

   b) Demuestre que alguna de las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 8x - 1$ es negativa.

   c) Demuestre que $P(x)$ tiene también alguna raíz positiva.

Solución

4. Calcule la siguiente integral de una función racional:

$$\int \frac{3x}{x^2 + x - 2}\, dx$$

Solución

SEPTIEMBRE 2013

Opción A

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & x & y \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & x & y \end{pmatrix}$, estudie si existen números reales x e y tales que la matriz B es la inversa de la matriz A.

Solución

2. En $\mathbb{R}^3$, calcule la distancia del punto $P = (1, -1, 2)$ a la recta r que pasa por los puntos $A = (0, -1, 1)$ y $B = (1, 0, 1)$.

Solución

3. a) Defina a trozos la función $f(x) = 2 - x \cdot |x|$ y represéntela gráficamente.
   b) Estudie la derivabilidad de $f(x)$ en toda la recta real.
   c) Calcule la función derivada $f'(x)$ para los valores de x que exista.

Solución

4. Calcule el valor de la integral definida

$$\int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2+1} + (2x-1)\, e^{x^2-x} + 2\pi \operatorname{sen}(2\pi x) \right) dx\,.$$

Solución

SEPTIEMBRE 2013

Opción B

1. a) Estudie para cuáles valores del parámetro m es compatible determinado el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcccccl} (1-2m)x & - & y & - & z & = & -1 \\ (m-1)x & + & y & - & z & = & 2 \\ m^2x & + & y & + & z & = & 3 \end{array}\right\}$$

   b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones para $m = 0$.

Solución

2. Fijados los puntos $A = (1, 1, 0)$ y $B = (1, 0, 1)$, calcule todos los puntos de la forma $X = (0, \lambda, \mu)$ para los que el triángulo ABX es equilátero.

Solución

3. a) Estudie el dominio de definición, las asíntotas, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

   b) Represente la función $f(x)$ anterior utilizando los datos obtenidos en el apartado a).

Solución

4. a) Dibuje el recinto plano limitado por la parábola $y = 1 - x^2$, el eje OX, la recta $x = 0$ y la recta $x = 2$.

   b) Calcule el área de dicho recinto.

Solución

JUNIO 2014

Opción A

1. a) Estudie cómo es el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rrrrr} x & +\,y & -\,4z & = & 2 \\ 2x & -\,y & -\,z & = & 1 \\ x & -\,2y & +\,3z & = & -1 \end{array}\right\}.$$

   b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.

Solución

2. Considere en $\mathbb{R}^3$ las rectas $r:\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=1 \end{cases}$.

   a) Obtenga un vector director de la recta s.

   b) Obtenga el plano Π que contiene a r y es paralelo a s.

   c) Obtenga el plano $\overline{\Pi}$ que contiene a r y es perpendicular a s.

Solución

3. a) Enuncie la condición que se debe cumplir para que una recta $x = a$ sea asíntota vertical de una función $f(x)$.

   b) Calcule las asíntotas verticales y horizontales (en $-\infty$ y en $+\infty$) de la función

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2-x-2}\,.$$

Solución

4. Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = \cos x$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2\pi$.

Solución

JUNIO 2014

Opción B

1. a) Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   b) Calcule la matriz inversa de A.

   c) Calcule el determinante de la matriz $B = \frac{1}{2}A^3$ sin obtener previamente B.

Solución

2. a) Dado el plano Π_1 de ecuación $z = 0$, escriba las ecuaciones de dos planos Π_2 y Π_3 tales que los planos Π_1, Π_2 y Π_3 se corten dos a dos pero no exista ningún punto común a los tres.

   b) Clasifique el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos Π_1, Π_2 y Π_3.

Solución

3. a) Enuncie el *teorema de Bolzano*.

   b) Aplique el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ tiene soluciones positivas.

   c) ¿Tiene la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ alguna solución negativa? Razone la respuesta.

Solución

4. Calcule la siguiente suma de integrales definidas

$$\int_1^2 \frac{-2}{x^3}\, dx \; + \int_\pi^{2\pi} \left(-\operatorname{sen} x \cdot e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2 x \cdot e^{\operatorname{sen} x}\right) dx \,,$$

cuyas integrales indefinidas asociadas son inmediatas.

Solución

JULIO 2014

Opción A

1. Considere las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

   a) Calcule la matriz $A = 3B^2 - C$.

   b) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A.

Solución

2. a) Calcule el valor del parámetro k para que la recta $r : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$ sea paralela al plano Π de ecuación $kx + y + kz = 1$.

   b) Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, calcule la distancia de la recta r al plano Π.

Solución

3. a) Estudie el dominio de definición, las asíntotas, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función
$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}.$$

   b) Represente la función $f(x)$ anterior utilizando los datos obtenidos en el apartado **a)**.

Solución

4. Calcule la siguiente integral definida de una función racional:
$$\int_2^{e+1} \frac{x-2}{x^2 - 3x + 2}\, dx.$$

Solución

JULIO 2014

Opción B

1. Considere el sistema compatible determinado de dos ecuaciones con dos incógnitas $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=3 \end{array}\right\} \equiv \mathcal{S}$, cuya solución es el punto $P_0 = (2, -1)$ de $\mathbb{R}^2$. Sea $\mathcal{S}'$ el sistema que se obtiene al añadir a $\mathcal{S}$ una tercera ecuación $ax + by = c$. Conteste razonadamente las siguientes preguntas:

   a) ¿Puede ser $\mathcal{S}'$ compatible determinado?

   b) ¿Puede ser $\mathcal{S}'$ incompatible?

   c) ¿Puede ser $\mathcal{S}'$ compatible indeterminado?

Solución

2. En $\mathbb{R}^3$, considere los cuatro puntos $A = (0, 1, 1)$, $B = (-2, 0, -1)$, $C = (-1, 1, 0)$ y $D = (-2, 2, 1)$, y sea r la recta que pasa por C y por D.

   a) Obtenga ecuaciones paramétricas de r.

   b) Halle los puntos P de la recta r para los que el triángulo APB sea rectángulo en su vértice P.

Solución

3. a) Enuncie el *teorema del valor medio de Lagrange*.

   b) Aplicando el anterior teorema a la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, pruebe que cualesquiera que sean los números reales $a < b$ se cumple la desigualdad $\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a \leq b - a$.

Solución

4. a) Dibuje el recinto plano limitado por la parábola $y = x^2 - 2$ y la recta $y = x$.

   b) Calcule el área de dicho recinto plano.

Solución

JUNIO 2015

Opción A

1. Discuta, en función del parámetro b, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & b \\ -2x & - & y & + & (b-1)z & = & -2 \\ bx & + & y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

Solución

2. En $\mathbb{R}^3$, considere el plano $\Pi : ax+by+cz=d$, la recta $r : \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right.$, y el punto $P=(1,0,1)$.

   a) Obtenga cómo deben ser los números reales a, b, c, d para que el plano Π contenga a la recta r.

   b) Supuesto que Π contiene a r, pruebe que la distancia del punto P a Π es menor o igual a 1: $d(P,\Pi) \leqslant 1$.

Solución

3. a) Estudie los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = \ln(1+x^2)$.

   b) Estudie si la recta r de ecuación $y = -x-1+\ln 2$ es tangente a la gráfica de $f(x) = \ln(1+x^2)$ en algún punto de inflexión de $f(x)$.

Solución

4. Calcule la siguiente suma de integrales definidas

$$\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}\,dx + \int_0^{\pi} \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}\,dx$$

Solución

JUNIO 2015

Opción B

1. Determine la relación que debe existir entre los parámetros x e y para que las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ conmuten, es decir, para que $A \cdot B = B \cdot A$.

Solución

2. Dados en $\mathbb{R}^3$ los planos $\Pi_1 \equiv x + y - z = 1$ y $\Pi_2 \equiv x - y + z = 1$, obtenga el conjunto H de los puntos de $\mathbb{R}^3$ que distan igual de dichos planos.

Solución

3. a) Enuncie el *teorema de Bolzano*.

   b) Utilizando el *teorema de Bolzano*, encuentre un intervalo de la recta real en el que la función polinómica $p(x) = 3x^3 - x + 1$ tenga alguna raíz.

   c) Utilizando el *teorema de Bolzano*, demuestre que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x + \ln(1 + x^2)$ y $g(x) = e^x + 1$ se cortan en algún punto.

Solución

4. a) Represente, aproximadamente, la gráfica de la función $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$ definida en el intervalo $[0, \pi]$.

   b) Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $g(x) = \operatorname{sen}(2x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = \pi$.

Solución

JULIO 2015

Opción A

1. a) Enuncie el *teorema del valor medio de Lagrange*.

   b) Aplicando a la función $f(x) = x^3 + 2x$ el anterior teorema, pruebe que cualesquiera que sean los números reales $a < b$ se cumple la desigualdad $a - b < b^3 - a^3$.

Solución

2. a) Diga cuándo una función $F(x)$ es una primitiva de otra función $f(x)$.

   b) Diga cómo puede comprobarse, sin necesidad de hacer derivadas, si dos funciones $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de una misma función.

   c) Diga, razonando la respuesta, si las funciones

   $$F(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \text{y} \qquad G(x) = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}$$

   son primitivas de una misma función.

Solución

3. Resuelva la ecuación matricial $AX + 2B = C$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Solución

4. a) Calcule las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $A = (0, 1, 1)$ y $B = (1, 1, -1)$.

   b) Calcule todos los puntos de la recta r que equidistan de los planos $\Pi_1 \equiv x + y = -2$ y $\Pi_2 \equiv x - z = 1$.

Solución

JULIO 2015

Opción B

1. a) Estudie el dominio de definición y las asíntotas de la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}.$$

   b) Estudie si la gráfica de la función $f(x)$ corta a alguna asíntota oblicua suya.

   c) Represente, aproximadamente, la gráfica de $f(x)$ utilizando los valores $f(1)$ y $f(3)$, y los datos obtenidos en los apartados **a)** y **b)**.

Solución

2. Calcule la siguiente integral definida de una función racional:

$$\int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \frac{x-1}{x^2 - 2x}\, dx.$$

Solución

3. Determine el rango de la matriz A según los valores de b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & b+2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ b+1 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

Solución

4. Sean $\vec{e}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que $\vec{e} \times \vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} \times \vec{e} = (0, 1, 1)$.

   a) Calcule el vector $(\vec{e} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{e})$.

   b) Calcule el vector $\vec{w} = \vec{e} \times (2\vec{u} - \vec{e} + 3\vec{v})$.

Solución

JUNIO 2016

Opción A

1. Considere la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (tenga en cuenta que el ángulo x se mide en radianes).

   a) Estudie los extremos relativos de $f(x)$ en el intervalo $0 < x < \pi$.

   b) Estudie los puntos de inflexión de $f(x)$ en el intervalo $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

Solución

2. Calcule la primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = \frac{-2x}{e - x^2} - 2xe^{1-x^2} + 2x\cos(x^2)$$

   que cumpla $F(0) = 1$.

Solución

3. Discuta, en función del parámetro b, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} & & 3y & + & bz & = & b-2 \\ bx & + & by & & & = & 1 \\ -x & & & + & z & = & b-3 \end{array}\right\}$$

   (no es necesario resolverlo en ningún caso).

Solución

4. Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A = (1, 1, -1)$ y $B = (0, 1, 1)$ y los planos $\Pi_1 : x + y = 0$ y $\Pi_2 : x - z = 0$.

   a) Calcule las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos A y B.

   b) Obtenga un punto P de la recta r cuya distancia al plano Π_1 sea el doble de su distancia al plano Π_2, esto es, $d(P, \Pi_1) = 2\,d(P, \Pi_2)$.

Solución

JUNIO 2016

Opción B

1. Considere la función definida a partir de los parámetros α, $\beta \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + \alpha & \text{si } x < 0 \\ -x^2 + \beta x + \beta + 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

   a) Obtenga la relación que debe haber entre α y β para que f sea continua en $x = 0$.

   b) Calcule α y β para que f sea derivable en $x = 0$.

   c) Para los valores α y β obtenidos en el apartado (b), ¿es f' derivable en $x = 0$? Razone la respuesta.

Solución

2. a) Calcule los puntos en los que la recta $y = x - 1$ y el eje OX cortan a la parábola $y = -x^2 + 6x - 5$.

   b) Dibuje, aproximadamente, el recinto plano limitado entre la parábola $y = -x^2 + 6x - 5$ y la recta $y = x - 1$.

   c) Calcule el área de dicho recinto plano.

Solución

3. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Calcule la matriz $C = 2A - B^2$.

   b) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A.

Solución

4. Sean en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

   a) Calcule el producto vectorial $\vec{u} \times \vec{v}$.

   b) Obtenga un vector $\vec{e_1}$ de $\mathbb{R}^3$ que cumpla $\cos\left(\widehat{\vec{e_1}, \vec{u}}\right)$.

   c) Obtenga un vector $\vec{e_2}$ de $\mathbb{R}^3$ que cumpla $\text{sen}\left(\widehat{\vec{e_2}, \vec{v}}\right)$.

Solución

JULIO 2016

Opción A

1. Determine los números reales a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right\} .$$

tiene al menos dos soluciones distintas.

Solución

2. En $\mathbb{R}^3$, sea Π el plano de ecuación $x - z = 2$, y sea r la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (0, 0, b)$.

   a) Calcule un vector director de la recta r.

   b) Determine b para que r y Π sean perpendiculares.

   c) Determine b para que r y Π sean paralelos.

   d) ¿Está r contenida en Π para algún valor de b? Razone la respuesta.

Solución

3. a) Enuncie el *teorema de Rolle*.

   b) Dado un número real λ, utilice el teorema de Rolle para probar que el polinomio $P(x) = x^3 + x + \lambda$ no tiene dos raíces distintas.

   c) ¿Tiene el polinomio $P(x) = x^3 + x + \lambda$ alguna raíz? Justifique la respuesta.

Solución

4. Calcule el valor de la integral definida

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x}+1}\, dx\,,$$

donde $a = (e-1)^2$. $\big[$El cálculo de la integral indefinida puede hacerse con el cambio de variable $t = \sqrt{x}$ (es decir, $x = t^2$), o también con el cambio de variable $u = \sqrt{x} + 1$.$\big]$

Solución

JULIO 2016

Opción B

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, obtenga las matrices X que cumplen la igualdad $AX + B^2 - 2A = 0$.

Solución

2. En $\mathbb{R}^3$, considere el punto $P = (1, 0, 1)$ y los planos $\Pi_1 \equiv\ x + z = 0$, $\Pi_2 \equiv\ y - z = 0$. Obtenga un plano Π_3 que cumpla a la vez las siguientes condiciones: (i) $P \in \Pi_3$; (ii) Π_1 corta a Π_3 en una recta; (iii) los planos Π_1 Π_2 y Π_3 no tienen puntos en común.

Solución

3. a) Estudie el dominio, el signo, las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales de la función
$$f(x) = \frac{2x - 1}{-x^2 + x}\,.$$
   b) Utilizando los datos obtenidos en el apartado anterior, represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x)$.

Solución

4. a) Escriba la "regla de la cadena" para la derivación de funciones compuestas.
   b) Calcule la derivada de la función
$$f(x) = \ln\left(\cos^2 x\right)\,, \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,.$$
   c) Obtenga, utilizando el apartado **b)**, una primitiva $G(x)$ de la función $g(x) = \operatorname{tg} x$ que cumpla $G(0) = 1$.

Solución

JUNIO 2017

Opción A

1. a) Estudie cómo es el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} 3x & & -\ 5z & = & 3 \\ 3x & -\ 3y & +\ 2z & = & 0 \\ 2x & -\ y & -\ z & = & 1 \end{array}\right\}.$$

   b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.

Solución

2. Sean en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{e} = (0,1,0)$, $\vec{u} = (3,-2,2)$ y $\vec{v} = (0,1,1)$.

   a) Calcule el producto vectorial $\vec{e} \times \vec{u}$.

   b) Calcule el ángulo ϕ que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

   c) Demuestre que la familia de vectores $\{\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}\}$ es linealmente independiente.

Solución

3. a) Estudie el dominio de definición, los extremos relativos y las asíntotas de la función

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}.$$

   b) Teniendo en cuenta los datos obtenidos en el apartado anterior, represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x)$.

Solución

4. Utilizando el cambio de variable $1 + x^2 = t^2$, calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ que cumpla $F(0) = 0$.

Solución

5. En una población se sabe que el 80 % de los jóvenes tiene ordenador portátil, el 60 % tiene teléfono móvil, y el 10 % no tiene portátil ni móvil. Si un joven de esa población tiene teléfono móvil, calcule la probabilidad de que dicho joven tenga también ordenador portátil.

Solución

JUNIO 2017

Opción B

1. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Obtenga la matriz $A \cdot B$ y calcule su rango.

   b) Clasifique y resuelva el sistema de ecuaciones

$$A \cdot B \cdot X = O.$$

Solución

2. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las rectas de ecuaciones:

$$r : \begin{cases} 3x + 2y \; = \; 0 \\ x \; - \; 2\,z = -8 \end{cases}, \qquad s : \; \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{a} = \frac{z-1}{-1} \; .$$

   a) Halle el valor de a para que r y s sean paralelas.

   b) Para el valor de a obtenido en el anterior apartado, calcule la distancia entre las rectas r y s.

Solución

3. Calcule, aplicando la regla de l'Hôpital, el límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) + (1-x)^2 - 1}{\ln(\cos x)} \, .$$

Solución

4. a) Calcule los puntos en los que las dos curvas $y = e^x$, $y = -x^2$ cortan a la recta $x = 0$ y a la recta $x = 1$.

   b) Calcule el área de la región plana limitada por las curvas $y = e^x$, $y = -x^2$, y por las rectas $x = 0$, $x = 1$.

Solución

5. Una asociación deportiva tiene 1000 socios, el 40 % de ellos mujeres. Están repartidos en tres secciones y cada socio sólo pertenece a una sección. En la sección de baloncesto hay 400 socios, 120 de ellos mujeres, en la de natación hay 350 socios, 180 de ellos mujeres, y en la de tenis están el resto de los socios. Calcule la probabilidad de que un socio seleccionado al azar sea varón y de la sección de tenis.

Solución

JULIO 2017

Opción A

1. a) Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Obtenga el determinante de la matriz $B = \frac{1}{3}A^4$ sin calcular previamente B.

c) Calcule la matriz inversa de A.

Solución

2. Considere en $\mathbb{R}^3$ las rectas $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, $s : \begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$.

a) Obtenga un vector director de la recta s.

b) Obtenga el plano Π_1 que contiene a r y es paralelo a s.

c) Obtenga el plano Π_2 que contiene a r y es perpendicular a s.

Solución

3. a) Enuncie el *teorema del valor medio de Lagrange*.

b) Aplicando a la función $f(x) = 1/x^2$ el anterior teorema, pruebe que cualesquiera que sean los números reales $1 < a < b$ se cumple la desigualdad $a + b < 2a^2b^2$.

Solución

4. Calcule una primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} - e^{-x} + 2x\cos(x^2)$$

que cumpla $F(0) = 0$.

Solución

5. En un libro con 3 capítulos, el primero consta de 100 páginas y 15 de ellas contienen errores. El segundo capítulo, de 80 páginas, tiene 8 con error, y en el tercero, de 50 páginas, el 80 % no tiene ningún error. Calcule la probabilidad de que una página elegida al azar no esté en el capítulo dos y no tenga errores.

Solución

JULIO 2017

Opción B

1. Considere el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rrrcl} x & +\,y & & = & 0 \\ x & & -\,z & = & 1 \\ ax & +\,by & +\,cz & = & 1 \end{array}\right\}.$$

Obtenga valores de los parámetros a, b y c en los siguientes casos:

a) Para que el sistema sea compatible determinado.

b) Para que el sistema sea compatible indeterminado.

c) Para que el sistema sea incompatible.

Solución

2. Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A = (1, 2, 1)$, $B = (-2, -1, -3)$, $C = (0, 1, -1)$ y $D = (0, 3, -1)$, y sea r la recta que pasa por A y B.

a) Calcule ecuaciones paramétricas de r.

b) Obtenga un punto P de la recta r tal que la distancia de C a P sea igual a la distancia de D a P.

Solución

3. Estudie el dominio, el signo, las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales de la función

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}\,.$$

Solución

4. a) Represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$ definida en el intervalo cerrado $[0, 2]$.

b) Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.

Solución

5. El 40 % de la población activa de una ciudad son mujeres. Se sabe que el 20 % de las mujeres y el 12 % de los varones está en el paro. Elegida al azar una persona entre la población activa que no está en paro, calcule la probabilidad de que dicha persona sea mujer.

Solución

JUNIO 2018 - ANULADO

Opción A

1. a) Discute, en función del del parámetro a, el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & z & = 1 \\ x & + & ay & + & az & = 1 \\ ax & + & 3y & + & z & = a \end{array}\right\}$$

   b) Resuelve el sistema para $a = 2$.

Solución

2. Una nave espacial sigue una trayectoria aproximadamente recta dada por la ecuación $r \equiv x + 1 = \dfrac{y}{2} = 2z + 1$. Se acerca a un asteroide situado en el punto $P = (1, 1, 2)$. Calcule:

   a) La distancia mínima a la que la nave pasa el asteroide.

   b) El punto de la trayectoria de la nave más cercano al asteroide.

Solución

3. a) Estudie el dominio, las asíntotas y crecimiento-decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 8}$$

   b) Represente la gráfica de $f(x)$ utilizando el apartado anterior.

Solución

   c) Calcule el área del recinto plano limitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas (OX) y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

Solución

4. Se conoce que el ganado caprino padece un 10 % la tuberculosis. La prueba de tuberculosis caprina no es completamente fiable, ya que da un 10 % de positivos en cabras realmente sanas y también da negativo en el 5 % de cabras enfermas.

   a) Calcule la probabilidad de que la prueba sea positiva.

   b) Calcula la probabilidad de que una cabra elegida al azar esté sana sabiendo que en la prueba ha dado positiva.

Solución

JUNIO 2018 - ANULADO

Opción B

1. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   a) Demuestre que la matriz A tiene inversa y calcula A^{-1}.

   b) Resuelve la ecuación matricial $AX + B^2 = A$

Solución

2. Sean r la recta dada por el punto $P = (2, -4, 1)$ y el vector $\vec{v} = (3, -4, 0)$, y el plano $\Pi : 7x - y = 8$.

   a) Demuestre que r y Π se cortan y calcule el ángulo que forman.

   b) Calcule el plano que contiene a r y es perpendicular a Π.

Solución

3. a) Estudie los extremos relativos (máximos y mínimos) y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x\, e^{-x}$.

Solución

   b) Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x\, e^{-x}$ que cumple $F(0) = 0$.

Solución

4. La edad de los habitantes de Altojardín se distribuye normalmente con una media de 36 años y una desviación típica de 12 años.

   a) Calcule el porcentaje de habitantes de Altojardín entre 30 y 48 años.

   b) ¿Qué edad tiene la reina de Altojardín sabiendo que el 67 % de los habitantes tiene más edad que la reina?

Solución

JUNIO 2018

Opción A

1. a) Discuta, en función del parámetro λ, el sistema lineal de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & - & z & = 0 \\ \lambda\, x & + & y & + & z & = 1 \\ x & + & y & + & \lambda\, z & = 1 \end{array}\right\}$$

   b) Resuelva el sistema para $\lambda = 1$.

Solución

2. Sean el plano $\Pi : y + z = 0$ y la recta $r : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.

   a) Calcule la intersección del plano y la recta.

   b) Determine la recta s que pasa por el punto $P = (1, 0, 0)$, es paralela la plano Π y es perpendicular a la recta r.

Solución

3. a) Enuncie el teorema de Bolzano y demuestre, usando dicho teorema, que la función $f(x) = x^3 + x - 3$ tiene una raíz real positiva.

Solución

   b) Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (x + 1)\, e^{-x}$ que cumpla la condición $F(0) = 0$.

Solución

4. En una red social el 55 % lee noticias deportivas, el 65 % lee noticias de información, y el 10 % no lee las noticias deportivas ni las de información. Tomando al azar una persona de esta red social:

   a) Calcule la probabilidad de que lea noticias deportivas y de información.

   b) Sabiendo que lee noticias de información, calcule la probabilidad de que también lea noticias de deportes.

   c) Sabiendo que lee noticias de deportes, calcule la probabilidad de que no lea noticias de información.

Solución

JUNIO 2018

Opción B

1. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Calcule la matriz $C = -3A + B^2$.

   b) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A.

Solución

2. Sean el punto $A = (1, 0, 1)$ y la recta r dada por el punto $B = (-1, 0, 2)$ y el vector $\vec{v} = (-1, 1, 0)$.

   a) Calcule la distancia del punto A a la recta r.

   b) Calcule el área del triángulo de vértices A, B y O siendo $O = (0, 0, 0)$.

Solución

3. a) Estudie el dominio, las asíntotas y máximos y mínimos de la función

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

   b) Represente la gráfica de $f(x)$ utilizando los datos del apartado anterior.

Solución

   c) Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)$.

Solución

4. A una prueba de oposición se han presentado 2500 aspirantes para 300 plazas. Las calificaciones que han obtenido los aspirantes tienen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica 2. Calcule:

   a) La nota de corte para los admitidos.

   b) La probabilidad de que un alumno elegido al azar tenga una nota mayor que 9.

Solución

JULIO 2018

Opción A

1. Sea la matriz A que depende del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \\ -2 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

   a) Determine el rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

   b) Para $a = 1$ resuelva, si existe solución, la ecuación matricial $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solución

2. Sean los puntos $A = (2, 0, 1)$, $B = (2, 0, 3)$ y la recta r dada por el punto $C = (1, 0, 2)$ y el vector $\vec{v} = (-1, 0, 0)$. Determine los puntos P de la recta r para los cuales el área del triángulo $\widehat{ABP}$ es 2.

Solución

3. Sea la función

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0\,, \\ -x & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

   a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

   b) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de $f(x)$ y justifique si en el punto $x = 0$ la función $f(x)$ tiene un mínimo relativo.

Solución

   c) Dibuje el recinto plano limitado entre las funciones $f(x) = |x|$ y $g(x) = 2 - x^2$ y calcule su área.

Solución

4. En un centro comercial el 35 % de los clientes utiliza carro. El 70 % de los que utilizan carro son hombres y el 40 % de los que no utilizan carro son mujeres.

   a) Calcule la probabilidad de que un cliente elegido al azar sea mujer.

   b) Sabiendo que un cliente elegido al azar ha sido hombre, qué probabilidad hay de que utilice carro.

Solución

JULIO 2018

Opción B

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Calcule la matriz X tal que $X = A^2 + B^2 - 2A\dot{}B$.

   b) Halle la inversa de la matriz A.

Solución

2. Sean las rectas $r = \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y-5}{-1} = \dfrac{z-2}{4}$ y $s = \begin{cases} x - y - z = 2 \\ 2x + 2y - z = 4 \end{cases}$.

   a) Estudie la posición relativa de dichas rectas.

   b) Halle la distancia entre ambas rectas.

Solución

3. Sea la función $f(x) = x\ln(x)$ para $x > 0$.

   a) ¿Se puede definir $f(0)$ para que $f(x)$ sea continua por la derecha de $x = 0$?

   b) Estudie los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ para $x > 0$.

   c) Halle, si existe, la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$.

Solución

   d) Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x\ln(x)$.

Solución

4. Se estima que en una partida de bombillas el 10 % son defectuosas. Si se eligen al azar 6 bombillas de esta partida, calcule:

   a) la probabilidad de que ninguna sea defectuosa.

   b) la probabilidad de obtener más de 2 defectuosas.

   c) la media y la destivación típica de la distribución.

Solución

Índice general

Capítulo 1

Análisis

1.1. Funciones y continuidad

1.1.1. Representar gráficamente la función

$$f(x) = 2x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{5}{27}$$

¿Cuántas raíces reales positivas tiene este polinomio?

(Septiembre 00)

- Solución:

Para poder representarla vamos a estudiar su derivada. Tenemos que

$$f'(x) = 6x^2 - x - 1$$

Igualando a cero resulta:

$$6x^2 - x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{1 \pm 5}{12} = \begin{cases} \dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2} \\ \\ -\dfrac{4}{12} = -\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Construimos una tabla para estudiar el signo de la derivada y conocer así donde crece y donde decrece y sus máximos y mínimos.

	$\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$	$\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
$6x^2 - x - 1$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En consecuencia:

- Crece $\longrightarrow \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right) \cup \left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$

- Decrece $\longrightarrow \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}\right)$

- Máximo $\longrightarrow \left(-\dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{18}\right)$

- Mínimo $\longrightarrow \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{41}{216}\right)$

También es obvio que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ y que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
Podemos hacer una tabla de valores para afinar la representación, pero aquí no la pondremos.
La gráfica resultante podemos verla en la figura 1.1

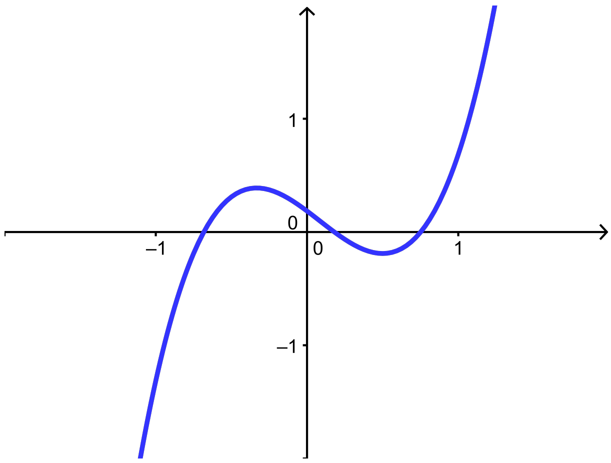


Figura 1.1: Representación gráfica de la función $f(x) = 2x^3 - \frac{x^2}{2} - x + \frac{5}{27}$

Para ver la última parte del ejercicio usaremos el Teorema de Bolzano. Sabemos que como mucho tendrá tres raices reales (pues es un polinomio de grado 3) y por los datos recabados con anterioridad y mirando la gráfica las raices estarán en los intervalos $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)$, $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right)$ y $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Es evidente que hay una positiva garantizada (la contenida en el último intervalo) y otra negativa (en el primero). Veamos que ocurre con la otra. Nos basaremos en el teorema de Bolzano para ir tanteando y comprobando donde está.

Tenemos que $f(0) = \frac{5}{27} > 0$ y $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{41}{216} < 0$. Por tanto la tercera raiz se encuentra en el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ y es positiva.

Volver al examen

1.1.2. Representa la gráfica del polinomio

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 0'2$$

¿Cuántas raíces reales negativas tiene este polinomio? ¿y cuántas positivas?

(Junio 01)

- Solución:

Vamos a hacer un breve estudio del polinomio para su representación:

- $Dom f = \mathbb{R} \longrightarrow$ Como en todos los polinomios.

- Simetría $\longrightarrow$ No tiene.

- Continuidad $\longrightarrow$ Continua en todo $\mathbb{R}$.

- Asíntotas $\longrightarrow$ No tiene, como le ocurre a todos los polinomios.

- Corte con los ejes:

- Eje X: Al ser un polinomio de grado 3 puede cortar al Eje X en un máximo de tres puntos. Vamos a orientarnos donde estarán usando el teorema de Bolzano.
  - $f(-2) = -16 + 12 - 0'2 < 0$
  - $f(-1) = -2 + 3 - 0'2 > 0$
  - $f(0) = -0'2 < 0$
  - $f(1) = 2 + 3 - 0'2 > 0$

  Por tanto corta en un punto entre $(-2, -1)$, en otro entre $(-1, 0)$ y en otro entre $(0, 1)$.
- Eje Y: $(0, -0'2)$

\- Vamos a estudiar la derivada:

$$f'(x) = 6x^2 + 6x$$

Esta derivada se anula en $x = 0$ y en $x = -1$. Por tanto:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, +\infty)$
$6x^2 + 6x$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

De aquí deducimos que:

- Crece $\longrightarrow (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$
- Decrece $\longrightarrow (-1, 0)$
- Máximo $\longrightarrow (-1, 0'8)$
- Mínimo $\longrightarrow (0, -0'2)$

Su representación gráfica podemos verla en la figura 1.2

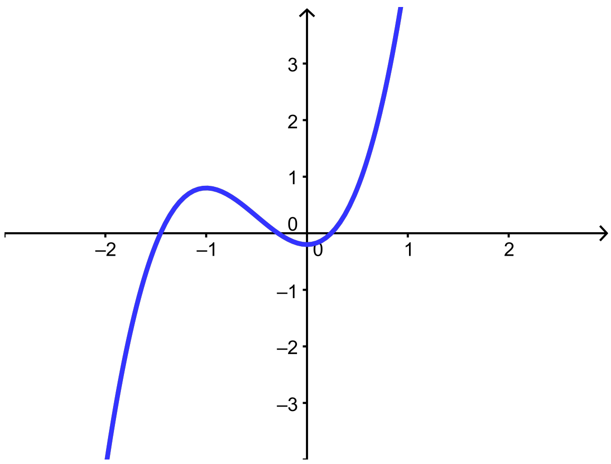


Figura 1.2: Representación gráfica de la función $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 0'2$

La respuesta a las preguntas finales ya la hemos hecho cuando realizamos el estudio del corte con el Eje X, es decir, hay dos raices negativas y una positiva.

Volver al examen

1.1.3. Enunciar el teorema de Bolzano. Calcular, con un error menor que una décima, una raíz positiva del polinomio $x^3 + x - 1$

(Septiembre 01)

- Solución:

El teorema de Bolzano puedes encontrarlo en el punto 2 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Para buscar la raiz positiva que nos piden vamos a tantear utilizando el teorema de Bolzano. Siempre que nos pidan buscar una raíz positiva o negativa tomaremos el cero como uno de los valores. Nuestra función es $f(x) = x^3 + x - 1$ y es fácil observar que la función es continua en todo $\mathbb{R}$, y por tanto, lo es en cualquier intervalo que cojamos. También se cumple que:

$$f(0) = -1 \text{ y } f(1) = 1$$

Vamos a comenzar a tantear para "acorralar" la raiz.

- $f(0'5) = -0'375 < 0 \Longrightarrow$ La raiz está en el intervalo $(0'5, 1)$.
- $f(0'7) = 0'043 > 0 \Longrightarrow$ La raiz está en el intervalo $(0'5, 0'7)$.
- $f(0'6) = -0'184 < 0 \Longrightarrow$ La raiz está en el intervalo $(0'6, 0'7)$.

La raiz, con un error menor que $0'1$ está contenida en el intervalo $(0'6, 0'7)$. Valdría cualquiera, pero parece que por el valor que toma la función en él podíamos tomar $0'7$.

Volver al examen

1.1.4. Enunciar el teorema de Bolzano y determinar si el polinomio $x^4 - 4x^2 - 1$ tiene alguna raiz real negativa.

(Junio 03)

- Solución:

El teorema de Bolzano puedes encontrarlo en el punto 2 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Vamos a aplicar el mismo para comprobar que la función tiene, al menos, una raiz negativa. Como ya dijimos en el ejercicio anterior uno de los valores a tomar será el cero.

Este hecho es evidente, pues basta con comprobar que la función toma valores de distinto signo en -5 y 0.

- $f(-5) = 625 - 100 - 1 > 0$.
- $f(0) = -1 < 0$.

Luego, según el teorema de Bolzano, como f es continua en $[-5, 0]$ y toma valores de signo contrario en -5 y 0, entonces existe un $c \in (-5, 0)$ en el que $f(c) = 0$ y por lo tanto tiene una raíz negativa.

Volver al examen

1.1.5. Enunciar el teorema de Bolzano y usarlo para probar que la ecuación $x = \cos x$ tiene solución positiva.

(Septiembre 04)

- Solución:

El teorema de Bolzano puedes encontrarlo en el punto 2 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Pasamos a la segunda parte. Como ya dijimos en el ejercicio anterior uno de los valores a tomar será el cero.

Consideramos la función $f(x) = \cos x - x$. Evidentemente su dominio es todo $\mathbb{R}$ y es también continua en todo su dominio. Además:

- $f(0) = 1 - 0 = 1 > 0$
- $f(1) = \cos 1 - 1 = 0'999847 - 1 < 0$

Por tanto, esta función cumple las hipótesis del teorema de Bolzano, y según el mismo, tiene que tener una raiz en el intervalo $(0, 1)$, y por tanto positiva.

Si no queremos apurar tanto podemos tomar $x = 2, 3, \cdots$ en lugar de $x = 1$, pues como el coseno está comprendido entre -1 y 1, al restarle la x elegida dará negativo.

Volver al examen

1.1.6.

a) Enuncie el teorema de Bolzano.

b) Aplique el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $e^x = -2x^2 + 2$ tiene soluciones. (Puede ser útil dibujar las gráficas de las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = -2x^2 + 2$.)

c) Determine un intervalo de longitud 1 donde se encuentre alguna solución de la ecuación $e^x = -2x^2 + 2$.

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

a) El teorema de Bolzano puedes encontrarlo en el punto 2 del resumen teórico que hay al principio del libro.

b) Vamos a considerar para resolver este apartado la función $h(x) = e^x + 2x^2 - 2$. Representaremos las dos funciones como nos aconsejan. Omitimos los calculos a realizar y el resultado es:

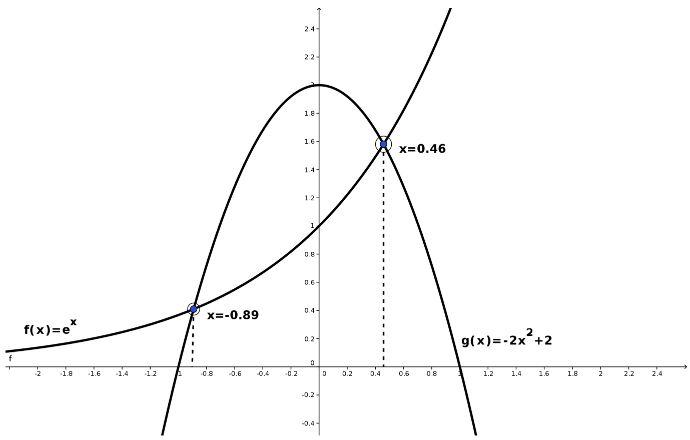


Figura 1.3: Representación gráfica de las funciones e^x y $-2x^2 + 2$

Hay que encontrar dos valores en los que tenga signo contrario la función h construida anteriormente. No es mala idea utilizar el 0 como valor siempre que sea posible; pero además en este caso es aconsejable a la vista de las gráficas. El otro valor puede ser el 1.

Tomados estos valores tenemos que es obvio que la función es continua en $[0, 1]$ y además:

- $h(0) = e^0 - 2 = -1 < 0$
- $h(1) = e + 2 - 2 = e > 0$

En consecuencia, en virtud al teorema de Bolzano existe un valor en el intervalo $(0,1)$ en el que la función $h(x)$ tiene un cero, es decir, es solución de la ecuación planteada.

c) El intervalo anterior vale para este apartado.

Volver al examen

1.1.7.

a) Enuncie el *teorema de Bolzano***.**

b) Demuestre que alguna de las raíces del polinomio $P(x) = x^4 - 8x - 1$ **es negativa.**

c) Demuestre que $P(x)$ **tiene también alguna raíz positiva.**

(Junio 13)

- Solución:

a) El teorema de Bolzano puedes encontrarlo en el punto 2 del resumen teórico que hay al principio del libro.

b) Vamos a ver cuanto vale $P(0)$ y luego tendremos que buscar un valor negativo de x en el que la función tome un valor de distinto signo que en $P(0)$.

$$P(0) = -1 < 0$$

Basta con coger $x = -1$ para encontrar el primer intervalo.

$$P(-1) = 1 + 8 - 1 = 8 > 0$$

Luego, según el teorema de Bolzano, habrá una raíz en el intervalo $(-1,0)$ y por tanto negativa.

c) Razonaremos de forma similar para la raíz positiva. Esta vez nos vale $x = 3$.

$$P(3) = 81 - 24 - 1 = 56 > 0$$

Por tanto hay una raíz en el intervalo $(0,3)$ y por tanto positiva.

Volver al examen

1.1.8.

a) Enuncie el *teorema de Bolzano***.**

b) Aplique el teorema de Bolzano para probar que la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ **tiene soluciones positivas.**

c) ¿Tiene la ecuación $\cos x = x^2 - 1$ **alguna solución negativa? Razone la respuesta.**

(Junio 14)

- Solución:

El teorema de Bolzano puedes encontrarlo en el punto 2 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Vamos a resolver el segundo apartado. Para ello vamos a considerar la función $f(x) = \cos x - x^2 + 1$. Las raíces de la ecuación que nos piden coincidirán con los valores donde se anula esta función.

Se trata, obviamente de una función continua. Veamos que cumple los demás requisitos del teorema de Bolzano, es decir, vamos a ver si podemos encontrar un intervalo positivo en los que la función tome valores de signo distinto (cuando nos piden valores positivos o negativos es una buena idea tomar como uno de los valores el cero).

En nuestro caso tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \cos 0 - 0^2 + 1 = 1 - 0 + 1 = 2 > 0 \\ f(2\pi) = \cos 2\pi - 4\pi^2 + 1 = 2 - 4\pi^2 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, c \in (0, 2\pi) \text{ donde } f(c) = 0$$

Para responder al tercer apartado tenemos varias opciones. Una de ellas sería darnos cuenta que la función $f(x)$ es par, luego si tiene un valor c positivo donde hay una raíz, el valor opuesto a éste también anulará la función.

También podemos hacer como anteriormente.

$$\left.\begin{array}{l} f(0) = \cos 0 - 0^2 + 1 = 1 - 0 + 1 = 2 > 0 \\ f(-2\pi) = \cos(-2\pi) - 4\pi^2 + 1 = 2 - 4\pi^2 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \exists\, c' \in (-2\pi, 0) \text{ donde } f(c) = 0$$

Volver al examen

1.1.9.

a) Enuncie el ***teorema de Bolzano*****.**

b) Utilizando el ***teorema de Bolzano*****, encuentre un intervalo de la recta real en el que la función polinómica $p(x) = 3x^3 - x + 1$ tenga alguna raíz.**

c) Utilizando el ***teorema de Bolzano*****, demuestre que las gráficas de las funciones $f(x) = e^x + \ln(1 + x^2)$ y $g(x) = e^x + 1$ se cortan en algún punto.**

(Junio 15)

- Solución:

El teorema de Bolzano puedes encontrarlo en el punto 2 del resumen teórico que hay al principio del libro. Veamos el segundo apartado.

Tenemos el polinomio $p(x) = 3x^3 - x + 1$. Es evidente que esta función va a ser continua en cualquier intervalo que cojamos, pues lo es en todo $\mathbb{R}$. Tenemos que encontrar pues, dos valores de x en los que el polinomio tome valores de distinto signo.

Fácilmente vemos que $p(0) = 1$. Se trata de buscar otro valor de x en el que el polinomio tome valor negativo. Sabemos que x^3 mantiene el signo del valor de x que sustituyamos.

Basta, por tanto, con tomar $x = -1$ para que el polinomio tome valores negativos, pues $p(-1) = -1$.

Como se cumplen las hipótesis del teorema para el polinomio en el intervalo $[-1, 0]$, podemos asegurar que dicho polinomio tiene al menos una raíz en el intervalo $(-1, 0)$.

Veamos por último el tercer apartado.

Para poder aplicar el teorema de Bolzano tenemos que tener una sola función. Vamos a construir la función $f - g$. Donde esta función se anule tendremos que las dos funciones toman el mismo valor.

$$(f - g)(x) = 0 \Longrightarrow f(x) - g(x) = 0 \Longrightarrow f(x) = g(x)$$

La función $f-g$ resultante es:

$$\begin{aligned}(f-g)(x) &= e^x+\ln\left(1+x^2\right)-\left(e^x+1\right)=e^x+\ln\left(1+x^2\right)-e^x-1= \\ &= \ln\left(1+x^2\right)-1\end{aligned}$$

El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$, pues $1+x^2\geqslant 1$. A su vez es obvio que la función es continua en todo $\mathbb{R}$. Nos falta por encontrar el intervalo en el que esta función toma valores de distinto signo en los extremos para que se cumplan las hipótesis del teorema. Dichos valores podían ser:

$$\begin{aligned}(f-g)(0) &= \ln 1-1<0 \\ (f-g)(2) &= \ln 5-1>0\end{aligned}$$

Luego en el intervalo $[0,2]$ se cumplen las hipótesis del teorema y por tanto en el intervalo $(0,2)$ tiene que existir $c\in(0,2)$ en el que

$$(f-g)(c)=0\Longrightarrow f(c)-g(c)=0\Longrightarrow f(c)=g(c)$$

Por tanto en ese valor c se cortan las gráficas de las dos funciones.

Volver al examen

1.1.10. Enuncie el teorema de Bolzano y demuestre, usando dicho teorema, que la función $f(x)=x^3+x-3$ tiene una raíz real positiva.

(Junio 18)

- Solución:

El enunciado del teorema podemos verlo en el resumen teórico en el punto 2.

Vamos a ver que la función cumple las hipótesis del problema en un intervalo positivo. De entrada la función es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser un polinomio.

Como buscamos una raíz positiva voy a coger como extremo inferior del intervalo el número 0. El extremo mayor será un número positivo que cumpla las condiciones del teorema. De esta forma, como el valor que cumple el teorema está en el interior del intervalo, la raíz que garantiza el mismo será positiva.

- $f(0)=-3<0$
- $f(2)=8+2-3=7>0$

Luego la función tiene una raíz en el intervalo $(0,2)$.

Volver al examen

1.2. Derivada y sus aplicaciones

1.2.1. Determinar el dominio de definición de la función $f(x) = x - \ln\left(x^2 - 1\right)$ y representar su gráfica, calculando los intervalos de crecimiento y los extremos (máximos y mínimos relativos).

(Junio 00)

- Solución:

La función no existirá en los puntos en los que $x^2 - 1 \leq 0$. Vamos a ver donde ocurre. Para ello vamos a hacer una tabla con los puntos de corte.

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

La tabla queda:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$x^2 - 1$	$+$	$-$	$+$

Luego el dominio de la función es $Domf = (-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$.

Vamos a estudiar su derivada:

$$f'(x) = 1 - \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 1 - 2x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1}$$

Vamos a estudiar su signo. Para ello vamos a igualar la derivada a cero y tendremos en cuenta el dominio antes calculado y construiremos una tabla.

$$\frac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1} = 0 \Longrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

La tabla quedaría:

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 1 + \sqrt{2})$	$(1 + \sqrt{2}, +\infty)$
$\dfrac{x^2 - 2x - 1}{x^2 - 1}$	$+$	No existe	$-$	$+$
	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$

Luego la función:

- Crece $\longrightarrow (-\infty, -1) \bigcup \left(1 + \sqrt{2}, +\infty\right)$
- Decrece $\longrightarrow \left(1, 1 + \sqrt{2}\right)$

Hay un mínimo en $\left(1 + \sqrt{2}, 0.84\right)$. Para aproximar más es bueno hacer una tabla de valores, que aquí no haremos. También es evidente que en $x = 1$ y en $x = -1$ hay asíntotas verticales, pues las tiene el logaritmo.

- $x = 1 \longrightarrow \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ (Por la izquierda no existe).
- $x = -1 \longrightarrow \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ (Por la derecha no existe).

La representación gráfica podemos verla en la figura 1.4.

Volver al examen

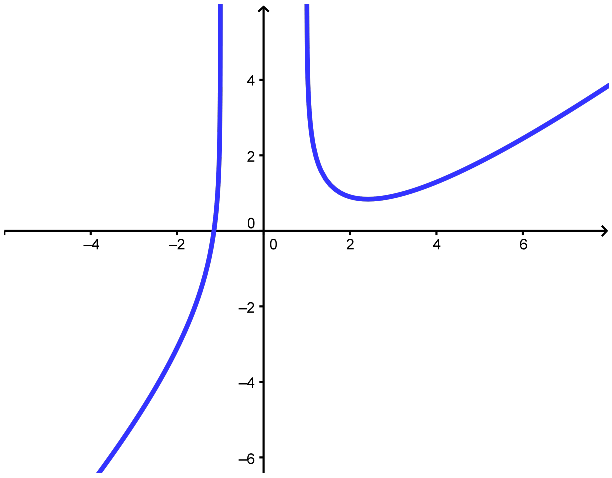


Figura 1.4: Representación gráfica de la función $f(x) = x - \ln\left(x^2 - 1\right)$

1.2.2. Definir el concepto de derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = a$, y explicar su relación con los máximos relativos de la función.

(Junio 00)

- Solución:

La solución de este ejercicio puedes encontrarla en el punto 5 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Volver al examen

1.2.3. Calcular la derivada en el punto $x = 1$ de la función $f(x) = x^{-1/2} \ln x$.

(Septiembre 00)

- Solución:

Vamos a calcular la derivada y después sustituiremos $x = 1$ en la función obtenida.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}x^{-3/2} \ln x + x^{-1/2}\frac{1}{x}$$

Sustituyendo obtenemos:

$$f'(1) = -\frac{1}{2} \cdot 1^{-3/2} \ln 1 + 1^{-1/2} \cdot 1 = 1$$

Volver al examen

1.2.4. Dadas las funciones $f(x) = x^2 + \pi$ y $g(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$, calcula la derivada en $x = 0$ de las funciones $f(g(x))$ y $g(f(x))$.

(Junio 01)

- Solución:

Tenemos dos formas de resolver este ejercicio. La primera consiste en calcular las composiciones requeridas y posteriormente derivar, y la segunda en derivar aplicando la regla de la cadena. Veamos la primera en ambas funciones:

$$f(g(x)) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + \pi = \underbrace{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}_{1} + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \pi = \operatorname{sen} 2x + \pi + 1$$

Si derivamos esta expresión tendremos:

$$[(fog)]'(x) = [f(g(x))]' = 2\,cos\,2x$$

Sustituyendo en $x = 0$ resulta:

$$[(fog)]'(0) = 2$$

Por otro lado, la otra composición nos daría:

$$g(f(x)) = \text{sen}\,(x^2 + \pi) + \cos\,(x^2 + \pi)$$

Derivando obtenemos:

$$[(gof)]'(x) = 2x\,\cos\,(x^2 + \pi) - 2x\,\text{sen}\,(x^2 + \pi)$$

Sustituyendo en $x = 0$ el resultado obtenido es:

$$[(gof)]'(0) = 0$$

Veamos ahora el otro método para la resolución del ejercicio. Lo haremos a modo de ejemplo sólo en el primer caso. Según la regla de la cadena

$$[(fog)]'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 2(\text{sen}\,x + \cos\,x)(\cos\,x - \text{sen}\,x)$$

Si sustituimos en $x = 0$ nos quedaría:

$$(fog)]'(0) = 2(\text{sen}\,0 + \cos\,0)(\cos\,0 - \text{sen}\,0) = 2$$

Obtenemos, obviamente, el mismo resultado.

Volver al examen

1.2.5. Entre todos los rectángulos de área dada ¿cuál es el de perímetro mínimo?

(Septiembre 01)

- Solución:

Vamos a buscar una función a minimizar (que dependerá en un principio de dos variables) y una igualdad que ligue las variables. En nuestro caso son:

$$\left.\begin{array}{rcl} P(x,y) & = & 2x + 2y \\ A & = & x \cdot y \end{array}\right] \begin{array}{l} \Longrightarrow P(x) = 2x + \dfrac{2A}{x} = \dfrac{2x^2 + 2A}{x} \\ \Longrightarrow y = \dfrac{A}{x}\ (1) \end{array}$$

Vamos a derivar la función obtenida:

$$P'(x) = \frac{4x \cdot x - (2x^2 + 2A)}{x^2} = \frac{4x^2 - 2x^2 - 2A}{x^2} = \frac{2x^2 - 2A}{x^2}$$

Igualando la derivada a cero obtenemos:

$$\frac{2x^2 - 2A}{x^2} = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 2A = 0 \Longrightarrow x^2 = A \Longrightarrow x = \pm\sqrt{A}$$

De las dos obtenidas sólo vale la positiva. Vamos a calcular la segunda derivada para ver que hay un mínimo.

$$P''(x) = \frac{4x \cdot x^2 - 2x(2x^2 - 2A)}{x^4} = \frac{4x^3 - 4x^3 + 4Ax}{x^4} = \frac{4Ax}{x^4}$$

Sustituyendo el valor de x obtenido tenemos:

$$P''\left(\sqrt{A}\right) = \frac{4A\sqrt{A}}{A^2} > 0$$

luego hay un mínimo. Sustituyendo $x = \sqrt{A}$ en (1) podemos calcular y.

$$x = \sqrt{A} \Longrightarrow y = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$$

Se trata por tanto de un cuadrado de lado $\sqrt{A}$.

Volver al examen

1.2.6. Definir el concepto de derivada de una función $f(x)$ en un punto $x = a$ y explicar su relación con el crecimiento de la función.

(Junio 02)

- Solución:

La respuesta puedes encontrarla en los puntos 5 y 11 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Volver al examen

1.2.7. Representar la gráfica de la función $f(x) = 2x + (2x)^{-1}$, determinando los intervalos donde es creciente.

(Junio 02)

- Solución:

Nuestra función podemos ponerla $f(x) = 2x + (2x)^{-1} = 2x + \dfrac{1}{2x} = \dfrac{4x^2+1}{2x}$.

Vamos a buscar algunos datos para poder representarla.

Es evidente que el dominio de la función es $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$. También es obvio que tiene una asíntota vertical en $x = 0$, que no corta al eje X, ni al eje Y.

Vamos a estudiar la derivada.

$$f'(x) = \frac{8x \cdot 2x - 2 \cdot (4x^2 + 1)}{4x^2} = \frac{16x^2 - 8x^2 - 2}{4x^2} = \frac{8x^2 - 2}{4x^2}$$

Igualando a cero tenemos:

$$\frac{8x^2 - 2}{4x^2} = 0 \Longrightarrow 8x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{2}$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada para especificar donde crece y donde decrece, así como los máximos y mínimos, si los tiene.

	$(-\infty, -1/2)$	$(-1/2, 0)$	$(0, 1/2)$	$(1/2, +\infty)$
$\dfrac{8x^2-2}{4x^2}$	$+$ $\nearrow$	$-$ $\searrow$	$-$ $\searrow$	$+$ $\nearrow$

En consecuencia tenemos que:

- Crece $\longrightarrow (-\infty, -1/2) \cup (1/2, +\infty)$.

- Decrece $\longrightarrow (-1/2, 0) \cup (0, 1/2)$.

- Máximo $\longrightarrow (-1/2, -2)$.

- Mínimo $\longrightarrow (1/2, 2)$.

Para afinar la representación puede hacerse una pequeña tabla de valores, viendo la representación en la figura 1.5.

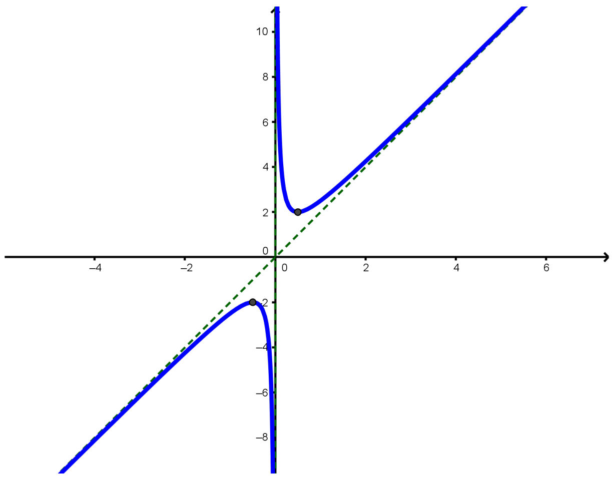


Figura 1.5: Representación gráfica de la función $f(x) = 2x + (2x)^{-1}$

Volver al examen

1.2.8. Representar la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^{-3}$, determinando sus extremos (máximos y mínimos relativos).

(Septiembre 02)

- Solución:

Nuestra función escrita en forma de fracción es:

$$f(x) = x^3 + x^{-3} = x^3 + \frac{1}{x^3} = \frac{x^6+1}{x^3}$$

Es evidente que su dominio es $Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$. Además la función es impar, pues:

$$f(-x) = \frac{(-x)^6+1}{(-x)^3} = \frac{x^6+1}{-x^3} = -\frac{x^6+1}{x^3} = -f(x)$$

Vamos a ver los puntos de corte con los ejes:

- Eje X $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.

$$\frac{x^6+1}{x^3} = 0 \Longrightarrow x^6 + 1 = 0 \Longrightarrow \text{ No corta.}$$

- Eje Y $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$. En este caso no corta, pues $x = 0$ no pertenece al dominio.

Vamos a calcular la primera derivada para hallar los máximos y los mínimos.

$$y' = \frac{6x^5.x^3 - 3x^2\left(x^6+1\right)}{x^6} = \frac{6x^8 - 3x^8 - 3x^2}{x^6} = \frac{3x^8 - 3x^2}{x^6}$$

Si igualamos a cero resulta

$$\frac{3x^8 - 3x^2}{x^6} = 0 \Longrightarrow 3x^8 - 3x^2 = 0 \Longrightarrow 3x^2\left(x^6 - 1\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \Longrightarrow \text{No pertenece al dominio.} \\ x^6 - 1 = 0 \Longrightarrow x^6 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1 \end{cases}$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada y así podemos decidir los máximos y mínimos.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$\frac{3x^8-3x^2}{x^6}$	$+$	$-$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

De aquí deducimos que la función tiene:

- Un máximo en el punto $(-1,-2)$.

- Un mínimo en el punto $(1,2)$.

Es fácil observar que la función tiene una asíntota vertical en la recta $x = 0$ y que no tiene asíntotas ni horizontales, ni oblicuas.

Puede hacerse una tabla de valores para afinar más la representación gráfica, pero no la haremos aquí. La representación gráfica pedida podemos verla en la figura 1.6.

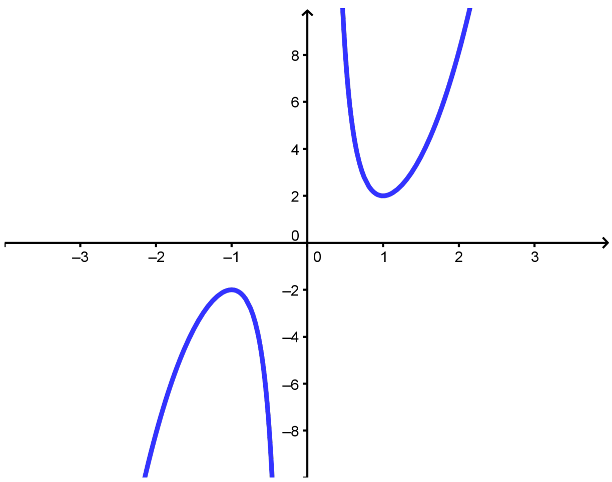


Figura 1.6: Representación gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^{-3}$

Volver al examen

1.2.9. Enuncia la regla de L'Hôpital y calcula el límite

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - cos(2\pi x)}{(x-1)^2}$$

(Septiembre 02)

- Solución:

La parte teórica de la pregunta puedes encontrarla en el punto 14 del resumen teórico que hay al principio del libro. Vamos a resolver el límite.

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-cos(2\pi x)}{(x-1)^2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{2}\pi sen(2\pi x)}{\cancel{2}(x-1)} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 1} \frac{2\pi^2 cos(2\pi x)}{1} = 2\pi^2$$

Volver al examen

1.2.10. Representar gráficamente la función $f(x) = e^x - ex$, determinando sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos). ¿Existe algún valor de x en que $f(x)$ sea negativo?

(Junio 03)

- Solución:

Vamos a empezar, como siempre, por ver su dominio.

- Es evidente que el $Dom f = \mathbb{R}$.

- Veamos ahora los cortes con los ejes:

  - Eje X. $\longrightarrow$ Hacemos $y = 0$.
    $e^x - ex = 0 \Longrightarrow e^x = ex \Longrightarrow x = 1$
  - Eje Y. $\longrightarrow$ Hacemos $x = 0$.
    $f(0) = 1$

- Vamos a realizar la derivada, la igualaremos a cero y la estudiaremos la misma.

$$f'(x) = e^x - e = 0 \Longrightarrow e^x = e \Longrightarrow x = 1$$

	$(-\infty, 1)$	$(1, \infty)$
$e^x - e$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$

Luego tiene un mínimo en el punto $(1, 0)$. Para afinar la representación vamos a hacer una tabla de valores:

x	-1	0	1	2	3
y	3.09	1	0	1.95	11.93

La representación gráfica podemos verla en la figura 1.7.

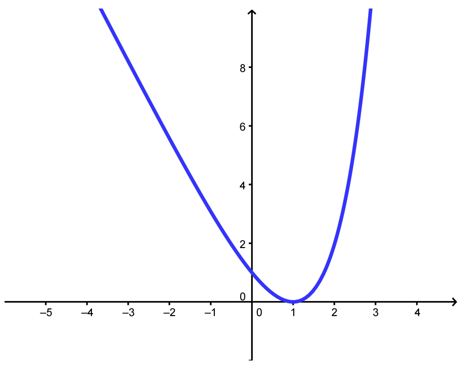


Figura 1.7: Representación gráfica de la función $f(x) = e^x - ex$

En cuanto al interrogante que nos hacen la respuesta es evidente viendo la gráfica, pero también puede razonarse si tenemos en cuenta que tiene un mínimo en el punto $(1,0)$. La respuesta obvia es no.

Volver al examen

1.2.11. Determinar una recta tangente a la parábola $y = 2 - x^2$ que sea paralela a la recta de ecuación $2x + y = 4$.

(Junio 03)

- Solución:

Como es paralela a la recta $2x + y = 4$ la ecuación de la recta que buscamos tiene que ser de la forma $2x + y = k$ y de aquí deducimos que su pendiente tiene que ser $m = -2$.

Vamos a ver donde tiene la función $y = 2 - x^2$ una recta tangente con pendiente $m = -2$.

$$m_{tg} = f'(x) = -2x = -2 \Longrightarrow x = 1$$

Luego el punto en el que se produce la tangente es $f(1) = 2 - 1 = 1 \Longrightarrow (1,1)$.

Por tanto, para calcular k basta con sustituir el punto en la ecuación de la recta $2x + y = k$.

$$2x + y = k \text{ en } (1,1) \Longrightarrow 2 + 1 = k \Longrightarrow k = 3.$$

Luego la recta buscada es

$$2x + y = 3$$

Volver al examen

1.2.12. Con un alambre de dos metros se desea formar un cuadrado y un círculo. Determinar el lado del cuadrado y el radio del círculo para que la suma de sus áreas sea mínima.

(Septiembre 03)

- Solución:

Para plantear el problema buscamos una función a minimizar (que estará en función de dos variables) y una ecuacuón que ligue las variables. Estas ecuaciones son:

$$\begin{array}{l} A(l,r) = l^2 + \pi r^2 \Longrightarrow \text{ Función a minimizar.} \\ 4l + 2\pi r = 2 \Longrightarrow 2l + \pi r = 1 \Longrightarrow \text{ Ecuación que liga las variables.} \end{array}$$

Vamos a despejar l en la última ecuación, resultando:

$$l = \frac{1 - \pi r}{2} \tag{1.1}$$

Sustituyendo en la primera tenemos:

$$A(r) = \left(\frac{1 - \pi r}{2}\right)^2 + \pi r^2 = \frac{1 + \pi^2 r^2 - 2\pi r}{4} + \pi r^2 = \frac{1 + \pi^2 r^2 - 2\pi r + 4\pi r^2}{4} =$$

$$= \frac{(\pi^2 + 4\pi) r^2 - 2\pi r + 1}{4}$$

Derivando la expresión obtenemos:

$$A'(r) = \frac{1}{\cancel{4}_{2}} \cdot \left[\cancel{2}(\pi^2 + 4\pi)r - \cancel{2}\pi\right] = \frac{(\pi^2 + 4\pi)r - \pi}{2}$$

Igualando a cero resulta:

$$\frac{(\pi^2 + 4\pi)r - \pi}{2} = 0 \Longrightarrow (\pi^2 + 4\pi)r - \pi = 0 \Longrightarrow (\pi^2 + 4\pi)r = \pi \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (\pi + 4)r = 1 \Longrightarrow r = \frac{1}{\pi + 4} \text{ u.}$$

Si hacemos la segunda derivada resulta:

$$A''(r) = \frac{\pi^2 + 4\pi}{2} > 0 \text{ para cualquier valor de r.}$$

En consecuencia para el valor de r que nosotros hemos calculado la función tiene un mínimo. Vamos a calcular l sustituyendo en la igualdad (1.1).

$$l = \frac{1 - \pi\frac{1}{\pi+4}}{2} = \frac{1 - \frac{\pi}{\pi+4}}{2} = \frac{\cancel{\pi} + 4 - \cancel{\pi}}{2\pi + 8} = \frac{4}{2\pi + 8} = \frac{2}{\pi + 4} \text{ u.}$$

Volver al examen

1.2.13. Determinar en qué puntos es negativa la derivada de la función $f(x) = e^x x^{-2}$.

(Septiembre 03)

- Solución:

Nuestra función es $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2}$. Su derivada por tanto será:

$$f'(x) = \frac{e^x x^2 - 2xe^x}{x^4} = \frac{xe^x(x-2)}{x^4}$$

Vamos a estudiar su signo. Calculamos para ello las raices del numerador y del denominador.

- Raices del numerador:

$$xe^x(x-2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0. \\ e^x = 0 \Longrightarrow \text{ No tiene solución.} \\ x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2. \end{cases}$$

- Raices del denominador:

$$x^4 = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

Con los valores obtenidos construimos una tabla para estudiar el signo de la derivada.

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$\frac{xe^x(x-2)}{x^4}$	$+$	$-$	$+$

Por tanto es negativa en el intervalo $(0, 2)$.

Volver al examen

1.2.14. Determinar el mayor área que puede encerrar un triángulo rectángulo cuyo lado mayor mida 1 metro.

(Junio 04)

- Solución:

La figura 1.8 nos muestra la idea.

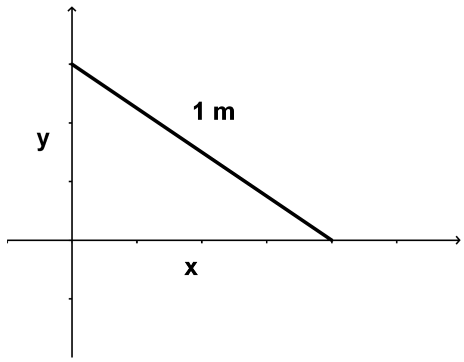


Figura 1.8: Visión gráfica del problema

Nosotros iremos moviendo la hipotenusa (lado mayor) haciendo variar x e y.

Necesitamos pues una función a maximizar (el área) y otra que ligue las dos variables. Dichas ecuaciones son:

$$A(x,y) = \frac{x.y}{2} \text{ (Función a maximizar)}$$
$$x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2} \text{ (Ecuación que liga las variables)}$$

Por tanto, si sustituimos la y en la primera función obtenemos:

$$A(x) = \frac{x \cdot \sqrt{1-x^2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1-x^2}$$

Vamos a derivar para ver los puntos que anulan dicha derivada. Entre estos valores se encuentran los máximos y los mínimos.

$$A'(x) = \frac{1}{2}\left[\sqrt{1-x^2} + \frac{x \cdot (-\cancel{2}x)}{\cancel{2} \cdot \sqrt{1-x^2}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1-x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right] = \frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$$

Igualando esta expresión a cero tenemos:

$$\frac{1-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}} = 0 \Longrightarrow -2x^2+1 = 0 \Longrightarrow 2x^2 = 1 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Para ver que tenemos en ese punto un máximo vamos a estudiar el signo de la derivada a ambos lados del número.

Tenemos que $A'(0) = \dfrac{1}{2} > 0$ y $A'(0'8) = \dfrac{-0'28}{1'2} < 0$ y por tanto hay un máximo.

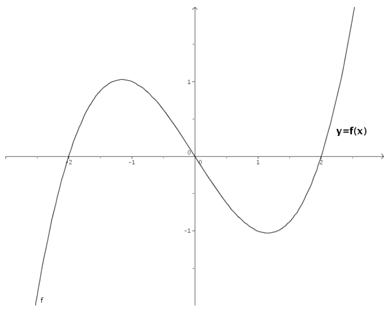
En conclusión tenemos que:

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ é } y = \sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

.

Volver al examen

1.2.15. Si la gráfica de una función $f(x)$ es:



representar aproximadamente la gráfica de la derivada $f'(x)$.

(Junio 04)

- Solución:

Observando la gráfica tenemos que la función tiene las siguientes características:

- Crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \longrightarrow$ Luego ahí $f'(x) > 0$.
- Decrece en $(-1, 1) \longrightarrow$ Luego ahí $f'(x) < 0$.
- Tiene un máximo en $(-1, 1) \Longrightarrow f'(-1) = 0$.
- Tiene un mínimo en $(1, -1) \Longrightarrow f'(1) = 0$.
- Es convexa en $(-\infty, 0) \Longrightarrow f''(x) < 0 \Longrightarrow f'$ es decreciente en $(-\infty, 0)$.
- Es cóncava en $(0, +\infty) \Longrightarrow f''(x) > 0 \Longrightarrow f'$ es creciente en $(0, +\infty)$.
- Hay un punto de inflexión en $x = 0$ como conclusión de los puntos anteriores, por tanto tiene un mínimo en $x = 0$.

Con todos estos datos tenemos que la gráfica podría ser la que vemos en la figura 1.9.

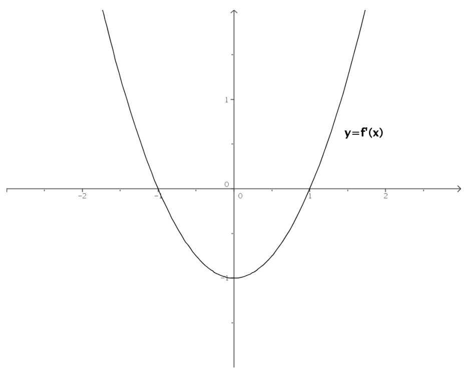
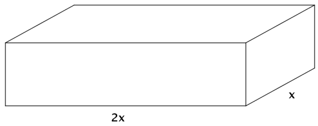


Figura 1.9: Representación aproximada de la función buscada

Volver al examen

1.2.16. Se desea construir un paralelepípedo rectangular de 9 litros de volumen y tal que un lado de la base sea doble que el otro. Determinar las longitudes de sus lados para que el área total de sus 6 caras sea mínima.

(Septiembre 04)



- Solución:

Queremos minimizar el área total. Dicho área es la suma de las áreas de las seis caras. En el figura 1.10 podemos ver que este área es:

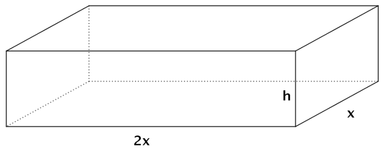


Figura 1.10: Visión gráfica del ejercicio

$$A(x,h) = 2.(2x.h) + 2.(h.x) + 2.(2x.x) = 4xh + 2xh + 4x^2 = 4x^2 + 6xh$$

Para ligar las variables tenemos el volumen que cumple

$$V = A_b \cdot h = 2x.x.h = 2x^2.h = 9 \Longrightarrow h = \frac{9}{2x^2}$$

Por tanto la función área queda:

$$A(x) = 4x^2 + \overset{3}{\cancel{6}}\cancel{x}\frac{9}{\cancel{2}x^{\cancel{2}}} = 4x^2 + \frac{27}{x} = \frac{4x^3+27}{x}$$

Si derivamos tendremos:

$$A'(x) = \frac{12x^2.x - (4x^3+27)}{x^2} = \frac{12x^3 - 4x^3 - 27}{x^2} = \frac{8x^3-27}{x^2} = 0$$

Por tanto, la derivada se anula cuando $8x^3 - 27 = 0$. De aquí deducimos que:

$$8x^3 - 27 = 0 \Longrightarrow 8x^3 = 27 \Longrightarrow x^3 = \frac{27}{8} \Longrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{27}{8}} = \frac{3}{2}\ dm.$$

Las unidades son dm pues el volumen es en litros. Si estudiamos el comportamiento de la derivada en puntos próximos al obtenido vemos que se trata de un mínimo.

$$A'(1) = \frac{-19}{1} < 0 \text{ y } A'(2) = \frac{37}{4} > 0$$

En conclusión tenemos que $x = \dfrac{3}{2} \Longrightarrow h = \dfrac{9}{2.\frac{9}{4}} = \dfrac{36}{18} = 2$ dm.

Y estos eran los valores buscados.

Volver al examen

1.2.17. **Determinar los puntos de la curva plana $y^3 = 2x$ en que la recta tangente es perpendicular a la recta $y + 6x = 0$.**

(Septiembre 04)

- Solución:

La curva de la que hablamos tiene ecuación $y^3 = 2x \Longrightarrow y = \sqrt[3]{2x} = (2x)^{\frac{1}{3}}$. Por otro lado tenemos que la recta es $y + 6x = 0 \Longrightarrow y = -6x \Longrightarrow m = -6$.

De aquí deducimos que la perpendicular tiene por pendiente $m_{tg} = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{1}{6}$.

Vamos a ver en que puntos tiene la curva pendiente $\dfrac{1}{6}$. Para ello derivamos la función y la igualamos a $\dfrac{1}{6}$.

$$y' = \frac{1}{3}(2x)^{-2/3}.2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}} = m_{tg}$$

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}} = \frac{1}{6} \Longrightarrow 3\sqrt[3]{4x^2} = 12 \Longrightarrow \sqrt[3]{4x^2} = 4 \Longrightarrow 4x^2 = 64 \Longrightarrow x^2 = 16 \Longrightarrow x = \pm 4$$

Por tanto, los puntos buscados son $P_1(4,2); P_2(-4,-2)$.

Volver al examen

1.2.18. **Hallar la derivada en $x = 0$ de la función $f(f(x))$, donde $f(x) = (1+x)^{-1}$.**

(Junio 05)

- Solución:

Tenemos que $f(x) = (1+x)^{-1} = \dfrac{1}{1+x} \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}$.

Es obvio que $f(0) = 1$, que $f'(0) = -1$ y que $f'(1) = -\dfrac{1}{4}$.

Aplicamos la regla de la cadena:

$$[f(f(0))]' = f'\left(f(0)\right).f'(0) = f'(1).(-1) = \frac{-1}{4}.(-1) = \frac{1}{4}$$

Volver al examen

1.2.19. **Representar gráficamente la función $f(x) = x - 2 \text{ sen } x$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$, determinando sus extremos (máximos y mínimos relativos).**

(Junio 05)

- Solución:

Tenemos la función $f(x) = x - 2 \text{ sen } x$ en el intervalo $-\pi < x < \pi$

Es obvio que el dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$. También es evidente que no hay asíntotas. Vamos a estudiar la derivada:

$$f'(x) = 1 - 2\cos x = 0 \Longrightarrow -2\cos x = -1 \Longrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ y } x = -\frac{\pi}{3}$$

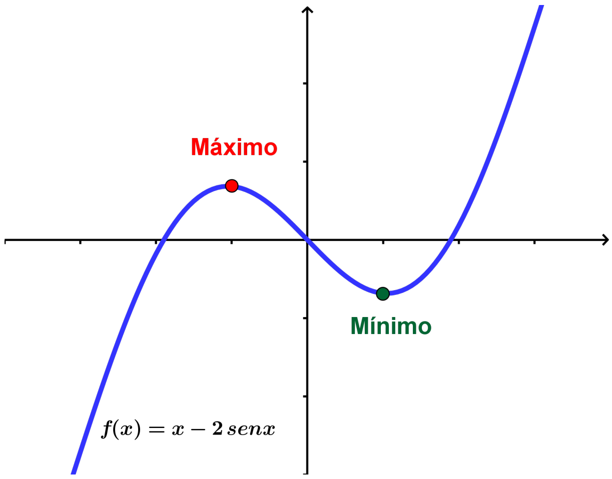
	$\left(-\pi, -\frac{\pi}{3}\right)$	$\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right)$	$\left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$
$1 - 2\cos x$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

De este estudio deducimos que hay un máximo en $x = -\dfrac{\pi}{3}$ y un mínimo en $x = \dfrac{\pi}{3}$

Para representarla tendríamos que hacer una tabla de valores:

x	0	2	-2	3	-3	$-\pi/3$	$\pi/3$
y	0	$0'18$	$-0'18$	$2'71$	$-2'71$	$0'68$	$-0'68$

Su representación gráfica sería:



Volver al examen

1.2.20. Enunciar el Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial. Usarlo para demostrar que para cualesquiera números reales $x < y$ se verifica que $\cos y - \cos x \leq y - x$.

(Septiembre 05)

- Solución:

El enunciado del teorema puedes encontrarlo en el punto 10 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Vamos a considerar la función $f(x) = \cos x$ que es obviamente continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, y por lo tanto lo será en cualquier intervalo $[x, y]$. En consecuencia:

$$\exists\, c \in (x, y) \;/\; f'(c) = \frac{\cos y - \cos x}{y - x}$$

Ahora bien, $f'(x) = -\operatorname{sen} x \Longrightarrow f'(c) = -\operatorname{sen} c \Longrightarrow f'(c) \leq 1$.

De aquí deducimos lo que queríamos:

$$\frac{\cos y - \cos x}{y - x} \leq 1 \Longrightarrow \cos y - \cos x \leq y - x$$

Volver al examen

1.2.21. Hallar la derivada en el punto $x = 0$ de la función $f(f(x))$, donde $f(x) = \operatorname{sen} x$.

(Septiembre 05)

- Solución:

Vamos a realizar la derivada por la regla de la cadena:

$$[(fof)]'(0) = f'(f(0)) \cdot f'(0) = \cos(\operatorname{sen}(0)) \cdot \cos 0 = \cos 0 \cdot \cos 0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Volver al examen

1.2.22. Calcula

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{\text{sen}^2\ x}$$

(Junio 06)

- Solución:

Vamos a resolver el límite por la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-e^x}{\text{sen}^2\ x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{2\ \text{sen}\ x\ \cos\ x} = \lim_{x\to 0} \frac{1-e^x}{\text{sen}\ 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{2\ \cos\ 2x} = \frac{-1}{2}$$

Volver al examen

1.2.23. Define el concepto de máximo relativo de una función $f(x)$ y enuncia su relación con las derivadas sucesivas de $f(x)$.

(Junio 06)

- Solución:

La respuesta puedes encontrarla en el punto 12 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Volver al examen

1.2.24. Dada la función

$$f(x) = \frac{\text{sen}\ x + \text{sen}\,(x+1)}{\cos\ x - \cos\,(x+1)}$$

en el intervalo $0 < x < 2\pi$, calcula su derivada, simplificándola en lo posible. ¿Es constante esta función $f(x)$?

(Septiembre 06)

- Solución:

Vamos a calcular la derivada que nos piden.

$$f'(x) = \frac{[\cos\ x + \cos\,(x+1)] \cdot [\cos\ x - \cos\,(x+1)] - [\text{sen}\ x + \text{sen}\,(x+1)] \cdot [-\,\text{sen}\ x + \text{sen}\,(x+1)]}{[\cos\ x - \cos\,(x+1)]^2} =$$

$$= \frac{\cos^2\ x - \cos^2\,(x+1) + \text{sen}^2\ x - \text{sen}^2\,(x+1)}{[\cos\ x - \cos\,(x+1)]^2} = \frac{1-1}{[\cos\ x - \cos\,(x+1)]^2} = 0$$

De esto deducimos que la función es constante, pues su derivada es cero para cualquier valor de x.

Volver al examen

1.2.25. Calcula las asíntotas y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = (1+x^2)^{-1}x$. A partir de los resultados obtenidos, dibuja la gráfica de la función $f(x)$.

(Septiembre 06)

- Solución:

Nuestra función es $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Es evidente que su dominio es todo $\mathbb{R}$, pues no se anula el denominador.

Vamos a hallar las asíntotas.

- Asíntotas verticales: Como no se anula el denominador no hay asíntotas verticales.

- Asíntotas horizontales:

  - $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = 0.$
  - $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{1+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x}{1+x^2} = 0.$

  Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal tanto en $+\infty$, como en $-\infty$.

- Asíntotas oblicuas: Al tener asíntotas horizontales no tiene oblicuas.

Vamos a estudiar su derivada:

$$f'(x) = \frac{1+x^2-2x.x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}$$

Veamos para que valores se anula la derivada:

$$\frac{-x^2+1}{(1+x^2)^2} = 0 \Longrightarrow -x^2+1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Estudiemos su signo para ver el crecimiento y el decrecimiento:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
$\dfrac{-x^2+1}{(1+x^2)^2}$	$-$	$+$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

De aquí deducimos que:

- La función crece en el intervalo $(-1,1)$.
- La función decrece en $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$.
- La función tiene un máximo en el punto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$.
- La función tiene un mínimo en el punto $\left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$.
- También es evidente que corta a los ejes en el punto $(0,0)$.

Por tanto su representación gráfica la podemos ver en la figura 1.11.

Volver al examen

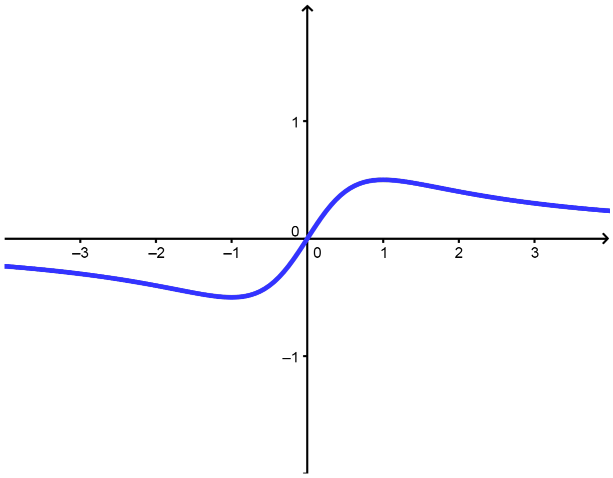


Figura 1.11: Representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

1.2.26.

a) Enuncia la regla de la cadena para derivar funciones compuestas.

b) Dada la función $h(x) = e^{\text{sen}\,(f(x))}$, calcula el valor de su derivada en $x = 0$, sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$.

(Junio 07)

- Solución:

a) La respuesta puedes encontrarla en el punto 8 del resumen teórico que hay al principio del libro.

b) Aplicando reiteradamente la regla de la cadena tenemos que:

$$h'(x) = e^{\text{sen}\,(f(x))} \cdot [\text{sen}\,(f(x))]' = e^{\text{sen}\,(f(x))} \cdot \cos(f(x)) \cdot f'(x)$$

Por tanto:

$$h'(0) = e^{\text{sen}\,(f(0))} \cdot \cos(f(0)) \cdot f'(0) = e^{\text{sen}\,0} \cdot \cos(0) \cdot 1 = e^0 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

Volver al examen

1.2.27. Determina los puntos de la parábola $y = x^2$ que están a mínima distancia del punto $P = (0, 1)$.

(Junio 07)

- Solución:

Los puntos de la parábola tienen la forma genérica $Q(x, x^2)$. La distancia de P a Q será:

$$d(P,Q) = g(x) = \sqrt{x^2 + (x^2-1)^2} = \sqrt{x^2 + x^4 - 2x^2 + 1} = \sqrt{x^4 - x^2 + 1}$$

Vamos a ver donde es mínima esa distancia.

$$g'(x) = \frac{4x^3 - 2x}{2\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}} = \frac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}} = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2x^3 - x = 0 \Longrightarrow x(2x^2-1) = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ 2x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{array} \right.$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada para ver donde la distancia es mínima.

	$\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$	$\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
$\dfrac{2x^3 - x}{\sqrt{x^4 - 2x^2 + 1}}$	$-$	$+$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hay mínimos. Luego los puntos buscados son $P_1\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ y $P_2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$.

Volver al examen

1.2.28.

a) Enuncia el Teorema de Rolle.

b) Prueba que la función $f(x) = x^3 + x^2 - x - 1$ satisface las hipótesis en el intervalo $[-1,1]$ y calcula un punto del intervalo abierto $(-1,1)$ cuya existencia asegura el Teorema de Rolle.

(Septiembre 07)

- Solución:

a) La parte teórica puedes encontrarla en el punto 9 del resumen teórico que hay al principio del libro.

b) Vamos a empezar por ver que se cumplen las hipótesis:

- Obviamente es continua en $[-1,1]$, pues es un polinomio.
- Por la misma razón sabemos que también es derivable.
- También se cumple la tercera premisa

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1)^2 - (-1) - 1 = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$$

$$f(1) = (1)^3 + (1)^2 - (1) - 1 = 1 + 1 - 1 - 1 = 0$$

En consecuencia se cumple el teorema. Vamos a encontrar el punto donde la derivada vale cero:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{6} = \frac{-2 \pm 4}{6} = \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ x = -1 \end{array} \right.$$

Luego el punto buscado es $x = \dfrac{1}{3} \in (-1,1)$, ya que $x = -1$ no está en el interior del intervalo.

Volver al examen

1.2.29. **Para la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$:**

a) Comprueba que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en $+\infty$.

b) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Con los datos anteriores, haz una representación aproximada de la gráfica de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$.

(Septiembre 07)

- Solución:

a) Vamos a ver cuanto vale el límite.

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 \cdot e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

Para lo anterior hay que tener en cuenta que e^x es un infinito de orden superior que x^2. También puede aplicarse dos veces la regla de L'Hôpital para comprobarlo.

Por tanto la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal en $+\infty$.

b) Vamos a calcular la derivada.

$$f(x) = x^2 \cdot e^{-x} = \frac{x^2}{e^x}$$

$$f'(x) = \frac{2xe^x - x^2e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x\left(2x - x^2\right)}{(e^x)^2} = \frac{2x - x^2}{e^x}$$

Igualando a cero tenemos.

$$\frac{2x - x^2}{e^x} = 0 \Longrightarrow 2x - x^2 = 0 \Longrightarrow x(2 - x) = 0 \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ 2 - x = 0 \Longrightarrow x = 2 \end{array} \right.$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$\frac{2x - x^2}{e^x}$	$-$	$+$	$-$
	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$

Por tanto:

- Crece $\longrightarrow (0, 2)$.
- Decrece $\longrightarrow (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

c) Acompaña lo que ya sabemos por los apartados anteriores de una tabla de valores. Para formar dicha tabla basta tomar valores en -2, -1, 0, 1 y 2. Nosotros aquí la omitimos, pero la gráfica resultante puedes verla en la figura 1.12.

Volver al examen

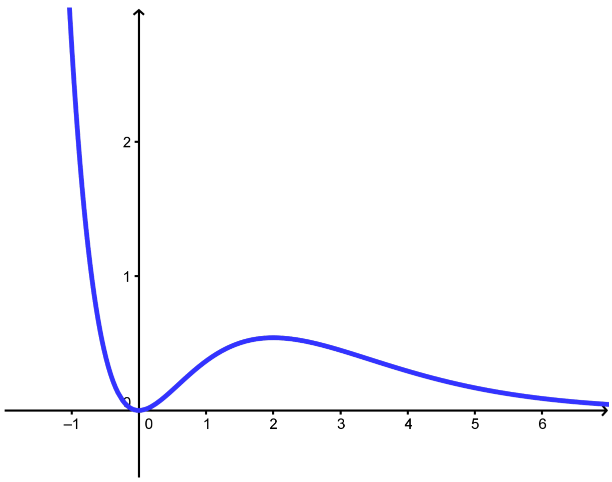


Figura 1.12: Representación gráfica de la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$

1.2.30.

a) Enuncia la condición que se debe cumplir para que una recta $y = l$ sea asíntota horizontal de una función $f(x)$ en $+\infty$.

b) Calcula las asíntotas verticales y horizontales (en $+\infty$ y en $-\infty$) de la función

$$f(x) = \frac{3x-1}{\sqrt{x^2-1}}$$

(Junio 08)

- Solución:

a) Tiene que ocurrir que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$.

b) En primer lugar vamos a ver cual es el dominio de la función. Por un lado tenemos una raiz, por tanto, $x^2 - 1 \geq 0$. Además, como la raiz está en el denominador no puede valer cero, en consecuencia:

$$x^2 - 1 > 0$$

Para resolver la inecuación, resolvemos la ecuación asociada.

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Construimos la tabla

	$(-\infty,-1)$	$(-1,1)$	$(1,+\infty)$
x^2-1	$+$	$-$	$+$

Luego el dominio de la función es $Dom f = (-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

Veamos las asíntotas.

- Asíntotas verticales: Estudiaremos las asíntotas en aquellos puntos que anulan el denominador.
  - $x = -1$ Aqui sólo estudiaremos el límite por la izquierda, pues por la derecha no hay función.
    $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^-} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \left[\dfrac{-4}{0}\right] = -\infty$. Luego es una A.V.

- $x = 1$ Aqui sólo estudiaremos el límite por la derecha, pues por la izquierda no hay función.
  $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \left[\dfrac{2}{0}\right] = +\infty$. Luego es una A.V.

- Asíntotas horizontales:
  - $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x}{x} = 3$
    Luego $y = 3$ es asíntota horizontal cuando $x \to +\infty$.
  - $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-3x-1}{\sqrt{x^2-1}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x}{\sqrt{x^2}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{-3x}{x} = -3$
    Luego $y = -3$ es asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$.

Volver al examen

1.2.31. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2}{e^{x^2}-1}$$

(Junio 08)

- Solución:

Tenemos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x-1)^2}{e^{x^2}-1} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$.
Vamos a resolverlo utilizando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)^2}{e^{x^2}-1} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2(e^x-1)e^x}{2xe^{x^2}} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2(e^x-1)e^x + 2e^xe^x}{2e^{x^2}+4x^2e^{x^2}} = \frac{0+2}{2+0} = 1$$

Volver al examen

1.2.32.

a) Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$$

b) Indica, razonadamente, el valor que debe tomar a para que la siguiente función sea continua:

$$f(x) = \begin{cases} a & si \quad x = 0 \\ \dfrac{\ln(x^2+1)}{x} & si \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Nota: ln denota el logaritmo neperiano.

(Septiembre 08)

- Solución:

a) Sustituyendo tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Vamos a resolverlo utilizando L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{x^2+1} = 0$$

b) Tenemos la función

$$f(x) = \begin{cases} a & si \quad x = 0 \\ \dfrac{\ln\left(x^2+1\right)}{x} & si \quad x \neq 0 \end{cases}$$

Obviamente la función es continua en todo $\mathbb{R}$ salvo en el cero, por ser cociente de funciones continuas ($x^2 + 1 > 0$).

Para que sea continua en el cero, el límite de la función en dicho punto y el valor de la función en él tienen que coincidir. Como en el apartado anterior vimos que el límite valía cero, deducimos que a debe valer cero.

Volver al examen

1.2.33. Halla los puntos de la curva de ecuación $y = x^3 - 2x^2 + 1$ donde la recta tangente es paralela a la recta $y + x - 2 = 0$.

(Septiembre 08)

- Solución:

Sabemos que la pendiente de la recta tangente coincide con el valor de la derivada en el punto, si esta existe. Además, decir que la recta tangente es paralela a la recta dada es sinónimo de decir que sus pendientes son iguales. Por tanto:

$$\begin{aligned} & f'(x) = 3x^2 - 4x \\ & y + x - 2 = 0 \Longrightarrow y = -x + 2 \Longrightarrow m = -1 \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$3x^2 - 4x = -1 \Longrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{4+2}{6} = 1 \\ \\ \dfrac{4-2}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$$

Luego los puntos buscados son:

$$- \; f(1) = 1 - 2 + 1 = 0 \Longrightarrow P_1(1, 0)$$

$$- \; f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + 1 = \frac{1 - 6 + 27}{27} = \frac{22}{27} \Longrightarrow P_2\left(\frac{1}{3}, \frac{22}{27}\right)$$

Volver al examen

1.2.34.

a) Diga cuando un punto $(x_0, f(x_0))$ es de inflexión para una función $f(x)$.

b) Calcule los coeficientes a y b del polinomio $p(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1$ para que su gráfica pase por el punto $(1, 1)$, teniendo aquí un punto de inflexión.

c) Diga, razonadamente, si en el punto $(1, 1)$ la función $p(x)$ es creciente o decreciente.

(Junio 09)

- Solución:

Vamos a contestar a cada apartado.

a) Para que $(x_0, f(x_0))$ sea un punto de inflexión tienen que ocurrir dos cosas, $f''(x_0) = 0$ y $f'''(x_0) \neq 0$.
Más correctamente tendríamos que decir que $f''(x_0) = 0$ y que la siguiente derivada no nula sea de índice impar, aunque con la anterior respuesta probablemente valga.

b) Tenemos que $p(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1$.
Hay dos incógnitas, a y b, por tanto habrá que buscar dos ecuaciones para poder calcularlas. La primera ecuación sale de tener en cuenta que pasa por el punto $(1,1)$, es decir, $p(1) = 1$, y la otra de tener un punto de inflexión en dicho punto, es decir, $p''(1) = 0$. Vamos a calcular $p''(x)$.

$$p(x) = ax^3 - 3x^2 + bx + 1 \Rightarrow p'(x) = 3ax^2 - 6x + b \Rightarrow p''(x) = 6ax - 6$$

Por tanto, nuestro sistemas es:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} f(1) = 1 & \Rightarrow & a - 3 + b + 1 = 1 & \Rightarrow & a + b = 3 \\ f''(1) = 0 & \Rightarrow & 6a - 6 = 0 & \Rightarrow & a = 1 \end{array}\right] \Rightarrow b = 2$$

En conclusión $a = 1$ y $b = 2$.

c) En el apartado anterior ya calculamos $p'(x)$ y vamos a estudiar su signo para ver si crece o decrece en dicho punto.

$$p'(1) = 3 - 6 + 2 = -1 < 0$$

Luego la función es decreciente en $(1,1)$.

Volver al examen

1.2.35. Calcule los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = \frac{x}{2} + \cos x$ en el intervalo $0 < x < 2\pi$. Tenga en cuenta que los ángulos se miden en radianes.

(Junio 09)

- Solución:

Vamos a calcular la primera y segunda derivada de la función. Estas derivadas son:

$$f'(x) = \frac{1}{2} - \operatorname{sen} x \quad y \quad f''(x) = -\cos x$$

Sabemos que habrá un máximo o un mínimo relativo en x_0 si $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) < 0$ ó $f''(x_0) > 0$ respectivamente.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2} - \operatorname{sen} x = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{6} \\ \\ x = \dfrac{5\pi}{6} \end{array} \right.$$

Veamos el valor, en cada caso, de f”(x).

- $f''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} < 0 \Rightarrow$ En $x = \frac{\pi}{6}$ hay un máximo.
- $f''\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\cos\frac{5\pi}{6} = -\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0 \Rightarrow$ En $x = \frac{5\pi}{6}$ hay un mínimo.

Volver al examen

1.2.36.

a) **Enuncie el teorema de Rolle.**

b) **Aplique dicho teorema para probar que, cualquiera que sea el valor del número real a, la ecuación $x^3 - 12x + a = 0$ no puede tener dos soluciones distintas en el intervalo cerrado $[-2, 2]$.**

(Septiembre 09)

- Solución:

a) Este teorema puedes encontrarlo en el punto 9 del resumen teórico que hay al principio del libro.

b) Sea $f(x) = x^3 - 12x + a$ la función asociada a la ecuación dada. Obviamente la función es continua en el intervalo $[-2, 2]$ y derivable en el intervalo abierto, pues es un polinomio.

Vamos a comprobar lo que nos piden por el método de reducción al absurdo. Supongamos que tiene dos valores x_1 y x_2 en los cuales la función se anula (sinónimo de tener dos soluciones). Si eso es así, en el intervalo que tiene como extremos dichos puntos se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle, pues sería continua y derivable en dichos intervalos (por ser polinómica) y tendría el mismo valor en los extremos, y en consecuencia, se cumpliría la tesis de dicho teorema. Por tanto, debe existir un valor de la variable x en el interior del intervalo (x_1, x_2) en el que se anule la derivada.

Ahora bien, la derivada de la función se anula:

$$f'(x) = 3x^2 - 12 = 0 \Rightarrow x = \pm 2$$

Luego, no se anula en el intervalo pedido y por tanto, esto contradice el hecho de que se cumple la tesis del teorema. Como consecuencia de ello deducimos que la suposición de partida no se cumple, es decir, no existen los x_1 y x_2 supuestos, no hay dos raices en el intervalo $[-2, 2]$

Volver al examen

1.2.37.

a) **Calcule el límite**

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x}$$

b) **Diga, razonadamente, el valor que debe tomar c para que la siguiente función sea continua:**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & si \quad x \neq 0 \\ \\ c & si \quad x = 0 \end{cases}$$

(Septiembre 09)

- Solución:

Vamos a calcular el límite aplicando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$$

Hecho esto vamos a resolver el segundo apartado.

Obviamente si $x \neq 0$ la función es continua, por ser un cociente de funciones continuas.

Para ser continua en $x = 0$ la función debe existir en dicho punto y coincidir con el límite. Como el límite, según vimos en el apartado anterior, vale 1, deducimos que c tiene que valer 1.

Volver al examen

1.2.38.

a) Escriba la "regla de la cadena" para la derivación de funciones compuestas.

b) Calcule, y simplifique en lo posible, la derivada de la función

$$f(x) = \ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right), \qquad 0 < x < \pi$$

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

La respuesta al primer apartado puedes encontrarla en el punto 8 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Antes de realizar la derivada vamos a aplicar las propiedades de los logaritmos.

$$\ln\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right) = \ln(1-\cos x) - \ln(1+\cos x)$$

Ahora vamos a derivar y obtenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\text{sen } x}{1-\cos x} - \frac{-\text{sen } x}{1+\cos x} = \frac{\text{sen } x}{1-\cos x} + \frac{\text{sen } x}{1+\cos x} = \frac{\text{sen } x\,(1+\cos x) + \text{sen } x\,(1-\cos x)}{1-\cos^2 x} = \\ &= \frac{\text{sen } x + \text{sen } x\ \cos x + \text{sen } x - \text{sen } x\ \cos x}{\text{sen}^2\ x} = \frac{2\ \text{sen } x}{\text{sen}^2\ x} = \frac{2}{\text{sen } x} = 2\,\text{cosec } x \end{aligned}$$

Volver al examen

1.2.39. Calcule el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x\cos x - 1}{\text{sen } x - x + 1 - \cos x}$$

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

Sustituyendo tenemos queda

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x\cos x - 1}{\text{sen } x - x + 1 - \cos x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Vamos a resolver el límite usando la regla de L'Hôpital dos veces:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x\cos x - 1}{\text{sen } x - x + 1 - \cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x + x\ \text{sen } x}{\cos x - 1 + \text{sen } x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \text{sen } x + \text{sen } x + x\cos x}{-\text{sen } x + \cos x} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

Volver al examen

1.2.40.

a) **Defina la noción de mínimo relativo de una función.**

b) **Para cada x sea $h(x)$ la suma de las coordenadas del punto $(x, f(x))$ de la gráfica de $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 - x + 1$. Calcule los extremos relativos de $h(x)$.**

c) **¿Tiene $h(x)$ algún extremo absoluto? Razone la respuesta.**

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

El primer apartado puedes encontrarlo en el punto 12 del resumen teórico que hay al principio del libro. Vamos a contestar al segundo.

La función $h(x)$ es:

$$h(x) = x + f(x) = x + x^4 + x^3 + x^2 - x + 1 = x^4 + x^3 + x^2 + 1$$

Vamos a derivar para calcular los extremos relativos.

$$h'(x) = 4x^3 + 3x^2 + 2x$$

Vamos a ver donde se anula dicha derivada.

$$4x^3 + 3x^2 + 2x = 0 \Longrightarrow x(4x^2 + 3x + 2) = 0$$

Esto ocurre cuando $x = 0$ y cuando $4x^2 + 3x + 2 = 0$. Al resolver la segunda vemos que el discriminante es negativo, por lo que no tiene solución. Por tanto hay sólo un posible extremo relativo en $x = 0$. Vamos a hacer la segunda derivada.

$$h''(x) = 12x^2 + 6x + 2 \Longrightarrow h''(0) = 2 > 0$$

Por tanto hay un mínimo relativo en el punto $P(0, 1)$.

La respuesta al tercer apartado es si. Este mínimo relativo se transforma en mínimo absoluto, pues tanto cuando $x \to -\infty$, como cuando $x \to +\infty$ la función se va a ir a $+\infty$.

Volver al examen

1.2.41. Diga, razonando la respuesta, qué valor debe tomar c para que sea continua la función:

$$f(x) = \begin{cases} c & \textbf{si } x = 0 \\ \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} & \textbf{si } x \neq 0 \end{cases}$$

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

Si $x \neq 0$ es obvio que la función es continua por ser un cociente de funciones continuas. Para que sea continua en $x = 0$ tiene que ocurrir que

$$c = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

Calculemos el límite aplicando la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

Luego $c=\dfrac{1}{2}$ para que sea continua.

Volver al examen

1.2.42. **Halle todos los puntos de la gráfica de la función $f(x)=x^3+x^2+x+1$ en los que su recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $2x-y=0$.**

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

Para que eso ocurra en x_0 tiene que ocurrir que $f'(x_0)=m_r$. Calculemos ambas cosas:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2+2x+1 \\ 2x-y=0\Longrightarrow y=2x\Longrightarrow m_r=2 \end{array}\right]\Longrightarrow 3x^2+2x+1=2\Longrightarrow 3x^2+2x-1=0$$

Resolviendo la ecuación

$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{6}=\frac{-2\pm 4}{6}=\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3} \\ \\ x=\dfrac{-6}{6}=-1 \end{array}\right.$$

tenemos que los puntos buscados son:

- $\left(\dfrac{1}{3},f\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{40}{27}\right)$
- $(-1,f(-1))=(-1,0)$

1.2.43.

a) **Estudie el dominio, los extremos relativos, la curvatura (intervalos de concavidad y de convexidad) y los puntos de inflexión de la función $f(x)=\ln(1+x^2)$ (ln denota el logaritmo neperiano).**

b) **Represente la gráfica de $f(x)=\ln(1+x^2)$ utilizando los datos obtenidos en el apartado (a).**

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

a) El dominio de la función es todo $\mathbb{R}$, pues $1+x^2\geqslant 1\quad\forall x\in\mathbb{R}$.

Vamos a calcular la primera y la segunda derivada de f.

$$f'(x)=\frac{2x}{1+x^2}$$

$$f''(x)=\frac{2\left(1+x^2\right)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2+2x^2-4x^2}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}$$

Comenzaremos estudiando la primera derivada.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$\dfrac{2x}{1+x^2}$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$

En consecuencia la función crece en $(0, +\infty)$, decrece en $(-\infty, 0)$ y hay un mínimo relativo en $(0, f(0)) = (0, 0)$. Estudiemos ahora la segunda derivada.

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \Longrightarrow 2 - 2x^2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Vamos a estudiar el signo de la segunda derivada.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, +\infty)$
$\dfrac{2-2x^2}{(1+x^2)^2}$	$-$	$+$	$-$

Ante la falta de un criterio común, basta con ver distintos libros de texto, prefiero decir que la función es:

- Cóncava hacia arriba ($\bigcup$) en $(-1, 1)$.
- Cóncava hacia abajo ($\bigcap$) en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
- Puntos de inflexión en $(-1, ln2)$ y $(1, ln2)$.

b) Es obvio que la función es simétrica respecto del eje Y y podemos completar la gráfica con una tabla de valores. La gráfica buscada podemos verla en la figura 1.13

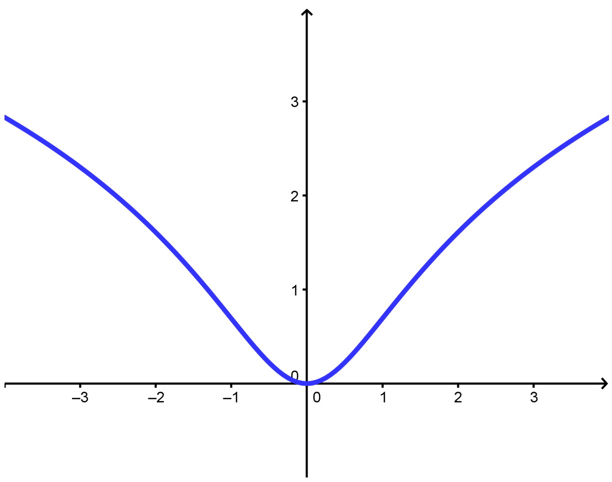


Figura 1.13: Representación gráfica de la función $f(x) = \ln\left(1 + x^2\right)$

Volver al examen

1.2.44.

a) **Enuncie el teorema de Rolle.**

b) **Pruebe que cualquiera que sea la constante a la función $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + a$ cumple las hipótesis de dicho teorema en el intervalo $[1, 3]$. Calcule un punto del intervalo abierto $(1, 3)$ cuya existencia asegura el teorema de Rolle.**

(Junio 11)

- Solución:

El primer apartado del ejercicio puedes encontrarlo en el punto 9 del resumen teórico que hay al principio del libro. Vamos a contestar al segundo.

Por ser un polinomio es evidente que la función f es continua en $[1, 3]$ y derivable en $(1, 3)$. Veamos cuanto vale en los extremos:

$$f(1) = 1 - 5 + 7 + a = a + 3$$
$$f(3) = 27 - 45 + 21 + a = a + 3$$

Luego $f(1) = f(3)$ independientemente del valor de a.

En consecuencia se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle. Vamos a calcular el punto que cumple la tesis.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 10x + 7 = 0 \\ x &= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{6} = \frac{10 \pm 4}{6} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{14}{6} = \dfrac{7}{3} \\ \\ 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Como el punto que buscamos tiene que pertenecer al intervalo abierto $(1, 3)$, el valor $x = 1$ no sirve y el valor buscado es $x = \dfrac{7}{3}$.

Volver al examen

1.2.45.

a) **Estudie las asíntotas, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = xe^{-x}$.**

b) **Represente, utilizando los datos obtenidos en el apartado anterior, la gráfica de la función $f(x) = xe^{-x}$.**

(Junio 11)

- Solución:

Nuestra función la vemos mejor de la siguiente forma:

$$f(x) = xe^{-x} = \frac{x}{e^x}$$

El dominio de esta función es todo $\mathbb{R}$, pues la función exponencial es estrictamente positiva en todo $\mathbb{R}$. Vamos a estudiar las asíntotas:

- Asíntotas verticales: No tiene, por lo razonado anteriormente.

- Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}-xe^x=-\infty$$

Por tanto hay una asíntota horizontal en la recta $y=0$ cuando $x\to+\infty$

- Asíntotas oblicuas: Cuando $x\to+\infty$ no puede haberla por que hay asíntota horizontal. Veamos que pasa cuando $x\to-\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{e^x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{-x}}=\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$$

Luego no hay asíntota oblicua.

Vamos a estudiar la derivada:

$$f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(1-x)}{e^{2x}}=\frac{1-x}{e^x}=0\Longrightarrow x=1$$

Vamos a estudiar la monotonía:

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
$\frac{1-x}{e^x}$	$+$	$-$
	$\nearrow$	$\searrow$

Luego en $x=1$ hay un máximo. Dicho punto es $M\left(1,\frac{1}{e}\right)$.
Vamos a estudiar la segunda derivada.

$$f''(x)=\frac{-e^x-(1-x)e^x}{e^{2x}}=\frac{e^x(-1-1+x)}{e^{2x}}=\frac{-2+x}{e^x}=0\Longrightarrow x=2$$

Vamos a estudiar la curvatura.

	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
$\frac{-2+x}{e^x}$	$-$	$+$

Luego en $x=2$ hay un punto de inflexión en $P\left(2,\frac{2}{e^2}\right)$.
La representación gráfica que nos piden podemos verla en la figura 1.14.

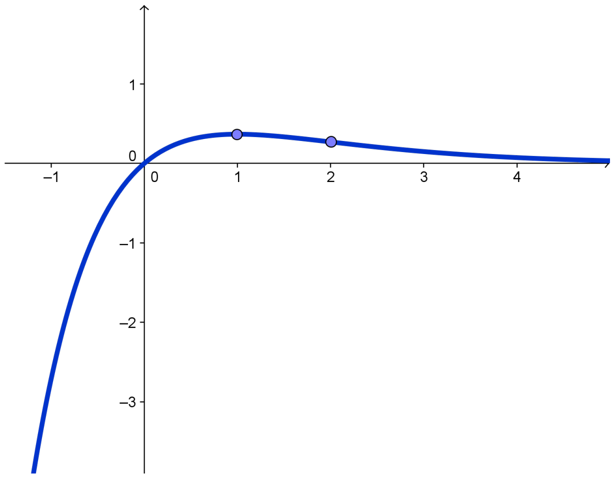


Figura 1.14: Representación gráfica de la función $f(x) = x\,e^{-x}$

Volver al examen

1.2.46. Determine valores de los parámetros a y b para que la función $f(x) = a\cos^2 x + bx^3 + x^2$ tenga un punto de inflexión en $x = 0$.

(Septiembre 11)

- Solución:

Vamos a calcular f' y f''.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2a\,\text{sen}\,x\cos x + 3bx^2 + 2x = -a\,\text{sen}\,2x + 3bx^2 + 2x \\ f''(x) &= -2a\cos 2x + 6bx + 2 \end{aligned}$$

Es obvio que $f'(0) = 0$ sean cuales sean los valores de a y b.

Si $x = 0 \Longrightarrow f''(0) = -2a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 1$

Para que haya un punto de inflexión debe anularse la segunda derivada y ser distinta de cero la tercera, pues al anularse la primera para cualquier valor de a y b si se anula la tercera podría haber un máximo o un mínimo. Hagamos la tercera derivada.

$f'''(x) = 4a\,\text{sen}\,2x + 6b \Longrightarrow f'''(0) = 6b$

Luego la tercera derivada se anula si $b = 0$. Como además la $f^{IV}(x) = 8a\cos 2x$ y es obvio que $f^{IV}(0) = 8a = 8 > 0$ tendríamos que si $a = 1$ y $b = 0$ lo que presenta es un mínimo. En resumen:

a) Si $a = 1$ y $b \neq 0$ tenemos un punto de inflexión con tangente horizontal.

b) Si $a = 1$ y $b = 0$ tenemos un mínimo.

Volver al examen

1.2.47. Calcule el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{\text{sen}^2\,x}$$

(Septiembre 11)

- Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}-2x}{\operatorname{sen}^2 x} &= \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{2\operatorname{sen} x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{\operatorname{sen} 2x} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\cos 2x} = \frac{0}{2} = 0\end{aligned}$$

Volver al examen

1.2.48.

a) Determine el punto (x, y) de la parábola $y = x^2$ en el que la suma $x + y$ alcanza su mínimo valor.

b) Explique por qué dicho mínimo es absoluto.

(Junio 12)

- Solución:

a) Vamos a resolverlo como un problema de máximos y mínimos. Nos dan de forma muy clara la función a minimizar y la ecuación que relaciona las variables.

$$\left.\begin{array}{rcl} S(x,y) &=& x+y\\ y &=& x^2\end{array}\right] \Longrightarrow S(x) = x + x^2$$

Derivamos e igualamos a cero:

$$S'(x) = 1 + 2x = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Hacemos la segunda derivada

$$S''(x) = 2 \Longrightarrow S''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 > 0 \Longrightarrow \text{Es un mínimo}$$

Sustituyendo en $y = x^2$ tenemos que el punto buscado es $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$

b) Tenemos que la función $S(x, y)$, una vez sustituida la condición $y = x^2$, resulta ser una parábola en la que el coeficiente de x^2 es positivo y en la que el punto resultante es su vértice, que sería su mínimo absoluto.

Volver al examen

1.2.49. Considere la función $f(x) = |x| + |x - 2|$.

a) Exprese $f(x)$ como una función definida a trozos.

b) Dibuje la gráfica de $f(x)$.

c) Escriba el intervalo abierto de la recta real formado por los puntos en los que $f(x)$ es derivable y se anula su derivada.

(Junio 12)

- Solución:

a) Por como se define el valor absoluto se van a producir tantos trozos como trozos delimiten los valores que anulen cada valor absoluto. Los valores que los anulan son 0 y 2. Veamos en la siguiente tabla que ocurre antes de escribir la función.

	$(-\infty,0)$	$(0,2)$	$(2,+\infty)$
$\|x\|$	$-x$	x	x
$\|x-2\|$	$-(x-2)=-x+2$	$-(x-2)=-x+2$	$x-2$
$\|x\|+\|x-2\|$	$-2x+2$	2	$2x-2$

La función quedará:

$$f(x)=|x|+|x-2|=\begin{cases} -2x+2 & \text{si} \quad x\le 0 \\ 2 & \text{si} \quad 0<x\le 2 \\ 2x-2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

b) La gráfica es muy sencilla de representar y el resultado obtenido es:

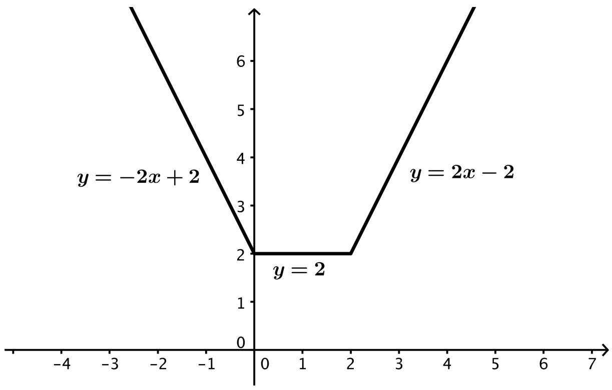


Figura 1.15: Representación gráfica de la función $|x|+|x-2|$

c) De entrada es evidente que f(x) es continua en todo $\mathbb{R}$. También es obvio que es derivable en $\mathbb{R}-\{0,2\}$, pues en estos puntos presenta puntos angulosos.
La función derivada es:

$$f'(x)=\begin{cases} -2 & \text{si} \quad x<0 \\ 0 & \text{si} \quad 0<x<2 \\ 2 & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

Luego el intervalo pedido es $(0,2)$.

Volver al examen

1.2.50.

a) Calcule el siguiente límite (ln denota el logaritmo neperiano):

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln x$$

b) Estudie los extremos relativos, las asíntotas y el signo de la función $f(x)=x\cdot\ln x$ definida en el intervalo abierto $(0,+\infty)$.

c) Utilizando los datos obtenidos en los apartados a) y b) represente de forma aproximada la gráfica de la función $f(x)$ del apartado b)

(Septiembre 12)

- Solución:

a) De entrada tenemos que:

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln x = [0\cdot(-\infty)]$$

Para resolver esta indeterminación vamos a transformarlo en una indeterminación de la forma $\dfrac{\infty}{\infty}$ y después aplicaremos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

b) Es obvio que el $Dom\, f = (0,+\infty)$, pues ese es el dominio de $\ln x$. Como x es positivo en el dominio, el signo de la función es el signo de $\ln x$. Por tanto:

- $f(x) > 0 \quad si \quad x > 1$
- $f(x) < 0 \quad si \quad 0 < x < 1$

Vamos a estudiar las asíntotas:

- Asíntotas horizontales:
  $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot \ln x = +\infty$, luego no tiene asíntota horizontal, pues, por su dominio, no tiene sentido estudiar que pasa en $-\infty$.
- Asíntota oblícua:

  $m = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\cdot \ln x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, luego tampoco tiene.
- Asíntotas verticales:
  El único punto que tendría sentido estudiar es $x = 0^+$, pero ese límite vale cero, como vimos en el apartado anterior.

Vamos a estudiar la derivada.

$$f'(x) = \ln x + x\,\frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Veamos donde vale cero la derivada:

$$\ln x + 1 = 0 \Longrightarrow \ln x = -1 \Longrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Estudiemos el signo de la derivada:

	$\left(0,\frac{1}{e}\right)$	$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$
$\ln x + 1$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$

Luego crece en $\left(\dfrac{1}{e},+\infty\right)$ y decrece en $\left(0,\dfrac{1}{e}\right)$. Por tanto tiene un mínimo en $\left(\dfrac{1}{e},-\dfrac{1}{e}\right)$

c) Para pintar la gráfica basta ver que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot \ln x = 0$ y hacer una tabla de valores. La gráfica resultante es:

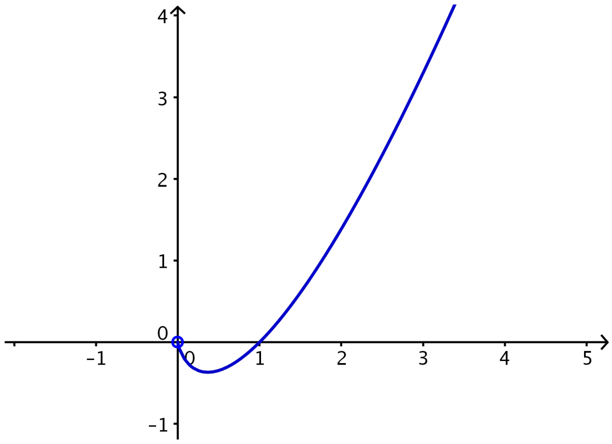


Figura 1.16: Representación gráfica de la función $f(x) = x \cdot \ln x$

Volver al examen

1.2.51.

a) Estudie las asíntotas de la función $f(x) = e^{-x^2}$.

b) Calcule los extremos relativos y los puntos de inflexión de $f(x)$.

c) Utilizando los datos obtenidos en los apartados a) y b), haga la representación gráfica aproximada de la función $f(x)$.

(Septiembre 12)

- Solución:

a) Vamos a estudiar las asíntotas:

- Asíntotas horizontales:
$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{-(-x)^2} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0$$
Luego tiene una asíntota horizontal en la recta $y = 0$.
- No puede tener asíntota oblicua, pues ya tiene asíntota horizontal.
- Asíntota vertical: Tenemos que $f(x) = e^{-x^2} = \dfrac{1}{e^{x^2}}$. Es obvio que el denominador no se anula, pues la exponencial es siempre estrictamente positiva, por tanto, no tiene asíntota vertical.

b) Vamos a estudiar $f'(x)$.

$$f'(x) = -2x\, e^{-x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$-2x\, e^{-x^2}$	$+$	$-$
	$\nearrow$	$\searrow$

Luego crece en $(-\infty, 0)$ y decrece en $(0, +\infty)$. Por tanto tiene un máximo en $(0, 1)$.
Vamos a estudiar la derivada segunda.

$$f''(x) = -2\,e^{-x^2} + 4x^2\,e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right) = 0 \Longrightarrow -2+4x^2 = 0 \Longrightarrow 4x^2 = 2$$
$$\Longrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vamos a estudiar el signo de $f''(x)$.

	$\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$
$e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right)$	$+$	$-$	$+$

Luego tiene puntos de inflexión en:

- $x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$
- $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$

c) Con los datos obtenidos es fácil representar la gráfica

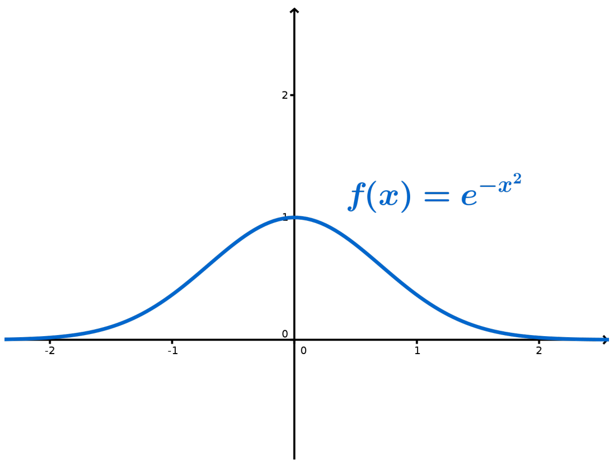


Figura 1.17: Representación gráfica de la función $f(x) = e^{-x^2}$

Volver al examen

1.2.52. **Estudie si la recta r de ecuación $y = 4x - 2$ es tangente a la gráfica de la función $f(x) = x^3 + x^2 - x + 1$ en alguno de sus puntos.**

(Junio 13)

- Solución:

Sabemos que la pendiente de la recta tangente a la función en un punto coincide, si la función es derivable en dicho punto, con el valor de la derivada en el punto. Vamos primero a comprobar donde la derivada de la función coincide con la pendiente de la recta que nos dan, es decir, donde la derivada vale 4.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1 = 4 \Longrightarrow 3x^2 + 2x - 5 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -\dfrac{10}{6} = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$

Vamos a ver ahora en cual de esos valores la función y la recta valen lo mismo.

- $x = 1$

$$f(1) = 1 + 1 - 1 + 1 = 2$$
$$y = 4 \cdot 1 - 2 = 2$$

Luego en este valor de x la recta es tangente a la curva.

- $x = -\dfrac{5}{3}$

$$f\left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{125}{27} + \frac{25}{9} + \frac{5}{3} + 1 = \frac{22}{27}$$
$$y = 4 \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) - 2 = -\frac{20}{3} - 2 = -\frac{26}{3}$$

Luego en este valor de x la recta no es tangente a la curva.

Volver al examen

1.2.53.

a) Defina a trozos la función $f(x) = 2 - x \cdot |x|$ y represéntela gráficamente.

b) Estudie la derivabilidad de $f(x)$ en toda la recta real.

c) Calcule la función derivada $f'(x)$ para los valores de x que exista.

(Septiembre 13)

- Solución:

Vamos a responder al primer apartado. Los trozos en los que vamos a dividir $\mathbb{R}$ se obtienen de los valores que anulan lo que hay dentro del valor absoluto. En nuestro caso esto ocurre cuando $x = 0$. Por tanto:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x \cdot (-x) & x \leq 0 \\ 2 - x \cdot x & x > 0 \end{cases} = \begin{cases} 2 + x^2 & x \leq 0 \\ 2 - x^2 & x > 0 \end{cases}$$

La representación gráfica es:

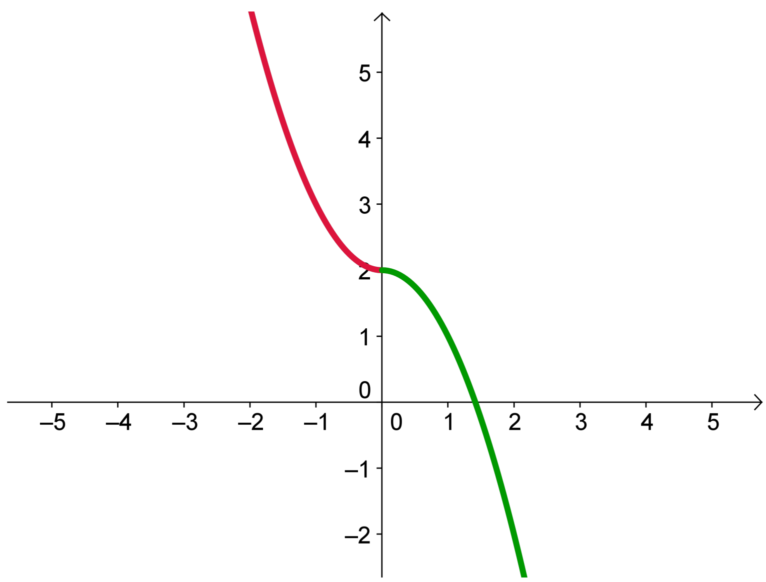


Figura 1.18: Representación gráfica de la función $f(x) = 2 - x \cdot |x|$

Vamos a responder ahora a los dos últimos apartados. De entrada, si $x \neq 0$ la función es derivable por tratarse de polinomios. Veamos que ocurre en $x = 0$.

Empecemos por estudiar la continuidad de f en dicho punto.

$$f(0) = 2$$

$$\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} (2 + x^2) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} (2 - x^2) = 2 \end{array}$$

Luego existe el límite y coincide con el valor de la función en el punto. Por tanto, la función es continua en $x = 0$.

Estudiemos la derivada. Ya comentamos que es derivable en todo los puntos salvo quizás en $x = 0$. Al expresar cual es la derivada de entrada no incluimos el cero por si no es derivable.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x < 0 \\ -2x & x > 0 \end{cases}$$

En consecuencia,

$$\left. \begin{array}{l} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 0 \end{array} \right] \Longrightarrow \exists f'(0) = 0$$

Luego la función es derivable en $x = 0$.

Por lo tanto la función derivada que nos piden en el tercer apartado es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & x \leq 0 \\ -2x & x > 0 \end{cases}$$

Volver al examen

1.2.54.

a) Estudie el dominio de definición, las asíntotas, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}.$$

b) Represente la función $f(x)$ anterior utilizando los datos obtenidos en el apartado a).

(Septiembre 13)

- Solución:

Vamos a empezar por hacer el estudio que nos piden. Empecemos por el dominio.

Como es un cociente, el dominio de la función será todo $\mathbb{R}$ menos los valores que anulen el denominador. Es obvio que el denominador se anula sólo en $x = 1$, por tanto:

$$Dom\, f = \mathbb{R} - \{1\}$$

Vamos ahora a calcular las asíntotas. Empecemos por las verticales. De presentar alguna asíntota vertical esa será la recta $x = 1$. Vamos a comprobarlo.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3}{(x-1)^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty \end{cases}$$

Luego la recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función.

Vamos a preparar la función para estudiar mejor las otras asíntotas.

$$f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2} = \frac{x^3}{x^2-2x+1}$$

Comencemos por estudiar si tiene asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^2-2x+1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^3}{x^2+2x+1} = -\infty$$

Luego no tiene asíntotas horizontales. Veamos entonces si tiene oblicuas. Estudiemos primero que pasa cuando x tiende a $+\infty$.

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-2x+1}}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3}{x^3-2x^2+x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-2x+1} - x\right) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^3-(x^3-2x^2+x)}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2-x}{x^2-2x+1} = 2$$

Por tanto, cuando x tiende a $+\infty$ la recta $y = x + 2$ es una asíntota oblicua de nuestra función.

Hay que ver lo mismo cuando x tiende a $-\infty$.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2-2x+1}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3}{x^3-2x^2+x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-x^3}{-x^3-2x^2-x} = 1 \\ n &= \lim_{x\to -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-2x+1} - x\right) = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^3-(x^3-2x^2+x)}{x^2-2x+1} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-x}{x^2-2x+1} = \\ &= \lim_{x\to +\infty} \frac{2x^2+x}{x^2+2x+1} = 2 \end{aligned}$$

Luego cuando x tiende a $-\infty$ tenemos la misma asíntota. Vamos a estudiar la derivada.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(x-1)^{\cancel{2}} - x^3\cdot\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}3}} = \frac{3x^2(x-1)-2x^3}{(x-1)^3} = \frac{3x^3-3x^2-2x^3}{(x-1)^3} = \\ &= \frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3} = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ \\ x = 3 \end{array}\right. \end{aligned}$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada para dilucidar los máximos y mínimos.

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,3)$	$(3,+\infty)$
$\dfrac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$	$+$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Luego hay un mínimo relativo en el punto $(3, f(3)) = \left(3, \dfrac{27}{4}\right)$. En $x = 1$ no presenta ningún extremo relativo por no ser del dominio.

Vamos a hacer la segunda derivada.

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(3x^2-6x)(x-1)^{\cancel{3}\,1}-3(x^3-3x^2)\cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^{\cancel{6}\,4}} = \frac{3x^3-6x^2-3x^2+6x-3x^3+9x^2}{(x-1)^4} = \\ &= \frac{6x}{(x-1)^4} = 0 \Longrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Vamos a estudiar el signo de la segunda derivada.

	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$\dfrac{6x}{(x-1)^4}$	$-$	$+$	$+$

Luego hay un punto de inflexión en el punto $(0, f(0)) = (0, 0)$.

Por último vamos a poner la representación gráfica.

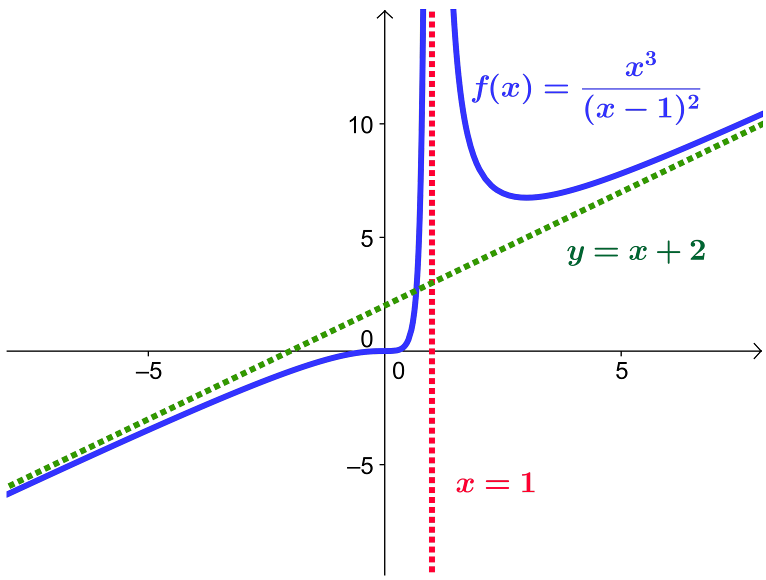


Figura 1.19: Representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$

Volver al examen

1.2.55.

a) Enuncie la condición que se debe cumplir para que una recta $x = a$ sea asíntota vertical de una función $f(x)$.

b) Calcule las asíntotas verticales y horizontales (en $-\infty$ y en $+\infty$) de la función

$$f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2-x-2}.$$

(Junio 14)

- Solución:

Para que la recta $x = a$ sea asíntota vertical tiene que ocurrir que

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

En una función racional, las asíntotas verticales son rectas que vienen determinadas por las raíces del denominador.

En nuestro caso dichas raíces son:

$$x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Empecemos por $x = -1$.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+x-1}{x^2-x-2} = \left[\frac{-1}{0}\right] \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to -1^-} = -\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x \to -1^+} = +\infty \end{array} \right.$$

En consecuencia la recta $x = -1$ es una asíntota vertical.

Seguimos por $x = 2$.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2+x-1}{x^2-x-2} = \left[\frac{5}{0}\right] \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 2^-} = -\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x \to 2^+} = +\infty \end{array} \right.$$

En consecuencia la recta $x = 2$ es una asíntota vertical.

Veamos ahora las asíntotas horizontales. Tenemos que los límites son:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2+x-1}{x^2-x-2} = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2+x-1}{x^2-x-2} = 1$$

Luego la recta $y = 1$ es una asíntota horizontal.

Volver al examen

1.2.56.

a) Estudie el dominio de definición, las asíntotas, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función

$$f(x) = \frac{(x+1)^3}{x^2}.$$

b) Represente la función $f(x)$ anterior utilizando los datos obtenidos en el apartado a).

(Julio 14)

- Solución:

Al tratarse de un cociente, habrá que excluir del dominio las raíces del denominador. Es obvio que el denominador se anula en $x = 0$, por tanto el dominio será:

$$Dom f = \mathbb{R} - \{0\}$$

Vamos ahora a estudiar las asíntotas. Las posibles asíntotas verticales están entre los valores que anulan el denominador. Vamos pues a ver si la recta $x = 0$ es asíntota vertical de la función.

$$\lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^3}{x^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{(x+1)^3}{x^2} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{(x+1)^3}{x^2} = +\infty \end{array}\right.$$

Luego la recta $x = 0$ es asíntota vertical de la función. Veamos ahora si tiene asíntotas horizontales.

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{(x+1)^3}{x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{(x+1)^3}{x^2} = +\infty$$

Luego no tiene asíntotas horizontales. Veamos entonces si tiene oblicuas.

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{(x+1)^3}{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^3}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3+3x^2+3x+1}{x^3} = 1 \\ n &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{(x+1)^3}{x^2} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+3x+1}{x^2} = 3 \end{aligned}$$

Puede comprobarse que ocurre lo mismo cuando $x \to -\infty$, luego la recta $y = x + 3$ es asíntota oblicua en ambos infinitos.

Vamos a calcular las tres primeras derivada para buscar los extremos y los puntos de inflexión.

$$f'(x) = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^3} \qquad f''(x) = \frac{6(x+1)}{x^4} \qquad f'''(x) = \frac{-18x - 24}{x^5}$$

Los valores que anulan la primera derivada son aquellos que anulen el numerador. Resolvemos la ecuación que se obtiene y comprobamos que $x = -1$, raíz doble, y $x = 2$ son dichos valores. Vamos a ver si son máximos o mínimos.

$$f''(-1) = 0 \qquad f''(2) = \frac{18}{16}$$

De aquí deducimos que la función presenta un mínimo relativo en $x = 2$. Veremos que ocurre con la derivada tercera en $x = -1$.

$$f'''(-1) = 6 \neq 0$$

Por tanto en $x = -1$ la función tiene un punto de inflexión.

La representación gráfica que nos piden es:

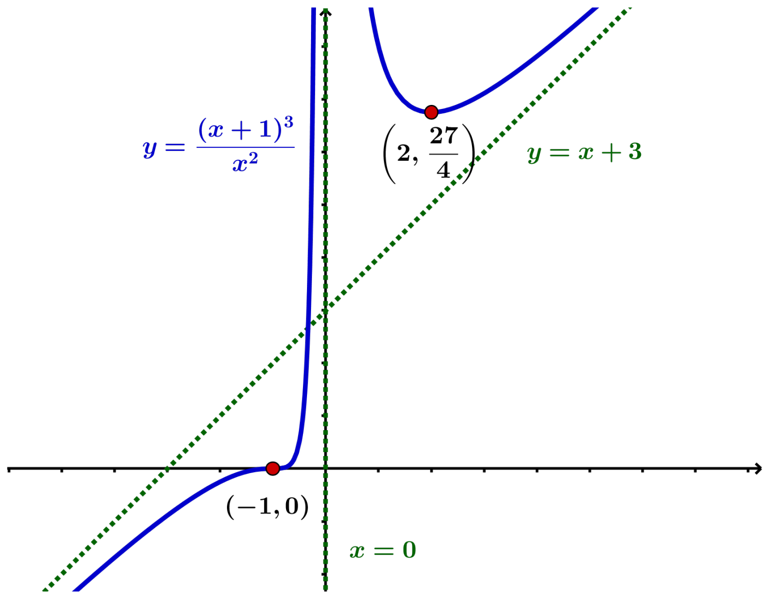


Figura 1.20: Representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{(x+1)^3}{x^2}$

Volver al examen

1.2.57.

a) **Enuncie el** *teorema del valor medio de Lagrange*.

b) **Aplicando el anterior teorema a la función** $f(x) = \operatorname{sen} x$, **pruebe que cualesquiera que sean los números reales** $a < b$ **se cumple la desigualdad** $\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a \leq b - a$.

(Julio 14)

- Solución:

El enunciado del teorema que nos piden podemos encontrarlo en el punto 10 del resumen teórico que hay al principio del libro. Vamos a resolver el segundo apartado.

En nuestro caso vamos a tomar $f(x) = \operatorname{sen}\, x$. Tendremos que $f'(x) = \cos\, x$. Obviamente f es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, luego podemos aplicarle el teorema de Lagrange en cualquier intervalo de $\mathbb{R}$.

Tenemos, que según dicho teorema, en el intervalo $[a, b]$ existe un c que cumple:

$$\frac{\operatorname{sen}\, b - \operatorname{sen}\, a}{b - a} = \cos\, c$$

Si pasamos multiplicando el denominador y tenemos en cuenta que $|\cos\, x| \leqslant 1$ tendremos:

$$\operatorname{sen}\, b - \operatorname{sen}\, a = (b - a) \cdot \cos\, c \leqslant b - a$$

Volver al examen

1.2.58.

a) **Estudie los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función** $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

b) **Estudie si la recta** r **de ecuación** $y = -x - 1 + \ln 2$ **es tangente a la gráfica de** $f(x) = \ln(1 + x^2)$ **en algún punto de inflexión de** $f(x)$.

(Junio 15)

- Solución:

El dominio de definición de la función que nos dan es todo $\mathbb{R}$, pues lo que queda dentro del logaritmo siempre es mayor o igual que uno. Vamos a empezar por hacer las tres primeras derivadas de la función que nos dan:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{2x}{1+x^2} \\
f''(x) &= \frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2} \\
f'''(x) &= \frac{-4x(1+x^2)^{\cancel{2}\,1} - 2(-2x^2+2)2x\cancel{(1+x^2)}}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{4x^3-12x}{(1+x^2)^3}
\end{aligned}$$

Comencemos por los extremos relativos.

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{2x}{1+x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Veamos cuanto vale $f''(0)$.

$$f''(0) = \frac{2}{1} = 2 > 0$$

Luego la función presenta un mínimo en el punto $(0, f(0)) = (0, \ln 1) = (0, 0)$.

Vamos calcular los puntos de inflexión.

$$f''(x) = 0 \Longrightarrow \frac{-2x^2+2}{(1+x^2)^2} = 0 \Longrightarrow -2x^2+2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

Veamos si $f'''(x)$ en estos puntos es distinta de cero.

- $f'''(1) = \dfrac{4-12}{8} = -1 \neq 0$. Luego hay un punto de inflexión en $(1, f(1)) = (1, \ln 2)$
- $f'''(-1) = \dfrac{-4+12}{8} = 1 \neq 0$. Luego hay un punto de inflexión en $(-1, f(-1)) = (-1, \ln 2)$

Vamos, a continuación, a estudiar el segundo apartado.

Vamos a calcular las rectas tangentes en los dos puntos de inflexión y vemos si sale en algún caso la recta que nos dan.

- $x = -1$

  Tenemos que la pendiente de la recta tangente es $m_{tg} = f'(-1) = \dfrac{-2}{2} = -1$. Por tanto la recta tangente es:

  $$y - \ln 2 = -1(x+1) \Longrightarrow y - \ln 2 = -x - 1 \Longrightarrow y = -x - 1 + \ln 2$$

  Luego en este caso si es tangente la recta que nos dan a la función en ese punto.

- $x = 1$

  Tenemos que la pendiente de la recta tangente es $m_{tg} = f'(1) = \dfrac{2}{2} = 1$. Por tanto la recta tangente es:

  $$y - \ln 2 = 1(x-1) \Longrightarrow y - \ln 2 = x - 1 \Longrightarrow y = x - 1 + \ln 2$$

  Luego en este caso no es tangente la recta que nos dan a la función en ese punto.

Volver al examen

1.2.59.

a) **Enuncie el** *teorema del valor medio de Lagrange*.

b) **Aplicando a la función $f(x) = x^3 + 2x$ el anterior teorema, pruebe que cualesquiera que sean los números reales $a < b$ se cumple la desigualdad $a - b < b^3 - a^3$.**

(Julio 15)

- Solución:

El primer apartado podemos encontrarlo en el punto 10 del resumen teórico que hay al principio del libro.

En el segundo apartado tenemos que $f(x) = x^3 + 2x$ es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$ por ser un polinomio, por tanto cumple la hipótesis del problema en cualquier intervalo que cojamos.

Su derivada es $f'(x) = 3x^2 + 2$.

Según el teorema, para cualquier intervalo $[a, b]$ con $a < b$ se cumple que existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

En nuestro caso tendremos que

$$3c^2 + 2 = \frac{b^3 + 2b - (a^3 + 2a)}{b - a} = \frac{b^3 - a^3 + 2(b - a)}{b - a} = \frac{b^3 - a^3}{b - a} + 2$$

En consecuencia

$$\frac{b^3 - a^3}{b - a} = 3c^2$$

Es obvio que $3c^2 \geqslant 0$, luego:

$$\frac{b^3 - a^3}{b - a} = 3c^2 > -1$$

Ahora bien,

$$\frac{b^3 - a^3}{b - a} > -1$$

Como $b - a > 0$, pues $a < b$, tenemos lo que buscamos

$$b^3 - a^3 > a - b$$

Volver al examen

1.2.60.

a) **Estudie el dominio de definición y las asíntotas de la función**

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}.$$

b) **Estudie si la gráfica de la función $f(x)$ corta a alguna asíntota oblicua suya.**

c) **Represente, aproximadamente, la gráfica de $f(x)$ utilizando los valores $f(1)$ y $f(3)$, y los datos obtenidos en los apartados a) y b).**

(Julio 15)

- Solución:

El dominio de definición es evidente que es $\mathbb{R} - \{2\}$. Veamos las asíntotas.

Vamos a comenzar estudiando las asíntotas verticales. Dichas asíntotas saldrán de los valores que anulan el denominador. Dicho valor es $x = 2$. Veamos si la recta $x = 2$ es una asíntota vertical de la función.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = \left[\frac{-1}{0}\right]$$

Luego la recta $x = 2$ es asíntota vertical. Vamos a estudiar los límites laterales para usarlos a la hora de representar la función.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = -\infty$$

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador la función no va a tener asíntotas horizontales.

Estudiemos si puede tener oblicuas. Veamos que ocurre en $+\infty$.

$$\begin{aligned}
m &= \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2-4x+3}{x-2}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 2x} = 1 \\
n &= \lim_{x \to +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} - x \right) = \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3 - x(x-2)}{x - 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 4x + 3 - x^2 + 2x}{x - 2} = \\
&= \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x + 3}{x - 2} = -2
\end{aligned}$$

Luego la recta $y = x - 2$ es asíntota oblicua cuando $x \to +\infty$. Hay que comprobar que ocurre cuando $x \to -\infty$, pero se procede de modo análogo.

Vamos a ver si la síntota corta a la función en algún punto.

$$\frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = x - 2 \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 \Longrightarrow x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4$$

Esto último es imposible que se cumpla, luego la asíntota no corta a la función.

Pasemos a representarla. Tendríamos que representar las asíntotas, marcar el comportamiento de la función en la asíntota vertical y afinar con $f(1)$ y $f(3)$. Usaremos también el hecho de que la función no corta a la asíntota.

Sustituyendo en la función es fácil comprobar que $f(1) = 0$ y $f(3) = 0$.

Sustituyendo todo lo que hemos mencionado la función resultante es:

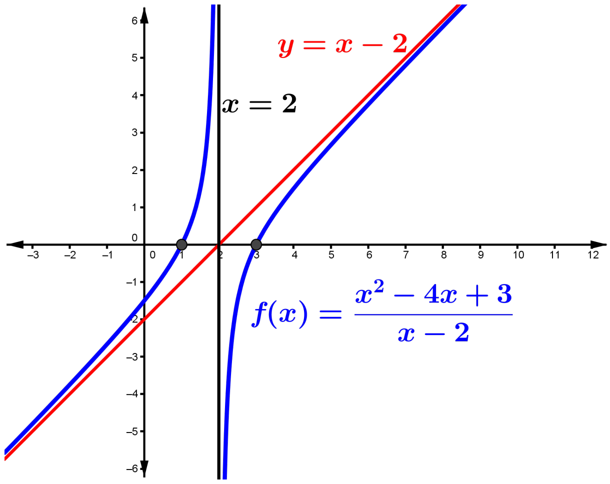


Figura 1.21: Representación de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2}$ y la recta tangente pedida

Volver al examen

1.2.61. Considere la función $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ (tenga en cuenta que el ángulo x se mide en radianes).

a) Estudie los extremos relativos de $f(x)$ en el intervalo $0 < x < \pi$.

b) Estudie los puntos de inflexión de $f(x)$ en el intervalo $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$.

(Junio 16)

- Solución:

Vamos a comenzar calculando las derivadas sucesivas que necesitamos para los extremos relativos y los puntos de inflexión.

$$f'(x) = 2\operatorname{sen} x \;\cos x = \operatorname{sen} 2x; \qquad f''(x) = 2\cos 2x; \qquad f'''(x) = -4\operatorname{sen} 2x$$

Comencemos por ver donde se anula la primera derivada en el intervalo que nos indican.

$$\operatorname{sen} 2x = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{ll} 2x = 0 \Longrightarrow x = 0 & \text{No está en el intervalo} \\ 2x = \pi \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} & \\ 2x = 2\pi \Longrightarrow x = \pi & \text{No está en el intervalo} \end{array} \right.$$

Luego el único punto que anula la derivada es $x = \dfrac{\pi}{2}$ (ten en cuenta que las desigualdades son estrictas, luego los intervalos son abiertos y los extremos no entran). Veamos cuanto vale la segunda derivada en dicho punto.

$$f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\cos \pi = -2 < 0$$

Luego en $x = \dfrac{\pi}{2}$ hay un máximo. El punto es $P\left(\dfrac{\pi}{2}, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$.

Veamos ahora los puntos de inflexión. Vamos a ver donde se anula la segunda derivada.

$$2\cos 2x = 0 \Longrightarrow \cos 2x = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{ll} 2x = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} & \\ 2x = \dfrac{3\pi}{2} \Longrightarrow x = \dfrac{3\pi}{4} & \text{No está en el intervalo} \end{array} \right.$$

Vamos a sustituir en la tercera derivada a ver que ocurre.

$$f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \operatorname{sen} 2\frac{\pi}{4} = -4 \neq 0$$

Luego hay un punto de inflexión en $Q\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}\right)$.

Volver al examen

1.2.62. Considere la función definida a partir de los parámetros α, $\beta \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + \alpha & \textbf{si } x < 0 \\ -x^2 + \beta x + \beta + 1 & \textbf{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

a) Obtenga la relación que debe haber entre α y β para que f sea continua en $x = 0$.

b) Calcule α y β para que f sea derivable en $x = 0$.

c) Para los valores α y β obtenidos en el apartado (b), ¿es f' derivable en $x = 0$? Razone la respuesta.

(Junio 16)

- Solución:

Veamos el primer apartado. Para que sea continua la función en el cero tiene que existir el límite en $x = 0$, $f(0)$ y coincidir.

Como queremos que sea continua vamos a imponer que existe el límite, es decir, los límites laterales existen y coinciden.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \alpha \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \beta + 1 \end{array}\right] \Longrightarrow \alpha = \beta + 1$$

Además la $f(0) = \beta + 1$, por tanto, si se cumple esa relación entre α y β, la función será continua.

En el segundo apartado buscamos dos valores concretos de α y β para que, además de ser continua, sea derivable. Sabemos que para que una función sea derivable tiene que ser continua, es decir, que para ser derivable tiene que cumplirse la condición anterior, $\alpha = \beta + 1$.

Vamos a calcular $f'(x)$.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x < 0 \\ -2x + \beta & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que sea derivable tienen que coincidir las derivadas laterales además de ser continua. Veamos cuanto valen las derivadas laterales.

$$f'(0^-) = -3 \qquad\qquad f'(0^+) = \beta$$

Por tanto, para que sea derivable tiene que ocurrir:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha = \beta + 1 \\ \beta = -3 \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = -2 \\ \beta = -3 \end{array}\right.$$

Por tanto, si $\alpha = -2$ y $\beta = -3$ la función es derivable. Veamos como queda la función derivada en este caso.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x < 0 \\ -2x-3 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

Si derivamos $f'(x)$ tendremos:

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ -2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

En consecuencia no es derivable $f'(x)$ en $x = 0$, pues las derivadas laterales no coinciden.

Volver al examen

1.2.63.

a) **Enuncie el *teorema de Rolle*.**

b) **Dado un número real λ, utilice el teorema de Rolle para probar que el polinomio $P(x) = x^3 + x + \lambda$ no tiene dos raíces distintas.**

c) **¿Tiene el polinomio $P(x) = x^3 + x + \lambda$ alguna raíz? Justifique la respuesta.**

(Julio 16)

- Solución:

El teorema de Rolle lo puedes encontrar en el punto 9 del resumen teórico que puedes encontrar al principio del libro.

Veamos el segundo apartado. La función $f(x) = x^3 + 2x + \lambda$ obviamente es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, pues es un polinomio.

Vamos a comprobar lo que nos piden por el método de reducción al absurdo. Supongamos que tiene dos valores a y b en los cuales la función se anula (sinónimo de tener dos raíces distintas). Si eso es así, en el intervalo que tiene como extremos dichos puntos se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle, pues sería continua y derivable en dichos intervalos (por ser polinómica) y tendría el mismo valor en los extremos (valdría 0), y en consecuencia, se cumpliría la tesis de dicho teorema. Por tanto, debe existir un valor de la variable x en el interior del intervalo (a, b) en el que se anule la derivada.

Pero la primera derivada del polinomio es $P'(x) = 3x^2 + 1$. Es obvio que sea cual sea el valor de x la derivada es siempre estrictamente positiva. Esto contradiría el teorema de Rolle, lo cual no es posible. Por tanto se produce un absurdo, lo que conlleva a afirmar que la hipótesis tomada (tiene dos raíces reales distintas) es falsa.

El tercer apartado vamos a comprobarlo usando el teorema de Bolzano. Se tiene que $P(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$ por ser un polinomio, por tanto lo será en cualquier intervalo. A su vez $P(0) = \lambda$. Vamos a distinguir varias posibilidades:

- $\lambda < 0$. Basta con tomar $x = -\lambda$. Tendríamos que $P(-\lambda) = (-\lambda)^3 - \lambda + \lambda = -\lambda^3$.
  De esa forma, en $x = -\lambda$, $P(-\lambda)$ tiene signo distinto a $P(0)$.
  Según el teorema de Bolzano en el intervalo $(0, -\lambda)$ hay una raíz.
- $\lambda > 0$. Actuamos de forma análoga, pero esta vez la raíz estará en $(-\lambda, 0)$.
- $\lambda = 0$. El polinomio sería en este caso $P(x) = x^3 + x$.
  Tomamos $x = -1$ y tenemos que $P(-1) = -2$.
  Tomamos $x = 1$ y tenemos que $P(1) = 2$.

Por tanto el polinomio tendría en este caso una raíz en $(-1,1)$. Es fácil observar que en este caso corta en $x=0$.

Luego nuestro polinomio siempre tiene un punto de corte.

Volver al examen

1.2.64.

a) **Estudie el dominio, el signo, las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales de la función**
$$f(x)=\frac{2x-1}{-x^2+x}.$$

b) **Utilizando los datos obtenidos en el apartado anterior, represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x)$.**

(Julio 16)

- Solución:

El dominio de la función lo forman todos los números reales, menos aquellos que anulen el denominador.
$$-x^2+x=0\Longrightarrow x(-x+1)=0\Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x=0\\ \\ x=1\end{array}\right.$$

Luego el dominio de la función es $Dom\, f=\mathbb{R}-\{0,1\}$.

Vamos a estudiar el signo de f. Tenemos que ver donde se anula la función.
$$\frac{2x-1}{-x^2+x}=0\Longrightarrow 2x-1=0\Longrightarrow x=\frac{1}{2}$$

Con este valor y los valores que no están en el dominio construimos una tabla para analizar el signo.

	$(-\infty,0)$	$\left(0,\frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2},1\right)$	$(1,+\infty)$
$\dfrac{2x-1}{-x^2+x}$	$+$	$-$	$+$	$-$

Vamos a calcular las asíntotas y a estudiar el comportamiento de la función respecto de ellas. Comencemos por las verticales. Como bien sabemos habrá que buscarlas entre los valores que anulan el denominador.

- $x=0$
$$\lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{-x^2+x}=\left[\frac{-1}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{2x-1}{-x^2+x}=+\infty\\ \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{2x-1}{-x^2+x}=-\infty\end{array}\right.$$
Luego la recta $x=0$ es una asíntota vertical de la función.

- $x=1$
$$\lim_{x\to 1}\frac{2x-1}{-x^2+x}=\left[\frac{1}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 1^-}\frac{2x-1}{-x^2+x}=+\infty\\ \\ \displaystyle\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-1}{-x^2+x}=-\infty\end{array}\right.$$
Luego la recta $x=1$ es una asíntota vertical de la función.

Veamos las horizontales.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{-x^2+x} = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{-x^2+x} = 0$$

Luego la recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Teniendo en cuenta el signo podemos deducir que cuando $x \to +\infty$ la función es negativa, y por tanto estará por debajo de la asíntota. Por el contrario cuando $x \to -\infty$ la función es positiva, y por tanto estará por encima de la asíntota.

Con estos datos la gráfica obtenida es

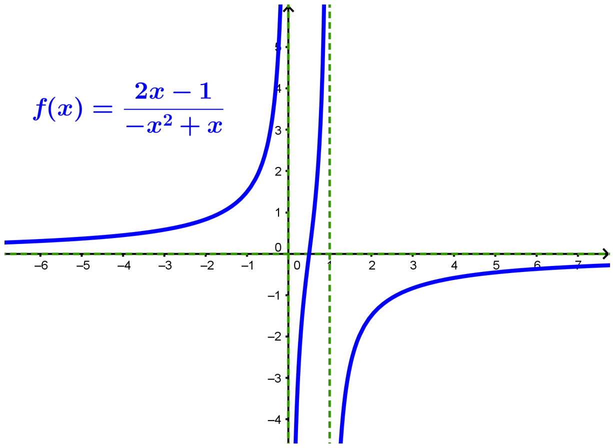


Figura 1.22: Representación de $f(x) = \dfrac{2x-1}{-x^2+x}$

Volver al examen

1.2.65.

a) Estudie el dominio de definición, los extremos relativos y las asíntotas de la función

$$f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}.$$

b) Teniendo en cuenta los datos obtenidos en el apartado anterior, represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x)$.

(Junio 17)

- Solución:

Vamos a comenzar calculando el dominio. Por ser una función racional sabemos que al dominio pertenecen todos los números reales menos aquellos que anulen el denominador. Por tanto es obvio que $Dom\, f = \mathbb{R} - \{0\}$.

Vamos a calcular las asíntotas.

Puede tener una asíntota vertical en la recta $x = 0$. Vamos a comprobarlo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{1}{0}\right] = \left| \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty \\ \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{x^2+1}{x} = -\infty \end{array} \right.$$

Luego la recta $x = 0$ es una asíntota vertical.

Veamos si tiene asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x}=-\infty$$

Por tanto no tiene asíntota horizontal. Veamos si tiene asíntota oblicua.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1$$

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Si nacemos lo mismo con $x\to-\infty$ tendremos el mismo resultado, luego la recta $y=x$ es asíntota oblicua.

Vamos a estudiar la monotonía y de ahí obtendremos los puntos extremos.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+1)}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-1}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$$

Igualando a cero tendríamos

$$\frac{x^2-1}{x^2}=0\Longrightarrow x^2-1=0\Longrightarrow x^2=1\Longrightarrow x=\pm1$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada. Para ello usamos los puntos que la anulan y aquellos que no están en el dominio.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$\frac{x^2-1}{x^2}$	$+$	$-$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Luego en $x=-1$ habrá un máximo y en $x=1$ habrá un mínimo. Dichos puntos, sustituyendo en la función, son

- Máximo $\to P(-1,-2)$
- Mínimo $\to P(1,2)$

Si fuera necesario, para finar un poco más la representación, podemos ver cuanto vale la función en $x=\pm2$. La gráfica resultante es

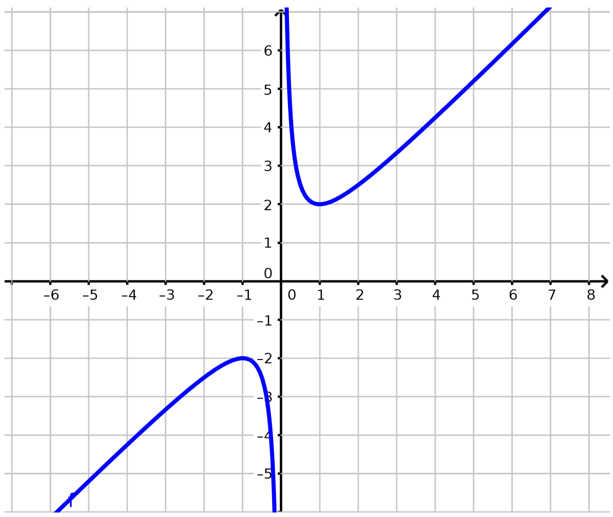


Figura 1.23: Representación de $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$

Volver al examen

1.2.66. Calcule, aplicando la regla de l'Hôpital, el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x) + (1-x)^2 - 1}{\ln(\cos x)}.$$

(Junio 17)

- Solución:

Vamos a comprobar que cumple las condiciones y a aplicar la regla.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}\, 2x + (1-x)^2 - 1}{\ln(\cos\, x)} &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{2\cos\, 2x - 2(1-x)}{\dfrac{-\operatorname{sen}\, x}{\cos\, x}} = \lim_{x\to 0} \frac{(2\cos\, 2x - 2 + 2x)\cos\, x}{-\operatorname{sen}\, x} = \\
&= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{(-4\operatorname{sen}\, 2x + 2)\cos\, x - (2\cos\, 2x - 2 + 2x)\operatorname{sen}\, x}{-\cos\, x} = \frac{2}{-1} = -2
\end{aligned}$$

Volver al examen

1.2.67.

a) Enuncie el *teorema del valor medio de Lagrange***.**

b) Aplicando a la función $f(x) = 1/x^2$ el anterior teorema, pruebe que cualesquiera que sean los números reales $1 < a < b$ se cumple la desigualdad $a + b < 2a^2b^2$.

(Julio 17)

- Solución:

El enunciado del teorema podemos encontrarlo en el apartado 10 del resumen teórico contenido en este libro.

Vamos a responder al segundo apartado. Nuestra función cumple las hipótesis del teorema en cualquier intervalo $[a, b]$ que cumpla $b > a > 1$, pues solo se anula en el 0. Además por ser una función racional es continua y derivable en su dominio, y por tanto en el intervalo antes citado. Vamos a calcular su derivada.

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3}$$

Vamos a aplicar el teorema anterior a nuestra función en el intervalo $[a, b]$ con las condiciones que dicta el enunciado. Tendríamos que

$$\begin{aligned} \frac{f(b)-f(a)}{b-a} &= \frac{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}{b-a} = \frac{\frac{a^2-b^2}{b^2\,a^2}}{b-a} = \frac{a^2-b^2}{a^2\,b^2\,(b-a)} = \\ &= \frac{(a-b)(a+b)}{b^2\,a^2\,(b-a)} = \frac{-(a+b)}{b^2\,a^2} \end{aligned}$$

Según el teorema existirá un valor $c \in (a, b)$ en el que

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Por tanto

$$\frac{-(a+b)}{b^2\,a^2} = \frac{-2}{c^3} \Longrightarrow \frac{(a+b)}{b^2\,a^2} = \frac{2}{c^3}$$

Ahora bien, como $c \in (a, b) \Longrightarrow c > 1$ y en consecuencia tendríamos que

$$\frac{(a+b)}{b^2\,a^2} = \frac{2}{c^3} < 2$$

Si pasamos $b^2\,a^2$ multiplicando al otro lado tendremos lo que buscamos

$$a + b < 2a^2\,b^2$$

Volver al examen

1.2.68. Estudie el dominio, el signo, las asíntotas verticales y las asíntotas horizontales de la función

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}\,.$$

(Julio 17)

- Solución:

Como se trata de una función racional el dominio lo formarán todos los números reales menos aquellos que anulan el denominador.

$$x^2 + x = 0 \Longrightarrow x(x+1) = 0 \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right.$$

Luego el dominio de definición de la función es $Dom\, f = \mathbb{R} - \{0, -1\}$.

Vamos a estudiar el signo. Para ello calculamos también los valores que anulan el numerador y construimos la tabla.

$$2x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

La tabla que nos ayudará a estudiar el signo es

	$(-\infty,-1)$	$\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},0\right)$	$(0,+\infty)$
$2x+1$	$-$	$-$	$+$	$+$
x^2+x	$+$	$-$	$-$	$+$
$\frac{2x+1}{x^2+x}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Luego la función será

$$+\rightarrow \left(-1,-\frac{1}{2}\right)\cup(0,+\infty)$$
$$-\rightarrow (-\infty,-1)\cup\left(-\frac{1}{2},0\right)$$

Veamos ahora las asíntotas. Las verticales pueden encontrarse en los valores que anulan el denominador. Veamos si lo son y estudiemos su signo

- $x=-1$

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x+1}{x^2+x}=\left[\frac{-1}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to -1^-}\frac{2x+1}{x^2+x}=-\infty\\ \\ \displaystyle\lim_{x\to -1^+}\frac{2x+1}{x^2+x}=+\infty\end{array}\right.$$

Luego la recta $x=-1$ es una asíntota vertical de nuestra función.

- $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x+1}{x^2+x}=\left[\frac{1}{0}\right]=\left|\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+1}{x^2+x}=-\infty\\ \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+1}{x^2+x}=+\infty\end{array}\right.$$

Luego la recta $x=0$ es una asíntota vertical de nuestra función.

Veamos ahora las horizontales.

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{2x+1}{x^2+x}=0 \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{2x+1}{x^2+x}=0$$

Luego la recta $y=0$ es una asíntota horizontal.

Volver al examen

1.2.69.

a) Estudie el dominio, las asíntotas y crecimiento-decrecimiento de la función

$$f(x)=\frac{1}{x^2+2x-8}$$

b) Represente la gráfica de $f(x)$ utilizando el apartado anterior.

(Junio 18 - Anulado)

- Solución:

Empecemos por el dominio. Al ser un cociente hay que excluir del dominio los puntos que anulen el denominador.

$$x^2 + 2x - 8 = 0 \Longrightarrow x = -4\,;\, x = 2$$

En consecuencia el dominio será $Dom\, f = \mathbb{R} - \{2, -4\}$.

Vamos a calcular las asíntotas. A simple vista vemos que es probable que haya asíntotas verticales en las rectas $x = -4$ y $x = 2$. Además, ya que el grado del numerador es menor que el grado del denominador, la función va a tener una asíntota horizontal en la recta $y = 0$. Vamos a comprobarlo.

- Asíntotas verticales:
  - $x = -4$

$$\lim_{x\to -4} \frac{1}{x^2+2x-8} = \left[\frac{1}{0}\right] \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to -4^-} \frac{1}{x^2+2x-8} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to -4^+} \frac{1}{x^2+2x-8} = -\infty \end{array}\right.$$

    Luego tiene una asíntota vertical en la recta $x = -4$.

  - $x = 2$

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2+2x-8} = \left[\frac{1}{0}\right] \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 2^-} \frac{1}{x^2+2x-8} = -\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to 2^+} \frac{1}{x^2+2x-8} = +\infty \end{array}\right.$$

    Luego tiene una asíntota vertical en la recta $x = 2$.

- Asíntota horizontal $y = 0$.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2+2x-8} = 0 \qquad ; \qquad \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x^2+2x-8} = 0$$

  Luego tiene una asíntota horizontal en la recta $y = 0$.

Vamos a estudiar la monotonía de la función. Calculemos la derivada

$$f'(x) = \frac{-1(2x+2)}{(x^2+2x-8)^2} = \frac{-2x-2}{(x^2+2x-8)^2} = 0 \Longrightarrow x = -1$$

Estudiemos el signo de la derivada. Para ello, como siempre, usamos los puntos que anulan la derivada y los puntos que no están en el dominio.

	$(-\infty, -4)$	$(-4, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, +\infty)$
$-2x-2$	$+$	$+$	$-$	$-$
$(x^2+2x-8)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{-2x-2}{(x^2+2x-8)^2}$	$+$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

luego la función crece en $(-\infty, -4) \cup (-4, -1) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-1, 2)$. También presenta un máximo en el punto $M(-1, f(-1)) = (-1, -\dfrac{1}{9})$.

Con estos datos, la gráfica de la función sería

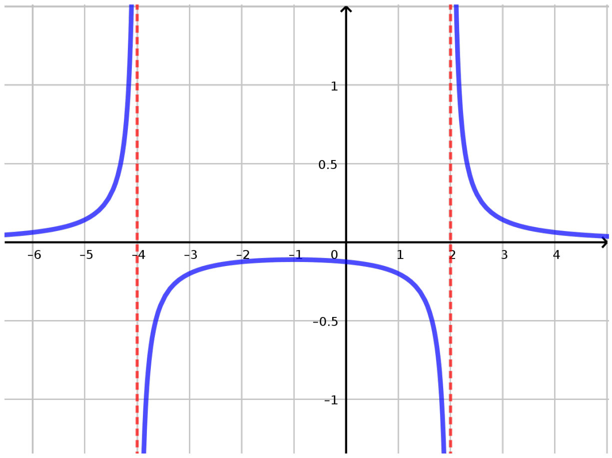


Figura 1.24: Representación de $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 2x - 8}$

Volver al examen

1.2.70. Estudie los extremos relativos (máximos y mínimos) y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x\,e^{-x}$.

(Junio 18 - Anulado)

- Solución:

De entrada es cómodo trabajar con la exponencial, pues esta es siempre estrictamente positiva y por lo tanto, ni puede dar raíces, ni afecta al signo. Además aparece cuando se deriva y cuando no, por lo que vamos a poder sacarla factor común. Vamos a hacer las tres primeras derivadas para estudiar lo que nos piden.

$$\begin{aligned}
&f'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1-x)e^{-x}\\
&f''(x) = -e^{-x} - e^{-x}(1-x) = e^{-x}(-1-1+x) = e^{-x}(x-2)\\
&f'''(x) = e^{-x} - (x-2)e^{-x} = e^{-x}(1-x+2) = e^{-x}(3-x)
\end{aligned}$$

Vamos a empezar por los máximos y mínimos. Para eso vamos a ver donde se anula la derivada primera y sustituyendo en la segunda decidimos si el punto resultante es máximo o mínimo.

$$(1-x)e^{-x} = 0 \Longrightarrow 1 - x = 0 \Longrightarrow x = 1$$

Sustituyendo en la segunda derivada tenemos

$$f''(1) = -1 \cdot e^{-1} = \frac{-1}{e} < 0$$

Luego, como en la segunda derivada el resultado de sustituir x por 1 ha dado negativo tenemos un máximo. La segunda coordenada del punto la obtenemos sustituyendo 1 en la función. Por tanto, el máximo será $P(1, f(1)) = (1, 1 \cdot e^{-1}) = \left(1, \dfrac{1}{e}\right)$.

Vamos a hora a calcular los puntos de inflexión. Estos saldrán de los puntos que anulen la segunda derivada y hagan que la tercera sea distinta de cero. Vamos a ver que valores anulan la segunda derivada.

$$(x-2)e^{-x} = 0 \Longrightarrow x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

Si sustituimos $x = 2$ en la tercera derivada obtenemos

$$f'''(2) = 1 \cdot e^{-2} = \frac{1}{e^2} \neq 0$$

En consecuencia tenemos un punto de inflexión en el punto $x = 2$. La segunda coordenada del punto la obtenemos sustituyendo 2 en la función. Por tanto, el máximo será $P(2, f(2)) = (2, 2 \cdot e^{-2}) = \left(2, \frac{2}{e^2}\right)$.

Volver al examen

1.2.71.

a) **Estudie el dominio, las asíntotas y máximos y mínimos de la función**

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

b) **Representе la gráfica de $f(x)$ utilizando los datos del apartado anterior.**

(Junio 18)

- Solución:

Comencemos por el dominio. Se trata de un cociente, por lo que tenemos que ver donde se anula el denominador y quitar del dominio dichos puntos.

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1 \Longrightarrow Dom\, f = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

En cuanto a las asíntotas es fácil observar que va a tener una asíntota horizontal (el grado del numerador es menor que el del denominador y por tanto tendrá como asíntota horizontal al recta $y = 0$) y verticales en $x = 1$ y $x = -1$. Empecemos por las verticales.

- $x = 1$

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0}\right] = \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{x^2 - 1} = -\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty \end{array} \right.$$

  Luego hay una asíntota vertical en la recta $x = 1$.

- $x = -1$

$$\lim_{x \to -1} \frac{1}{x^2 - 1} = \left[\frac{1}{0}\right] = \left| \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{1}{x^2 - 1} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{x^2 - 1} = -\infty \end{array} \right.$$

  Luego hay una asíntota vertical en la recta $x = -1$.

Veamos que hay una asíntota horizontal.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 - 1} = 0$$

Luego la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.
Vamos a estudiar la derivada.

$$y' = \frac{-1 \cdot 2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = \frac{-2x}{\left(x^2 - 1\right)^2} = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Estudiemos la monotonía para ver los máximos y mínimos.

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	$(0,1)$	$(1,+\infty)$
$\dfrac{-2x}{(x^2-1)^2}$	$+$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

En consecuencia hay un máximo en el punto $(0, f(0)) = (0, -1)$.
Con los datos obtenidos la gráfica resultante es

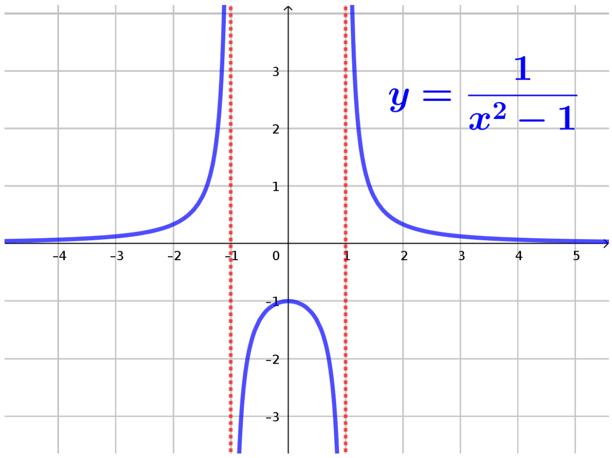


Figura 1.25: Representación de $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

Volver al examen

1.2.72. **Sea la función**

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \textbf{si } x \geq 0\,, \\ -x & \textbf{si } x < 0\,. \end{cases}$$

a) Estudie la continuidad y derivabilidad de $f(x)$.

b) Estudie la monotonía (crecimiento y decrecimiento) de $f(x)$ y justifique si en el punto $x = 0$ la función $f(x)$ tiene un mínimo relativo.

(Julio 18)

- Solución:

Tenemos que

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0\,, \\ -x & \text{si } x < 0\,. \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0\,, \\ -1 & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Estudiemos en primer lugar si es continua. Como cada trozo es un polinomio, sólo puede presentar problemas en $x = 0$.

- $f(0) = 0$
- $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} |x| = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} |x| = 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$

Luego la función es continua en todo $\mathbb{R}$. Veamos la derivabilidad.

Es obvio que si $x \neq 0$ la función es derivable. Veamos que ocurre en $x = 0$.

$$f'(0^-) = -1 \qquad\qquad f'(0^+) = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \nexists f'(0)$$

Luego la función es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$.

El segundo apartado nos pide estudiar la monotonía y los puntos extremos. Al ser una función definida a trozos vamos a estudiar el signo en cada trozo.

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$

Por tanto

- Crece $\rightarrow (0, +\infty)$.
- Decrece $\rightarrow (-\infty, 0)$.

Lo que ocurre en $x = 0$ merece especial atención. La función no es derivable en $x = 0$, pero, observando la monotonía vemos que en ese punto, que si existe la función, va a haber un mínimo relativo, pues, en ese punto va a ser en el que menos vale la función en un entorno alrededor del cero. De hecho, mirando la monotonía, se trata de un mínimo absoluto.

Volver al examen

1.2.73. Sea la función $f(x) = x\ln(x)$ para $x > 0$.

a) ¿Se puede definir $f(0)$ para que $f(x)$ sea continua por la derecha de $x = 0$?

b) Estudie los máximos y mínimos relativos de $f(x)$ para $x > 0$.

c) Halle, si existe, la recta tangente a $f(x)$ en $x = 1$.

(Julio 18)

- Solución:

Para responder al primer apartado tenemos que ver cuanto vale $\lim\limits_{x\to 0^+} x \ln x$. Utilizaremos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0^+} x \ln x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Bastaría con definir $f(0) = 0$ para que fuera continua por la derecha.

Para hacer el segundo apartado vamos a calcular la derivada.

$$f'(x) = \ln x + x\,\frac{1}{x} = \ln x + 1 = 0 \Longrightarrow \ln x = -1 \Longrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Hagamos la segunda derivada para ver que ocurre en ese punto.

$$f''(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$$

Por lo tanto presenta un mínimo en el punto $\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right) = \left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$

Vamos a calcular la recta tangente en $x = 1$. La ecuación de dicha recta es

$$y = f(1) + f'(1)(x-1) \Longrightarrow y = 0 + 1(x-1) \Longrightarrow y = x - 1$$

Volver al examen

1.3. Integral. Cálculo de áreas y volúmenes

1.3.1. Calcular, integrando por partes, el valor de

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, dx$$

(Junio 00)

- Solución:

Vamos a comenzar calculando una primitiva por partes.

$$u = \ln x \qquad \Longrightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = x^2 dx \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{x^3}{3}$$

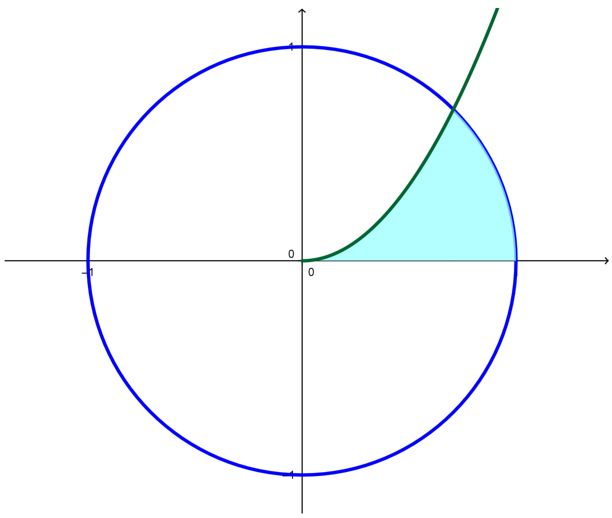
$$\int x^2 \ln x \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \int \frac{x^{\cancel{3}\,2}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$$

Luego:

$$\int_1^2 x^2 \ln x \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3} \ln 2 - \frac{8}{9}\right) - \left(0 - \frac{1}{9}\right) = \frac{8}{3} \ln 2 - \frac{7}{9}$$

Volver al examen

1.3.2. Calcular el área limitada por la parábola $y = \sqrt{2}\,x^2$, la circunferencia $x^2+y^2 = 1$ y el eje OX, que aparece rayada en la figura .



(Junio 00)

- Solución:

Por lo que observamos en la figura del enunciado, nos piden que de la circunferencia consideremos la rama positiva, es decir, tomaremos $y = \sqrt{1-x^2}$.

Es obvio que el área hay que dividirla en dos trozos, como podemos ver en la figura 1.26.

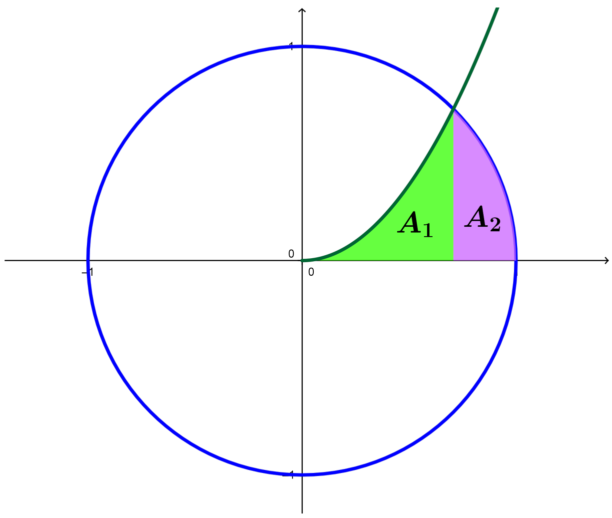


Figura 1.26: Representación detallada del área buscada

Vamos a calcular los puntos de corte:

$$\sqrt{2}\,x^2 = \sqrt{1-x^2} \Longrightarrow 2x^4 = 1 - x^2 \Longrightarrow 2x^4 + x^2 - 1 = 0$$

Se trata de una ecuación bicuadrada, por lo que hacemos $z = x^2$ y resolvemos.

$$2z^2 + z - 1 = 0$$

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Longrightarrow \begin{cases} z_1 = \dfrac{-1+3}{4} = \dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 = \dfrac{-1-3}{4} = -1 \Longrightarrow \text{ No vale.} \end{cases}$$

Luego el área buscada, según vemos en la figura 1.26 es:

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{2}\,x^2\,dx + \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

Vamos a calcular cada una por separado, calculando previamente una primitiva en cada caso.

$$\int \sqrt{2}\,x^2 dx = \frac{\sqrt{2}}{3}x^3$$

Por tanto,

$$A_1 = \int_0^{\sqrt{2}/2} \sqrt{2}\,x^2 dx = \left[\frac{\sqrt{2}}{3}x^3\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{1}{6}\ \mathrm{u}^2$$

Por otro lado tenemos:

$$\int \sqrt{1-x^2} dx$$

Vamos a utilizar el cambio $x = \operatorname{sen} t$ para resolver la integral indefinida.

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{sen} t \\ dx &= \cos t\ dt \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\ dx = \int \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 t}\ \cos t\ dt = \int \cos^2 t\ dt$$

Si aquí cambiamos $\cos^2 t = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\cos 2t}{2}$ tendríamos:

$$\int \left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2t}{2}\right) dt = \frac{1}{2}t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2(\operatorname{arc\,sen} x)}{4}$$

Por tanto:

$$A_2 = \int_{\sqrt{2}/2}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2}\operatorname{arc\,sen} x + \frac{\operatorname{sen} 2(\operatorname{arc\,sen} x)}{4}\right]_{\sqrt{2}/2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} + 0\right) - \left(\frac{\pi}{8} + \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\, u^2$$

En consecuencia:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{6} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} = \frac{4+3\pi-6}{24} = \frac{3\pi-2}{24}\ \mathrm{u}^2$$

Volver al examen

1.3.3. Determinar una función $f(x)$ cuya segunda derivada sea $f''(x) = x\, e^x$.

(Septiembre 00)

- Solución:

Habrá que calcular una primitiva de la función que nos dan, que será f' y posteriormente calcular otra primitiva de ésta, que será la función que buscamos. La integral se calcula por partes:

$$\begin{array}{lcl} u = x & ; & du = dx \\ dv = e^x dx & ; & v = e^x \end{array}$$

Por tanto:

$$f'(x) = \int x\, e^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x$$

Hacemos de nuevo la integral de la función obtenida.

$$f(x) = \int (x\, e^x - e^x)\ dx = \int x\, e^x\, dx - \int e^x\, dx = x\, e^x - e^x - e^x = x\, e^x - 2\, e^x$$

La función buscada es:

$$f(x) = x\, e^x - 2\, e^x$$

Volver al examen

1.3.4. Calcular, con el cambio de variable $t^2 = x + 3$, el valor de:

$$\int_1^6 \frac{x\, dx}{\sqrt{x+3}}$$

(Septiembre 00)

- Solución:

Vamos a calcular primero una primitiva utilizando el cambio indicado:

$$\begin{array}{l} t^2 = x + 3 \implies x = t^2 - 3 \implies t = \sqrt{x+3} \\ 2\, t\, dt = dx \end{array}$$

Realizando la sustitución:

$$\int \frac{\left(t^2-3\right)2\,t\,dt}{t} = \int \frac{2t^3-6t}{t}\,dt = \int \left(2t^2-6\right)dt = \frac{2t^3}{3} - 6t = \frac{2\sqrt{(x+3)^3}}{3} - 6\sqrt{x+3}$$

En consecuencia:

$$\int_1^6 \frac{x\,dx}{\sqrt{x+3}} = \left[\frac{2\sqrt{(x+3)^3}}{3} - 6\sqrt{x+3}\right]_1^6 = \left(\frac{54}{3} - 18\right) - \left(\frac{16}{3} - 12\right) =$$

$$= \frac{54-54-16+36}{3} = \frac{20}{3}$$

Volver al examen

1.3.5. Determinar una constante positiva a sabiendo que la figura plana limitada por la parábola $y = 3ax^2 + 2x$, la recta $y = 0$ y la recta $x = a$ tiene área $(a^2-1)^2$.

(Junio 01)

- Solución:

La figura 1.27 nos muestra una visión gráfica del problema planteado.

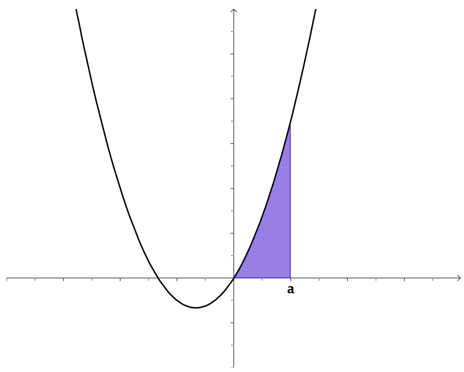


Figura 1.27: Representación detallada del área buscada

Como $a > 0$ la función $y = 3ax^2 + 2x$ corta al Eje X en $x = 0$ y en $x = -\dfrac{2}{3a}$ (que será un número negativo).

Luego el área buscada es la que aparece sombreada en la figura 1.27. Por tanto, tenemos que:

$$\int_0^a (3ax^2 + 2x)dx = (a^2-1)^2$$

Ahora bien,

$$\int_0^a (3ax^2 + 2x)dx = \left[ax^3 + x^2\right]_0^a = a^4 + a^2$$

En consecuencia:

$$a^4 + a^2 = (a^2-1)^2$$
$$\cancel{a^4} + a^2 = \cancel{a^4} + 1 - 2a^2$$
$$3a^2 = 1$$
$$a^2 = \frac{1}{3}$$

$$a = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$$

Como tiene que ser positivo el valor de a, tenemos que $a = \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Volver al examen

1.3.6. Calcular el valor de:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{e^{x^2}}$$

(puede hacerse con el cambio de variable $t = -x^2$ y con el cambio de variable $t = x^2$).

(Junio 01)

- Solución:

Vamos a calcular una primitiva. Para ello vamos a utilizar el cambio $t = x^2$.

$$t = x^2 \Longrightarrow dt = 2x\,dx$$

Sustituyendo tenemos:

$$\int \frac{1}{2e^t}\,dt = \frac{-1}{2}e^{-t} = \frac{-1}{2}e^{-x^2}$$

Por tanto:

$$\int_0^1 \frac{x\,dx}{e^{x^2}} = \left[\frac{-1}{2}e^{-x^2}\right]_0^1 = \frac{-1}{2e} + \frac{1}{2}$$

Volver al examen

1.3.7. Representar gráficamente el recinto plano limitado por la curva $y = x^3 - x$ y su tangente en el punto de abscisa $x = 1$. Calcular su área

(Septiembre 01)

- Solución:

Vamos a calcular primero la recta tangente. Vamos a calcularla mediante la ecuación punto-pendiente. El punto lo obtenemos sustituyendo en la función x por 1. Dicho punto será $P(1, 0)$.

La pendiente de la recta tangente se obtiene sustituyendo en la derivada de la función:

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \Longrightarrow m_{tg} = f'(1) = 3 - 1 = 2$$

La ecuación de la recta será:

$$y - 0 = 2(x - 1) \Longrightarrow y = 2x - 2$$

A continuación representaremos la zona que nos piden. Para pintar la recta basta con hacer una tabla de valores, pero para pintar la función será mejor estudiar su derivada. Vamos a calcularla y estudiaremos su signo para ver el crecimiento y los máximos y mínimos.

$$f'(x) = 3x^2 - 1 \Longrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Estudiamos el signo:

	$(-\infty, -\sqrt{3}/3)$	$(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3)$	$(\sqrt{3}/3, +\infty)$
$3x^2 - 1$	$+$	$-$	$+$
	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Luego:

- Crece $\longrightarrow \left(-\infty, -\sqrt{3}/3\right) \cup \left(\sqrt{3}/3, +\infty\right)$.
- Decrece $\longrightarrow \left(-\sqrt{3}/3, \sqrt{3}/3\right)$.
- Máximo $\longrightarrow \left(-\sqrt{3}/3, 0'38\right)$.
- Mínimo $\longrightarrow \left(\sqrt{3}/3, -0'38\right)$.

Es evidente que se trata de una función impar y por tanto corta en el $(0,0)$. La representación gráfica podemos verla en la figura 1.28.

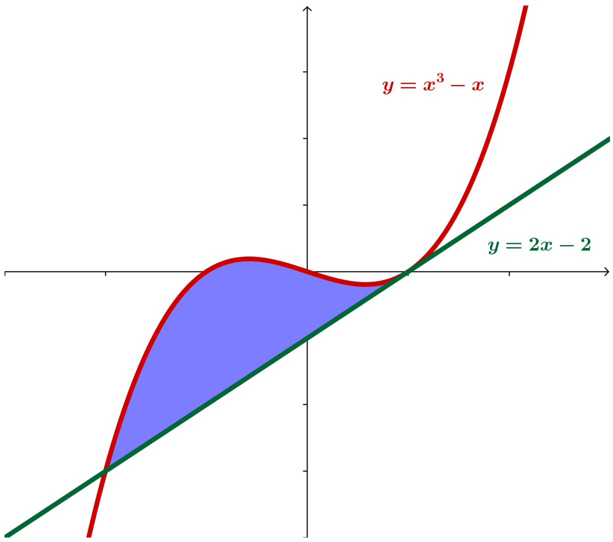


Figura 1.28: Representación detallada del área buscada

Vamos ahora a calcular el área. Hallamos los puntos de corte de la función y la recta.

$$x^3 - x = 2x - 2 \Longrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0$$

Buscamos una raiz por Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & 0 \end{array}$$

Calculamos después las otras dos:

$$x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Luego los límites de integración son $x = -2$ y $x = 1$. Vamos a calcular el área.

$$A = \int_{-2}^{1} \left[\left(x^3 - x\right) - (2x - 2)\right] dx = \int_{-2}^{1} \left(x^3 - 3x + 2\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2\right) - \left(\cancel{4} - 6 - \cancel{4}\right) = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 8 = \frac{1 - 6 + 32}{4} = \frac{27}{4}\ u^2$$

Volver al examen

1.3.8. Definir el concepto de primitiva de una función y explicar su relación con el concepto de integral definida.

(Septiembre 01)

- Solución:

La solución a este ejercicio puedes encontrarla en el punto 15 y 19 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Volver al examen

1.3.9. Representar gráficamente la figura plana limitada por las parábolas $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 4$. Calcular su área.

(Junio 02)

- Solución:

Las funciones que nos dan son dos parábolas cuyas representaciones gráficas podemos verla en la figura 1.29.

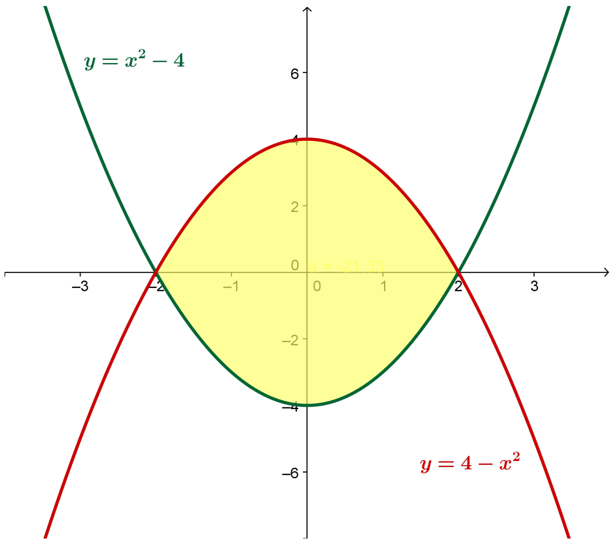


Figura 1.29: Representación gráfica de la región pedida.

Vamos a calcular los puntos corte.

$$x^2 - 4 = 4 - x^2 \Longrightarrow 2x^2 - 8 = 0 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2$$

Calculemos ahora el área:

$$A = \int_{-2}^{2} \left[\left(4 - x^2\right) - \left(x^2 - 4\right) \right] \, dx = \int_{-2}^{2} \left(-2x^2 + 8\right) \, dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 8x \right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left(\frac{-16}{3} + 16 \right) - \left(\frac{16}{3} - 16 \right) = 32 - \frac{32}{3} = \frac{64}{3} \, u^2$$

Volver al examen

1.3.10. Calcular el valor de la integral

$$\int_0^1 x\, e^{-x}\, dx$$

(Junio 02)

- Solución:

Vamos a calcular primero una primitiva. Esta integral hay que resolverla por partes.

$$\begin{array}{lcl} u = x & ; & du = dx \\ dv = e^{-x}\, dx & ; & v = -e^{-x} \end{array}$$

Por tanto:

$$\int x\, e^{-x}\, dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -x\, e^{-x} - e^{-x}$$

Retomamos la definida y tenemos:

$$\int_0^1 x\, e^{-x}\, dx = \left[-x\, e^{-x} - e^{-x}\right]_0^1 = \left(-e^{-1} - e^{-1}\right) + 1 = \frac{-2}{e} + 1 = \frac{e-2}{e}$$

Volver al examen

1.3.11. Representa gráficamente el recinto plano limitado, en la región donde la coordenada x es positiva, por la recta $x = 1$, la hipérbola $xy = 1$, y la recta $6y - x + 1 = 0$. Calcula su área.

(Septiembre 02)

- Solución:

Vamos a representar la región pedida haciendo una tabla de valores para cada caso:

a) Para la hipérbola $xy = 1$ valdría:

x	$0'1$	$0'5$	1	2	3
y	10	5	1	$1/2$	$1/3$

b) Para la recta bastarían dos puntos:

x	0	3
y	$-1/6$	$1/3$

La representación gráfica podemos verla en la figura 1.30.

Vamos a buscar los puntos de corte de las dos gráficas.

$$\left.\begin{array}{rcr} x.y & = & 1 \\ 6y - x & = & -1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} x.y = 1 \\ x = 6y + 1 \end{array}\right] \Longrightarrow (6y+1).y = 1 \Longrightarrow 6y^2 + y - 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{12} = \frac{-1 \pm 5}{12} = \left\{ \begin{array}{l} y = -\dfrac{1}{2} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{array} \right.$$

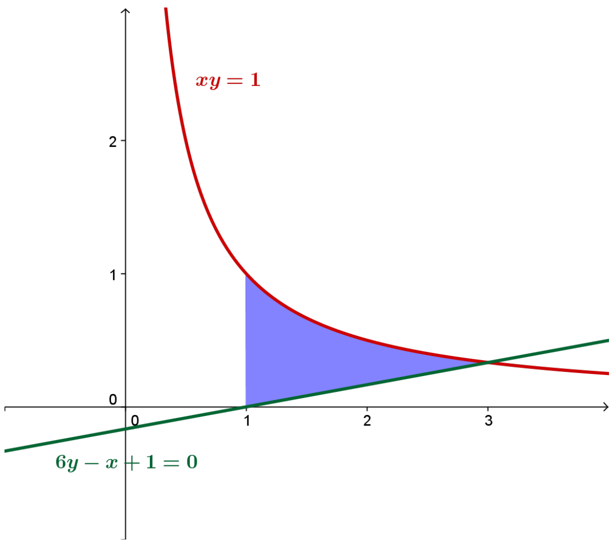


Figura 1.30: Representación gráfica de la región pedida.

Sustituyendo cada valor de y obtenemos uno de x.

$$y = -\frac{1}{2} \Longrightarrow x = -3 + 1 = -2 \Longrightarrow \text{No nos sirve.}$$
$$y = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = 2 + 1 = 3.$$

Por tanto, mis límites de integración son $x = 1$ y $x = 3$.

Observando la figura 1.30, podemos calcular el área de la siguiente forma:

$$\int_1^3 \left(\frac{1}{x} - \frac{x-1}{6}\right) dx = \left[\ln x - \frac{x^2}{12} + \frac{x}{6}\right]_1^3 = \left(\ln 3 - \frac{9}{12} + \frac{6}{12}\right) - \left(0 - \frac{1}{12} + \frac{2}{12}\right) =$$

$$= \ln 3 - \frac{4}{12} = \ln 3 - \frac{1}{3}\ u^2$$

Volver al examen

1.3.12. Calcular una primitiva de la función $f(x) = \left(x^2+1\right)^{-1} x$ que se anule en $x = 2$.

(Septiembre 02)

- Solución:

Vamos a calcular la integral indefinida y despues calcularemos el valor de la constante que hace que se anule en $x = 2$.

$$\int \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \ln\left(x^2+1\right) + k$$

Si hacemos $x = 2$ resulta:

$$\frac{1}{2}\ \ln 5 + k = 0 \Longrightarrow k = -\ln\sqrt{5}$$

Volver al examen

1.3.13. Representar gráficamente el recinto plano limitado por la recta $y = x - 2$ y la parábola de ecuación $y^2 = x$. Calcular su área.

(Junio 03)

- Solución:

Son funciones suficientemente conocidas, por lo que con una tabla de valores se pueden representar. Sólo hay que tener en cuenta que de la parábola hay que considerar las dos ramas. La representación pedida la podemos ver en la figura 1.31.

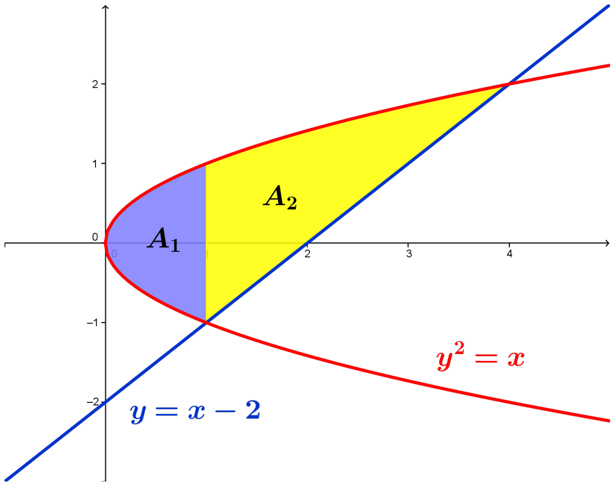


Figura 1.31: Representación gráfica de la región pedida.

Vamos a hallar los puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = x \\ y = x - 2 \end{array}\right] \Longrightarrow x = (x-2)^2 \Longrightarrow x = x^2 - 4x + 4 \Longrightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \\ x = 1 \end{array}\right.$$

Vamos a calcular el área. Observando la gráfica de la figura 1.31 vemos que hay que descomponer el área en dos trozos (A_1 y A_2).

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - (-\sqrt{x})\right] dx + \int_1^4 \left[\sqrt{x} - (x-2)\right] dx = \int_0^1 2\sqrt{x}\, dx +$$

$$+ \int_1^4 \left[\sqrt{x} - x + 2\right] dx = \left[\frac{4\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{2\sqrt{x^3}}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^4 = \frac{4}{3} + \left(\frac{16}{3} - \frac{16}{2} + 8\right) -$$

$$-\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - \frac{16}{2} + 8 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{8 + 32 - 48 + 48 - 4 + 3 - 12}{6} = \frac{27}{6}\, u^2.$$

Volver al examen

1.3.14. Calcular el valor de la siguiente integral, donde ln denota el logaritmo neperiano:

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)}$$

(Junio 03)

- Solución:

Vamos a calcular primero una primitiva. Para eso vamos a hacer el cambio:

$$\begin{aligned} t &= \ln x \\ dt &= \frac{1}{x}dx \end{aligned}$$

Tenemos por tanto

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| = \ln |\ln |x||$$

Por tanto:

$$\int_e^{e^2} \frac{dx}{x(\ln x)} = [\ln |\ln |x||]_e^{e^2} = \ln |\ln |e^2|| - \ln |\ln |e|| = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Volver al examen

1.3.15. Calcular el valor de la integral (puede hacerse con el cambio de variable $t = e^{-x}$):

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$$

(Septiembre 03)

- Solución:

Vamos a calcular primero una primitiva. Aplicamos el cambio aconsejado:

$$\begin{aligned} t = e^{-x} &\implies e^x = \frac{1}{t} \\ dt = -e^{-x}dx &\implies dx = \frac{-dt}{t} \end{aligned}$$

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{-dt}{t\left(\frac{1}{t}+1\right)} = -\int \frac{dt}{1+t} = -\ln|1+t| = -\ln\left|1+e^{-x}\right|$$

Por tanto:

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x+1} = \left[-\ln\left|1+e^{-x}\right|\right]_0^1 = -\ln\left(1+\frac{1}{e}\right) + \ln 2$$

Volver al examen

1.3.16. Representar gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = e^x$, su recta tangente en el punto de abcisa $x = 0$, y la recta $x = 1$. Calcular su área.

(Septiembre 03)

- Solución:

Vamos a calcular en primer lugar la ecuación de la recta tangente a la curva en $x = 0$. Sabemos que dicha recta pasa por $(0, e^0) = (0, 1)$ y que su pendiente es $m_{tg} = f'(0) = e^0 = 1$.

Por tanto la ecuación de dicha recta es:

$$y - 1 = 1(x - 0) \implies y = x + 1$$

La representación gráfica podemos verla en la figura 1.32.

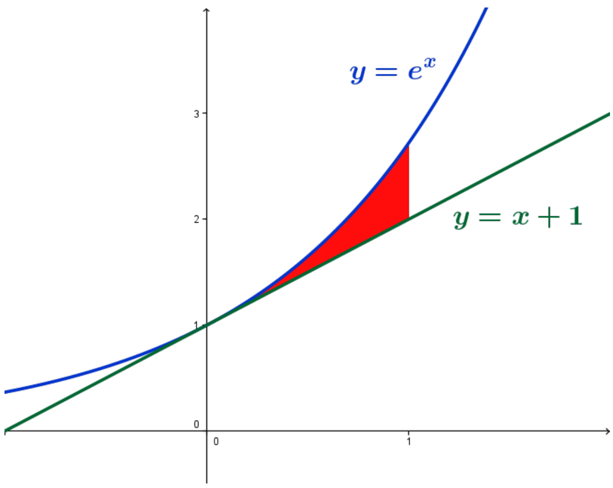


Figura 1.32: Representación gráfica de la región pedida.

En la gráfica puede verse que no hay más punto de corte que $x = 0$, por tanto el área que queremos es:

$$A = \int_0^1 [e^x - (x+1)]\, dx = \int_0^1 (e^x - x - 1)dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \left(e - \frac{1}{2} - 1\right) - 1 =$$

$$= e - \frac{5}{2}\, u^2.$$

Volver al examen

1.3.17. Definir el concepto de primitiva de una función. ¿Existe alguna primitiva de la función $f(x) = x^{-1}$ que no tome ningún valor positivo en el intervalo $1 \leq x \leq 2$?

(Junio 04)

- Solución:

El concepto teórico puedes encontrarlo en el punto 15 del resumen teórico que hay al principio del libro. Vayamos a lo práctico.

Tenemos la función $f(x) = x^{-1} = \dfrac{1}{x}$.

Si hayamos las primitivas de la función nos sale:

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + k$$

La gráfica de $y = \ln x$ podemos verla en la figura 1.33.

Como sabemos, k desplaza verticalmente dicha gráfica, por tanto, si a k le doy, por ejemplo, el valor -3, es decir, $f(x) = \ln x - 3$, la gráfica se desplazará 3 unidades hacia abajo, resultando la gráfica de la derecha de la figura 1.33.

Hay que tener en cuenta que la función $y = \ln x$ es una función creciente y que $\ln 1 = 0$ y $\ln 2 = 0'693147...$, por tanto $y = \ln x - 3$ será negativa en todo el intervalo (Observar la gráfica de la derecha la figura 1.33). De hecho bastaría con tomar $k < -\ln 2$.

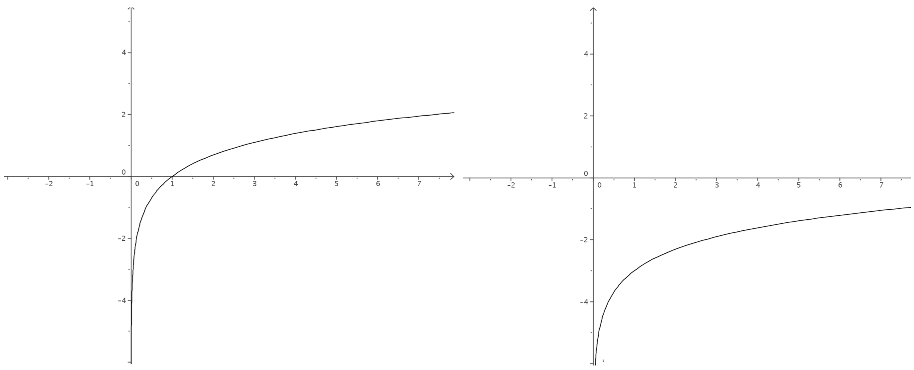


Figura 1.33: Gráfica de $y = \ln x$ y de $y = \ln x - 3$

Volver al examen

1.3.18. Representa gráficamente el recinto plano limitado, en la región donde la abcisa x es positiva, por la curva $y = x^3 + x$, y por la recta $y = 2x$. Calcular el área.

(Junio 04)

- Solución:

Tenemos que las funciones que encierran el área son $y = x^3 + x$ é $y = 2x$. Para representar $y = x^3 + x$ bastará con calcular sus máximos y mínimos, los puntos de corte con lo ejes y, si es necesario, una tabla de valores.

Vamos a empezar hallando los puntos de corte con el eje X haciendo y=0.

$$x^3 + x = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \text{No tiene solución} \end{cases}$$

Vamos a ver donde se anula su derivada:

$$y' = 3x^2 + 1 \Longrightarrow 3x^2 + 1 = 0 \Longrightarrow \text{No tiene solución}$$

La gráfica de las dos funciones podéis verla en la gráfica 1.34

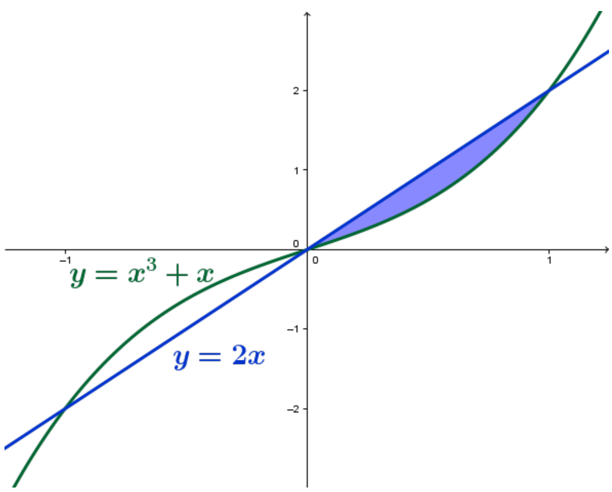


Figura 1.34: Visión gráfica del problema

Vamos a hallar los puntos de corte de las dos funciones:

$$x^3 + x = 2x \Longrightarrow x^3 - x = 0 \Longrightarrow x \cdot (x^2 - 1) = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0. \\ x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1. \end{array} \right.$$

Vamos a calcular el área, que será el comprendida entre 0 y 1 por las dos funciones, ya que la abcisa tiene que ser positiva. Como la recta está por encima ponemos:

$$A = \int_0^1 \left[2x - \left(x^3 + x\right)\right] dx = \int_0^1 \left(x - x^3\right) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}\ u^2$$

Volver al examen

1.3.19. Representar gráficamente la figura plana limitada en el primer cuadrante $(x \geq 0, y \geq 0)$ por la recta $y = x$ y la curva $x = y^3$. Calcular su área.

(Septiembre 04)

- Solución:

Tenemos que $(x \geq 0, y \geq 0)$, es decir, el primer cuadrante. Tenemos también la función $y = x$ y la función $x = y^3 \Longrightarrow y = \sqrt[3]{x}$.

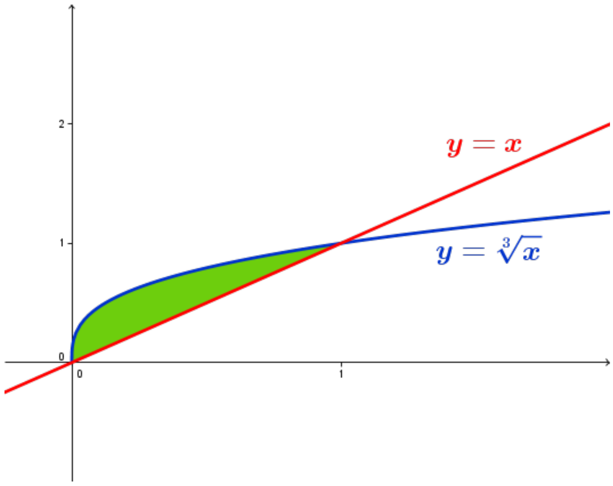


Figura 1.35: Representación detallada

El área que queremos calcular es la que nos muestra la figura 1.35. Buscamos los puntos de corte de ambas funciones:

$$x = \sqrt[3]{x} \Longrightarrow x^3 = x \Longrightarrow x^3 - x = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1 \end{array} \right.$$

Como $x \geq 0; y \geq 0$, sobra la raiz $x = -1$ y tenemos que:

$$A = \int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - x\right) dx = \int_0^1 \left(x^{\frac{1}{3}} - x\right) dx = \left[\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{3x^{\frac{4}{3}}}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\ u^2$$

Volver al examen

1.3.20. Calcular el valor de la siguiente integral:

$$\int_1^2 x\sqrt[3]{x^2-1}\,dx$$

(puede hacerse con el cambio de variable $x^2-1=t^3$.

(Septiembre 04)

- Solución:

Vamos a resolver primero la indefinida.

Hacemos el cambio que nos recomiendan:

$$\begin{array}{lcl} t^3 = x^2-1 & \Longrightarrow & t=\sqrt[3]{x^2-1} \\ 3t^2\,dt = 2x\,dx & \Longrightarrow & x\,dx = \dfrac{3}{2}t^2\,dt \end{array}$$

Por tanto:

$$\int x\sqrt[3]{x^2-1}\,dx = \frac{3}{2}\int t^2\sqrt[3]{t^3}\,dt = \frac{3}{2}\int t^3\,dt = \frac{3}{2}\frac{t^4}{4}+k = \frac{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}{8}+k$$

En consecuencia tendríamos:

$$\int_1^2 x\sqrt[3]{x^2-1}\,dx = \left[\frac{3\sqrt[3]{(x^2-1)^4}}{8}\right]_1^2 = \frac{3\sqrt[3]{81}}{8} = \frac{9\sqrt[3]{3}}{8}$$

Volver al examen

1.3.21. Representar gráficamente el recinto plano limitado por las curvas $y=e^x$, $y=e^{-x}$, y por la recta $x=1$. Calcular su área.

(Junio 05)

- Solución:

Vamos a representar las funciones haciendo una tabla de valores:

$$y=e^x \Longrightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & e^{-2} & e^{-1} & 1 & e & e^2 \end{array}$$

$$y=e^{-x} \Longrightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \hline y & e^{2} & e & 1 & e^{-1} & e^{-2} \end{array}$$

La representación gráfica y el área buscada la vemos en la figura 1.36.

Vamos a encontrar los puntos de corte:

$$e^x=e^{-x} \Longrightarrow \frac{e^x}{e^{-x}}=1 \Longrightarrow e^x.e^x=1 \Longrightarrow e^{2x}=1=e^0 \Longrightarrow 2x=0 \Longrightarrow x=0$$

Luego los límites de integración son $x=0$ y $x=1$. Por tanto:

$$\int_0^1 \left(e^x-e^{-x}\right)dx = \left[e^x+e^{-x}\right]_0^1 = \left(e^1+e^{-1}\right)-(1+1) =$$

$$= e+\frac{1}{e}-2 = \frac{e^2+1-2e}{e}\ u^2$$

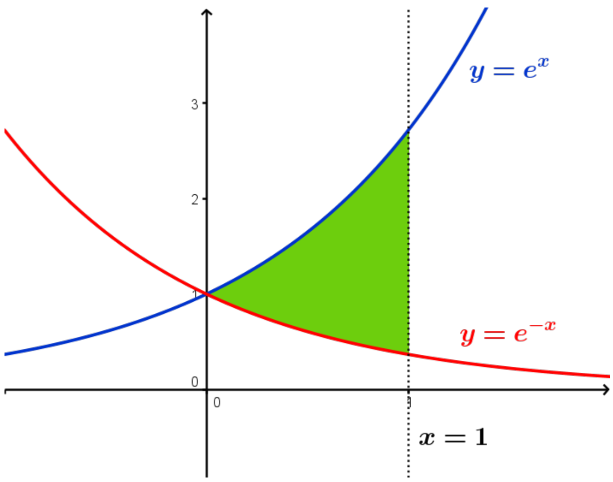


Figura 1.36: Área encerrada por las exponenciales y x=1.

Volver al examen

1.3.22. Calcular el valor de la siguiente integral:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

(puede hacerse por partes).

(Junio 05)

- Solución:

Vamos a resolver la integral como nos indican, por partes. Para ello vamos a derivar el logaritmo y a integrar el polinomio.

$$u = \ln x \quad \Longrightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx$$

$$dv = \frac{1}{x^2}dx \quad \Longrightarrow \quad v = \frac{-1}{x}$$

Vamos a empezar por encontrar una primitiva:

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \frac{-\ln x}{x} - \int \frac{-1}{x} \cdot \frac{1}{x}\, dx = \frac{-\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\, dx = \frac{-\ln x}{x} - \frac{1}{x} = \frac{-\ln x - 1}{x}$$

Por tanto:

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \left[\frac{-\ln x - 1}{x}\right]_1^e = \frac{-\ln e - 1}{e} - \frac{-\ln 1 - 1}{1} = \frac{-2}{e} + 1$$

Volver al examen

1.3.23. Calcular una primitiva de la función $f(x) = (x+1)^2 x^{-1/2}$ que se anule en $x = 1$.

(Septiembre 05)

- Solución:

Tenemos que nuestra función es:

$$f(x) = (x+1)^2 x^{-1/2} = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{x^2 + 2x + 1}{\sqrt{x}} = x^{3/2} + 2x^{1/2} + x^{-1/2}$$

Vamos a calcular la integral indefinida:

$$\int (x^{3/2} + 2x^{1/2} + x^{-1/2})\,dx = \frac{2x^{5/2}}{5} + \frac{4x^{3/2}}{3} + 2x^{1/2} = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{4x\sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x} + k$$

Según el enunciado tiene que anularse en $x = 1$, por tanto:

$$\frac{2}{5} + \frac{4}{3} + 2 + k = 0 \Longrightarrow k = -\frac{2}{5} - \frac{4}{3} - 2 = \frac{-6 - 20 - 30}{15} = \frac{-56}{15}$$

La primitiva buscada es:

$$F(x) = \frac{2x^2\sqrt{x}}{5} + \frac{4x\sqrt{x}}{3} + 2\sqrt{x} - \frac{56}{15}$$

Volver al examen

1.3.24. Representar gráficamente el recinto plano limitado por la recta $x - y = 1$ y por la curva de ecuación $y = \sqrt{x-1}$. Calcular su área.

(Septiembre 05)

- Solución:

Ambas funciones son conocidas y su representación puede hacerse por una sencilla tabla de valores que voy a omitir. Tras eso la representación gráfica podemos verla en la figura 1.37.

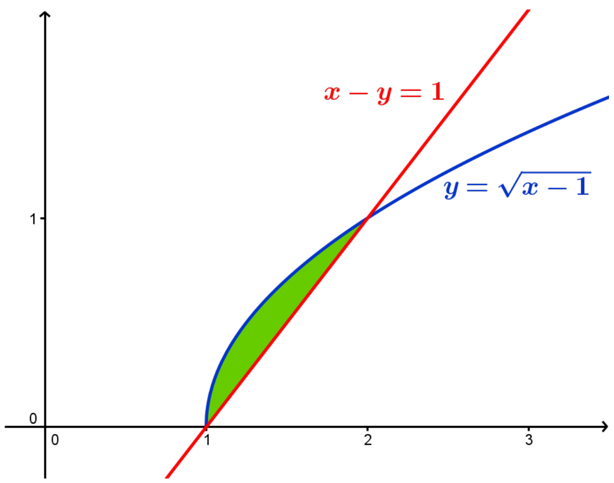


Figura 1.37: Representación detallada del área buscada

A continuación vamos a calcular el área encerrada por las dos funciones. Empezaremos por calcular los puntos de corte para delimitar los límites de integración.

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &= x - 1 \\ x - 1 &= (x-1)^2 \\ x - 1 &= x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$-x^2 + 3x - 2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Por tanto el área quedaría:

$$A = \int_1^2 \left[\sqrt{x-1} - (x-1)\right] dx = \left[\frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \cancel{2} + \cancel{2}\right) - \left(-\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \frac{4+3-6}{6} = \frac{1}{6}\ u^2$$

Volver al examen

1.3.25. Representa gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = x^4$, su recta tangente en el punto $(1,1)$ y el eje OY. Calcular su área.

(Junio 06)

- Solución:

La función $y = x^4$ es de fácil representación, basta con dar algunos valores. Vamos a calcular la recta tangente que nos piden y posteriormente realizaremos la representación de la zona buscada.

Sabemos que la pendiente de dicha recta es la derivada de la función en el punto, por tanto:

$$f'(x) = 4x^3 \Longrightarrow m_{tg} = f'(1) = 4$$

Como la recta pasa por el punto $(1,1)$ y tiene la pendiente anterior, tenemos que la recta buscada es:

$$y - 1 = 4(x-1) \Longrightarrow y - 1 = 4x - 4 \Longrightarrow y = 4x - 3$$

En consecuencia, la representación gráfica de ambas funciones y la zona pedida la podemos ver en la figura 1.38.

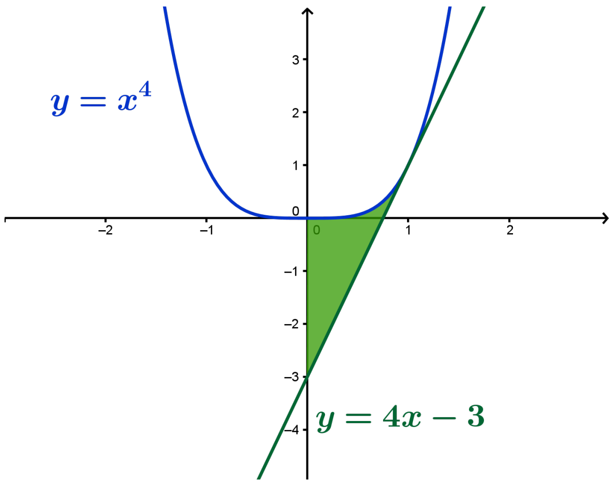


Figura 1.38: Representación gráfica de la región pedida.

Vamos a calcular el área que nos piden:

$$\int_0^1 \left[x^4 - (4x-3)\right] dx = \left[\frac{x^5}{5} - 2x^2 + 3x\right]_0^1 = \frac{1}{5} - 2 + 3 = \frac{6}{5}\ u^2$$

Volver al examen

1.3.26. Halla una primitiva de la función $f(x) = x\,e^x$.

(Junio 06)

- Solución:

Es una integral típica para resolverla por partes, en la que tenemos que derivar el polinomio e integrar la exponencial.

$$\left.\begin{array}{lcl} u = x & ; & du = dx \\ dv = e^x\,dx & ; & v = e^x \end{array}\right]$$

$$\int x\,e^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x$$

No es necesario terminar el resultado sumando una constante pues nos piden una primitiva, no todas.

Volver al examen

1.3.27. Enuncia la regla de Barrow. Representa la gráfica de la función

$$f(x) = \int_1^x t\,dt$$

(Septiembre 06)

- Solución:

La regla de Barrow puedes encontrarla en el punto 19 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Vamos a calcular cual es nuestra función:

$$f(x) = \int_1^x t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$$

De su ecuación deducimos que se trata de una parábola. Para representarla vamos a calcular la coordenada x del vértice y haremos una tabla de valores.

Coordenada x del vértice $\longrightarrow x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{0}{1} = 0$

La tabla de valores que utilizaremos es:

x	0	-1	1	-2	2	-3	3
y	$-1/2$	0	0	$3/2$	$3/2$	4	4

La representación gráfica la tenemos en la figura 1.39

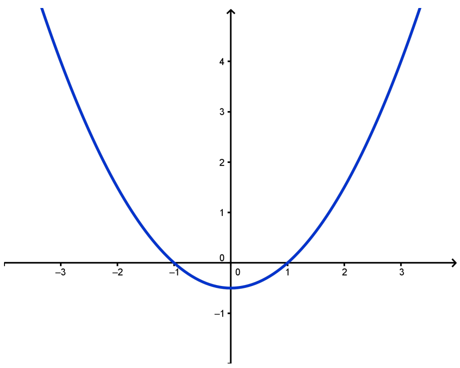


Figura 1.39: Representación gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}$

Volver al examen

1.3.28. Representa la figura plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = \cos x$, en el intervalo $-\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, y por la recta $y = \dfrac{1}{2}$. Calcular su área.

(Septiembre 06)

- Solución:

La representación del área pedida no es complicada, pues se suponen conocidas ambas funciones. Dicha representación la encontramos en la figura 1.40.

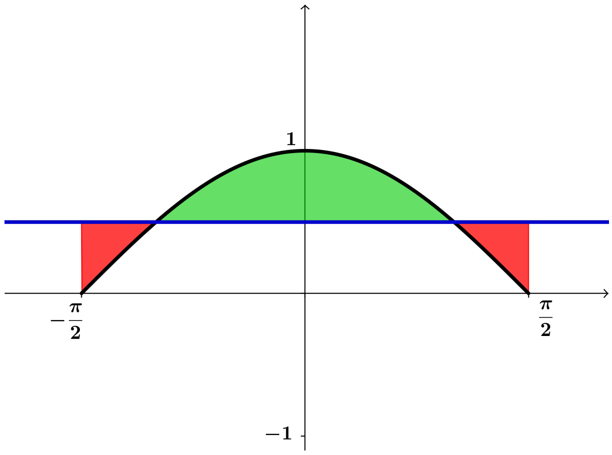


Figura 1.40: Representación gráfica de la región pedida.

Creo que el enunciado del problema no es lo suficientemente claro. Es evidente que pide representar la función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, lo que no queda tan claro es a que área se refiere, si a la encerrada por las dos curvas (la representada en color verde en la gráfica 1.40) o a la verde más la roja, la encerrada por las dos gráficas en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Vamos a ver las dos.

En primer lugar calcularemos la representada en color verde y posteriormente vamos a calcular la representada en color rojo y se la sumamos a la anterior.

Vamos a encontrar los puntos de corte que nos dirán cuales son los límites de integración.

$$\cos x = \frac{1}{2} \Longrightarrow x = \pm\frac{\pi}{3}$$

Para hallar el área consideramos la función $g(x) = \cos x - \frac{1}{2}$. Vamos a calcular una primitiva de dicha función.

$$G(x) = \int \left(\cos x - \frac{1}{2}\right) dx = \operatorname{sen} x - \frac{x}{2}$$

Sustituimos en los distintos puntos que tenemos resultando:

$$G\left(\frac{-\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{-\pi}{3}\right) - \frac{\frac{-\pi}{3}}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6} = -0'3424$$

$$G\left(\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{\frac{\pi}{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6} = 0'3424$$

Para calcular el área hacemos:

$$G\left(\frac{\pi}{3}\right) - G\left(\frac{-\pi}{3}\right) = 0'3424 + 0'3424 = 0'6848$$

Y el área buscada será:

$$A = 0'6848\ u^2$$

.

Vamos a calcular el area de de los dos trozos rojos para ver la segunda forma. Me vale la misma primitiva y el resultado será:

- $A_1 = \left|G\left(-\frac{\pi}{3}\right) - G\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right| = 0'1274\ u^2$.

- $A_2 = \left| G\left(\frac{\pi}{2}\right) - G\left(\frac{\pi}{3}\right) \right| = 0'1274\ u^2.$

Luego el área total será $A = 0'6848 + 0'1274 + 0'1274 = 0'9396\ u^2$.

Volver al examen

1.3.29. Representa gráficamente el recinto plano limitado por las parábolas $y = 1 - x^2$ e $y = 2x^2$ y calcula su área.

(Junio 07)

- Solución:

Vamos a representar las dos parábolas. Para ello empezamos por calcular sus vértices y hacemos después sendas tablas de valores.

- $y = 1 - x^2$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0$$

x	0	-1	-2	1	2
y	1	0	-3	0	-3

- $2x^2$

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{0}{-4} = 0$$

x	0	-1	-2	1	2
y	0	2	8	2	8

La región pedida podemos verla en la figura 1.41.

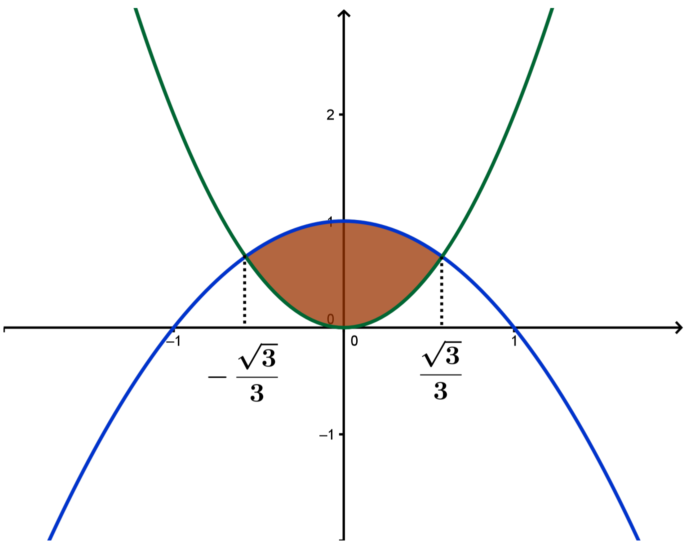


Figura 1.41: Representación gráfica de la región pedida.

Vamos a hallar los puntos de corte para calcular el área:

$$2x^2 = 1 - x^2 \Longrightarrow 3x^2 = 1 \Longrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Luego el área pedida es:

$$A = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(1 - x^2 - 2x^2\right) dx = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \left(1 - 3x^2\right) = \left[x - x^3\right]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{3\sqrt{3}}{27} - \left(\frac{-\sqrt{3}}{3} + \frac{3\sqrt{3}}{27}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{6\sqrt{3}}{27} = \frac{18\sqrt{3} - 6\sqrt{3}}{27} = \frac{12\sqrt{3}}{27} = \frac{4\sqrt{3}}{9} u^2$$

Volver al examen

1.3.30. Calcula el valor de la integral

$$\int_3^{10} (x-2)^{1/3} dx$$

(Junio 07)

- Solución:

$$\int_3^{10} (x-2)^{1/3} dx = \left[\frac{3(x-2)^{4/3}}{4}\right]_3^{10} = \left[\frac{3\sqrt[3]{(x-2)^4}}{4}\right]_3^{10} = \left[\frac{3(x-2)\sqrt[3]{(x-2)}}{4}\right]_3^{10} =$$

$$= \frac{24\sqrt[3]{8}}{4} - \frac{3\sqrt[3]{1}}{4} = \frac{48}{4} - \frac{3}{4} = \frac{45}{4}$$

Volver al examen

1.3.31. Representa gráficamente la figura plana limitada por la curva $y = 2x^3$, su recta tangente en el origen de coordenadas y la recta $x = 2$. Calcula su área.

(Septiembre 07)

- Solución:

La representación gráfica de la región pedida está en la figura 1.42. Vamos a calcular la recta tangente en $x = 0$. Sabemos que la ecuación de la recta tangente es:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)\,(x - x_0)$$

Empezamos por calcular la pendiente:

$$f'(x) = 6x \Longrightarrow m_{tg} = f'(0) = 0$$

Además tenemos que $f(0) = 0$.

Luego la recta tangente es $y = 0$.

Para la función hacemos una tabla de valores que aqui omitimos.

Vamos a calcular el área. En la gráfica podemos ver marcada la región a la que queremos calcularle el área.

$$A = \int_0^2 2x^3 dx = \left[\frac{x^4}{2}\right]_0^2 = \frac{16}{2} - 0 = 8\,u^2$$

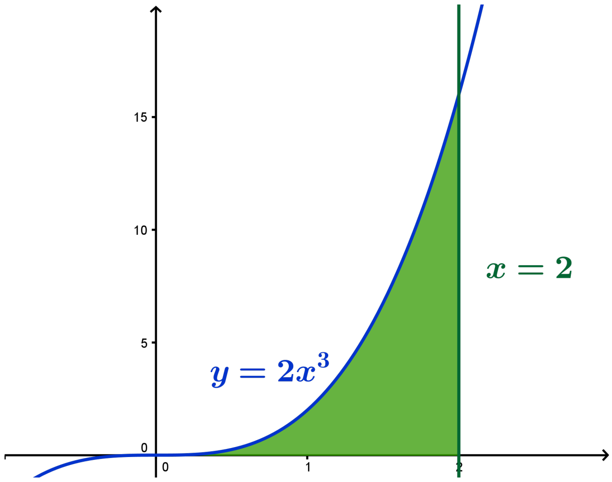


Figura 1.42: Representación gráfica de la región pedida.

Volver al examen

1.3.32.

a) Enuncia el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

b) Calcula el punto al que se refiere dicho teorema para la función $f(x) = 3x^2 + 1$ en el intervalo $[0, 3]$

(Septiembre 07)

- Solución:

a) La parte teórica puedes encontrarla en el punto 18 del resumen teórico que hay al principio del libro.

b) Vamos a ver cuanto vale la integral.

$$\int_0^3 \left(3x^2 + 1\right) dx = \left[x^3 + x\right]_0^3 = 30 - 0 = 30$$

Vamos a buscar el valor pedido.

$$f(c)(3-0) = 30 \Longrightarrow \left(3c^2 + 1\right) \cdot 3 = 30 \Longrightarrow 9c^2 + 3 = 30 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 9c^2 = 27 \Longrightarrow c^2 = 3 \Longrightarrow c = \pm\sqrt{3}$$

De los dos valores sólo nos sirve $c = \sqrt{3}$, pues el otro no pertenece al intervalo $(0, 3)$.

Volver al examen

1.3.33. Calcula el valor de la siguiente integral (puede hacerse con el cambio de variable $t = \ln(x)$)

$$\int_1^e \frac{1}{x\,(1 + \ln(x))} dx$$

donde ln denota el logaritmo neperiano.

(Junio 08)

- Solución:

Para resolver la integral empezaremos por calcular una primitiva. Realizamos el cambio aconsejado.

$$t = \ln(x) \implies dt = \frac{1}{x}dx$$

Luego:

$$\int \frac{1}{x\,(1+\ln(x))}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\,dt = \ln|1+t| = \ln|1+\ln x|$$

Por tanto:

$$\int_1^e \frac{1}{x\,(1+\ln(x))}\,dx = [\ln|1+\ln(x)|]_1^e = (\ln|1+\ln(e)| - \ln|1+\ln(1)|) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

Volver al examen

1.3.34.

a) Representa gráficamente el recinto plano limitado por la recta $y + 2x - 6 = 0$ y la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$.

b) Calcula su área.

(Junio 08)

- Solución:

a) Vamos a hacer una tabla de valores para la recta:

x	0	2
y	6	2

Vamos a calcular una tabla de valores para la parábola. Para ello empezamos por calcular su vértices y hacemos después dicha tabla de valores.

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$$

x	1	0	2	-1	3
y	4	3	3	0	0

La representación gráfica es:

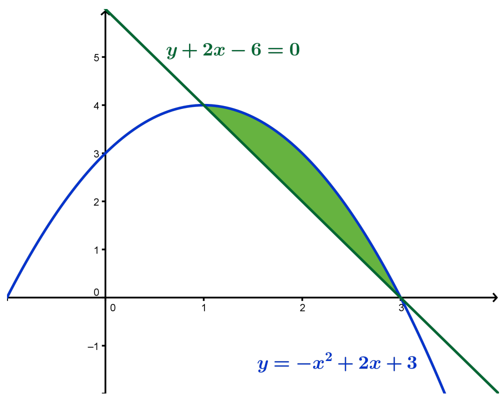


Figura 1.43: Representación gráfica de la región pedida.

b) Vamos a calcular el área. Para ello empezaremos por calcular los puntos de corte de las dos gráficas:

$$\left.\begin{array}{l} y+2x-6=0 \\ y=-x^2+2x+3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} y=-2x+6 \\ y=-x^2+2x+3 \end{array}\right\} \Longrightarrow -2x+6=-x^2+2x+3$$

Luego:

$$x^2-4x+3=0$$

Resolviendo la ecuación obtenemos:

$$x=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\left\{\begin{array}{l} \dfrac{4+2}{2}=3 \\ \\ \dfrac{4-2}{2}=1 \end{array}\right.$$

Vamos a resolver la integral.

$$A=\int_1^3 \left[\left(-x^2+2x+3\right)-(-2x+6)\right]dx=\int_1^3 \left(-x^2+4x-3\right)dx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right]_1^3=(-9+18-9)-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)=$$

$$=\frac{1}{3}-2+3=\frac{1-6+9}{3}=\frac{4}{3}\,u^2$$

Volver al examen

1.3.35. **Calcula la función $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$ (es decir, $f(0)=1$) y que tiene como derivada la función $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.**

(Septiembre 08)

- Solución:

Vamos a calcular la integral indefinida de $f'(x)$ y luego le impondremos a la función obtenida que pase por el punto $(0,1)$ para calcular el valor de la constante.

$$\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx=\ln\left(x^2+1\right)+K$$

Por tanto, como $f(0)=1$, tenemos:

$$\ln 1+K=1 \Longrightarrow K=1$$

Luego la función buscada es:

$$f(x)=\ln\left(x^2+1\right)+1$$

Volver al examen

1.3.36.

a) **Define el concepto de primitiva de una función.**

b) **Di, razonando la respuesta, si las funciones $F_1(x)=\operatorname{sen}^2 x$ y $F_2(x)=-\cos^2 x$ son primitivas de una misma función.**

(Septiembre 08)

- Solución:

La respuesta al primer apartado puedes encontrarlo en el punto 15 del resumen teórico que hay al principio del libro, por lo que pasaremos a resolver el segundo apartado.

Vamos a calcular las derivadas de $F_1(x)$ y de $F_2(x)$ y veremos si coinciden.

$$F_1'(x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

$$F_2'(x) = 2 \cdot (-\cos x) \cdot (-\operatorname{sen} x) = 2 \cdot \operatorname{sen} x \cdot \cos x$$

Por tanto, ambas funciones son primitivas de una misma función.

Volver al examen

1.3.37.

a) Exprese $f(x) = x \cdot |x|$ como una función definida a trozos y dibuje su gráfica de forma aproximada.

b) Calcule la integral definida $\displaystyle\int_{-1}^{1} x \cdot |x| \, dx$.

c) Calcule el área del recinto plano limitado por la gráfica de $f(x)$, el eje OX, la recta $x = -1$ y la recta $x = 1$.

(Junio 09)

- Solución:

Respondemos a las tres cuestiones.

a) Si tenemos en cuenta que:

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

tenemos que

$$f(x) = x \cdot |x| = \begin{cases} x^2 & si \quad x \geq 0 \\ -x^2 & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Por tanto su gráfica la vemos en la figura 1.44

b) La integral definida de una función definida a trozos tiene que tener en cuenta los dos trozos, por tanto:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{0} -x^2 dx + \int_{0}^{1} x^2 dx = \left[\frac{-x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1} =$$

$$= \left[0 - \frac{1}{3}\right] + \left[\frac{1}{3} - 0\right] = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

c) El área que estamos buscando podemos verla en la figura 1.45:

El área será por tanto:

$$A = \left|\int_{-1}^{0} -x^2 dx\right| + \left|\int_{0}^{1} x^2 dx\right| = \left|-\frac{1}{3}\right| + \left|\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\, u^2$$

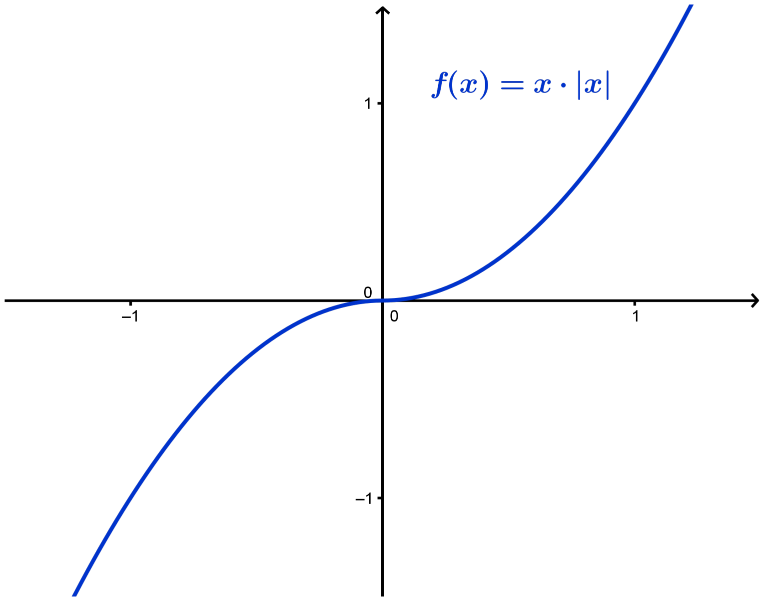


Figura 1.44: Representación gráfica de la función $f(x) = x \cdot |x|$.

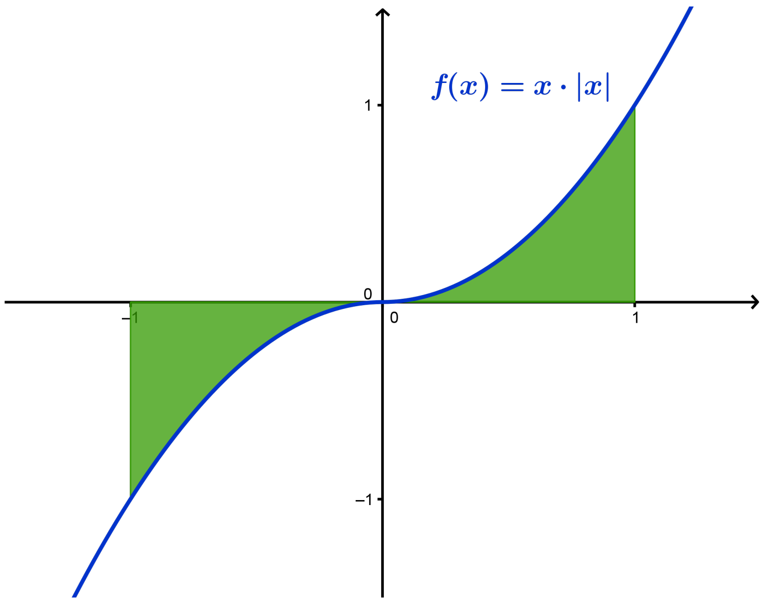


Figura 1.45: Representación gráfica del área buscada.

Volver al examen

1.3.38.

a) **Escriba la fórmula, o regla, de integración por partes.**

b) **Aplíquela para calcular la siguiente integral indefinida**

$$\int x^2 \cos x \, dx$$

(Junio 09)

- Solución:

La respuesta al primer apartado puedes encontrarla en el punto 17 del resumen teórico que hay al principio del libro. Vamos a resolver la segunda cuestión.

Es una integral en la que habrá que aplicar la integral por parte dos veces. En ambos casos derivaremos el polinomio e integraremos la función trigonométrica.

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx$$

$$dv = \cos x\;dx \quad \Rightarrow \quad v = \operatorname{sen} x$$

Sustituyendo tenemos:

$$\int x^2\,\cos x\;dx = x^2\,\operatorname{sen} x - \int 2x\,\operatorname{sen} x\;dx = x^2\,\operatorname{sen} x - 2\int x\,\operatorname{sen} x\;dx = (*)$$

Volvemos a aplicar la integración por partes.

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = \operatorname{sen} x\;dx \quad \Rightarrow \quad v = -\cos x$$

Sustituyendo, de nuevo, tenemos.

$$(*) = x^2\,\operatorname{sen} x - 2\left[-x\,\cos x - \int -\cos x\;dx\right] = x^2\,\operatorname{sen} x - 2\left[-x\,\cos x + \int \cos x\;dx\right]$$

$$= x^2\,\operatorname{sen} x + 2x\,\cos x - 2\,\operatorname{sen} x + k$$

Volver al examen

1.3.39. Dada la parábola de ecuación $y = -x^2 - 2x + 3$, sea r su recta tangente en $x = -1$ y sea s su recta tangente en $x = 1$.

a) Calcule las ecuaciones de r y de s.

b) Represente, de forma aproximada, el recinto plano limitado por la parábola, la recta r y la recta s.

c) Calcule el área de dicho recinto.

(Septiembre 09)

- Solución:

Vamos a empezar por calcular las rectas r y s. Comencemos por r. Para ello vamos a calcular la pendiente (que será el valor de la derivada en $x = -1$) y el punto por el que pasa $P(-1, y(1))$.

$$y'(x) = -2x - 2 \Rightarrow y'(-1) = 2 - 2 = 0$$

A su vez tenemos que $y(1) = -1 + 2 + 3 = 4$. Por tanto $m_r = 0$ y $P(-1, 4)$.

En consecuencia la ecuación de la recta r es:

$$y - 4 = 0(x + 1) \Rightarrow y = 4$$

Vamos a calcular ahora la ecuación de s. Análogamente a la recta r tenemos:

$$y'(1) = -2 - 2 = -4$$

y tenemos que $y(1) = 1 - 2 + 3 = 0$. Luego $m_s = -4$ y $Q(1, 0)$.

Por tanto la ecuación de la recta s es:

$$y - 0 = -4(x - 1) \Rightarrow y = -4x + 4$$

Pasemos al segundo apartado. Vamos a representar el recinto que nos piden. Para representar la parábola vamos a calcular la coordenada x del vértice:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{-2} = -1$$

Vamos a calcular una tabla de valores:

x	-1	0	-2	1	-3
y	4	3	3	0	0

Para las rectas basta con una tabla de valores con sólo dos valores:

- Recta r:
  La tabla de valores podría ser

x	-1	1
y	4	4

- Recta s:
  La tabla de valores podría ser

x	-1	1
y	8	0

La zona pedida podemos verla en la gráfica 1.46.

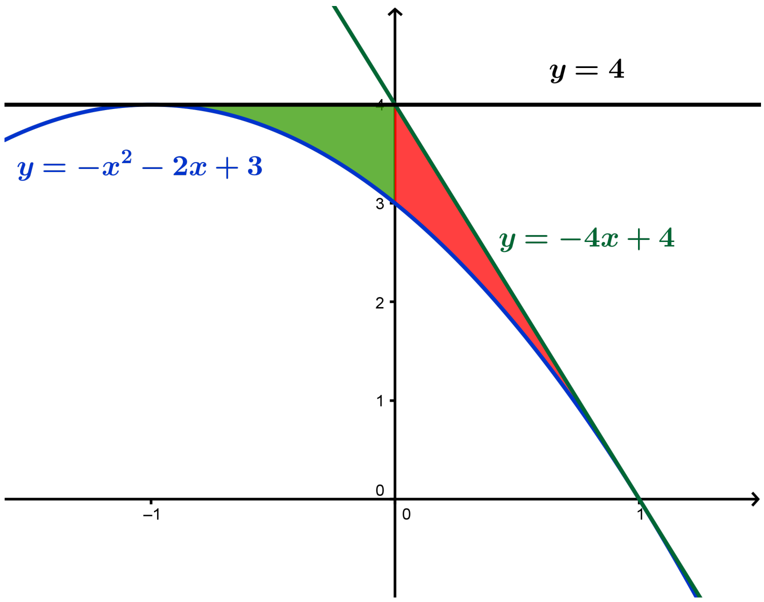


Figura 1.46: Representación gráfica del área buscada.

Vamos a calcular el área que nos piden en el último apartado. Si observamos la gráfica anterior podemos ver que hay dos zonas delimitadas.

Una en el intervalo $[-1, 0]$ y definida por las funciones $y = -x^2 - 2x + 3$ y por la función $y = 4$. A esta zona la llamaremos A_1.

La otra en el intervalo $[0,1]$ y definida por las funciones $y = -x^2 - 2x + 3$ y por la función $y = -4x + 4$. A esta zona la llamaremos A_2.

Vamos a ver los puntos de corte que observamos gráficamente.

- Puntos de corte de las funciones $y = -x^2 - 2x + 3$ e $y = 4$.

$$-x^2 - 2x + 3 = 4 \Rightarrow -x^2 - 2x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1$$

- Puntos de corte de las funciones $y = -x^2 - 2x + 3$ e $y = -4x + 4$.

$$-x^2 - 2x + 3 = -4x + 4 \Rightarrow -x^2 + 2x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

- Puntos de corte de las funciones $y = 4$ e $y = -4x + 4$.

$$-4x + 4 = 4 \Rightarrow -4x = 0 \Rightarrow x = 0$$

El área que queremos calcular es $A = A_1 + A_2$. Vamos a calcular A_1 y A_2.

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-1}^{0} \left[4 - \left(-x^2 - 2x + 3\right)\right] dx = \int_{-1}^{0} \left(x^2 + 2x + 1\right) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + x^2 + x\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(-\frac{1}{3} + 1 - 1\right) = \frac{1}{3}\, u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{0}^{1} \left[-4x + 4 - \left(-x^2 - 2x + 3\right)\right] dx = \int_{0}^{1} \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_{0}^{1} = \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) - 0 = \frac{1}{3}\, u^2 \end{aligned}$$

Luego:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\, u^2$$

Volver al examen

1.3.40.

a) Calcule una primitiva de la función racional

$$f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

b) Calcule la integral $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\, dx$ **(puede utilizarse el cambio de variable** $t = \operatorname{sen} x$**).**

(Septiembre 09)

- Solución:

Vamos a calcular la integral de esa función. Es obvio que se trata de la integral de una función racional con raices simples $\left[1 - x^2 = (1-x)(1+x)\right]$.

$$\frac{1}{1 - x^2} = \frac{A}{1 - x} + \frac{B}{1 + x} = \frac{A(1+x) + B(1-x)}{1 - x^2}$$

Luego:

$$A(1+x)+B(1-x)=1 \qquad \forall x\in\mathbb{R}$$

Por tanto, dando a x los valores 1 y -1 tenemos:

$$\begin{aligned} x &= 1 \Rightarrow 2A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{2} \\ x &= -1 \Rightarrow 2B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{1-x}\,dx + \int \frac{\frac{1}{2}}{1+x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x| + k$$

La primitiva que nos piden podría ser:

$$F(x) = -\frac{1}{2}\ln|1-x| + \frac{1}{2}\ln|1+x|$$

Vamos a calcular la otra integral que nos piden aplicando el cambio aconsejado:

$$\begin{aligned} t &= \operatorname{sen} x \Rightarrow t^2 = \operatorname{sen}^2 x \Rightarrow 1-t^2 = \cos^2 x \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-t^2} \\ dt &= \cos x\,dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \end{aligned}$$

Luego:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

Ahora bien, esta es la integral que hemos resuelto anteriormente, por tanto, resolviéndola y deshaciendo el cambio tendremos:

$$\int \frac{1}{\cos x}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|1-\operatorname{sen} x| + \frac{1}{2}\ln|1+\operatorname{sen} x| + k$$

Volver al examen

1.3.41.

a) Represente, de forma aproximada, la recta $x=1$ y las curvas $y=\dfrac{x^2}{2}$, $y=\dfrac{4}{x}$, y señale el recinto plano limitado por ellas.

b) Calcule el área de dicho recinto.

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

a) La primera curva es una parábola cuyo vértice tiene abcisa 0. Haciendo una tabla de valores como la que sigue tendremos bastante para su representación:

x	0	-1	1	-2	2
y	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	2	2

La segunda curva es una hipérbola. Haciendo, igualmente, una tabla de valores bastaría.

x	$0'5$	$-0'5$	1	-1	2	-2
y	8	-8	4	-4	2	-2

Vamos a representar la recta y las dos curvas, resultando el recinto pedido como podemos ver en la gráfica 1.47:

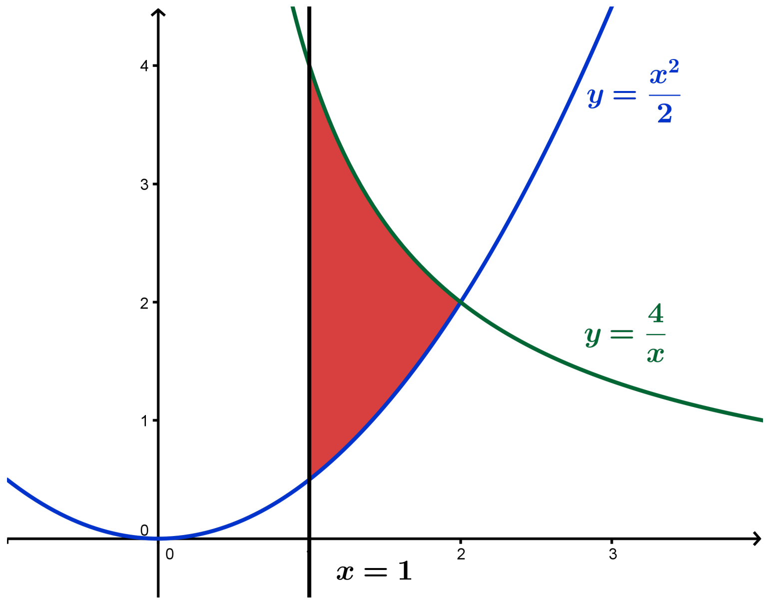


Figura 1.47: Representación gráfica de las funciones $\frac{x^2}{2}$ y $\frac{4}{x}$

b) El punto de corte de las dos curvas podemos observarlo en la gráfica anterior, así como en las dos tablas de valores, pero vamos a calcularlo analíticamente.

$$\frac{x^2}{2} = \frac{4}{x} \Longrightarrow x^3 = 8 \Longrightarrow x = 2$$

Por tanto el área buscada es:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \left(\frac{4}{x} - \frac{x^2}{2}\right) dx = \left[4 \ln x - \frac{x^3}{6}\right]_1^2 = \left(4 \ln 2 - \frac{8}{6}\right) - \left(4 \ln 1 - \frac{1}{6}\right) = \\ &= 4 \ln 2 - \frac{8}{6} + \frac{1}{6} = 4 \ln 2 - \frac{7}{6}\, u^2 \end{aligned}$$

Volver al examen

1.3.42.

a) Diga cuándo una función $F(x)$ es primitiva de otra función $f(x)$.

b) Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x\, e^{x^2}$ que cumpla $F(0) = 0$.

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

El primer apartado puedes encontrarlo en el punto 15 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Para resolver el segundo vamos a comenzar por resolver la integral indefinida y posteriormente calcularemos la constante para que $F(0) = 0$.

Es una integral prácticamente inmediata, aunque podemos resolverla haciendo el cambio de variable $u = x^2$.

$$u = x^2 \Longrightarrow du = 2x\, dx \Longrightarrow x\, dx = \frac{du}{2}$$

Tenemos que

$$\int x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}\int e^u\, du = \frac{1}{2}\, e^u + k$$

Deshaciendo el cambio obtenemos

$$G(x) = \frac{1}{2}\, e^{x^2} + k$$

Por último vamos a encontrar el valor de k que buscamos para que se cumpla que $F(0) = 0$.

$$F(0) = \frac{1}{2}\, e^0 + k = \frac{1}{2} + k = 0 \Longrightarrow k = -\frac{1}{2}$$

En consecuencia, la primitiva buscada es:

$$G(x) = \frac{1}{2}\, e^{x^2} - \frac{1}{2}$$

Volver al examen

1.3.43. Calcule, utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x^2\, e^{-x}$ que cumpla $F(0) = 0$.

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

Vamos a resolver primero la integral indefinida y luego ya calcularemos la que cumple que $F(0) = 0$. Para ello vamos a aplicar la integración por partes dos veces.

$$\left.\begin{array}{lcl} u = x^2 & \Longrightarrow & du = 2x\, dx \\ dv = e^{-x}\, dx & \Longrightarrow & v = -e^{-x} \end{array}\right\} (1)$$

$$\left.\begin{array}{lcl} u = x & \Longrightarrow & du = dx \\ dv = e^{-x}\, dx & \Longrightarrow & v = -e^{-x} \end{array}\right\} (2)$$

Tenemos, aplicando la integración

$$\begin{aligned} \int x^2\, e^{-x}\, dx &\overset{(1)}{=} -x^2\, e^{-x} - \int -2x\, e^{-x}\, dx = -x^2\, e^{-x} + 2\int x\, e^{-x}\, dx = \\ &\overset{(2)}{=} -x^2\, e^{-x} + 2\left(-x\, e^{-x} - \int -e^{-x}\, dx\right) = -x^2\, e^{-x} - 2x\, e^{-x} + \\ &+ 2\int e^{-x}\, dx = -x^2\, e^{-x} - 2x\, e^{-x} - 2e^{-x} + k = \\ &= e^{-x}\left(-x^2 - 2x - 2\right) + k \end{aligned} \qquad (1.2)$$

Estas son todas las primitivas. Vamos a buscar aquella que cumpla que $F(0) = 0$.

$$F(0) = e^0(0 - 0 - 2) + k = -2 + k = 0 \Longrightarrow k = 2$$

En consecuencia la función buscada es

$$F(x) = e^{-x}\left(-x^2 - 2x - 2\right) + 2$$

Volver al examen

1.3.44.

a) **Represente, de forma aproximada, la curva $y = x^4 + 2x^2 + 1$ y la recta tangente a dicha curva en el punto $Q_0 = (-1, 4)$.**

b) **Señale el recinto plano limitado por el eje OY y por la curva y la recta del apartado anterior, y calcule el área de dicho recinto.**

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

Vamos a empezar calculando la recta tangente. Sabemos que la fórmula para hallarla es:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

Calculemos ahora el valor de la derivada de la función en $x = -1$.

$$f'(x) = 4x^3 + 4x \Longrightarrow f'(-1) = -4 - 4 = -8$$

Luego la recta tangente pedida es:

$$y - 4 = -8(x + 1) \Longrightarrow y - 4 = -8x - 8 \Longrightarrow y = -8x - 4$$

Para representar la función podemos estudiar su monotonía, sus extremos relativos y sus cortes con los ejes.

- Corte con los ejes:
  - Eje X $\Longrightarrow y = 0$. Tenemos que $x^4 + 2x^2 + 1 = 0$ es una ecuación bicuadrada. En consecuencia:

    $$x^2 = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = -1$$

    Por tanto no corta al eje X.
  - Eje Y $\Longrightarrow x = 0$
    En este caso corta en el punto $(0, 1)$
- Vamos a estudiar la derivada:

$$\begin{aligned} y' &= 4x^3 + 4x &\Longrightarrow\quad & x\left(4x^2 + 1\right) = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ y'' &= 12x^2 + 4 &\Longrightarrow\quad & y''(0) = 4 > 0 \end{aligned}$$

Luego hay un mínimo relativo en $(0, 1)$
Vamos a estudiar la monotonía:

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$4x^3 + 4x$	$-$	$+$
	$\searrow$	$\nearrow$

Luego crece en $(0, +\infty)$ y decrece en $(-\infty, 0)$.

Para poder completar la gráfica sería bueno hacer una tabla de valores, que aquí omitimos por su facilidad.

Vamos a hacer la representación que nos piden en el segundo apartado y de esa forma hacemos las dos que nos piden. La gráfica pedida podemos verla en la gráfica 1.48:

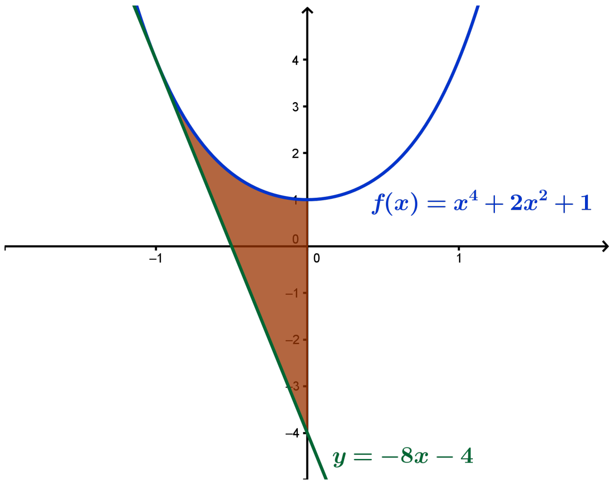


Figura 1.48: Representación del área requerida

Vista la gráfica tenemos que el área buscada es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0} \left[\left(x^4+2x^2+1\right)-(-8x-4)\right]\,dx = \int_{-1}^{0}\left(x^4+2x^2+8x+5\right)\,dx = \\ &= \left[\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+4x^2+5x\right]_{-1}^{0} = 0-\left(-\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+4-5\right) = \\ &= \frac{1}{5}+\frac{2}{3}-4+5 = \frac{3+10-60+75}{15} = \frac{28}{15}\,u^2 \end{aligned}$$

Volver al examen

1.3.45. Calcule el valor de la integral

$$\int_1^2 \left(\frac{x-1}{8}\right)^{2/3}\,dx$$

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

Esta integral es inmediata. Vamos a resolverla:

$$\begin{aligned} \int_1^2 \left(\frac{x-1}{8}\right)^{2/3}dx &= 8\int_1^2 \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{8}\right)^{2/3}dx = 8\left[\frac{3}{5}\left(\frac{x-1}{8}\right)^{5/3}\right]_1^2 = \\ &= 8\left(\frac{3}{5}\left(\frac{1}{8}\right)^{5/3}-0\right) = \frac{24}{5}\sqrt[3]{\left(\frac{1}{8}\right)^5} = \frac{24}{5}\cdot\frac{1}{32} = \frac{3}{20} \end{aligned}$$

Volver al examen

1.3.46.

a) **Represente, de forma aproximada, el recinto plano limitado por la parábola $y = 2x^2$ y la parábola $y = x^2 + 4$.**

b) **Calcule el área de dicho recinto.**

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

Representaremos primero las dos parábolas. Para hacerlo vamos a calcular sus vértices y dos tablas de valores:

- $y = 2x^2 \Longrightarrow x_v = \dfrac{-b}{2a} = 0$

x	0	-1	1	-2	2
y	0	2	2	8	8

- $y = x^2 + 4 \Longrightarrow x_v = \dfrac{-b}{2a} = 0$

x	0	-1	1	-2	2
y	0	5	5	8	8

La representación gráfica pedida podemos verla en la figura 1.49

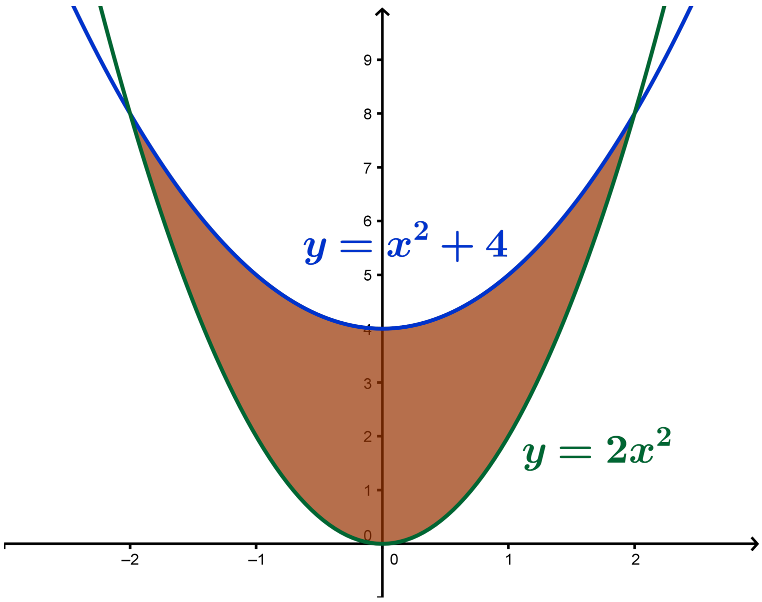


Figura 1.49: Representación de la región requerida

Calculemos ahora el área que nos piden. En la propia gráfica y en las tablas vemos los puntos de corte, pero vamos a calcularlos.

$$2x^2 = x^2 + 4 \Longrightarrow x^2 = 4 \Longrightarrow x = \pm 2$$

Luego el área es:

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{2} \left(x^2 + 4 - 2x^2\right)\, dx = \int_{-2}^{2} \left(-x^2 + 4\right)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x\right]_{-2}^{2} = \\ &= \left(-\frac{8}{3} + 8\right) - \left(\frac{8}{3} - 8\right) = -\frac{8}{3} + 8 - \frac{8}{3} + 8 = \frac{-8 + 24 - 8 + 24}{3} = \frac{32}{3}\, u^2 \end{aligned}$$

Volver al examen

1.3.47. **Considere las funciones** $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$ **y**

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{2(1-t)}\, dt, \; 0 < x < 1$$

Calcule la derivada de la función $F(x) = g(f(x))$, $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. **Simplifique en lo posible dicha derivada.**

(Septiembre 10 - Fase específica)

- Solución:

Vamos a encontrar primero $g(x)$.

$$g(x) = \left[-\frac{1}{2}\ln|1-t|\right]_0^x = -\frac{1}{2}\ln|1-x| \qquad 0 < x < 1$$

Por tanto

$$F(x) = g(f(x)) = g\left(\operatorname{sen}^2 x\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(1-\operatorname{sen}^2 x\right) = -\frac{1}{2}\ln\left(\cos^2 x\right) = -\ln\cos x$$

Vamos a realizar la derivada:

$$f'(x) = -\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$$

Volver al examen

1.3.48.

a) **Represente, de forma aproximada, la figura plana limitada por la hipérbola** $x\,y = 1$, **su recta tangente en el punto** $(1,1)$ **y la recta** $x = 2$

b) **Calcule el área de dicha región plana.**

(Septiembre 10 - Fase específica)

- Solución:

La función dada es $y = \frac{1}{x}$. La recta tangente la calcularemos usando la fórmula

$$y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)$$

Ahora bien

$$y' = -\frac{1}{x^2} \Longrightarrow y'(-1) = -1$$

Por tanto la citada recta tangente es

$$y - 1 = -1(x-1) \Longrightarrow y = -x+1+1 \Longrightarrow y = -x+2$$

La representación que nos piden es:

Para hallar el área tenemos que el único punto de corte es donde la recta es tangente a la

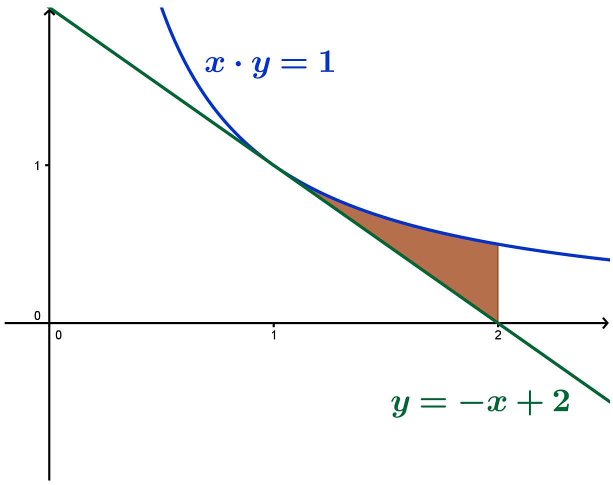


Figura 1.50: Representación de la región requerida

hipérbola, es decir, en $x = 1$. Si observamos la gráfica 1.50 el área buscada es:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^2 \left[\frac{1}{x} - (-x+2)\right] dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} + x - 2\right) dx = \left[\ln x + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 = \\ &= (\ln 2 + 2 - 4) - \left(\ln 1 + \frac{1}{2} - 2\right) = \ln 2 - 2 - \frac{1}{2} + 2 = \left(\ln 2 - \frac{1}{2}\right) u^2 \end{aligned}$$

Volver al examen

1.3.49. Calcule las primitivas de la función

$$f(x) = \frac{1}{e^x - e^{-x}}, \; x > 0$$

(Puede utilizarse el cambio de variable $t = e^x$.)

(Septiembre 10 - Fase específica)

- Solución:

Vamos a prepararla un poco antes de resolverla por sustitución.

$$\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}\, dx = \int \frac{1}{e^x - \dfrac{1}{e^x}}\, dx = \int \frac{1}{\dfrac{(e^x)^2 - 1}{e^x}}\, dx = \int \frac{e^x}{(e^x)^2 - 1}\, dx$$

Hacemos el cambio $t = e^x \Longrightarrow dt = e^x dx$. Luego:

$$\int \frac{e^x}{(e^x)^2 - 1}\, dx = \int \frac{1}{t^2 - 1}\, dt$$

Hay que resolverla por fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2 - 1} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1) + B(t+1)}{(t+1)(t-1)}$$

luego,

$$A(t-1) + B(t+1) = 1 \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si } t = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2B = 1 \Longrightarrow B = \frac{1}{2}$$

$$\text{Si } t = -1 \quad \Longrightarrow \quad -2A = 1 \Longrightarrow A = -\frac{1}{2}$$

luego:

$$\int \frac{1}{t^2-1}\,dt \quad = \quad \int \frac{-\frac{1}{2}}{t+1}\,dt + \int \frac{\frac{1}{2}}{t-1}\,dt = -\frac{1}{2}\ln|t+1| + \frac{1}{2}\ln|t-1| + k$$

Deshaciendo el cambio tenemos:

$$\int \frac{1}{e^x - e^{-x}}\,dx = -\frac{1}{2}\ln|e^x+1| + \frac{1}{2}\ln|e^x-1| + k$$

Volver al examen

1.3.50.

a) **Represente, de forma aproximada, la figura plana limitada por la curva $y = -2(x-1)^3$, su recta tangente en el punto $(1,0)$ y la recta $x = 0$ (Puede ser útil calcular los cortes de la curva $y = -2(x-1)^3$ con los ejes coordenados.)**

b) **Calcule el área de dicha figura plana.**

(Junio 11)

- Solución:

Vamos a empezar por calcular la ecuación de la recta tangente que nos piden:

La recta tangente tiene como ecuación:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Vamos a calcular la derivada:

$$f(x) = -2(x-1)^3 \Longrightarrow f'(x) = -6(x-1)^2$$

Por tanto:

$$f'(1) = 0$$

La recta buscada es:

$$y - 0 = 0(x-1) \Longrightarrow y = 0$$

Para representar $f(x)$ además de estudiar los puntos de corte con los ejes, vamos a estudiar su derivada y su segunda derivada.

Al eje X lo corta en el punto $(1,0)$ y al eje Y en el punto $(0,2)$

Vamos pues a estudiar la derivada de $f(x)$.

$$f'(x) = -6(x-1)^2 = 0 \Longrightarrow x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1$$

Vamos a estudiar el signo de la derivada:

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
$-6(x-1)^2$	$-$	$-$
	$\searrow$	$\searrow$

Luego no hay ni máximos, ni mínimos. Además la función es decreciente en todo $\mathbb{R}$.
Vamos a estudiar a continuación la segunda derivada de $f(x)$.

$$f''(x) = -12(x-1) = 0 \Longrightarrow x-1=0 \Longrightarrow x=1$$

Vamos a estudiar su signo:

	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
$-12(x-1)$	$+$	$-$

Luego en $x=1$ hay un punto de inflexión con tangente horizontal.
Vamos a hacer una tabla de valores para poder representarla mejor:

x	-1	0	1	2	3
y	16	2	0	-2	-16

La figura plana buscada la vemos en la Figura 1.51.

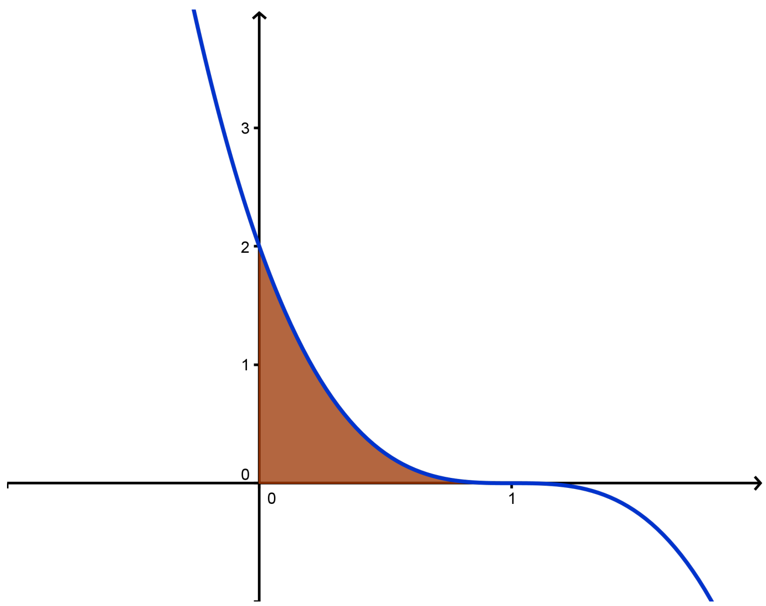


Figura 1.51: Representación de la región requerida

Por último vamos a calcular el área que nos pedían:

$$A = \int_0^1 \left[-2(x-1)^3\right] dx = \left[\frac{-(x-1)^4}{2}\right]_0^1 = 0 - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\, u^2$$

Volver al examen

1.3.51.

a) **Enuncie el Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.**

b) **Calcule el punto al que se refiere dicho teorema para la función $f(x) = e^x + 1$ en el intervalo $[0, 1]$.**

(Junio 11)

- Solución:

El primer apartado puedes encontrarlo en el punto 18 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Es evidente que la función f es continua en todo $\mathbb{R}$, por lo tanto lo es en $[0, 1]$.

Vamos a calcular el valor de la integral.

$$\int_0^1 (e^x + 1)\ dx = \Big[e^x + x\Big]_0^1 = e^1 + 1 - 1 = e$$

Vamos a encontrar el valor c que nos afirma el teorema.

$$\int_0^1 (e^x + 1)\ dx = e = (1 - 0)\,[e^c + 1] \Longrightarrow e^c + 1 = e \Longrightarrow e^c = e - 1 \Longrightarrow c = \ln(e - 1)$$

Volver al examen

1.3.52. Calcule, utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x^2 \cdot \ln x^2$ que cumpla $F(1) = 0$.

(Septiembre 11)

- Solución:

Cuando integramos por parte una integral que tiene un logaritmo y un polinomio siempre derivamos el logaritmo e integramos el polinomio.

$$\begin{aligned} u = \ln x^2 \quad &\Longrightarrow \quad du = \frac{2x}{x^2}\,dx = \frac{2}{x}\,dx \\ dv = x^2\,dx \quad &\Longrightarrow \quad v = \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int x^2 \ln x^2\,dx &= \frac{x^3}{3}\ln x^2 - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{2}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x^2 - \frac{2}{3}\int x^2\,dx = \\ &= \frac{x^3}{3}\ln x^2 - \frac{2}{9}x^3 + C \end{aligned}$$

Ahora bien, como $F(1) = 0$ tenemos que:

$$F(1) = \frac{1}{3}\ln 1 - \frac{2}{9} + C = -\frac{2}{9} + C = 0 \Longrightarrow C = \frac{2}{9}$$

Por tanto la primitiva buscada es:

$$F(x) = \frac{x^3}{3}\ln x^2 - \frac{2}{9}x^3 + \frac{2}{9}$$

Volver al examen

1.3.53.

a) **Represente, de forma aproximada, la gráfica de la función $f(x) = x\,e^{x^2-1}$. Señale el recinto plano limitado por dicha gráfica, el eje OX, la recta $x = -1$ y la recta $x = 1$.**

b) Calcule el área del recinto del apartado anterior.

(Septiembre 11)

- Solución:

Para representarla vamos a realizar un estudio somero de la función.

Es evidente que $Dom\ f = \mathbb{R}$.

Veamos los puntos de corte con el Eje X:

$$x\,e^{x^2-1} = 0 \Longrightarrow x = 0 \qquad \text{(La exponencial es estríctamente positiva en todo } \mathbb{R}\text{)}$$

Corta el eje X en el origen. Al eje Y lo corta, por tanto, en el mismo punto.

La función no tiene asíntotas, pues:

- Asíntotas verticales: No tiene pues no hay ningún valor real en el que la función se vaya al infinito.
- Asíntotas horizontales:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} x\,e^{x^2-1} &= +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} x\,e^{x^2-1} &= \lim_{x\to+\infty} -x\,e^{x^2-1} = -\infty \end{aligned}$$

- Asíntotas oblicuas:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\,e^{x^2-1}}{x} = +\infty$$

  Igual ocurre cuando $x \to -\infty$.

Vamos a estudiar la derivada.

$$f'(x) = e^{x^2-1} + 2x^2\,e^{x^2-1} = e^{x^2-1}(1+2x^2) = 0$$

No hay ningún valor que anule la derivada y además la función es creciente en todo $\mathbb{R}$.

Estudiemos la segunda derivada:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4x\,e^{x^2-1} + (1+2x^2)2x\,e^{x^2-1} = 4x\,e^{x^2-1} + (2x+4x^3)e^{x^2-1} = \\ &= e^{x^2-1}(4x^3+6x) = 0 \Longrightarrow 4x^3+6x = 0 \Longrightarrow x(4x^2+6) = 0 \Longrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

La segunda derivada se anula sólo en $x = 0$. Vamos a estudiar la curvatura:

	$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$e^{x^2-1}(4x^3+6x)$	$-$	$+$

Luego hay un punto de inflexión en el origen.

Como tenemos pocos datos vamos a construir un tabla de valores:

x	-2	-1	0	1	2
y	$-160'68$	-1	0	1	$160'68$

La región pedida podemos verla en la gráfica 1.52.

Vamos a calcular el área que nos piden en el segundo apartado.

Vista la gráfica es evidente que tenemos que desglosar el área en dos trozos, que vienen pintadas en distinto color. Los dos trozos vienen determinadas por los límites -1 y 0, y por los límites 0 y 1

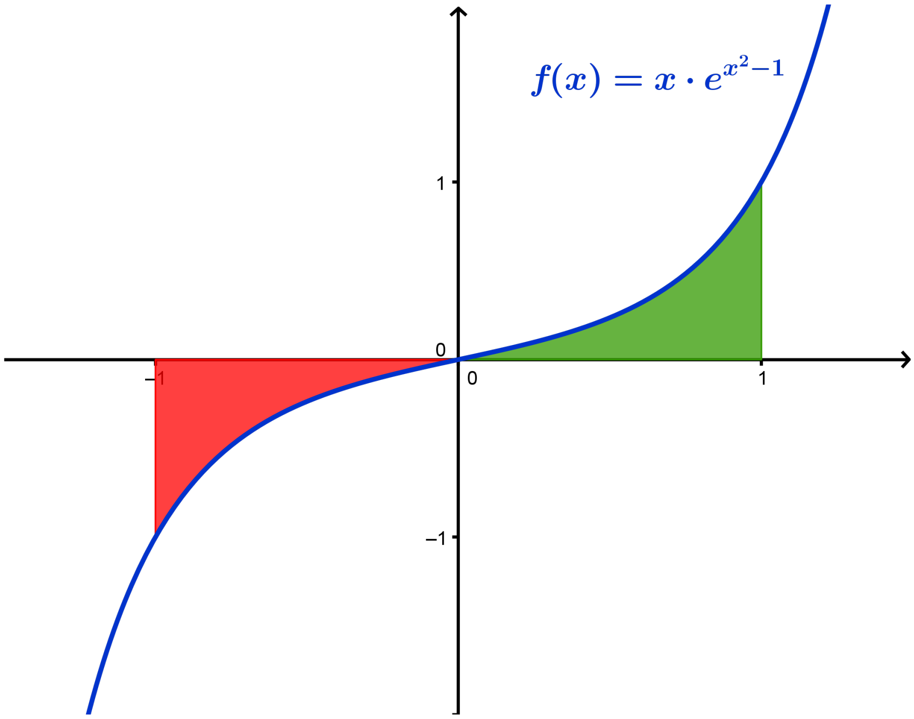


Figura 1.52: Representación de la región requerida

respectivamente.

$$A = \left|\int_{-1}^{0} x\, e^{x^2-1}\, dx\right| + \left|\int_{0}^{1} x\, e^{x^2-1}\, dx\right|$$

Vamos a calcular primero una primitiva de $f(x)$. La resolvemos por sustitución haciendo el cambio $u = x^2 - 1$.

$$\begin{aligned} u &= x^2 - 1 \\ du &= 2x\, dx \Longrightarrow x\, dx = \frac{du}{2} \end{aligned}$$

$$\int e^u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}e^u + K = \frac{1}{2}e^{x^2-1} + K$$

Luego:

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_{-1}^{0} x\, e^{x^2-1}\, dx\right| + \left|\int_{0}^{1} x\, e^{x^2-1}\, dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}e^{x^2-1}\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{2}e^{x^2-1}\right]_{0}^{1}\right| = \\ &= \left|\frac{1}{2}e^{-1} - \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-1}\right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2e} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e}\, u^2 \end{aligned}$$

Volver al examen

1.3.54.

a) **Calcule los puntos de corte de la recta $2y - x = 3$ y de la recta $y = 1$ con la rama hiperbólica $xy = 2$, $x > 0$.**

b) **Dibuje el recinto plano limitado por las tres curvas del apartado anterior.**

c) **Calcule el área de dicho recinto.**

(Junio 12)

- Solución:

a) Vamos a empezar por encontrar los puntos de corte de la primera recta con la rama hiperbólica:

$$\left.\begin{array}{ll} 2y - x = 3 & \\ xy = 2 \quad ; & x > 0 \end{array}\right] \Longrightarrow x = 2y - 3$$

Sustituyendo tenemos:

$$(2y-3)y = 2 \Longrightarrow 2y^2 - 3y = 2 \Longrightarrow 2y^2 - 3y - 2 = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2 \\ y = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

- Si $y = 2 \Longrightarrow x = 4 - 3 = 1 \Longrightarrow P(1,2)$
- Si $y = -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow x = -1 - 3 = -4 \Longrightarrow$ No vale, pues x tiene que ser mayor que 0.

Vamos a hacer ahora lo mismo con la recta $y = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} xy = 2 \\ y = 1 \end{array}\right] \Longrightarrow x = 2$$

En este caso el punto es $Q(2,1)$

b) Basta con hacer unas tablas de valores y el resultado podemos verlo en la gráfica 1.53.

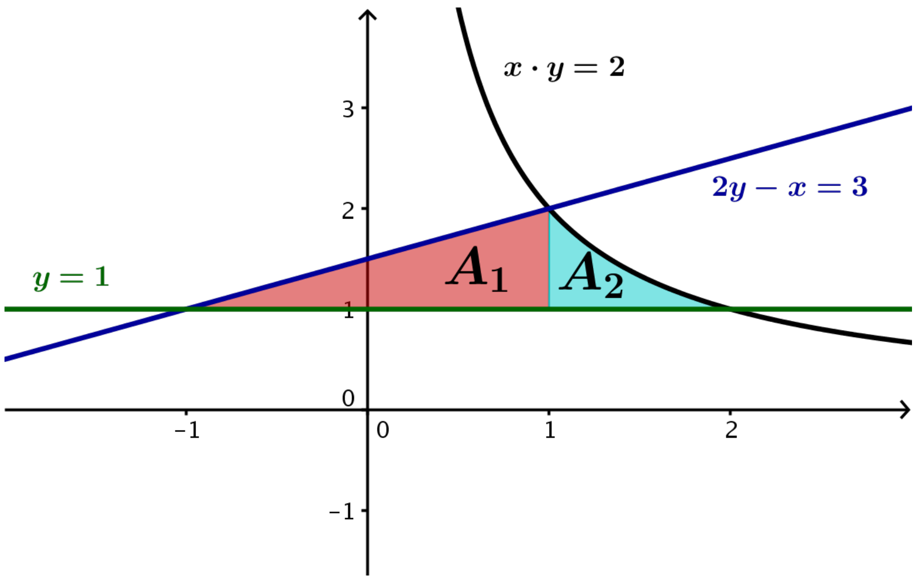


Figura 1.53: Representación de la región requerida

c) Visto el recinto es fácil observar que tenemos dos zonas para realizar la integración, cuyas áreas sumadas nos dará el área que buscamos.

- La región A_1 está determinada por las dos rectas. No es necesario integrar, pues se trata de un triángulo de base 2 y altura 1. Por tanto $A_1 = 1\ u^2$.
- La región A_2 está determinada por la rama hiperbólica y la recta $y = 1$. Por los cálculos anteriores sabemos que los límites de integración son $x = 1$ y $x = 2$.

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - 1\right) dx = \Big[2 \ln x - x\Big]_1^2 = (2 \ln 2 - 2) - (2 \ln 1 - 1) = \\ &= 2 \ln 2 - 2 + 1 = (2 \ln 2 - 1)\, u^2 \end{aligned}$$

Por tanto, el área total es:

$$A = A_1 + A_2 = 1 + 2\,\ln 2 - 1 = 2\,\ln 2\, u^2$$

Volver al examen

1.3.55. Calcule la siguiente integral de una función racional:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\, dx.$$

(Junio 12)

- Solución:

Al ser una función racional en la que el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, ahy que dividir primero. Aplicaremnos la regla de la división:

$$D(x) = d(x)\cdot c(x) + r(x) \xrightarrow{\text{Dividiendo por d(x)}} \frac{D(x)}{d(x)} = c(x) + \frac{r(x)}{d(x)}$$

En nuestro caso:

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{2}{x^2-1}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\, dx = \int 1\; dx + \int \frac{2}{x^2-1}\, dx = \tag{1.3}$$

La primera es bien sencilla, pero la segunda hay que resolverla por el método de fracciones simples. La factorización del denominador es:

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

Descomponemos la fracción:

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{A(x-1)+B(x+1)}{(x+1)(x-1)}$$

Tenemos pues que:

$$A(x-1) + B(x+1) = 2\ ;\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Vamos a tomar dos valores, obvios por otra parte, $x = 1$ y $x = -1$.

- $x = 1 \Longrightarrow 2B = 2 \Longrightarrow B = 1$
- $x = -1 \Longrightarrow -2A = 2 \Longrightarrow A = -1$

Luego, sustituyendo en 1.3 tenemos:

$$\int \frac{x^2+1}{x^2-1}\, dx = x + \int \frac{-1}{x+1}\, dx + \int \frac{1}{x-1}\, dx = x - \ln|x+1| + \ln|x-1| + k$$

Volver al examen

1.3.56.

a) **Diga cuando una función $F(x)$ es una primitiva de otra función $f(x)$.**

b) **Haciendo el cambio de variable $t = \sqrt{x-1}$, calcule la primitiva de la función $f(x) = x \cdot \sqrt{x-1}$ cuya gráfica pasa por el punto $(1,0)$ del plano.**

(Septiembre 12)

- Solución:

El primer apartado puedes encontrarlo en el punto 15 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Vamos a resolver la integral indefinida.

$$\begin{aligned} t &= \sqrt{x-1} \Longrightarrow t^2 = x-1 \Longrightarrow x = t^2+1 \\ dx &= 2t\,dt \end{aligned}$$

Realizando el cambio tenemos:

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \int \left(t^2+1\right)\cdot t \cdot 2t\,dt = \int \left(2t^4+2t^2\right)\,dt = \frac{2t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} + k$$

Deshaciendo el cambio tenemos:

$$\int x\sqrt{x-1}\,dx = \frac{2\sqrt{(x-1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3} + k$$

Vamos a ver cual es la que pasa por el punto $(1,0)$. Sustituyendo tenemos:

$$\frac{2\sqrt{(1-1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(1-1)^3}}{3} + k = 0 \Longrightarrow k = 0$$

La función buscada es:

$$F(x) = \frac{2\sqrt{(x-1)^5}}{5} + \frac{2\sqrt{(x-1)^3}}{3}$$

Volver al examen

1.3.57. Calcule, utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (x+1)^2 \cdot \operatorname{sen} x$ que cumpla $F(0) = 1$.

(Septiembre 12)

- Solución:

Tenemos que aplicar la integración por partes dos veces para calcular la integral indefinida.

$$\begin{aligned} u = (x+1)^2 &\Longrightarrow du = 2(x+1)\,dx \\ dv = \operatorname{sen} x\,dx &\Longrightarrow v = -\cos x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (x+1)^2 \operatorname{sen} x\,dx &= -(x+1)^2 \cos x - \int 2\,(x+1)\,(-\cos x)\,dx = \\ &= -(x+1)^2 \cos x + 2\int (x+1)\,\cos x\,dx = (*) \end{aligned}$$

Aplicando de nuevo la integración por partes tenemos:

$$\begin{aligned} u = x+1 &\implies du = dx \\ dv = \cos x\, dx &\implies v = \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) &= -(x+1)^2 \cos x + 2\left[(x+1)\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\, dx\right] = \\ &= -(x+1)^2 \cos x + 2(x+1)\operatorname{sen} x - 2\int \operatorname{sen} x\, dx = \\ &= -(x+1)^2 \cos x + 2(x+1)\operatorname{sen} x + 2\cos x + k \end{aligned}$$

Imponiendo que $F(0) = 1$ resulta:

$$F(0) = -(1)^2 \cos 0 + 2\cdot 1\cdot \operatorname{sen} 0 + 2\cos 0 + k = 1 \Longrightarrow -1+2+k = 1 \Longrightarrow k = 0$$

La función buscada es:

$$F(x) = -(x+1)^2 \cos x + 2(x+1)\operatorname{sen} x + 2\cos x$$

Volver al examen

1.3.58.

a) Halle, utilizando la fórmula de integración por partes, una primitiva de la función $f(x) = 1 + \ln x$.

b) Calcule el área de la región plana limitada por la curva $y = \ln x$, la recta horizontal $y = -1$, y las rectas verticales $x = 1$ y $x = e$.

(Junio 13)

- Solución:

Vamos a calcular primero el valor de la integral por el método de integración por partes:

$$\begin{aligned} u = 1+\ln x &\implies du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = dx &\implies v = x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int (1+\ln x)\, dx &= x(1+\ln x) - \int \frac{x}{x}\, dx = x(1+\ln x) - x + k = x + x\ln x - x + k = \\ &= x\ln x + k \end{aligned}$$

Para calcular el valor del área que nos piden en el segundo apartado tenemos que calcular la siguiente integral:

$$\int_1^e [\ln x - (-1)]\, dx = \int_1^e (\ln x + 1)\, dx$$

Por tanto:

$$\int_1^e (\ln x + 1)\, dx = \Big[x\ln x\Big]_1^e = e\ln e - 1\ln 1 = e$$

Como el resultado obtenido es positivo el valor del área pedida coincide con el de esta integral.

Volver al examen

1.3.59. Calcule la siguiente integral de una función racional:

$$\int \frac{3x}{x^2+x-2}\,dx$$

(Junio 13)

- Solución:

Es evidente que el resultado de la integral no es un logaritmo neperiano. Vamos a resolverla por el método de fracciones simples. Calculemos pues las raíces del denominador.

$$x^2+x-2=0 \Longrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Por tanto,

$$\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{3x}{x^2+x-2} \Longrightarrow \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)(x+2)}=\frac{3x}{x^2+x-2}$$

Esto ocurre para cualquier valor de x, por lo tanto, como los denominadores son iguales los numeradores también tendrán que serlo para cualquier valor de x.

$$A(x+2)+B(x-1)=3x$$

Podemos darle cualquier valor a la x, pero será más cómodo darle las raíces antes encontradas.

$$\begin{aligned} x=1 &\Longrightarrow 3A=3 \Longrightarrow A=1 \\ x=-2 &\Longrightarrow -3B=-6 \Longrightarrow B=2 \end{aligned}$$

Luego la integral pedida es:

$$\int \frac{3x}{x^2+x-2}\,dx=\int \frac{1}{x-1}\,dx+\int \frac{2}{x+2}\,dx=\ln|x-1|+2\ln|x+2|+k$$

Volver al examen

1.3.60. Calcule el valor de la integral definida

$$\int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2+1}+(2x-1)\,e^{x^2-x}+2\pi\,\mathrm{sen}(2\pi x)\right)dx\,.$$

(Septiembre 13)

- Solución:

Vamos a empezar por calcular la integral indefinida. Integraremos sumando a sumando. Es evidente que el primero da como resultado un logaritmo neperiano, pues el numerador es la derivada del denominador. El segundo también es inmediato, pues lo que multiplica a la exponencial es la derivada del exponente. Por último, algo análogo ocurre con el tercer sumando, pues lo que multiplica al seno es la derivada de lo que hay dentro del mismo. Por tanto:

$$\int \left(\frac{2x}{x^2+1}+(2x-1)\,e^{x^2-x}+2\pi\,\mathrm{sen}(2\pi x)\right)dx=\ln\left|x^2+1\right|+e^{x^2-x}-\cos(2\pi x)+k$$

Luego:

$$\int_0^1 \left(\frac{2x}{x^2+1} + (2x-1)\, e^{x^2-x} + 2\pi \operatorname{sen}(2\pi x) \right) dx = \left[\ln \left| x^2+1 \right| + e^{x^2-x} - \cos(2\pi x) \right]_0^1$$
$$= (\ln 2 + 1 - 1) - (0 + 1 - 1) = \ln 2$$

Volver al examen

1.3.61.

a) Dibuje el recinto plano limitado por la parábola $y = 1 - x^2$, el eje OX, la recta $x = 0$ y la recta $x = 2$.

b) Calcule el área de dicho recinto.

(Septiembre 13)

- Solución:

Para pintar la parábola basta con hacer una tabla de valores (que aquí omitimos). La región que nos piden es:

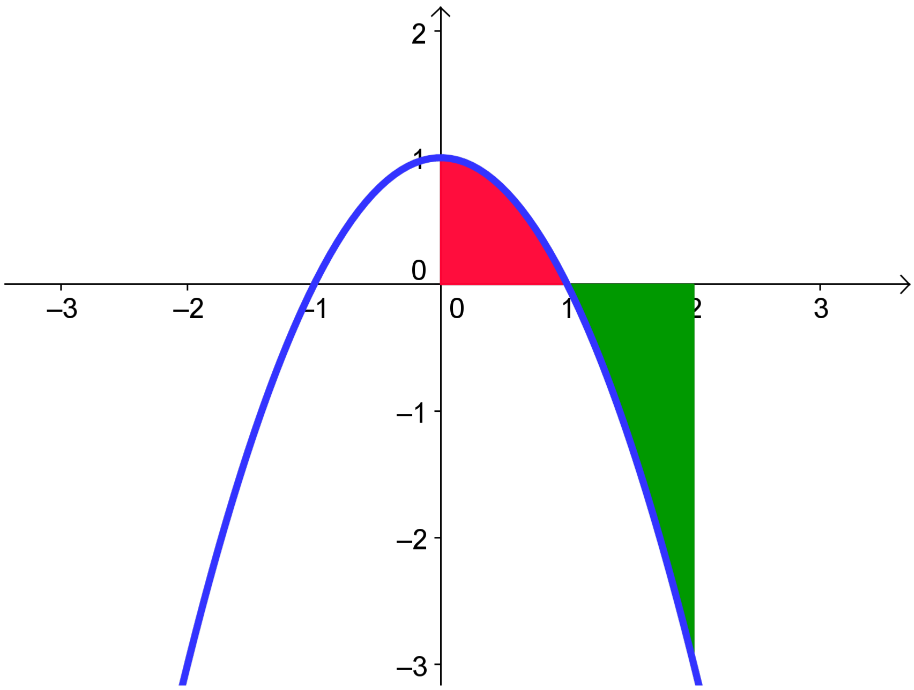


Figura 1.54: Representación gráfica de la región pedida

Vamos a calcular ahora el área que nos piden. Es fácil observar que la función corta al Eje X en $x = \pm 1$. De los dos a nosotros sólo nos interesa $x = 1$.

$$A = \left| \int_0^1 (1-x^2)\, dx \right| + \left| \int_1^2 (1-x^2)\, dx \right| = \left| \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 \right| + \left| \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \right| =$$
$$= \left| \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right| + \left| \left(2 - \frac{8}{3} \right) - \left(1 - \frac{1}{3} \right) \right| = \frac{2}{3} + \left| -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = \frac{6}{3} = 2\, u^2$$

Volver al examen

1.3.62. Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = \cos x$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2\pi$.

(Junio 14)

- Solución:

Vamos a empezar por representar, aunque no nos lo piden, la región.

Se trata de una función ampliamente conocida y no necesitamos mucho para hacer una representación aproximada.

En el gráfico vamos a diferenciar las zonas que están por encima del eje X y las que quedan por debajo. Dicha gráfica es:

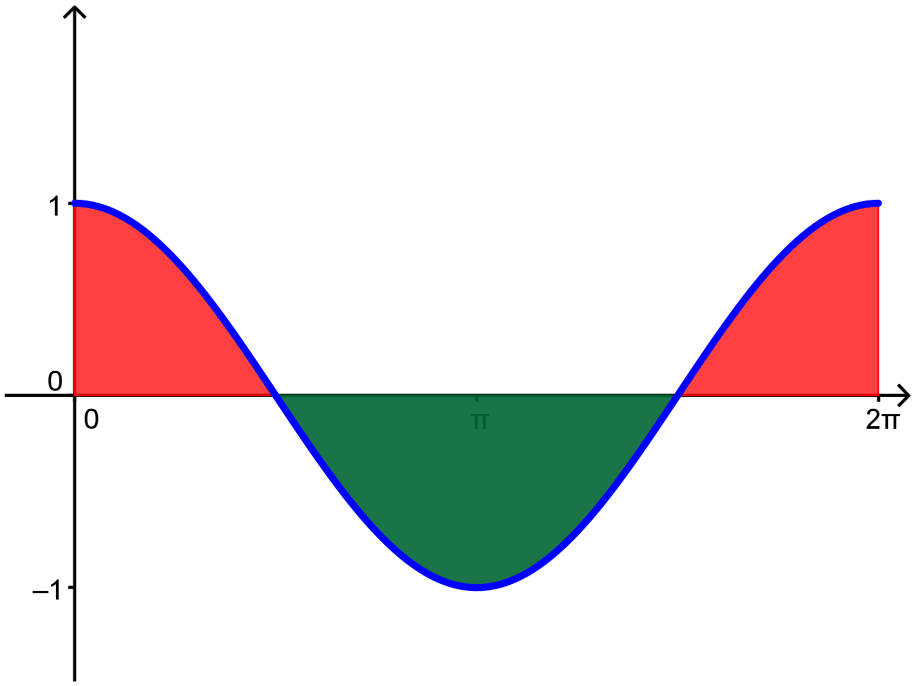


Figura 1.55: Representación gráfica de la función cos x.

Viendo la gráfica tenemos que para calcular el área tendremos que determinar tres zonas distintas, $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\,\pi}{2}\right)$ y $\left(\dfrac{3\,\pi}{2}, 2\,\pi\right)$. El área será:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/2} \cos x\, dx - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos x\, dx + \int_{3\pi/2}^{2\,\pi} \cos x\, dx = \Big[\operatorname{sen} x\Big]_0^{\pi/2} - \Big[\operatorname{sen} x\Big]_{\pi/2}^{3\pi/2} + \Big[\operatorname{sen} x\Big]_{3\pi/2}^{2\,\pi} = \\ &= \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0 - \left(\operatorname{sen}\frac{3\,\pi}{2} - \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{sen} 2\pi - \operatorname{sen}\frac{3\,\pi}{2} = 1 - 0 - (-1-1) + 0 - (-1) = 4 \end{aligned}$$

El ejercicio puede hacerse sin necesidad de pintar la gráfica, para lo cual basta con hallar los puntos de corte de la función $f(x) = \cos x$ con el eje OX. Saldrán los mismos puntos que hemos visto en la gráfica y a partir de ahí se hace igual.

También puede hacerse de otra forma. Si nos damos cuenta, viendo la gráfica, que basta con calcular lo que pasa en el intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ y multiplicar lo que sale por 4.

Volver al examen

1.3.63. Calcule la siguiente suma de integrales definidas

$$\int_1^2 \frac{-2}{x^3}\, dx \; + \int_{\pi}^{2\pi} \left(-\operatorname{sen} x \cdot e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2 x \cdot e^{\operatorname{sen} x}\right) dx\,,$$

cuyas integrales indefinidas asociadas son inmediatas.

(Junio 14)

- Solución:

Para resolver la segunda integral es necesario que nos demos cuenta que

$$(\cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x})' = -\operatorname{sen} x \cdot e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2 x \cdot e^{\operatorname{sen} x}$$

Esto hace que esta segunda integral sea inmediata.

Pasemos a resolverlas:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_1^2 \frac{-2}{x^3}\, dx = \left[\frac{1}{x^2}\right]_1^2 = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4} \\ I_2 &= \int_\pi^{2\pi} \left(-\operatorname{sen} x \cdot e^{\operatorname{sen} x} + \cos^2 x \cdot e^{\operatorname{sen} x}\right) dx = \left[\cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}\right]_\pi^{2\pi} = \\ &= \cos 2\pi \cdot e^{\operatorname{sen} 2\pi} - \cos \pi \cdot e^{\operatorname{sen} \pi} = 1\, e^0 - (-1)\, e^0 = 1 + 1 = 2 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$I = I_1 + I_2 = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4}$$

Volver al examen

1.3.64. Calcule la siguiente integral definida de una función racional:

$$\int_2^{e+1} \frac{x-2}{x^2-3x+2}\, dx.$$

(Julio 14)

- Solución:

Se trata de la integral de una función racional. Para resolverla lo primero que tenemos que hacer es factorizar el denominador, pues de esa manera vemos de que tipo es, si podemos simplificarla, ...

Es fácil comprobar que:

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1) \cdot (x-2)$$

Luego la función a la que vamos a realizar la integral es:

$$\frac{x-2}{x^2-3x+2} = \frac{x-2}{(x-1)\cdot(x-2)} = \frac{1}{x-1}$$

Por tanto

$$\int_2^{e+1} \frac{x-2}{x^2-3x+2}\, dx = \int_2^{e+1} \frac{1}{x-1}\, dx = \Big[\ln|x-1|\Big]_2^{e+1} = \ln(e+1-1) - \ln(2-1) = \ln e - \ln 1 = 1$$

Volver al examen

1.3.65.

a) Dibuje el recinto plano limitado por la parábola $y = x^2 - 2$ y la recta $y = x$.

b) Calcule el área de dicho recinto plano.

(Julio 14)

- Solución:

Dibujar el recinto no es problemático, pues se trata de una recta y una parábola. La zona que nos piden puedes verla en 1.56

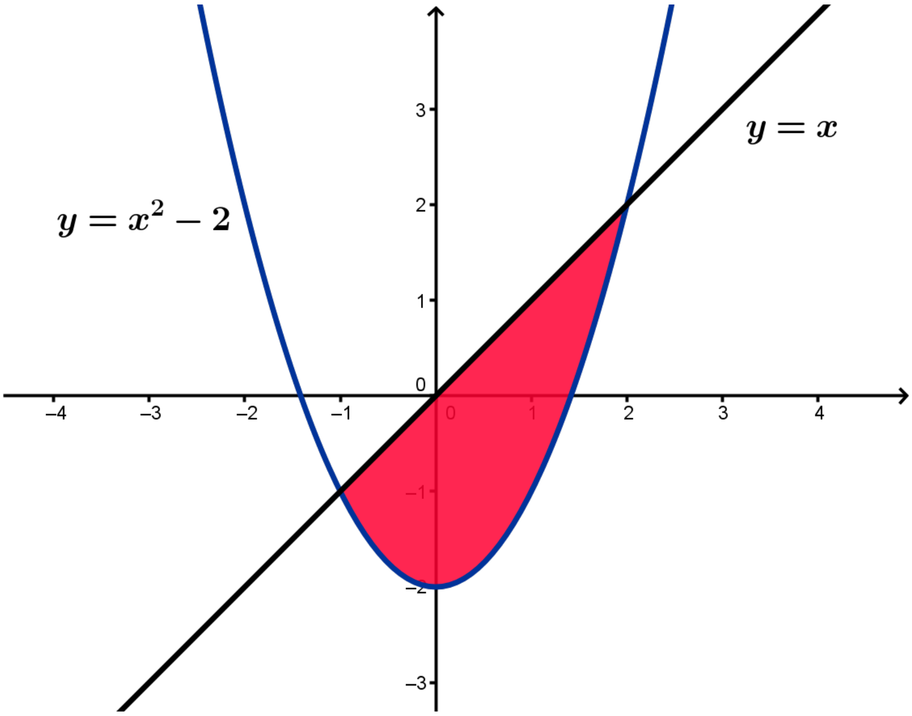


Figura 1.56: Representación gráfica de la región pedida

Vamos a calcular el área. Comenzamos por encontrar los puntos de corte de las dos funciones, los cuales serán nuestros límites de integración.

$$x^2 - 2 = x \Longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Por tanto el área que nos piden será

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{2} [x - (x^2 - 2)]\, dx = \int_{-1}^{2} (x - x^2 + 2)\, dx = \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_{-1}^{2} = \\ &= 2 - \frac{8}{3} + 4 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 2 \right) = \frac{3}{2} - \frac{9}{3} + 6 = \frac{9}{2}\, u^2 \end{aligned}$$

Volver al examen

1.3.66. Calcule la siguiente suma de integrales definidas

$$\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}\, dx + \int_0^{\pi} \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}\, dx$$

(Junio 15)

- Solución:

Ambas integrales son inmediatas, por tanto tenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^{e-1} \frac{1}{x+1}\,dx + \int_0^{\pi} \cos x\, e^{\text{sen } x}\,dx &= \Big[\ln|x+1|\Big]_0^{e-1} + \Big[e^{\text{sen } x}\Big]_0^{\pi} = \\ &= (\ln e - \ln 1) + \left(e^{\text{sen } \pi} - e^{\text{sen } 0}\right) = (1-0) + (1-1) = 1\end{aligned}$$

Volver al examen

1.3.67.

a) Representa, aproximadamente, la gráfica de la función $g(x) = \text{sen}\,(2x)$ definida en el intervalo $[0, \pi]$.

b) Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $g(x) = \text{sen}\,(2x)$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = \pi$.

(Junio 15)

- Solución:

Para representar esta función basta con hacer una tabla de valores. La gráfica resultante, con las áreas ya representadas es:

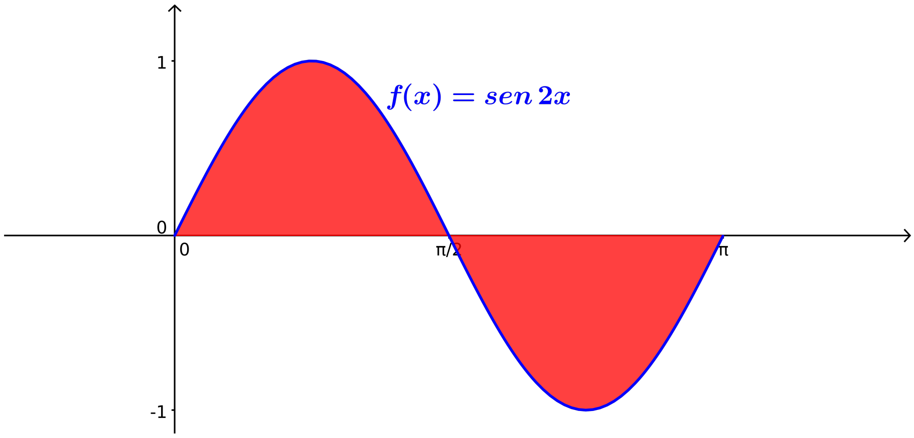


Figura 1.57: Representación gráfica de la función $f(x) = \text{sen } 2x$

En este segundo apartado hay que tener un poco de cuidado, pues como nos dan dos valores de x podemos pensar que son los únicos límites de integración que tenemos que utilizar. Siempre tenemos que tener en cuenta los valores en los que la función corte al eje X.

Vamos a calcularlos.

$$\text{sen } 2x = 0 \Longrightarrow \left|\begin{array}{l} 2x = 0 \Longrightarrow x = 0 \\ 2x = \pi \Longrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \\ 2x = 2\pi \Longrightarrow x = \pi \end{array}\right.$$

Luego el área que buscamos es:

$$A = \left|\int_0^{\pi/2} \text{sen } 2x\,dx\right| + \left|\int_{\pi/2}^{\pi} \text{sen } 2x\,dx\right|$$

Vamos a hacer cada una de las integrales.

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen } 2x\,dx = \left[\frac{-\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}\, 2x\, dx = \left[\frac{-\cos\, 2x}{2}\right]_{\pi/2}^{\pi} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

Luego el área buscada es:

$$A = \left|\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}\, 2x\, dx\right| + \left|\int_{\pi/2}^{\pi} \operatorname{sen}\, 2x\, dx\right| = 1 + 1 = 2\, u^2$$

Volver al examen

1.3.68.

a) Diga cuándo una función $F(x)$ es una primitiva de otra función $f(x)$.

b) Diga cómo puede comprobarse, sin necesidad de hacer derivadas, si dos funciones $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de una misma función.

c) Diga, razonando la respuesta, si las funciones

$$F(x) = \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x} \qquad \mathbf{y} \qquad G(x) = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x}$$

son primitivas de una misma función.

(Julio 15)

- Solución:

La respuesta al primer apartado puedes encontrarlo en el punto 15 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Para que dos funciones sean primitivas de una misma función, ambas tienen que diferenciarse en una constante, es decir, si $F(x)$ y $G(x)$ son primitivas de una misma función, entonces

$$G(x) = F(x) + K$$

Vamos a responder el tercer apartado. Vamos, según el apartado anterior a comprobar que las dos funciones se diferencian en una constante.

Vamos a simplificarlas

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\operatorname{sen} x} = 1 + \operatorname{cotg} x \\ G(x) &= \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x \cdot \operatorname{sen} x} = \operatorname{cotg} x \end{aligned}$$

Luego

$$F(x) = G(x) + 1$$

Por tanto las dos funciones son primitivas de una misma función.

Volver al examen

1.3.69. Calcule la siguiente integral definida de una función racional:

$$\int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \frac{x-1}{x^2 - 2x}\, dx$$

(Julio 15)

- Solución:

La integral que nos piden es inmediata. Vamos primero a calcular una primitiva y luego sustituimos los límites de integración.

$$\int \frac{x-1}{x^2-2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-1)}{x^2-2x}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2-2x|$$

Sustituyendo los límites de integración tenemos:

$$\begin{aligned}
\int_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} \frac{x-1}{x^2-2x}\,dx &= \left[\frac{1}{2}\ln|x^2-2x|\right]_{1+\sqrt{2}}^{1+\sqrt{5}} = \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|(1+\sqrt{5})^2-2(1+\sqrt{5})| - \ln|(1+\sqrt{2})^2-2(1+\sqrt{2})|\right] = \\
&= \frac{1}{2}\left[\ln|1+5+2\sqrt{5}-2-2\sqrt{5}| - \ln|1+2+2\sqrt{2}-2-2\sqrt{2}|\right] = \\
&= \frac{1}{2}(\ln 4 - \ln 1) = \frac{1}{2}\ln 4 = \ln\sqrt{4} = \ln 2
\end{aligned}$$

Volver al examen

1.3.70. Calcule la primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = \frac{-2x}{e-x^2} - 2x\,e^{1-x^2} + 2x\cos x^2$$

que cumpla $F(0) = 1$**.**

(Junio 16)

- Solución:

Vamos a calcular primero la integral indefinida y luego buscaremos, de todas ellas, cual cumple la condición. Son integrales inmediatas.

$$\begin{aligned}
\int\left(\frac{-2x}{e-x^2} - 2x\,e^{1-x^2} + 2x\cos x^2\right)dx &= \int \frac{-2x}{e-x^2}\,dx + \int -2x\,e^{1-x^2}\,dx + \int 2x\cos x^2\,dx = \\
&= \ln|e-x^2| + e^{1-x^2} + \operatorname{sen} x^2 + k
\end{aligned}$$

Vamos a imponer la condición $F(0) = 1$.

$$F(0) = \ln e + e^1 + \operatorname{sen} 0 + k = 1 + e + k$$

Hacemos $F(0) = 1$ y tendremos

$$1 + e + k = 1 \Longrightarrow k = -e$$

Luego la función buscada es $F(x) = \ln|e-x^2| + e^{1-x^2} + \operatorname{sen} x^2 - e$.

Volver al examen

1.3.71.

a) Calcule los puntos en los que la recta $y = x - 1$ **y el eje** OX **cortan a la parábola** $y = -x^2 + 6x - 5$**.**

b) Dibuje, aproximadamente, el recinto plano limitado entre la parábola $y = -x^2 + 6x - 5$ **y la recta** $y = x - 1$**.**

c) Calcule el área de dicho recinto plano.

(Junio 16)

- Solución:

Veamos el primer apartado igualando las dos funciones:

$$-x^2 + 6x - 5 = x - 1 \Longrightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 1 \\ x = 4 \end{array} \right.$$

En el siguiente apartado nos piden representar las funciones. Son funciones muy sencillas de representar, en ambos casos bastaría con hacer una tabla de valores. La gráfica de la región buscada puedes verla en la figura 1.58.

Mirando la gráfica vemos que la parábola queda por encima de la recta, luego:

$$\begin{aligned} A &= \int_1^4 \left[(-x^2 + 6x - 5) - (x - 1)\right] \, dx = \int_1^4 (-x^2 + 5x - 4) \, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} - 4x\right]_1^4 = \\ &= \left(-\frac{64}{3} + 40 - 16\right) - \left(-\frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 4\right) = \frac{8}{3} + \frac{11}{6} = \frac{9}{2} \, u^2 \end{aligned}$$

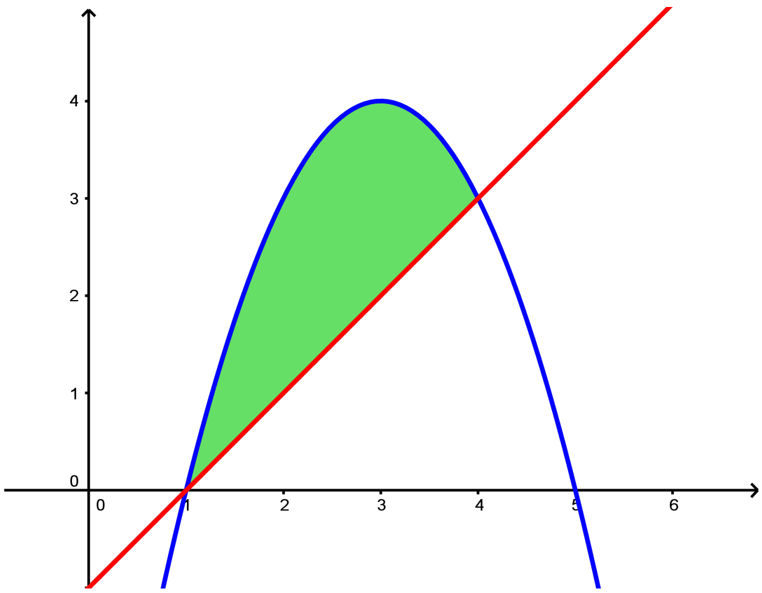


Figura 1.58: Representación gráfica de la región pedida

Volver al examen

1.3.72. Calcule el valor de la integral definida

$$\int_0^a \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \, dx \, ,$$

donde $a = (e-1)^2$**.** $\Big[$**El cálculo de la integral indefinida puede hacerse con el cambio de variable** $t = \sqrt{x}$ **(es decir,** $x = t^2$**), o también con el cambio de variable** $u = \sqrt{x} + 1$**.**$\Big]$

(Julio 16)

- Solución:

Vamos a calcular la integral indefinida. Hacemos el cambio $t = \sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} & t = \sqrt{x} \Longrightarrow x = t^2 \\ & dx = 2t\,dt \end{aligned}$$

Realizando el cambio tendríamos

$$\int \frac{1}{t+1} 2t\,dt = \int \frac{2t}{t+1}\,dt$$

Como el grado del numerador y el del denominador son iguales, dividimos

$$\frac{2t}{t+1} = \frac{2t+2-2}{t+1} = 2 - \frac{2}{t+1}$$

Luego

$$\int \frac{2t}{t+1}\,dt = \int \left(2 - \frac{2}{t+1}\right) dt = 2t - 2\ln|t+1| + k$$

Deshaciendo el cambio una primitiva sería

$$F(x) = 2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1|$$

La integral definida quedaría

$$\begin{aligned} \int_0^{(e-1)^2} \frac{1}{\sqrt{x}+1}\,dx &= \Big[2\sqrt{x} - 2\ln|\sqrt{x}+1|\Big]_0^{(e-1)^2} = 2\sqrt{(e-1)^2} - 2\ln|\sqrt{(e-1)^2}+1| - (0 - \ln 1) = \\ &= 2(e-1) - 2\ln e = 2e - 2 - 2 = 2e - 4 \end{aligned}$$

Volver al examen

1.3.73.

a) Escriba la "regla de la cadena" para la derivación de funciones compuestas.

b) Calcule la derivada de la función

$$f(x) = \ln\left(\cos^2 x\right), \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

c) Obtenga, utilizando el apartado b), una primitiva $G(x)$ **de la función** $g(x) = \operatorname{tg} x$ **que cumpla** $G(0) = 1$**.**

(Julio 16)

- Solución:

El primer apartado puedes encontrarlo en el punto 8 del resumen teórico que hay al comienzo del libro.

Vamos a hacer la derivada del segundo apartado.

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \cdot (\cos^2 x)' = \frac{-2\,\operatorname{sen} x\,\cos x}{\cos^2 x} = \frac{-2\,\operatorname{sen} x}{\cos x} = -2\,\operatorname{tg} x$$

Vamos a resolver la integral indefinida.

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\frac{1}{2}\int -2\operatorname{tg} x\, dx = -\frac{1}{2}\ln(\cos^2 x) + k$$

Vamos a imponer la condición para calcular k.

$$G(0) = -\frac{1}{2}\ln(\cos^2 0) + k = -\frac{1}{2}\ln 1 + k = k$$

Luego, como $G(0) = 1 \Longrightarrow k = 1$. la primitiva buscada es

$$G(x) = -\frac{1}{2}\ln(\cos^2 x) + 1$$

Volver al examen

1.3.74. **Utilizando el cambio de variable $1 + x^2 = t^2$, calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ que cumpla $F(0) = 0$.**

(Junio 17)

- Solución:

Vamos a trabajarnos un poco el cambio para que resulte más fácil encontrar la primitiva.

- $t^2 = 1 + x^2 \Longrightarrow 2\,t\,dt = 2\,x\,dx \Longrightarrow t\,dt = x\,dx$
- De lo anterior también tenemos que $x^2 = t^2 - 1$ y $t = \sqrt{1+x^2}$.

Por tanto, como $x^3 = x^2 \cdot x$, tendríamos que

$$x^3\,dx = x^2\,x\,dx \Longrightarrow x^3 = (t^2 - 1)\,t\,dt$$

Sustituyendo tenemos

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{(t^2-1)\,t\,dt}{\sqrt{t^2}} = \int (t^2-1)\,dt = \frac{t^3}{3} - t + k$$

Deshaciendo el cambio tendríamos

$$F(x) = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} - \sqrt{1+x^2} + k$$

Como $F(0) = 0$

$$\frac{1}{3} - 1 + k = 0 \Longrightarrow k = \frac{2}{3}$$

En consecuencia la función buscada es

$$F(x) = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3} - \sqrt{1+x^2} + \frac{2}{3}$$

Volver al examen

1.3.75.

a) **Calcule los puntos en los que las dos curvas $y = e^x$, $y = -x^2$ cortan a la recta $x = 0$ y a la recta $x = 1$.**

b) **Calcule el área de la región plana limitada por las curvas $y = e^x$, $y = -x^2$, y por las rectas $x = 0$, $x = 1$.**

(Junio 17)

- Solución:

Vamos a empezar calculando los puntos de corte de la función exponencial con las rectas que nos dan.

- $x = 0 \Longrightarrow y = e^0 = 1$
- $x = 1 \Longrightarrow y = e^1 = e$

Hacemos ahora lo mismo con la parábola.

- $x = 0 \Longrightarrow y = 0$
- $x = 1 \Longrightarrow y = -1$

Para calcular el área puede ser bueno, aunque no nos lo piden, hacer un esbozo de la región a la que vamos a calcular dicho área. Son funciones muy conocidas y la región pedida es

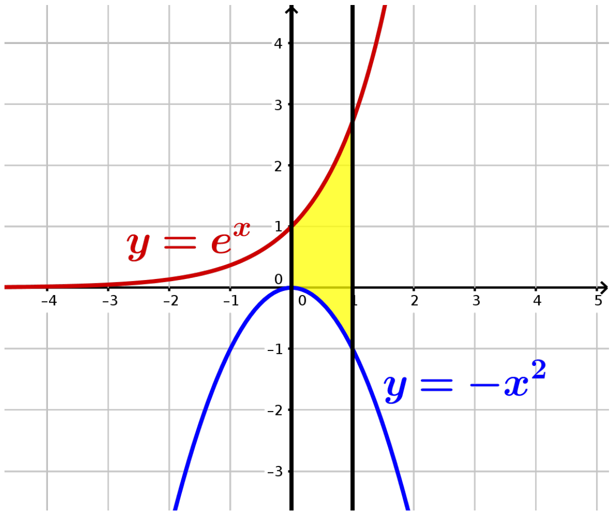


Figura 1.59: Representación gráfica de la región

Sabemos que la exponencial es siempre estrictamente positiva y la parábola que nos dan es menor o igual que cero en todo su dominio. Por tanto no se pueden cortar y el área que nos piden es

$$\int_0^1 (e^x + x^2)\, dx = \left[e^x + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(e + \frac{1}{3}\right) - 1 = \left(e - \frac{2}{3}\right) u^2$$

Volver al examen

1.3.76. Calcule una primitiva $F(x)$ de la función

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+1} - e^{-x} + 2x\cos(x^2)$$

que cumpla $F(0) = 0$.

(Julio 17)

- Solución:

La integral es inmediata

$$\int \left(\frac{2x}{x^2+1} - e^{-x} + 2x\cos\left(x^2\right)\right) dx = \ln\left(x^2+1\right) + e^{-x} + \operatorname{sen}\left(x^2\right) + k$$

Vamos a imponer que cumpla la condición $F(0) = 0$ para calcular k

$$F(0) = \ln\, 1 + e^0 + \text{sen}\, 0 + k = 1 + k = 0 \Longrightarrow k = -1$$

Luego la primitiva buscada es $F(x) = \ln\left(x^2+1\right) + e^{-x} + \text{sen}\,\left(x^2\right) - 1$

Volver al examen

1.3.77.

a) **Represente, aproximadamente, la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$ definida en el intervalo cerrado $[0, 2]$.**

b) **Calcule el área de la región plana limitada por la gráfica de la función $f(x) = x^2 - 1$, el eje OX y las rectas $x = 0$, $x = 2$.**

(Julio 17)

- Solución:

La representación es muy sencilla de hacer y la gráfica resultante es

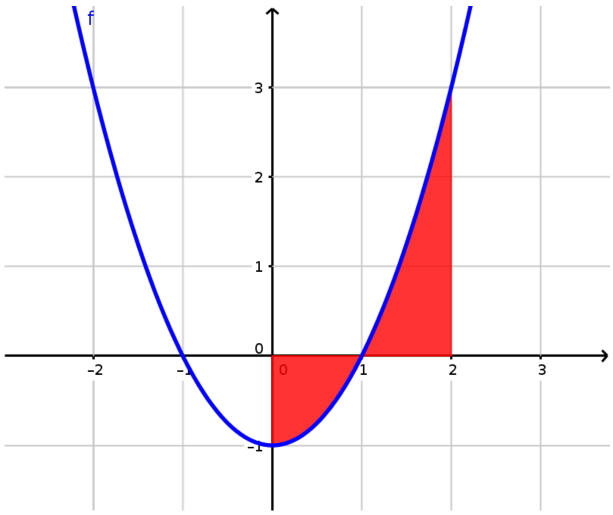


Figura 1.60: Representación gráfica de la región

Viendo la gráfica observamos que vamos a tener dos trozos a la hora de calcular el área. Como siempre calculamos los puntos de corte con el Eje X.

$$x^2 - 1 = 0 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$$

De estos dos valores solo nos sirve $x = 1$. Por tanto

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_0^1 \left(x^2-1\right)dx\right| + \left|\int_1^2 \left(x^2-1\right)dx\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_0^1\right| + \left|\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^2\right| = \\ &= \left|\frac{1}{3} - 1\right| + \left|\left(\frac{8}{3} - 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1\right)\right| = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2\,u^2 \end{aligned}$$

Volver al examen

1.3.78. Calcule el área del recinto plano limitado por la función $f(x)$, el eje de abscisas (OX) y las rectas $x = -1$, $x = 1$.

(Junio 18 - Anulado)

- Solución:

El estudio de esta función y puedes verlo pinchando aquí.

La representación gráfica del área que nos piden sería. Vamos, en primer lugar, a resolver la

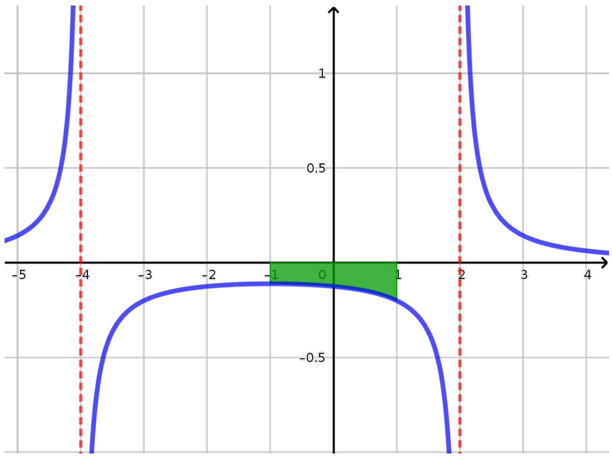


Figura 1.61: Representación de la región pedida

integral indefinida. Se trata de una integral que resolveremos por el método de fracciones simples.

$$\frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-2} = \frac{1}{x^2+2x-8} \Longrightarrow \frac{A(x-2)+B(x+4)}{x^2+2x-8} = \frac{1}{x^2+2x-8}$$

Tenemos dos fracciones iguales cuyos denominadores son iguales, y por tanto, para cualquier valor de x se cumple

$$A(x-2) + B(x+4) = 1$$

Si sustituimos x por -4 y 2 tendremos

- $x = 2 \Longrightarrow 6B = 1 \Longrightarrow B = \dfrac{1}{6}$.
- $x = -4 \Longrightarrow -6A = 1 \Longrightarrow A = -\dfrac{1}{6}$.

Luego

$$\int \frac{1}{x^2+2x-8}\,dx = \int \frac{-\frac{1}{6}}{(x-2)}\,dx + \int \frac{\frac{1}{6}}{(x+4)}\,dx = -\frac{1}{6}\ln|x-2| + \frac{1}{6}\ln|x+4|$$

Luego el área buscada sería

$$A = \left| \left[-\frac{1}{6}\ln|x-2| + \frac{1}{6}\ln|x+4| \right]_{-1}^{1} \right| = \left| -\frac{1}{6}\ln 1 + \frac{1}{6}\ln 5 - \left(-\frac{1}{6}\ln 3 + \frac{1}{6}\ln 5 \right) \right| = \frac{1}{6}\ln 5u^2$$

Volver al examen

1.3.79. Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x\,e^{-x}$ que cumple $F(0) = 0$.

(Junio 18 - Anulado)

- Solución:

Vamos a resolver la integral indefinida. Es un caso claro de integración por partes.

$$\begin{aligned} u = x &\implies du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx &\implies v = -e^{-x} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la fórmula de integración por partes obtenemos

$$F(x) = \int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x} - e^{-x} + k$$

Una vez calculada la integral indefinida vamos a encontrar la primitiva que cumple que $F(0) = 0$.

$$F(0) = 0 - e^0 + k = -1 + k = 0 \Longrightarrow k = 1$$

Luego la primitiva buscada es

$$F(x) = -x\,e^{-x} - e^{-x} + 1$$

Volver al examen

1.3.80. Calcule la primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = (x+1)\,e^{-x}$ que cumpla la condición $F(0) = 0$.

(Junio 18)

- Solución:

Empecemos por resolver la integral indefinida. Es obvio que el método a utilizar sería el de integración por partes.

$$\begin{aligned} u = x+1 &\implies du = dx \\ dv = e^{-x}\,dx &\implies v = -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\int (x+1)\,e^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} - \int -e^{-x}\,dx = -(x+1)e^{-x} - e^{-x} + k = (-x-2)e^{-x} + k$$

Vamos ahora a encontrar el valor de k que hace que $F(0) = 0$.

$$F(0) = -2e^0 + k = -2 + k = 0 \Longrightarrow k = 2$$

Luego la función buscada es

$$F(x) = (-x-2)e^{-x} + 2$$

Volver al examen

1.3.81. Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$.

(Junio 18)

- Solución:

Habrá que resolverla por el método de fracciones simples. Es fácil observar que $x^2-1=(x+1)(x-1)$, luego

$$\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}=\frac{1}{x^2-1}\Longrightarrow\frac{A(x-1)+B(x+1)}{x^2-1}=\frac{1}{x^2-1}\Longrightarrow A(x-1)+B(x+1)=1$$

Esto ocurre para cualquier valor de x. Vamos a sustituir las raíces del denominador, pues será más cómodo.

- $x=1\Longrightarrow 2B=1\Longrightarrow B=\dfrac{1}{2}$
- $x=-1\Longrightarrow -2A=1\Longrightarrow A=-\dfrac{1}{2}$

Luego

$$\begin{aligned} F(x) &= \int\frac{1}{x^2-1}\,dx=\int\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}\,dx+\int\frac{\frac{1}{2}}{x-1}\,dx= \\ &= -\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+k \end{aligned}$$

Luego una primitiva válida sería

$$F(x)=-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|$$

Volver al examen

1.3.82. Dibuje el recinto plano limitado entre las funciones $f(x)=|x|$ y $g(x)=2-x^2$ y calcule su área.

(Julio 18)

- Solución:

Empecemos por representar el recinto que nos piden. Es fácil de hacer y daría

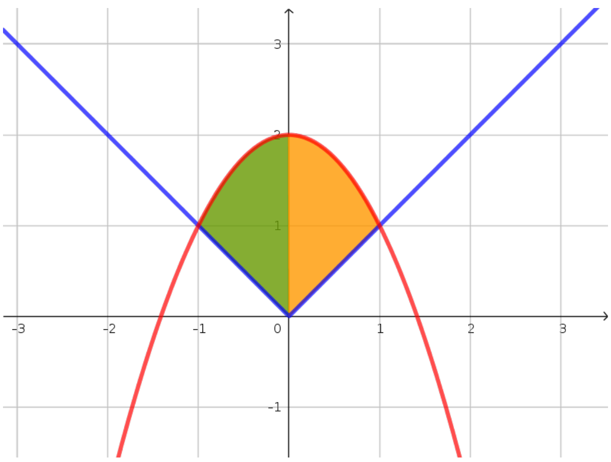


Figura 1.62: Representación de la región pedida

Hemos marcado en la imagen dos zonas distintas, pues vamos a tener que hacerlo con dos trozos distintos.

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^{0}(2-x^2-(-x))\,dx+\int_{0}^{1}(2-x^2-x)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x\right]_{0}^{1}= \\ &= \left(0-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)\right)+\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-0\right)=\frac{14}{6}\,u^2 \end{aligned}$$

Volver al examen

1.3.83. Calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x) = x\ln(x)$.

(Julio 18)

- Solución:

Esta integral hay que resolverla por partes

$$\begin{aligned} u = \ln x \quad &\Longrightarrow \quad du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx \quad &\Longrightarrow \quad v = \frac{x^2}{2} \end{aligned}$$

$$\int x \ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + k$$

Luego una primitiva válida sería

$$F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}$$

Volver al examen

Capítulo 2

Álgebra

2.1. Matrices y determinantes

2.1.1. Definir la suma y el producto de matrices. Dar un ejemplo de dos matrices que no pueden sumarse ni multiplicarse.

(Septiembre 00)

- Solución:

Para sumar matrices, éstas tienen que ser del mismo orden y la suma se realiza sumando término a término. La definición de producto puedes encontrarla en el punto 22 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Como ejemplo de matrices que no pueden sumarse ni multiplicarse tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$$

Es evidente que estas matrices no pueden sumarse, pues no son de la misma dimensión. De forma análoga no es difícil comprobar que no pueden multiplicarse, pues para eso es necesario que el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda, cosa que no ocurre en ninguno de los casos.

Volver al examen

2.1.2. Determinar todos los números reales x para los que es positivo el determinante

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix}$$

(Septiembre 01)

- Solución:

Vamos a calcular el valor del determinante en función de x para luego estudiar la inecuación resultante.

$$\begin{vmatrix} 3 & -3 & x \\ 1-x & x+1 & -1 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 3x(x+1) + 6 - 2x(x+1) + 3x(1-x) =$$

$$= \cancel{3x^2} + 3x + 6 - 2x^2 - 2x + 3x - \cancel{3x^2} = -2x^2 + 4x + 6$$

Vamos a ver donde $-2x^2+4x+6>0$. En primer lugar buscaremos las raices y con ellas construiremos la tabla para estudiar el signo de la función.

$$-2x^2+4x+6=0 \Longrightarrow x^2-2x-3=0$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}\begin{cases} x=3 \\ x=-1 \end{cases}$$

Vamos a estudiar el signo de la función:

	$(-\infty,-1)$	$(-1,3)$	$(3,+\infty)$
$-2x^2+4x+6$	$-$	$+$	$-$

Luego el determinante es positivo en $(-1,3)$.

Volver al examen

2.1.3. Calcular todas las matrices X tales que $AX+B=X$, donde

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 01)

- Solución:

Empezaremos por despejar la X y después realizaremos las operaciones que sean necesarias:

$$AX+B=X \Longrightarrow AX-X=-B \Longrightarrow (A-I)\,X=-B \Longrightarrow X=(A-I)^{-1}\cdot(-B)$$

El último paso sólo podemos hacerlo si la matriz $A-I$ es regular, cuestión que veremos a continuación.

$$A-I=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es evidente que esta matriz es regular, pues su determinante es distinto de cero. Vamos a calcular la inversa. Supongamos que dicha matriz es:

$$(A-I)^{-1}=\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Dicha matriz cumplirá:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow (A-I)^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, sustituyendo tenemos:

$$X=(A-I)^{-1}\cdot(-B)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.4. Calcular la matriz X tal que $AX=B$, donde

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(Junio 02)

- Solución:

Como la matriz A es invertible (pues $|A| = 1 \neq 0$) podemos despejar la matriz X multiplicando por la izquierda por la inversa de A.

$$A \cdot X = \cdot B \Longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B$$

Vamos a calcular la inversa de A.

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 2x + y = 0 \Longrightarrow y = -2 \\ z = 0 \\ 2z + t = 1 \Longrightarrow t = 1 \end{cases}$$

En consecuencia:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.5. Calcular dos números naturales a, b menores que 10 y tales que la siguiente matriz A tenga rango 2:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{pmatrix}$$

(Junio 03)

- Solución:

Es evidente que $Rg(A) \geq 2$, pues $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 10 \neq 0$. Calculemos el valor del $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 2 & b \\ 0 & 5 & a \\ 3 & 1 & b \end{vmatrix} = 10b + 6a - 15b - 2a = -5b + 4a$$

Los números que buscamos tienen que ser **naturales, menores que 10 y anular el determinante**. Por tanto:

$$-5b + 4a = 0 \Longrightarrow 4a = 5b \Longrightarrow b = \frac{4a}{5}$$

Esto sólo es posible si $a = 5$ y $b = 4$.

Volver al examen

2.1.6. Definir el producto de matrices. Dar un ejemplo de dos matrices A, B con 2 filas y 2 columnas, tales que $A \cdot B$ no coincida con $B \cdot A$.

(Septiembre 03)

- Solución:

La parte teórica puedes encontrarlo en el punto 22 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Lo más natural sería que al elegir dos matrices el producto no sea conmutativo. Vamos a encontrar dos matrices que cumplan lo que piden y vamos a comprobar que así ocurre. Tomamos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Realicemos ambos productos para ver que no coinciden:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 9 & 11 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 21 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.7. Determinar todas las matrices X tales que $A \cdot X = X \cdot A$, donde:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Junio 04)

- Solución:

Supongamos que nuestra matriz X tiene la forma:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Siendo A como es tenemos que:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$$

Buscamos que $A \cdot X = X \cdot A$, por tanto igualando tenemos:

$$\begin{pmatrix} a+c & b+d \\ a+c & b+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b \\ c+d & c+d \end{pmatrix}$$

De lo que deducimos que:

$$\cancel{a} + c = \cancel{a} + b \Longrightarrow c = b$$

$$\cancel{b} + d = a + \cancel{b} \Longrightarrow a = d$$

$$a + \cancel{c} = \cancel{c} + d \Longrightarrow a = d$$

$$b + \cancel{d} = c + \cancel{d} \Longrightarrow c = b$$

Por tanto la matriz X buscada tiene la siguiente forma:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.8. Hallar una matriz con tres filas y tres columnas que tenga tres elementos nulos y tal que ninguno de sus menores de orden dos sea nulo.

(Junio 04)

- Solución:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.9. Definir el concepto de rango de una matriz. Dar un ejemplo de una matriz con 3 filas y 4 columnas que tenga rango 2.

(Septiembre 04)

- Solución:

La parte de teoría puedes encontrarlo en el punto 25 del resumen teórico que hay al principio del libro.

Para el segundo interrogante basta con coger las dos primeras filas que den rango 2 y la tercera sea combinación lineal de estas dos, por ejemplo, la suma de las dos:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 1-1 & 3+1 & 2+0 & 0+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.10. ¿Puede aumentar el rango de una matriz cuadrada de 3 filas al sustituir un coeficiente no nulo por 0?¿y permanecer igual?. Justificar las respuestas.

(Septiembre 04)

- Solución:

En ambos casos la respuesta es SI. Veámoslo con un ejemplo.

En el primer caso, supongamos una matriz de rango 2 en la que la tercera fila sea suma de las dos primeras. si en la tercera fila cambiamos un número por cero es posible que el rango sea tres. Veamos un ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 2, mientras que la matriz A' que mencionamos a continuación tiene rango 3:

$$\mathbf{A'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow |\mathbf{A'}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 16 + 27 - 12 - 6 \neq 0$$

En el segundo caso veamos el ejemplo:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Esta matriz tiene rango 3, pues $|A| = 2 \neq 0$

Además si cambio un 1 por un 0, como en el ejemplo que sigue, tenemos:

$$\mathbf{A}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que también tiene rango 3, pues $|A'| = 1 \neq 0$

Volver al examen

2.1.11. Sea A una matriz cuadrada tal que $A^2 = A + I$, donde I es la matriz unidad. Demuestra que la matriz A es invertible.

(Junio 06)

- Solución:

Una posible manera de resolverlo es comprobar que la matriz $B = A - I$ es la inversa de A. Vamos a comprobarlo.

$$A \cdot B = A \cdot (A - I) = A^2 - A = \cancel{A} + I - \cancel{A} = I$$

$$B \cdot A = (A - I) \cdot A = A^2 - A = \cancel{A} + I - \cancel{A} = I$$

Luego la matriz B así construida es la inversa de A y por tanto A es invertible.

Otra forma de resolverlo sería la siguiente:

Tenemos que $A^2 = A + I$, por tanto:

$$A^2 - A = I \Longrightarrow A(A - I) = I$$

Como ambas matrices son iguales, sus determinantes son iguales y operando llegamos a lo que queremos.

$$|A(A - I)| = |I| \Longrightarrow |A|\,|A - I| = |I| = 1$$

En consecuencia ninguno de los factores puede ser cero al ser el producto 1 y de ahí deducimos que $|A| \neq 0 \Longrightarrow A$ es invertible.

Volver al examen

2.1.12. Escribe un ejemplo de una matriz de rango 2, con 3 filas y 4 columnas, que no tenga ningún coeficiente nulo.

(Septiembre 06)

- Solución:

Basta con tomar las dos primeras filas linealmente independientes sin coeficientes nulos y sumarlas para obtener la tercera, como por ejemplo

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 6 & 8 & 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.13.

a) Calcula el rango de la matriz A, según los valores del parámetro a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & a \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$$

b) Escribe las propiedades del rango que hayas usado.

(Junio 07)

- Solución:

a) Es evidente que las columnas 2ª y 3ª son proporcionales a la primera, luego como mucho el rango será 2. De igual manera las filas 2ª y 3ª son proporcinales ($F_3 = \frac{3}{2}F_2$), por tanto el único menor que puede dar distinto de cero es:

$$\begin{vmatrix} 1 & a \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 2a = 0 \Longrightarrow a = 4$$

En consecuencia:

- Si $a = 4 \Longrightarrow RgA = 1$
- Si $a \neq 4 \Longrightarrow RgA = 2$

b) La definición de rango puedes encontrarla en el punto 25 del resumen teórico que hay al principio, aunque el proceso seguido ya se razonó en el apartado anterior.

Volver al examen

2.1.14. Sea A una matriz cuadrada de orden 3.

a) Si sabemos que el determinante de la matriz $2A$ es $|2A| = 8$. ¿Cuánto vale el determinante de A? Escribe la propiedad de los determinantes que hayas usado para obtener este valor.

b) Calcula para qué valores de x se cumple que $|2A| = 8$, siendo A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 07)

- Solución:

a) La matriz $2A$ se obtiene multiplicando cada fila por 2. Como son tres sus filas tenemos:

$$|2A| = 2^3 \cdot |A|$$

En consecuencia tenemos $|A| = 1$.

La propiedad que hemos usado es aquella que dice que *si multiplicamos todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada por un mismo número, el determinante de la matriz resultante es el producto de dicho número por el determinante de la matriz original.*

b) Según lo anterior $|A| = 1$. Ahora bien

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & 2-x & 1 \end{vmatrix} = 2x + 2x + (x+1)(2-x) - 2x - (x+1) - 2x(2-x) =$$

$$= 2x + 2x + 2x + 2 - x^2 - x - 2x - x - 1 - 4x + 2x^2 = x^2 - 2x + 1$$

En consecuencia:

$$|A| = x^2 - 2x + 1 = 1 \Longrightarrow x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} x = 0 \\ x - 2 = 0 \Longrightarrow x = 2 \end{array} \right.$$

Volver al examen

2.1.15. Calcula la matriz X tal que $A^2 \cdot X = A$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 07)

- Solución:

Vamos a empezar por calcular A^2.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Es obvio que la matriz resultante es regular, pues su determinante vale 1.

Mi ecuación es:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular primero la inversa:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

En consecuencia:

$$X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Otra forma de hacerlo es darnos cuenta de que A es regular y por tanto:

$$A^{-1} \cdot A^2 \cdot X = A^{-1} \cdot A \Longrightarrow A \cdot X = I$$

Por tanto X es la inversa de A. Calculando esta está resuelto el ejercicio.

Volver al examen

2.1.16. Determina el rango de la matriz A según los valores de b:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & b \\ b & b-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(Junio 08)

- Solución:

Vamos a resolver el determinante de orden 3 e igualaremos a cero.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & b \\ b & b-3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -(b-3) + 2b^2 - 2b - 2 = -b + 3 + 2b^2 - 2b - 2 = 2b^2 - 3b + 1 = 0$$

Resolviendo la ecuación tenemos:

$$b = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \dfrac{3+1}{4} = 1 \\[2ex] \dfrac{3-1}{4} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $b \neq 1, \dfrac{1}{2}$ el rango es 3.
- Si $b = 1$ la matriz es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

  En este caso el rango es 2, pues las dos primeras filas son linealmente dependientes y la 2ª y 3ª son linealmente independientes.

- Si $b = \dfrac{1}{2}$ la matriz es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{5}{2} & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

En este caso el rango también es 2 pues las filas 2ª y 3ª son linealmente independientes y no puede ser tres al anularse el determinante.

Volver al examen

2.1.17.

a) Define el concepto de rango de una matriz.

b) Determina razonadamente si la tercera fila de la matriz A es combinación lineal de las dos primeras

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 08)

- Solución:

a) La respuesta a este apartado puedes encontrarlo en el punto 25 del resumen teórico que hay al principio del libro.

b) Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vamos a ver si existen a y b distintos de cero tal que:

$$(2,1,1) = a(1,1,1) + b(1,2,-1)$$

De aquí obtenemos el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 2 \\ a & + & 2b & = & 1 \\ a & - & b & = & 1 \end{array}\right]$$

De las ecuaciones 1ª y 3ª deducimos:

$$\left.\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 2 \\ a & - & b & = & 1 \end{array}\right] \Longrightarrow 2a = 3 \Longrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Por tanto $b = 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2}$

Si estos valores cumplen la segunda ecuación tendríamos que si es dependiente de las dos primeras, en caso contrario sería independiente. Sustituimos y tenemos

$$\frac{3}{2} + \frac{2}{2} = \frac{5}{2} \neq 1$$

Luego la tercera fila es independiente de las dos primeras.

Otra forma sería resolver el determinante asociado a la matriz. Si es distinto de cero las tres filas serían linealmente independientes y por lo tanto no se podría poner la tercera fila como combinación lineal de las otras dos.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 1 - 4 - 1 + 1 = -3 \neq 0$$

Volver al examen

2.1.18. Sea A una matriz cuadrada de orden 3. Sabemos que el determinante de A es $|A| = 2$. Calcula los siguientes determinantes:

a) $|2A|$**.**

b) $\left|A^{-1}\right|$**.**

c) $|A \cdot A^t|$ **(**A^t **es la traspuesta de la matriz** A**).**

d) Determinante de la matriz obtenida al intercambiar las dos primeras columnas de A.

e) Determinante de la matriz que se obtiene al sumar a la primera fila de A la segunda multiplicada por 2.

(Junio 09)

- Solución:

a) La matriz $2A$ es aquella que se obtiene multiplicando cada elemento de A por 2. Además hay una propiedad de los determinantes que afirma, que si multiplicamos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada por un número no nulo, el determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número.
En consecuencia, como todas las filas están multiplicadas por 2 y la matriz A es de orden 3,

$$|2A| = 2^3 \cdot |A| = 8 \cdot 2 = 16$$

b) Sabemos que $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$. Además, $A \cdot A^{-1} = I$ cuyo determinante vale 1.
Por tanto,

$$\left|A \cdot A^{-1}\right| = |I| \Rightarrow \left|A^{-1}\right| \cdot |A| = 1 \Rightarrow \left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

c) Aplicando la misma propiedad anterior y otra que dice que $|A^t| = |A|$,

$$\left|A \cdot A^t\right| = |A| \cdot \left|A^t\right| = |A|^2 = 4$$

d) Hay otra propiedad de los determinantes que dice que si intercambiamos dos filas o columnas de una matriz, el determinante de dicha matriz cambia de signo.
Por tanto el determinante buscado vale -2.

e) Hay otra propiedad que dice que si a una fila o columna le sumamos una combinación lineal de las demás paralelas, su determinante no varía. En consecuencia el determinante de esta nueva matriz sigue siendo 2.

Volver al examen

2.1.19. Determine el rango de la matriz A siguiente según los valores del parámetro b:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & b \\ 1 & 0 & 1 \\ b & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(Junio 09)

- Solución:

Para estudiar el rango vamos a calcular el determinante de la matriz.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & b & b \\ 1 & 0 & 1 \\ b & -2 & 0 \end{vmatrix} = b^2 - 2b = 0 \Rightarrow b(b-2) = 0 \Rightarrow \left| \begin{array}{l} b = 0 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

Luego:

- Si $b \neq 0, 2 \Rightarrow RgA = 3$
- Si $b = 0$ la matriz resultante es
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
En este caso $RgA = 2$, pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$
- Si $b = 2$ la matriz resultante es
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$
En este caso $RgA = 2$, pues el menor $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Volver al examen

2.1.20. Considere las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) Diga razonadamente cuál es el rango de la matriz $A \cdot B$.

b) Clasifique y resulva el sistema de ecuaciones:

$$A \cdot B \cdot X = O$$

(Septiembre 09)

- Solución:

a) Veamos cuál es la matriz $A \cdot B$.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Es obvio que $F_2 = -2 \cdot F_1$ y que $F_3 = -F_1$, luego el rango de la matriz $A \cdot B$ es igual a 1.

b) El sistema sale de:

$$A \cdot B \cdot X = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto es:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & - & 2y & + & 2z & = 0 \\ -2x & + & 4y & - & 4z & = 0 \\ -x & + & 2y & - & 2z & = 0 \end{array}\right\}$$

Es obvio que se trata de un sistema homogéneo, luego ya sabemos que es compatible. Además, según el apartado a), el rango de la matriz de los coeficientes es 1, luego podemos eliminarlas y quedarnos sólo con la primera ecuación. Tengo pues un sistema compatible con una ecuación y tres incógnitas, luego es compatible indeterminado y además voy a necesitar dos parámetros.

Para resolverlo voy a transformar en parámetros las incógnitas y y z. Entonces tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y + 2z = 0 \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} x = & 2\alpha & - & 2\beta \\ y = & \alpha & & \\ z = & & & \beta \end{array}\right]$$

Volver al examen

2.1.21. Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$.

a) Calcule el determinante de A y compruebe la igualdad

$$|A| = (b-a)(c-a)(c-b)$$

b) ¿Qué relación debe existir entre a, b y c para que el rango de la matriz A sea igual a 1? Justifique la respuesta.

(Septiembre 09)

- Solución:

Este determinante es conocido como determinante de Vandermonde.

$$\begin{aligned}
|A| &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \overset{\binom{F_2=F_2-aF_1}{F_3=F_3-a^2F_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} = \\
&= \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (b-a)\left(c^2-a^2\right) - (c-a)\left(b^2-a^2\right) = \\
&= (b-a)(c-a)(c+a) - (c-a)(b-a)(b+a) = \\
&= (b-a)(c-a)\left[(c+a)-(b+a)\right] = (b-a)(c-a)(c-b)
\end{aligned}$$

Vamos a responder al segundo apartado. Es obvio que $RgA = 1$ por la primera fila. Para que sea sólo 1 las otras dos filas tienen que ser dependientes de ésta, es decir, tienen que ser proporcionales a ella. De aquí deducimos que a, b, y c tienen que ser iguales.

Volver al examen

2.1.22. Determine el rango de la matriz A según los valores de b:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b & b-1 \end{pmatrix}$$

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

Como es una matriz cuadrada empezamos por estudiar el propio determinante de orden 3.

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ b+1 & 1 & 1 \\ 1 & b & b-1 \end{vmatrix} &= b-1+2+b(b+1)-1-2(b+1)(b-1)-b = \\
&= b-1+2+b^2+b-1-2b^2+2-b = -b^2+b+2 = 0 \Longrightarrow \\
&\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} b=2 \\ b=-1 \end{array} \right.
\end{aligned}$$

Por tanto,

- Si $b \neq -1, 2 \Longrightarrow RgA = 3$.

- Si $b = -1$ la matriz queda de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

cuyo rango es 2 $\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \right)$

- Si $b=2$ la matriz resultante es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo rango es 2 $\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-6=-5\neq 0\right)$

Volver al examen

2.1.23.

a) Defina el concepto de rango de una matriz.

b) Calcule el rango de la matriz

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

c) Diga, razonadamente, si la segunda columna de la matriz A anterior es combinación lineal de las otras dos columnas.

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

El primer apartado puedes encontrarlo en el punto 25 del resumen teórico que hay al principio del libro. Veamos el segundo.

Es obvio que $RgA\geqslant 2$, pues el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3\neq 0$. Vamos a ver si tiene rango 3.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4+2+1+4-2-1=0$$

Luego el $RgA=2$.(Es fácil también ver que el rango no es 3 pues las columnas 1ª y 3ª son proporcionales).

La respuesta al tercer apartado es que no es posible, pues la tercera es proporcional a la primera, por tanto, para que la segunda se pueda poner como combinación lineal de las otras dos tendría que ser proporcional a ellas, cosa que no ocurre.

Volver al examen

2.1.24.

a) Sean B y C matrices cuadradas de orden 3. Diga cuándo, por definición, C es la matriz inversa de B.

b) Diga razonadamente si la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa, y si la respuesta es afirmativa calcule la matriz A^{-1}.

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

La respuesta al primer apartado puedes encontrarlo en el punto 23 del resumen teórico que hay al principio del libro. Vamos a responder al segundo.

Para que una matriz tenga inversa tiene que ser una matriz regular, es decir, tener determinante distinto de cero. Veamos que ocurre en nuestro caso.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Luego la matriz A tiene inversa. Vamos a calcularla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta}$$

$$\xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.25. Determine el rango de la matriz A según los valores de a:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a+1 & -1 & a-2 \\ -1 & a+1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 10 - Fase específica)

- Solución:

Vamos a empezar estudiando el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ a+1 & -1 & a-2 \\ -1 & a+1 & 2 \end{vmatrix} = -(a-2) + 2(a+1)^2 - 2 - 2(a+1) =$$

$$= -a + 2 + 2a^2 + 4a + 2 - 2 - 2a - 2 = 2a^2 + a = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ \\ a = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Luego

- Si $a \neq 0, -\dfrac{1}{2} \Longrightarrow RgA = 3.$

- Si $a = 0$ la matriz queda

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$RgA = 2 \text{ pues } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

- Si $a = -\dfrac{1}{2}$ la matriz queda

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{5}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$$

$$RgA = 2 \text{ pues } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

Volver al examen

2.1.26. Calcule las matrices de la forma $X = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix}$ que cumplen la ecuación:

$$X \cdot X^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

donde X^t es la matriz traspuesta de X

(Junio 11)

- Solución:

La traspuesta de X es:

$$X^t = \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$X \cdot X^t = \begin{pmatrix} x & 1 \\ y & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2+1 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix}$$

Igualando la matriz obtenida a la matriz identidad tenemos:

$$\left.\begin{array}{rcl} x^2+1 & = & 1 \\ xy & = & 0 \\ y^2 & = & 1 \end{array}\right]$$

De la primera deducimos que $x = 0$. Esto hace que se cumpla la segunda y de la tercera deducimos que $y = \pm 1$.

Por tanto, las matrices buscadas son:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.27.

a) Diga, razonadamente, si la tercera columna de la matriz A siguiente es combinación lineal de las dos primeras columnas:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Calcule el rango de la matriz A.

(Septiembre 11)

- Solución:

En el primer apartado basta con observar que $c_3 = -c_1 - c_2$.

El segundo apartado nos pide calcular el rango de la matriz A. Tenemos que A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Es obvio que $RgA \geqslant 2$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

El máximo rango que puede tener A es tres, pues sólo tiene tres filas. Para probar si tiene rango tres basta con ver cuanto valen los menores de orden tres que contienen al menor de orden dos que dió distinto de 0, es decir, las matrices formadas por las columnas c_1, c_2, c_3 y c_1, c_2, c_4.

En el primer caso el determinante vale cero, pues, según el apartado anterior, la tercera columna es combinación lineal de las dos primeras. Veamos el otro menor.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 = -3 \neq 0$$

Luego $RgA = 3$.

Volver al examen

2.1.28. **Calcule la matriz inversa de la matriz $A = B^2 - 2 \cdot C$, siendo**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(Junio 12)

- Solución:

Vamos a empezar por calcular A.

$$\begin{aligned} A &= B^2 - 2C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para calcular la inversa seguimos el proceso habitual. Vamos a empezar por calcular el determinante de la matriz A.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -8+4 = -4 \neq 0$$

Luego la matriz A tiene inversa. Vamos a calcularla.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} -4 & -4 & -2 \\ -4 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta}$$

$$\xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ 4 & -4 & -4 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.29. Calcule los valores de a para los que el determinante de la matriz B es igual a 32, $|B| = 32$, siendo $B = 2 \cdot A^2$ y

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 12)

- Solución:

Vamos a tener en cuenta dos propiedades de los determinantes:

(1) Si multiplicamos los elementos de una línea por un número, queda multiplicado el valor del determinante por dicho número.

(2) El determinante del producto de dos matrices es igual al producto de los determinantes.

Tenemos que

$$|B| = 32 \Longrightarrow \left|2A^2\right| = 32 \overset{(1)}{\Longrightarrow} \left|A^2\right| = 4 \Longrightarrow |A \cdot A| = 4 \overset{(2)}{\Longrightarrow} |A|^2 = 4 \Longrightarrow |A| = \pm 2$$

Dicho esto vamos a calcular el determinante de A y vamos a igualarlo a ± 2.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & -a \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2a + a - 2 = 3a - 2$$

- Si $|A| = 2 \Longrightarrow 3a - 2 = 2 \Longrightarrow 3a = 4 \Longrightarrow a = \dfrac{4}{3}$
- Si $|A| = -2 \Longrightarrow 3a - 2 = -2 \Longrightarrow 3a = 0 \Longrightarrow a = 0$

Volver al examen

2.1.30. **¿Existe alguna matriz** $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix}$ **que cumpla**

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

y sea NO nula? Razone la respuesta.

(Septiembre 12)

- Solución:

Vamos a realizar las operaciones que nos indica el enunciado. De ahí resultará un sistema de ecuaciones que procederemos a estudiar.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X &= X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x & y \\ z & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} x+2z & y+2x \\ x+z & y+x \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x+y & x-y \\ z+x & z-x \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Igualando obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
x+2z &= x+y \\
y+2x &= x-y \\
x+z &= z+x \\
y+x &= z-x
\end{aligned}$$

La tercera ecuación podemos descartarla. De la primera deducimos que $y = 2z$. Sustituyendo esto último en la segunda y la cuarta tenemos:

$$\begin{aligned}
2z+2x = x-2z &\Longrightarrow x+4z=0 \\
2z+x = z-x &\Longrightarrow 2x+z=0
\end{aligned}$$

El sistema formado por estás dos últimas igualdades es homogéneo y obviamente también es compatible determinado. En consecuencia $x = 0$ y $z = 0 \Longrightarrow y = 0$.

Por tanto, no existe una matriz X **no nula** que cumpla lo pedido.

Volver al examen

2.1.31. **Dadas las matrices**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

pruebe que la matriz inversa de A **es** $A^{-1} = -A^2 + A + 2I$**.**

(Junio 13)

- Solución:

Vamos a calcular los dos miembros de la igualdad y comprobaremos que sale lo mismo. Comencemos por la inversa.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+1-1=-1 \neq 0$$

Como el determinante es distinto de cero la matriz A tiene inversa. Vamos a calcularla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta}$$

$$\xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular A^2.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Luego:

$$-A^2 + A + 2I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto sale lo mismo.

Otra forma de hacerlo, aportada por mi compañero Antonio Molano, sería calcular $-A^2+A+2I$, como acabamos de hacer y después multiplicar $A \cdot \left(-A^2+A+2I\right)$ y comprobar que sale la identidad.

Volver al examen

2.1.32. **Dadas las matrices** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 3 & x & y \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & x & y \end{pmatrix}$**, estudie si existen números reales x e y tales que la matriz B es la inversa de la matriz A.**

(Septiembre 13)

- Solución:

Vamos a calcular la inversa de A. Empezaremos por calcular el valor de su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-2=1$$

Luego la matriz es invertible. Vamos a calcular la inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta}$$

$$\xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Para comprobar si existen los x e y que cumplen la condición $A^{-1} = B$ igualamos las dos matrices y comprobamos si es posible.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x & y \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & x & y \end{pmatrix}$$

Esa igualdad se cumple si $x = -1$ e $y = 3$.

Volver al examen

2.1.33.

a) Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Calcule la matriz inversa de A.

c) Calcule el determinante de la matriz $B = \frac{1}{2}A^3$ sin obtener previamente B.

(Junio 14)

- Solución:

Vamos a comenzar calculando el valor del determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2 = 2$$

Una vez calculado éste vamos a calcular la inversa que nos piden:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta}$$

$$\xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Terminemos calculando el determinante de la matriz B que nos piden:

$$|B| = \left| \frac{1}{2} A^3 \right| \overset{(*)}{=} \left(\frac{1}{2} \right)^3 |A|^3 = \frac{1}{2^3} 2^3 = 1$$

(*) Ten en cuenta que la matriz A es de orden 3, de ahí que $\frac{1}{2}$ vaya elevado al cubo. Además has de tener en cuenta que $\left|A^3\right| = |A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot \ |A| \cdot |A| = |A|^3$.

Volver al examen

2.1.34. Considere las matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

a) Calcule la matriz $A = 3B^2 - C$.

b) Halle la inversa A^{-1} **de la matriz** A.

(Julio 14)

- Solución:

Calculemos primero la matriz B^2.

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculemos la matriz A que nos piden.

$$\begin{aligned} A &= 3 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \\ -6 & 0 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vamos a calcular el determinate de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 1 = 1$$

Luego tiene inversa. Vamos a calcularla.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta}$$

$$\xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{1} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.35. **Determine la relación que debe existir entre los parámetros x e y para que las matrices $A = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$ conmuten, es decir, para que $A \cdot B = B \cdot A$.**

(Junio 15)

- Solución:

Vamos a realizar los productos $A \cdot B$ y $B \cdot A$. Luego igualaremos y sacaremos conclusiones para x e y.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & x^2+1 \\ y^2+1 & x+y \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & xy+1 \\ xy+1 & 2y \end{pmatrix}$$

Igualando los dos productos tenemos:

$$\begin{aligned} x+y &= 2x \\ x^2+1 &= xy+1 \\ y^2+1 &= xy+1 \\ x+y &= 2y \end{aligned}$$

De la primera y cuarta ecuación deduzco que:

$$2x = 2y \Longrightarrow x = y$$

Es fácil comprobar que si $x = y$ se cumplen la segunda y tercera ecuación. Luego esa es la relación buscada.

Volver al examen

2.1.36. **Resuelva la ecuación matricial $AX + 2B = C$, siendo**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

(Julio 15)

- Solución:

Vamos a despejar X. El procedimiento es el mismo que si fuera una ecuación de primer grado.

$$\begin{aligned} A\,X+2\,B &= C \\ A\,X &= C-2\,B \\ A^{-1}\,A\,X &= A^{-1}\,(C-2\,B) \\ X &= A^{-1}\,(C-2\,B) \end{aligned}$$

Empecemos por calcular $C-2\,B$.

$$C-2\,B=\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 8 & 2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculemos la inversa de A. Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-2+1=-1$$

Vamos a hacerla paso a paso

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\xrightarrow{Menores}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{Adjuntos}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{Traspuesta}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$A^{-1}=-1\cdot\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Luego

$$X=A^{-1}\,(C-2\,B)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -9 & -2 \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.37. Determine el rango de la matriz A según los valores de b:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & b+2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ b+1 & 1 & b \end{pmatrix}.$$

(Julio 15)

- Solución:

Como la matriz es cuadrada vamos a comenzar estudiando el determinante de la misma. De esa forma descartaremos todos los números salvo dos.

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & b+2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ b+1 & 1 & b \end{vmatrix}=b+(b+2)(b+1)+2-(b+1)-2b(b+2)-1= \\ &= b+b^2+3b+2+2-b-1-2b^2-4b-1=-b^2-b+2=0\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} b=-2 \\ b=1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Por tanto,

- Si $b \neq 1, -2 \Longrightarrow Rg(A) = 3$.
- Si $b = 1$ la matriz resultante es:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
La segunda y tercera fila son iguales y las dos primeras son independientes, no son proporcionales, luego $Rg(A) = 2$.
- Si $b = -2$ la matriz resultante es:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
El $Rg(A) \geqslant 2$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y como no puede ser tres, tenemos que $Rg(A) = 2$.

Volver al examen

2.1.38. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcule la matriz $C = 2A - B^2$.

b) Halle la inversa A^{-1} de la matriz A.

(Junio 16)

- Solución:

Vamos a calcular C.

$$\begin{aligned} C &= 2A - B^2 = 2\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & -2 & 4 \\ 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -6 \\ 4 & -3 & 4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Calculemos ahora la inversa de A. Empecemos por calcular su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8 - 8 - 4 = -4 \neq 0$$

Por lo tanto tiene inversa. Vamos a calcularla.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 6 \\ 4 & 4 & -4 \\ 2 & 4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} -4 & 4 & 6 \\ -4 & 4 & 4 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta}$$

$$\xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.39. **Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, obtenga las matrices X que cumplen la igualdad $AX + B^2 - 2A = 0$.**

(Julio 16)

- Solución:

Sabemos que A es una matriz regular, pues $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, por tanto podríamos actuar como sigue:

$$AX+B^2-2A=0 \Longrightarrow AX=-B^2+2A \Longrightarrow A^{-1}\,A\,X=A^{-1}\,(-B^2+2A) \Longrightarrow X=A^{-1}\,(-B^2+2A)$$

Vamos a empezar calculando $-B^2 + 2A$.

$$-B^2+2A = -\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculemos ahora A^{-1}. Sabemos que $|A| = 1$. Vamos a hacerla paso a paso

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En consecuencia

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.40.

a) Calcule el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

b) Obtenga el determinante de la matriz $B = \frac{1}{3}A^4$ sin calcular previamente B.

c) Calcule la matriz inversa de A.

(Julio 17)

- Solución:

Vamos a calcular el valor del determinante aplicando la regla de Sarrus.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3$$

Vamos a calcular a continuación el determinante de B aplicando las propiedades. Para ello vamos a utilizar las propiedades que aparecen en este libro en el resumen teórico en los puntos 24 h), i).

Según el apartado h), si multiplicamos una linea de una matriz por un número, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número. Como estamos multiplicando toda la matriz por $\frac{1}{3}$, eso conllevaría que estamos multiplicando las tres filas por dicho número y por tanto el valor del determinante queda multiplicado por $\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

Según el apartado i), el determinante del producto de matrices es el producto de los determinantes de dichas matrices, por tanto

$$\left|A^4\right| = |A \cdot A \cdot A \cdot A| = |A| \cdot |A| \cdot |A| \cdot |A| = |A|^4$$

En consecuencia

$$|B| = \left|\frac{1}{3} \cdot A^4\right| = \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot |A|^4 = \frac{3^4}{3^3} = 3$$

Vamos a calcular la inversa. Como el $|A| \neq 0$ dicha inversa existe.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta}$$

$$\xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto:

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.41. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

a) Demuestre que la matriz A tiene inversa y calcula A^{-1}.

b) Resuelve la ecuación matricial $AX + B^2 = A$

(Junio 18 - Anulado)

- Solución:

Veamos el apartado primero. Para ver que tiene inversa basta con comprobar que el determinante de la matriz A es distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Por tanto tiene inversa. Calculemos ahora A^{-1}. Sabemos que $|A| = 3$. Vamos a hacerla paso a paso

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Vamos a resolver ahora el segundo apartado.

$$AX + B^2 = A \Longrightarrow AX = A - B^2 \Longrightarrow X = A^{-1}\left(A - B^2\right)$$

Vamos a empezar por calcular $A - B^2$.

$$A - B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -9 \\ -16 & -21 \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$X = A^{-1} \cdot \left(A - B^2\right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -9 \\ -16 & -21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{3} & 4 \\ -\frac{37}{3} & -17 \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.42. Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$**.**

a) Calcule la matriz $C = -3A + B^2$**.**

b) Halle la inversa A^{-1} **de la matriz** A**.**

(Junio 18)

- Solución:

Vamos a empezar por calcular C.

$$\begin{aligned} C &= -3A + B^2 = -3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -6 & -3 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 2 \\ -6 & -2 & -6 \\ -2 & 6 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Vamos a hacer ahora el segundo apartado.

$$A \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ -4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{-4} = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \\ -4 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.1.43. Sea la matriz A que depende del parámetro $a \in \mathbb{R}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \\ -2 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Determine el rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

b) Para $a = 1$ resuelva, si existe solución, la ecuación matricial $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(Julio 18)

- Solución:

Vamos a ver el primer apartado. Como es una matriz cuadrada y depende de un parámetro, vamos a ver el determinante de la misma.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \\ -2 & a & 0 \end{vmatrix} = -2a + a^2 = 0 \Longrightarrow a(-2+a) = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array} \right.$$

Por tanto:

- Si $a \neq 0, 2 \Longrightarrow Rg\, A = 3$.

- Si $a = 0$ Sabemos que no puede tener rango 3, pues el determinante se anula en ese valor de a. La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

  Sabemos que en este caso $Rg\, A = 2$, pues $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$

- Si $a = 2$, al igual que antes, como mucho tendrá rango 2. La matriz asociada es ahora

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

  Sabemos que en este caso $Rg\, A = 2$, pues $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

Vamos a resolver el segundo apartado. La matriz resultante para $a = 1$ es

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos dos formas de resolver el ejercicio, bien como ecuación matricial, bien como sistema de ecuaciones.

Veamos la primera forma. Llamemos

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Tenemos que

$$A \cdot X = B \Longrightarrow X = A^{-1} \cdot B \qquad (1)$$

Vayamos paso a paso.

$$A \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Volviendo a (1) tenemos que

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

la segunda forma será

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} y+z \\ x+z \\ -2x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

El sistema resultante es

$$\left.\begin{array}{rcccl} & & y & + & z & = 1 \\ x & & & + & z & = 1 \\ -2x & + & y & & & = 1 \end{array}\right\}$$

No lo resolveremos, pero es fácil comprobar que la solución obtenida antes cumple las ecuaciones del sistema.

Volver al examen

2.1.44. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **y** $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$**.**

a) Calcule la matriz X tal que $X = A^2 + B^2 - 2A\cdot B$.

b) Halle la inversa de la matriz A.

(Julio 18)

- Solución:

Veamos el primer apartado.

$$X = A^2 + B^2 + 2A\cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \ 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & 8 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \ 2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 6 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 8 \\ 16 & 12 & 23 \\ -3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vamos a calcular la inversa de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 2 + 2 = 2$$

Vayamos paso a paso.

$$A \xrightarrow{Menores} \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Adjuntos} \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{Traspuesta} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa

$$A^{-1} = \frac{1}{2} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{2} & -1 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.2. Sistemas de ecuaciones

2.2.1. La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es M. Hallar un sistema equivalente tal que todos los elementos de la diagonal principal de la nueva matriz asociada sean nulos:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(Junio 00)

- Solución:

Vamos a aplicar el método de Gauss para hacer los ceros que nos piden.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3-F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2=F_2-F_3} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_1=3F_1-F_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es:

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 9 \\ 6 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Volver al examen

2.2.2. Dar un ejemplo de un sistema de 2 ecuaciones lineales con 3 incógnitas que sea incompatible.

(Junio 00)

- Solución:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\}$$

Volver al examen

2.2.3. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el parámetro a:

$$\begin{array}{rcrcrcr} (a-3)x & & & + & 4z & = & 2 \\ x & & & - & 2z & = & -1 \\ -x & + & ay & + & 2z & = & a \end{array}$$

(Septiembre 00)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a-3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & a & 2 & a \end{array}\right)$$

Vamos a empezar por estudiar el rango de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} a-3 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & a & 2 \end{vmatrix} = 4a + 2a(a-3) = 4a + 2a^2 - 6a = 2a^2 - 2a$$

Igualando a cero resulta:

$$2a^2 - 2a = 0 \Longrightarrow 2\,(a-1)\,a = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1 \end{cases}$$

Vamos pues a estudiar cada caso.

- Si $a \neq 0, 1 \Longrightarrow RgA = RgA' = 3 = n^o$ de incógnitas $\Longrightarrow$ S. C. Determinado.

- Si $a = 0$ la matriz que resulta es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

  Las filas segunda y tercera hacen que el sistema sea incompatible.

- Si $a = 1$ la matriz que obtenemos es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

  Vamos a estudiar el rango de A y A' para ver como sería.

  Es evidente que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, pues tenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

  Vamos a ver que pasa con la matriz ampliada. Su rango es igual a dos, pues las filas primera y segunda son proporcionales.

  Por tanto el sistema es compatible indeterminado, pues

$$RgA = 2 = RgA' < 3 = n^o \text{ de incógnitas}$$

Volver al examen

2.2.4. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el valor del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} ax & - & ay & + & az & = a \\ & & & & (3-2a)z & = 1 \\ x & + & (a-1)y & & & = 0 \end{array}\right\}$$

(Junio 01)

- Solución:

La matriz asociada a nuestro sistema es:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} a & -a & a & a \\ 0 & 0 & 3-2a & 1 \\ 1 & a-1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Veamos donde el determinante de la matriz de los coeficientes es cero.

$$\begin{vmatrix} a & -a & a \\ 0 & 0 & 3-2a \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = -a(3-2a) - a(a-1)(3-2a) = -3a + 2a^2 - (3a^2 - 2a^3 - 3a + 2a^2) =$$

$$= -\cancel{3a} + 2a^2 - 3a^2 + 2a^3 + \cancel{3a} - 2a^2 = 2a^3 - 3a^2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \Longrightarrow a = 0 \\ 2a - 3 = 0 \Longrightarrow a = \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Por tanto:

- Si $a \neq 0, \dfrac{3}{2} \Longrightarrow RgA = RgA' = 3 = n^o$ incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.
- Si $a = 0$ la matriz es:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Como la primera fila es entera de ceros, y es evidente que hay menores de orden 2 distintos de cero, tenemos que:

$$RgA = 2 = RgA' < n^o \text{ incógnitas} \Longrightarrow \text{ Sistema compatible indeterminado.}$$

- Si $a = \dfrac{3}{2}$ la matriz que resulta es:

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Como la segunda fila crea una imposiblidad tenemos que el sistema es incompatible para dicho valor.

Volver al examen

2.2.5. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según el valor del parámetro a:

$$\begin{array}{rcrcrl} & & a\;y & + & (a+1)\;z & = a \\ a\;x & & & + & z & = a \\ x & & & + & a\;z & = a \end{array}$$

(Junio 02)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & a+1 & a \\ a & 0 & 1 & a \\ 1 & 0 & a & a \end{array}\right)$$

Vamos a empezar por estudiar el rango de A, ya que es una matriz cuadrada.

$$\begin{vmatrix} 0 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & a \end{vmatrix} = a - a^3 = 0 \Longrightarrow a(1-a^2) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ 1 - a^2 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1 \end{cases}$$

Luego:

- Si $a \neq 0, 1, -1 \Longrightarrow RgA = 3 = RgA' = n^\circ$ incógnitas $\Longrightarrow$ S. C. Determinado.

- Si $a = 0$ la matriz que nos queda es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema es compatible por ser homogéneo. Además la 1ª y la 2ª fila son iguales y hay un menor de orden dos que es distinto de cero (formado por las filas 1 y 3, y las columnas 1 y 3). Por tanto el $RgA = 2$. En consecuencia:

$$RgA = 2 = RgA' < 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Longrightarrow \text{ S. C. Indeterminado.}$$

- Si $a = 1$ la matriz es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Las filas 2ª y 3ª son iguales, pero hay un menor de orden dos que es distinto de cero (formado por las filas 1 y 2, y las columnas 2 y 3). Por tanto el $RgA = 2$. Veamos el rango de la ampliada.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

Luego el $RgA' = 2$ y por tanto:

$$RgA = 2 = RgA' < 3 = n^\circ \text{ incógnitas} \Longrightarrow \text{ S. C. Indeterminado.}$$

- Si $a = -1$ la matriz resultante es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

Es fácil observar que las filas 2ª y 3ª son incompatibles, luego el sistema, para este valor, es incompatible.

Volver al examen

2.2.6. La matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo es M. Hallar un sistema equivalente tal que los tres coeficientes que están por encima de la diagonal principal de la nueva matriz asociada sean nulos:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

(Septiembre 02)

- Solución:

Vamos a conseguir los ceros que nos piden utilizando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \longleftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 = F_3 - 4F_2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F_2 = 8F_2 + F_3]{F_1 = 4F_1 - F_3} \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Esta sería la matriz asociada al sistema buscado.

Volver al examen

2.2.7. Discutir el siguiente sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro a:

$$\begin{array}{rcrcrl} & & ay & + & az & = 0 \\ x & & & + & z & = 0 \\ 4x & - & 2y & + & az & = a \end{array}$$

(Septiembre 02)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & a & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & a & a \end{array} \right)$$

Vamos a ver el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & a & a \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & a \end{vmatrix} = 4a - 2a - a^2 = -a^2 + 2a$$

Igualando a cero obtenemos los valores que anulan el determinante.

$$-a^2 + 2a = 0 \Longrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 2 \end{cases}$$

En consecuencia tenemos que:

- Si $a \neq 0, 2 \Longrightarrow RgA = 3 = RgA' = n^\circ$ incógnitas $\Longrightarrow$ S. C. Determinado.

- Si $a = 0$ la matriz asociada es:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$
Se trata de un sistema homogéneo. Tiene una fila de ceros, luego el rango no puede ser tres y además $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Por tanto el sistema es compatible indeterminado y necesita un parámetro.
$$RgA = RgA' = 2 < 3 = n^o \text{ de incógnitas.}$$

- Si $a = 2$ la matriz queda:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$
El rango de la matriz de los coeficientes es dos, pues $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.
En cambio la matriz ampliada tiene rango tres, pues
$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \Longrightarrow RgA = 2 \neq 3 = RgA'$$
Por tanto el sistema para este valor es incompatible.

Volver al examen

2.2.8. Determinar el valor del parámetro a para que las siguientes ecuaciones lineales sean linealmente dependientes

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 1 \\ 3x & + & 2y & + & z & = 1 \\ & & y & + & 2z & = a \end{array}$$

(Junio 03)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a \end{array}\right)$$

Para que ocurra lo que nos piden, el sistema ha de ser compatible indeterminado, es decir, $RgA = RgA' < n^o$ de incógnitas. Veamos cuanto vale el rango de A.

- $RgA \geq 2$ pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

- $RgA = 2$ pues:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 3 - 6 - 1 = 0$$

Por tanto se producirá lo que piden si el $RgA' = 2$, es decir, si

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a + 3 - 3a - 1 = -a + 2 = 0 \Longrightarrow a = 2$$

Volver al examen

2.2.9. Dar un ejemplo de una sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea compatible e indeterminado. Interprétalo geométricamente.

(Septiembre 03)

- Solución:

Un ejemplo válido es:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & = 1 \\ 2x & - & y & & & = 3 \\ 3x & & & + & z & = 4 \end{array}\right\}$$

En este ejemplo hemos elegido dos ecuaciones independientes y la tercera la hemos obtenido sumando las dos primeras.

Geométricamente hablando pueden existir varias posibilidades.

- Pueden ser tres planos que se cortan en una recta (para ejemplo vale el anterior).
- Pueden ser también tres planos coincidentes (tres ecuaciones proporcionales).
- Pueden ser dos planos coincidentes y otro que los corte (dos ecuaciones proporcionales y una independiente de ellas).

Volver al examen

2.2.10. Determinar un valor del parámetro a para que el siguiente sistema de ecuaciones lineales sea compatible e indeterminado.

$$\begin{array}{llll} x & +y & +z & = a \\ x & -y & +z & = 1 \\ x & -3y & +z & = 0 \end{array}$$

(Junio 05)

- Solución:

La matriz asociada al sistema será:

$$\mathbf{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Vamos a estudiar el rango de la matriz de los coeficiente y despues veremos la ampliada.

- $RgA \geq 2$ pues tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$

Además el $RgA = 2$, pues las columnas primera y tercera de la matriz de los coeficiente son iguales.

Para que el sistema sea compatible e indeterminado la matriz ampliada tiene que tener rango 2, es decir,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 3a + a + 3 = -2a + 4 = 0 \Longrightarrow a = 2$$

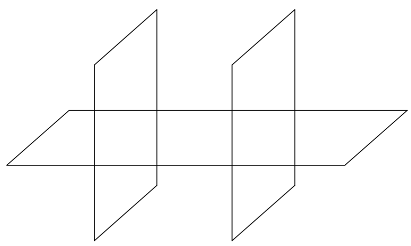
Volver al examen

2.2.11. Dar un ejemplo de un sistema de 3 ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea incompatible. Interprétalo geométricamente.

(Junio 05)

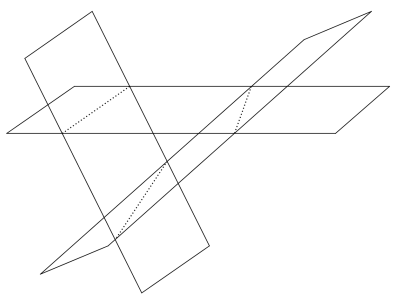
- Solución:

Tenemos varias opciones. Por ejemplo, podemos considerar dos planos paralelos y uno que corte a ambos.



$$\left.\begin{array}{rrrr} x & +y & +z & = 3 \\ x & +y & +z & = 5 \\ 2x & -y & +z & = 3 \end{array}\right\}$$

En este ejemplo, las dos primeras ecuaciones representan planos paralelos y la tercera corta a los dos. Es obvio que no tienen ningún punto en común, por lo que el sistema es incompatible.



Otra opción es coger dos planos que se corten, sumar sus ecuaciones (con lo que obtendríamos un plano que se corta en la misma recta que los anteriores) y al resultante cambiarle el término independiente, con lo que obtenemos un plano paralelo al último que no pasaría por la recta de corte de los dos planos, y con ello no tendrían ningún punto en común.

$$\left.\begin{array}{cccc} x & +y & +z & =3 \\ 2x & -y & +z & =3 \\ 3x & & +2z & =8 \end{array}\right\}$$

Otra posibilidad son dos planos coincidentes y uno paralelo, o bien tres planos paralelos.

Volver al examen

2.2.12. Resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{ccc} y & -x & =z \\ x & -z & =y \\ y & +z & =x \end{array}$$

(Septiembre 05)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$A=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Se trata de un sistema homogéneo, luego es compatible. Veremos cuanto vale el RgA para decidir si es determinado o indeterminado.

Es evidente que $RgA \geq 2$ pues

$$\left|\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{array}\right| = -1-1=-1\neq 0$$

Veamos cuanto vale el $|A|$.

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{array}\right| = 1+1-1+1-1-1=0$$

Luego resulta que el $RgA = 2 \Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado y necesita un parámetro.

Vamos a resolverlo:

Hacemos $x=\lambda$. Para eso usamos las filas que dan rango 2 y resolviendo por reducción tenemos:

$$\begin{array}{cccc} \cancel{y} & -z & = & \cancel{\lambda} \\ \cancel{-y} & -z & = & \cancel{-\lambda} \\ \hline & -2z & = & 0 \\ & z & = & 0 \end{array}$$

Si $x=\lambda$; $z=0 \Longrightarrow y=\lambda$.

Por tanto la solución es $(\lambda,\lambda,0)$.

Volver al examen

2.2.13. Dar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea compatible e indeterminado. Interpretarlo geométricamente.

(Septiembre 05)

- Solución:

El sistema será compatible cuando los rangos de la matriz de coeficientes y la ampliada coincidan y será indeterminado cuando éste sea menor que el número de incógnitas. En nuestro caso ocurrirá cuando el rango de la matriz de los coeficientes valga 1 ó 2. Por tanto, o bien tomamos dos ecuaciones linealmente independientes y las sumamos ($RgA = 2$), o bien cogemos una ecuación y la repetimos dos veces multiplicada por distintos números ($RgA = 1$). También vale para el primer caso dos ecuaciones proporcionales y una que sea linealmente independiente con ellas.

Valdrían como ejemplo los siguientes:

Para $RgA = 2$ tendríamos:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 3y & - & 2z & = 3 \\ x & - & y & + & z & = 4 \\ 3x & + & 2y & - & z & = 7 \end{array}\right\}$$

Para $RgA = 1$ nos vale:

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} 2x & + & 3y & - & 2z & = 3 \\ 4x & + & 6y & - & 4z & = 6 \\ -2x & - & 3y & + & 2z & = -3 \end{array}\right\}$$

Geométricamente el primer caso representa tres planos que se cortan en una recta, o dos coincidentes y uno que los corta y el segundo tres planos coincidentes.

Volver al examen

2.2.14. Discute el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcccccl} x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ x & + & (1+b)y & - & bz & = & 2b \\ x & + & by & + & (1+b)z & = & 1 \end{array}\right]$$

según los valores de b.

(Junio 06)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{array}\right)$$

Vamos a calcular el determinante de la matriz de coeficientes para realizar el estudio.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix} = (1+b)^2 - 2b - b + (1+b) - 2(1+b) + b^2 = \cancel{1} + b^2 + \cancel{2b} - \cancel{2b} - \cancel{b} + \cancel{1} +$$

$$+\cancel{b} - \cancel{2} - 2b + b^2 = 2b^2 - 2b = 0 \Longrightarrow 2\,b\,(b-1) = 0 \Longrightarrow b = 0 \text{ y } b = 1$$

Luego:

- Si $b \neq 0,1 \Longrightarrow$ El sistema es compatible determinado.
- Si $b = 0$ la matriz quedaría:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$
En este caso tenemos que $RgA = 2$ pues
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$
Veamos cuanto vale el RgA'.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 = -3 \neq 0$$
Por tanto $RgA = 2 \neq 3 = RgA' \Longrightarrow$ El sistema es incompatible.
- Si $b = 1$ a matriz quedaría:
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$
En este caso $RgA = 2$, pues
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$
y a su vez coincide con el RgA', ya que la primera y la segunda fila coinciden.
Por tanto $RgA = 2 = RgA' < 3 = n^o$ de incógnitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado y necesita un parámetro para su resolución.

Volver al examen

2.2.15. Resuelve el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{cccc} x & +2y & -z & = 1 \\ x & +y & -z & = 1 \\ x & & -z & = 1 \end{array}$$

(Septiembre 06)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Vamos a resolverlo por el método de Gauss, pues parece cómodo.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Las filas segunda y tercera son proporcionales, luego sobra una y el sistema es compatible indeterminado.

De la segunda ecuación deducimos que $y = 0$. Si en la primera ecuación sustituimos $y = 0$ y hacemos $z = \lambda$ resulta:

$$x - \lambda = 1 \Longrightarrow x = 1 + \lambda$$

Por tanto la solución del sistema es:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & + & \lambda \\ y & = & 0 & & \\ z & = & & & \lambda \end{array}\right\}$$

Otra forma de resolverlo es darnos cuenta que, observando las dos primeras ecuaciones, y es igual a 0. Visto esto las ecuaciones resultantes son todas iguales, luego con una de ellas calculamos x en función de z.

Volver al examen

2.2.16.

a) **Enuncia el Teorema de Rouché-Frobenius.**

b) **Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales, según los valores del parámetro a:**

$$\begin{array}{cccc} x & +y & +z & = a \\ x & +y & +az & = 1 \\ x & +ay & +z & = 1 \end{array}$$

(Junio 07)

- Solución:

a) La parte teórica puedes encontrarla en el punto 27 del resumen teórico que hay al principio del libro.

b) La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz de los coeficiente:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = 1 + a + a - 1 - a^2 - 1 = -a^2 + 2a - 1$$

Igualando a cero resulta:

$$-a^2 + 2a - 1 = 0 \Longrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Longrightarrow a = 1$$

Luego:

- Si $a \neq 1$ el sistema es compatible determinado.

- Si $a = 1$ la matriz queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

y el $RgA = 1 = RgA' < n^o$ de incógnitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado (necesita dos parámetros)

Volver al examen

2.2.17. Discute, en función del parámetro a, el sistema de ecuaciones (NO es necesario resolverlo en ningún caso)

$$\begin{array}{rcrcrcl} -x & + & 2y & + & z & = & 1 \\ ax & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 2x & & & + & (a-1)z & = & 2 \end{array}$$

(Junio 08)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ a & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & a-1 & 2 \end{array}\right)$$

Veamos donde el determinante de la matriz de los coeficientes vale 0:

$$\left|\begin{array}{ccc} -1 & 2 & 1 \\ a & -1 & 2 \\ 2 & 0 & a-1 \end{array}\right| = a - 1 + 8 + 2 - 2a(a-1) = a - 1 + 8 + 2 - 2a^2 + 2a = -2a^2 + 3a + 9 = 0$$

Vamos a resolver la ecuación:

$$a = \frac{-3 \pm \sqrt{9+72}}{-4} = \frac{-3 \pm 9}{-4} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{-3+9}{-4} = \dfrac{6}{-4} = -\dfrac{3}{2} \\ \\ \dfrac{-3-9}{-4} = \dfrac{-12}{-4} = 3 \end{array}\right.$$

Por tanto:

- Si $a \neq -\frac{3}{2}, 3 \Longrightarrow RgA = RgA' = 3 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

- Si $a = -\frac{3}{2}$ la matriz resultantes es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -\frac{5}{2} & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $RgA = 2$, pues

$$\left|\begin{array}{cc} -\frac{3}{2} & -1 \\ 2 & 0 \end{array}\right| = 2 \neq 0$$

Vamos a estudiar el rango de la matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -\dfrac{3}{2} & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2+8+2+6 = 18 \neq 0$$

Luego $RgA' = 3$.

De aquí deducimos que:

$RgA = 2 \neq 3 = RgA' \Longrightarrow$ Sistema incompatible.

- Si $a = 3$ la matriz que queda es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Tenemos que $RgA = 2$, pues
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

Vamos a estudiar el rango de la matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2+8+2-12 = 0$$

Luego $RgA' = 2$.

De aquí deducimos que:

$RgA = 2 = RgA' < n^o$ de incógnitas $\Longrightarrow$ El sistema es compatible indeterminado (necesita un parámetro)

Volver al examen

2.2.18. Discute el siguiente sistema de ecuaciones lineales, según el valor del parámetro a:

$$\begin{array}{rcrcl} ax & + & ay & = & 0 \\ x & + & z & = & a \\ -2y & + & az & = & a \end{array}$$

No es necesario resolver el sistema en ningún caso.

(Septiembre 08)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & -2 & a & a \end{array}\right)$$

Vamos a empezar estudiando el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & a \end{vmatrix} = -a^2 + 2a = 0 \Longrightarrow a(-a+2) = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = 2 \end{array} \right.$$

Por tanto:

- Si $a \neq 0, 2 \Longrightarrow RgA = RgA' = 3 \Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.

- Si $a = 0$ la matriz resultantes es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

  Es evidente que sobra la primera fila. Además el sistema resultante es homogéneo y por tanto compatible. También es obvio que la segunda y tercera fila son linealmente independientes.

  En consecuencia:

  $RgA = RgA' = 2 < 3 =$ nº de incognitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

- Si $a = 2$ la matriz que queda es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array} \right)$$

  Tenemos que $RgA = 2$, pues

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

  Vamos a estudiar el rango de la matriz ampliada.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 8 = 4 \neq 0$$

  Luego $RgA' = 3$.

  De aquí deducimos que:

  $RgA = 2 \neq 3 = RgA' \Longrightarrow$ Sistema incompatible.

Volver al examen

2.2.19.

a) Discute el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & z & = & 1 \\ -x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 1 \end{array} \right\}$$

b) Resuelve el anterior sistema.

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

a) La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Vamos a empezar por estudiar el rango de la matriz de los coeficientes.
Tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \Longrightarrow RgA \geqslant 2$$

Por otro lado el determinate de dicha matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 1 + 2 = 0 \Longrightarrow RgA = 2$$

Veamos ahora el rango de la matriz ampliada. Sabemos que $RgA' \geqslant 2$, pues nos vale el mismo menor que sirvió para el RgA. Bastará con ver que ocurre con el menor:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 1 = 0$$

En consecuencia tenemos que $RgA = RgA' = 2 < 3 =$ nº de incógnitas, por tanto el sistema es compatible indeterminado y necesitaré un parámetro para su resolución.

b) Del estudio anterior también deducimos que me “sobra” la última ecuación y que tengo que transformar en parámetro la incógnita **z**.
Por tanto el sistema queda de la siguiente forma:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & y & + & \lambda & = & 1 \\ -x & + & y & - & \lambda & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcrcr} 2x & - & y & = & 1-\lambda \\ -x & + & y & = & \lambda \end{array}\right\}$$

Aplicando el método de reducción tenemos:

$$\begin{array}{rcrcr} 2x & - & \cancel{y} & = & 1-\lambda \\ -x & + & \cancel{y} & = & \lambda \\ \hline \end{array}$$

$$x = 1$$

Sustituyendo este valor en la segunda ecuación se tendría que $y = \lambda + 1$
Luego la solución del sistema es:

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & = & 1 & & \\ y & = & 1 & + & \lambda \\ z & = & & & \lambda \end{array}\right\}$$

Volver al examen

2.2.20. Discute, en función del parámetro b, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} bx & + & by & & & = & 1 \\ 3x & & & + & bz & = & b-2 \\ & - & y & + & z & = & b-3 \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} b & b & 0 & 1 \\ 3 & 0 & b & b-2 \\ 0 & -1 & 1 & b-3 \end{array}\right)$$

Comenzaremos por estudiar el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$\begin{vmatrix} b & b & 0 \\ 3 & 0 & b \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = b^2 - 3b = 0 \Longrightarrow b\,(b-3) = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=3 \end{array}\right.$$

Estudiemos los distintos casos:

- Si $b \neq 0, 3 \Longrightarrow RgA = RgA' = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas $\Longrightarrow$ S. Compatible Determinado.
- Si $b = 0$ la matriz que tenemos es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Observando la primera ecuación vemos que el sistema es incompatible.

- Si $b = 3$ la matriz que tenemos es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Sabemos que $RgA = 2$, pues $\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9 \neq 0.$

Vamos a ver el rango de la ampliada.

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -3 + 3 = 0$$

Por tanto $RgA = 2 = RgA' \neq 3 = \text{n}^{\text{o}}$ incognitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (1 parámetro).

Volver al examen

2.2.21.

a) Diga, justificando la respuesta, si es de Cramer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} & & y & - & z & = & 1 \\ -x & & & + & 4z & = & 0 \\ & & 2y & - & z & = & 1 \end{array}\right\}$$

b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

Sabemos que un sistema es de Cramer si la matriz de los coeficientes es una matriz regular, es decir, su determinante es distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Luego el sistema es de Cramer.

Vamos a resolverlo por la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{4-8}{1} = -4$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{1-1}{1} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{|A|} = \frac{-2+1}{1} = -1$$

Volver al examen

2.2.22. Discuta, en función del parámetro a, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & a+1 \\ -2x & - & y & + & az & = & -2 \\ (a+1)x & + & y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

(Septiembre 10 - Fase específica)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a+1 \\ -2 & -1 & a & -2 \\ a+1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Vamos a estudiar el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & a \\ a+1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + a(a+1) - 2 - a = 1 + a^2 + a - 2 - a = a^2 - 1 = 0 \Longrightarrow a = \pm 1$$

Por tanto:

- Si $a \neq \pm 1 \Longrightarrow RgA = RgA' = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

- Si $a = 1$ la matriz resultante es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

  Tenemos que $RgA = 2$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

  Veamos cual es el rango de la ampliada.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{Pues } c_3 = 2c_2$$

  Luego $RgA = RgA' = 2 \neq 3 = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

- Si $a = -1$ la matriz resultante es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

  De nuevo $RgA = 2$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

  Veamos cual es el rango de la ampliada.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 4 + 2 = 4 \neq 0$$

  Luego $RgA = 2 \neq 3 = RgA' \Longrightarrow$ Sistema incompatible.

Volver al examen

2.2.23. Discuta, en función del parámetro a, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & + & z & = & a \\ x & + & (a-1)y & + & az & = & 0 \\ ax & + & 2y & + & z & = & -1 \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

(Junio 11)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & a \\ 1 & a-1 & a & 0 \\ a & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

Vamos a estudiar el determinante de la matriz de los coeficientes, pues el sistema es 3 x 3.

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & a-1 & a \\ a & 2 & 1 \end{vmatrix} &= -(a-1)+2a^2+2-a(a-1)-2+2a = \\ &= -a+1+2a^2+2-a^2+a-2+2a = \\ &= a^2+2a+1=0 \Longrightarrow a=-1 \end{aligned}$$

Por tanto:

- Si $a \neq -1 \Longrightarrow RgA = 3 = RgA' =$ nº incognitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.
- Si $a=-1$ la matriz asociada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

  Es obvio que $RgA = 1$ y que $RgA' = 2$ (basta con tomar $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$). Luego $RgA = 1 \neq 2 = RgA' \Longrightarrow$ Sistema incompatible.

Volver al examen

2.2.24. Discuta, en función del parámetro b, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} & & y & + & bz & = & 1+b \\ x & & & + & z & = & 3-b \\ bx & - & by & & & = & 1-b \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

(Septiembre 11)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & b & 1+b \\ 1 & 0 & 1 & 3-b \\ b & -b & 0 & 1-b \end{array}\right)$$

Vamos a estudiar el determinante de la matriz de los coeficientes, pues el sistema es 3 x 3.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & b \\ 1 & 0 & 1 \\ b & -b & 0 \end{vmatrix} = b - b^2 = 0 \Longrightarrow b\,(1-b) = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} b=0 \\ b=1 \end{array} \right.$$

- Si $b \neq 0, 1 \Longrightarrow RgA = 3 = RgA' =$ nº incognitas $\Longrightarrow$ Sistema Compatible Determinado.
- Si $b = 0$ la matriz asociada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

  La última ecuación hace que el sistema sea incompatible para este valor de b.

- Si $b = 1$ la matriz asociada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  Es obvio que $RgA = 2$,pues $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$). Veamos el RgA'.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

  Por tanto $RgA = 2 = RgA' \neq 3 =$ nº incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (Necesita un parámetro).

Volver al examen

2.2.25. Discuta, en función del parámetro a, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & + & 2z & = & a \\ -x & + & y & - & az & = & 1 \\ x & + & ay & + & (1+a)z & = & -1 \end{array}\right\}$$

(no hay que resolverlo en ningún caso).

(Junio 12)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & a \\ -1 & 1 & -a & 1 \\ 1 & a & 1+a & -1 \end{array}\right)$$

Vamos a estudiar el determinante de la matriz de los coeficientes, pues el sistema es 3 x 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -a \\ 1 & a & 1+a \end{vmatrix} = 1+a+a-2a-2-1-a+a^2 = a^2-a-2 = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a=2 \\ a=-1 \end{array} \right.$$

Por tanto:

- Si $a \neq -1, 2 \Longrightarrow RgA = RgA' = 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $a = -1$ la matriz resultante es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

  Es obvio que $RgA = 2$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.
  Vamos a estudiar el rango de la matriz ampliada. Para ello basta con estudiar el valor del siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

  Es evidente que este determinante vale 0, pues la primera y la tercera columnas son iguales. Por tanto $RgA = 2 = RgA' \neq 3 = \text{n}^{\text{o}}$ incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado (Necesita un parámetro).

- Si $a = 2$ la matriz asociada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{array} \right)$$

  Obviamente, en este caso, el sistema es incompatible, pues hay una incongruencia con las dos primeras ecuaciones.

Volver al examen

2.2.26.

a) Encuentre, razonadamente, un valor del parámetro a para el que sea compatible determinado el sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{rcrcrcc} ax & + & 2y & + & z & = & a+1 \\ (a+1)x & - & y & - & az & = & -1 \\ -x & + & y & + & z & = & 2a \end{array} \right\}$$

b) Resuelva el sistema para el valor de a encontrado.

(Junio 13)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & 1 & a+1 \\ a+1 & -1 & -a & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2a \end{array}\right)$$

Vamos a calcular el determinante de la matriz de los coeficientes. El sistema será compatible determinado para todos los valores de a que hagan el determinante distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ a+1 & -1 & -a \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -a+2a+a+1-1+a^2-2a(a+1) = a^2-2 = 0 \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \sqrt{2} \\ a = -\sqrt{2} \end{array} \right.$$

Luego cualquier valor de a distinto de $\sqrt{2}$ y $-\sqrt{2}$ nos vale. Voy a tomar $a = -1$ para resolver el apartado b).

Para dicho valor el sistema resultante sería:

$$\left. \begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ & - & y & + & z & = & -1 \\ -x & + & y & + & z & = & -2 \end{array} \right\}$$

Vamos a resolverlo por Cramer. El determinante de la matriz de los coeficientes vale -1 (basta con sustituir -1 en la fórmula que obtuvimos antes). Por tanto las soluciones serían:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-4-1-2+2}{-1} = 5$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{1-1-2}{-1} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-3} = \frac{-2+2-1}{-1} = 1$$

Volver al examen

2.2.27.

a) **Estudie para cuáles valores del parámetro m es compatible determinado el siguiente sistema de ecuaciones:**

$$\left. \begin{array}{rcrcrcr} (1-2m)\,x & - & y & - & z & = & -1 \\ (m-1)\,x & + & y & - & z & = & 2 \\ m^2\,x & + & y & + & z & = & 3 \end{array} \right\}$$

b) **Resuelva el anterior sistema de ecuaciones para $m = 0$.**

(Septiembre 13)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1-2m & -1 & -1 & -1 \\ m-1 & 1 & -1 & 2 \\ m^2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible determinado tiene que ocurrir que $Rg(A) = Rg(A') =$ nº de incógnitas $= 3$. Para que ocurra esto basta que el determinante de la matriz de los coeficientes sea distinto de cero. Vamos a ver para que valores ocurre esto.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-2m & -1 & -1 \\ m-1 & 1 & -1 \\ m^2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1-2m+m^2-(m-1)+m^2+(m-1)+1-2m = 2m^2-4m+2$$

Este determinante se anula donde $2m^2-4m+2=0$, es decir, cuando $m=1$.

Por tanto, si $m \neq 1$ el sistema es compatible determinado.

En el apartado segundo de la pregunta nos piden que lo resolvamos para $m=0$, valor para el que es compatible determinado. Vamos a resolverlo utilizando la regla de Cramer. La matriz asociada al sistema para este valor es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

El determinate de A vale 2 (Basta con sustituir en la expresión genérica m por 0). Por tanto tenemos que:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-1+3-2+3+2-1}{2} = 2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{2+3-1+3}{2} = \frac{7}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3+1-3-2}{2} = -\frac{1}{2}$$

Volver al examen

2.2.28.

a) Estudie cómo es el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & +\,y & -\,4z & = & 2 \\ 2x & -\,y & -\,z & = & 1 \\ x & -\,2y & +\,3z & = & -1 \end{array}\right\}.$$

b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.

(Junio 14)

- Solución:

Es fácil observar que si sumas las filas primera y tercera da la segunda, lo cual nos hace ver que el sistema es compatible indeterminado.

Vamos a hacerlo estudiando los rangos de la matriz de los coeficientes y de la ampliada.

Tenemos que la matriz de los coeficientes, A, es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Es obvio que el $RgA \geqslant 2$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Además dicho rango es 2, pues tenemos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 16 - 1 - 4 - 2 - 6 = 0$$

El rango de la ampliada es al menos dos. Veamos que es exactamente dos. Dado que el menor que nos da dicho orden es el utilizado para la matriz de los coeficientes, basta con ver el menor de orden tres formado por esas dos columnas y la de los términos independientes para decidir el rango de la ampliada.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 8 + 1 + 2 + 2 + 2 = 0$$

Luego el rango de la ampliada también es 2.

Por tanto, como $RgA = RgA' = 2 < 3 = n^o\ incog.$ tenemos que el sistema es compatible indeterminado.

Vamos a resolver el sistema. Dado que el menor de orden 2 que nos ha dado distinto de cero es el formado por las dos primeras filas y las dos primeras columnas, para resolver el sistema eliminamos la última ecuación y transformamos en parámetro la incógnita z. El sistema queda:

$$\left.\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & 2+4t \\ 2x & - & y & = & 1+t \end{array}\right\}$$

Aplicamos reducción para resolver el sistema y tenemos que las soluciones son:

$$x = 1 + \frac{5}{3}t \qquad y = 1 + \frac{7}{3}t \qquad z = t$$

Volver al examen

2.2.29. **Considere el sistema compatible determinado de dos ecuaciones con dos incógnitas** $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=3 \end{array}\right\} \equiv \mathcal{S}$, **cuya solución es el punto** $P_0 = (2, -1)$ **de** $\mathbb{R}^2$. **Sea** $\mathcal{S}'$ **el sistema que se obtiene al añadir a** $\mathcal{S}$ **una tercera ecuación** $ax+by=c$. **Conteste razonadamente las siguientes preguntas:**

a) **¿Puede ser $\mathcal{S}'$ compatible determinado?**

b) **¿Puede ser $\mathcal{S}'$ incompatible?**

c) **¿Puede ser $\mathcal{S}'$ compatible indeterminado?**

(Julio 14)

- Solución:

Este problema puede verse desde el punto de vista algebráico o bien desde el punto de vista geométrico. Vamos a verlo de los dos modos.

Para estudiarlo algebráicamente tendríamos que estudiar los rangos de las matrices resultantes. Como el sistema primero que nos dan es compatible determinado tenemos que la matriz de los coeficientes tiene rango 2. Veamos cual es la matriz resultante al añadir esa hipotética ecuación $ax + by = c$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ a & b & c \end{array}\right)$$

Es obvio que la matriz de los coeficientes, en cualquier caso, tendrá rango 2, pues lo tenía antes de añadir la ecuación y dicha ecuación no añade ninguna columna más. Vamos a estudiar las tres posibilidades que nos plantean.

a) $\mathcal{S}'$ puede ser compatible determinado siempre que el rango de la matriz ampliada siga siendo 2, es decir, la nueva ecuación añadida sea combinación lineal de las dos primeras. Por ejemplo podemos poner la suma de las dos.

b) $\mathcal{S}'$ será incompatible si el rango de la matriz ampliada es tres, es decir, la nueva ecuación añadida no es combinación lineal de las dos primeras. Basta con sumar la parte de las incógnitas y no hacer lo mismo con los términos independientes.

c) $\mathcal{S}'$ no puede ser compatible indeterminado, pues al añadir una ecuación el conjunto de soluciones del nuevo sistema estará contenido en el del primer sistema, que sólo tenía una.

Desde el punto de vista geométrico tendríamos:

a) Si, siempre que la nueva recta añadida contenga al punto P_0.

b) Si, cuando el punto P_0 no pertenezca a la nueva recta.

c) No, ya que los puntos que están en $\mathcal{S}'$ tiene que estar contenido en el conjunto de puntos que están en $\mathcal{S}$ y el primer sistema sólo tiene una solución.

Volver al examen

2.2.30. Discuta, en función del parámetro b, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & & & = & b \\ -2x & - & y & + & (b-1)z & = & -2 \\ bx & + & y & - & z & = & 2 \end{array}\right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

(Junio 15)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b \\ -2 & -1 & b-1 & -2 \\ b & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Como es un sistema que tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, vamos a empezar por estudiar el rango de la matriz de los coeficientes.

El determinante de esta matriz es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & b-1 \\ b & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + b(b-1) - 2 - (b-1) = 1 + b^2 - b - 2 - b + 1 = b^2 - 2b$$

Igualando a cero obtenemos:

$$b^2 - 2b = 0 \Longrightarrow b\,(b-2) = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} b = 0 \\ b = 2 \end{array} \right.$$

Por tanto:

- Si $b \neq 0, 2 \Longrightarrow Rg\,C = Rg\,A = 3 =$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.
- Si $b = 0$, la matriz asociada al sistema queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

  Es obvio que $Rg\,C = 2$, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

  Veamos cuanto vale el rango de la matriz ampliada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 4 + 2 = 4 \neq 0$$

  Por tanto, $Rg\,C = 2 \neq 3 = Rg\,A \Longrightarrow$ Sistema incompatible.

- Si $b = 2$ la matriz asociada al sistema queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right)$$

  Es evidente que la tercera fila es proporcional a la segunda. Además el mismo menor que en el caso anterior hace que el $Rg\,C = 2$. El rango de la matriz ampliada es también 2. Por tanto $Rg\,C = Rg\,A = 2 \neq 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Volver al examen

2.2.31. Discuta, en función del parámetro b, el sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{rcrcrcr} & & 3y & + & bz & = & b-2 \\ bx & + & by & & & = & 1 \\ -x & & & + & z & = & b-3 \end{array} \right\}$$

(no es necesario resolverlo en ningún caso).

(Junio 16)

- Solución:

La matriz asociada al sistema es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & b & b-2 \\ b & b & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & b-3 \end{array}\right)$$

Como es un sistema que tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, vamos a empezar por estudiar el rango de la matriz de los coeficientes.

El determinante de esta matriz es:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & b \\ b & b & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b^2 - 3b$$

Igualando a cero obtenemos:

$$b^2 - 3b = 0 \Longrightarrow b\,(b-3) = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} b = 0 \\ b = 3 \end{array} \right.$$

Por tanto:

- Si $b \neq 0, 3 \Longrightarrow Rg\,C = Rg\,A = 3 =$nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

- Si $b = 0$, la matriz asociada al sistema queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

  La segunda ecuación nos dice claramente que el sistema es incompatible.

- Si $b = 3$, la matriz asociada al sistema queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

  Es obvio que $Rg\,C = 2$, pues $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$.
  Veamos cuanto vale el rango de la matriz ampliada. Basta con comprobar el menor de orden tres que contiene las dos columnas del menor anterior y la de los términos independientes.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

  Pues las columnas segunda y tercera son proporcionales. Luego el $Rg\,A = 2$.
  Por tanto, $Rg\,C = Rg\,A = 2 < 3 =$ nº de incógnitas$\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado.

Volver al examen

2.2.32. Determine los números reales a y b sabiendo que el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} ax & + & by & + & 3z & = & 2 \\ x & + & 2y & - & z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}\right\}.$$

tiene al menos dos soluciones distintas.

(Julio 16)

- Solución:

Si el sistema tiene al menos dos soluciones distintas quiere decir que el sistema es compatible indeterminado.

La matriz asociada al sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & b & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Es obvio que $Rg\,C \geqslant 2$, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

Si tiene que ser compatible indeterminado tendrá que ocurrir que $Rg\,C = 2$, es decir,

$$0 = \begin{vmatrix} a & b & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2a - 3b - 3 - 18 - b - a = a - 4b - 21 = 0 \Longrightarrow a = 4b + 21$$

A su vez tendría que ocurrir que $Rg\,A = 2$, pues sino sería incompatible. Basta con imponer que el menor formado por las dos primeras columnas y la de los términos independientes valga cero ($Rg\,A \geqslant 2$, pues nos vale el mismo menor de orden dos que tomamos para garantizar el rango dos en la matriz de los coeficientes).

$$0 = \begin{vmatrix} 4b+21 & b & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 8b + 42 - 2 - 12 - b = 7b + 28 = 0 \Longrightarrow b = -4$$

Juntando las dos condiciones tenemos que

$$a = 4b + 21 = -16 + 21 = 5$$

Los valores buscados son $a = 5$ y $b = -4$.

Volver al examen

2.2.33.

a) Estudie cómo es el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rrrcl} 3x & & -\ 5z & = & 3 \\ 3x & -\ 3y & +\ 2z & = & 0 \\ 2x & -\ y & -\ z & = & 1 \end{array}\right\}.$$

b) Resuelva el anterior sistema de ecuaciones.

(Junio 17)

- Solución:

Vamos a empezar por poner la matriz asociada al sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Si resolvemos el sistema por el método de Gauss podemos contestar a los dos apartados de una sola vez.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & 3 \\ 3 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \overset{\left(\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=3F_3-2F_1}\right)}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & -3 \\ 0 & -3 & 7 & -3 \end{array}\right)$$

Sobra por tanto una ecuación y es fácil observar que el sistema sería compatible indeterminado. El sistema resultante es

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} 3x & & & - & 5z & = & 3 \\ & - & 3y & + & 7z & = & -3 \end{array}\right\}$$

Si hacemos $z = \lambda$ tendríamos

$$3x = 3 + 5\lambda \Longrightarrow x = \frac{3+5\lambda}{3} = 1 + \frac{5}{3}\lambda$$

$$-3y = -3 - 7\lambda \Longrightarrow y = \frac{-3-7\lambda}{-3} = 1 + \frac{7}{3}\lambda$$

Volver al examen

2.2.34. Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Obtenga la matriz $A \cdot B$ y calcule su rango.

b) Clasifique y resuelva el sistema de ecuaciones

$$A \cdot B \cdot X = O.$$

(Junio 17)

- Solución:

Vamos a realizar el producto

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Es obvio que las dos filas son proporcionales, luego el rango del producto es 1.

Veamos el segundo apartado. Planteemos el sistema.

$$A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ -x + 2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Luego el sistema es

$$\left.\begin{array}{r} x-2y=0 \\ -x+2y=0 \end{array}\right\}$$

El sistema es homogéneo, por tanto es compatible. Además, teniendo en cuenta el apartado anterior, llegamos a la conclusión

$$Rg\,C = Rg\,A = 1 < 2 = \text{n}^\text{o} \text{ de incógnitas}$$

Por lo tanto, el sistema es homogéneo compatible indeterminado. Para resolverlo nos quedamos con la primera ecuación y transformamos **y** en parámetro.

$$\left.\begin{array}{l} y=\lambda \\ x-2y=0 \end{array}\right] \Longrightarrow y=\lambda \quad , \quad x = 2\,\lambda$$

Volver al examen

2.2.35. Considere el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rrrcr} x & +\ y & & = & 0 \\ x & & -\ z & = & 1 \\ ax & +\ by & +\ cz & = & 1 \end{array}\right\}.$$

Obtenga valores de los parámetros a, b y c en los siguientes casos:

a) **Para que el sistema sea compatible determinado.**

b) **Para que el sistema sea compatible indeterminado.**

c) **Para que el sistema sea incompatible.**

(Julio 17)

- Solución:

Es más un ejercicio teórico que práctico. Vamos a comenzar, ya que es un sistema 3x3, calculando el determinante de la matriz de los coeficientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -a-c+b$$

Para el primer apartado basta con coger valores de a, b y c que no anulen el determinante. Por ejemplo podemos tomar $a = 0$, $b = 1$ y $c = 0$. Con estos valores el determinante es distinto de cero y por tanto

$$Rg\,C = Rg\,A = \text{número de incógnitas} \Longrightarrow \text{S.C.D.}$$

Vamos a ver los otros dos apartados. Es obvio que el rango de la matriz de los coeficientes al menos es 2 independientemente de los valores de a, b y c, pues

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Para que ocurra cualquiera de las dos condiciones que faltan (sistema incompatible o sistema compatible indeterminado) el $Rg\,C = 2$.

Vamos a empezar por ver lo que nos pide el segundo apartado, es decir, que sea compatible indeterminado. Para que ocurra eso tiene que ocurrir

$$Rg\,C = Rg\,A = 2$$

Como el menor de orden de orden dos que hemos cogido para comprobar que $Rg\,C = 2$ está formado por las dos últimas columnas, basta, para calcular el rango de la ampliada comprobar el determinante formado por esas dos columnas y la de los términos independientes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ b & c & 1 \end{vmatrix} = -1 - c$$

Este determinante se anula para $c = -1$.

Luego si tomamos valores que anulen el determinante de la matriz de los coeficientes y donde $c = -1$ tendré que

$$Rg\,C = Rg\,A = 2 \neq \text{número de incógnitas} \Longrightarrow \text{S.C.I.}$$

Bastaría con tomar $a = 0$, $b = -1$ y $c = -1$. Es fácil comprobar que cualquier menor de orden tres que tomes en la ampliada con esos valores da cero.

Veamos el último caso. De lo anterior deducimos que si tomamos $c \neq -1$ y los valores el $Rg\,A = 3$. Basta con tomar los valores de a y b junto con el valor de c de tal forma que hagan que el $Rg\,C = 2$. Podemos tomar $c = 1$, $a = 0$ y $b = 1$ y se cumpliría lo que queremos.

Volver al examen

2.2.36.

a) Discute, en función del del parámetro a, el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & z & = 1 \\ x & + & ay & + & az & = 1 \\ ax & + & 3y & + & z & = a \end{array}\right\}$$

b) Resuelve el sistema para $a = 2$.

(Junio 18 - Anulado)

- Solución:

Empecemos por el primer apartado. La matriz asociada al sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & a & a & 1 \\ a & 3 & 1 & a \end{array}\right)$$

Vamos a estudiar el rango de la matriz de los coeficientes. Como tenemos parámetros estudiamos primero el mayor rango posible.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & a & a \\ a & 3 & 1 \end{vmatrix} = a + a^2 - 3 + a^2 - 1 - 3a = 2a^2 - 2a - 4 = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} a = 2 \\ a = -1 \end{array}\right.$$

Por tanto

- Si $a \neq -1, 2 \Longrightarrow Rg\, A = Rg\, C = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

- Si $a = -1$ la matriz asociada al sistema quedaría

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

  El rango de la matriz de los coeficientes es 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$

  Veamos cuanto vale el rango de la matriz ampliada. Como ya sabemos sólo es necesario comprobar aquel menor de orden tres que contenga al menor de orden dos que nos garantiza el rango dos. El único menor que hay que comprobar es el formado por las columnas primera, segunda y cuarta. Dicho menor es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 1 + 3 - 1 + 1 - 3 = 0$$

  En consecuencia
  $Rg\, C = Rg\, A = 2 < 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado

- Si $a = 2$ la matriz asociada al sistema quedaría

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

  El rango de la matriz de los coeficientes es 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$

  Veamos cuanto vale el rango de la matriz ampliada. Como ya sabemos sólo es necesario comprobar aquel menor de orden tres que contenga al menor de orden dos que nos garantiza el rango dos. El único menor que hay que comprobar es el formado por las columnas primera, segunda y cuarta. Dicho menor es

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

  Es fácil observar que la primera y la tercera columna son iguales, por lo tanto el determinate será cero. En consecuencia
  $Rg\, C = Rg\, A = 2 < 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado

Vamos a hacer ahora el segundo apartado. Si $a = 2$ el sistema resultante es

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & z & = 1 \\ x & + & 2y & + & 2z & = 1 \\ 2x & + & 3y & + & z & = 2 \end{array}\right\}$$

Vamos a resolverlo por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right) \overset{\binom{F_2=F_2-F_1}{F_3=F_3-2F_1}}{\Longrightarrow} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Luego nos sobra la tercera ecuación, resultando el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & - & z & = 1 \\ & & y & + & 3z & = 0 \end{array}\right\}$$

Haciendo $z = \lambda$ tenemos

$$\left.\begin{array}{rcrl} x & + & y & = 1 + \lambda \\ & & y & = -3\lambda \end{array}\right\} \Longrightarrow x - 3\lambda = 1 + \lambda \Longrightarrow x = 1 + 4\lambda$$

Luego la solución del sistema es

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x = & 1 & + & 4\lambda \\ y = & & - & 3\lambda \\ z = & & & \lambda \end{array}\right\}$$

Volver al examen

2.2.37.

a) Discuta, en función del parámetro λ, el sistema lineal de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & - & z & = 0 \\ \lambda x & + & y & + & z & = 1 \\ x & + & y & + & \lambda z & = 1 \end{array}\right\}$$

b) Resuelva el sistema para $\lambda = 1$.

(Junio 18)

- Solución:

Empecemos por el primer apartado. La matriz asociada al sistema es

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ \lambda & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda & 1 \end{array}\right)$$

Vamos a estudiar el rango de la matriz de los coeficientes. Como tenemos parámetros estudiamos primero el mayor rango posible.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ \lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + 2 - \lambda + 1 - 2\lambda^2 - 1 = -2\lambda^2 + 2 = 0 \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} \lambda = 1 \\ \lambda = -1 \end{array} \right.$$

Por tanto

- Si $\lambda \neq -1, 1 \Longrightarrow Rg\,A = Rg\,C = 3 =$ nº de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible determinado.

- Si $\lambda = 1$ la matriz asociada al sistema quedaría

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$

Es obvio observar que sobra la tercera fila, luego el rango de la matriz ampliada también será dos. En consecuencia
$Rg\, C = Rg\, A = 2 < 3 = \text{n}^{\text{o}}$ de incógnitas $\Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado

- Si $\lambda = -1$ la matriz asociada al sistema quedaría

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

El rango de la matriz de los coeficientes es 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$

Veamos cuanto vale el rango de la matriz ampliada. Como ya sabemos sólo es necesario comprobar aquel menor de orden tres que contenga al menor de orden dos que nos garantiza el rango dos. El único menor que hay que comprobar es el formado por las columnas primera, segunda y cuarta. Dicho menor es

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 + 2 - 1 = 4 \neq 0$$

Luego $Rg\, C = 2 \neq 3 = Rg\, A \Longrightarrow$ Sistema incompatible

Vamos a hacer ahora el segundo apartado. Vamos a resolverlos para $\lambda = 1$. Sabemos que compatible indeterminado y es fácil observar que sobra la tercera fila. El sistema sería

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & - & z & = 0 \\ x & + & y & + & z & = 1 \end{array}\right\}$$

Si hacemos $y = \lambda$ tendríamos

$$\left.\begin{array}{rcrcr} x & - & z & = & -2\lambda \\ x & + & z & = & 1 - \lambda \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema por reducción tendríamos

$$2x = 1 - 3\lambda \Longrightarrow x = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\lambda$$

Sustituyendo en la segunda ecuación tendríamos

$$z = 1 - \lambda - \frac{1}{2} + \frac{3}{2}\lambda = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda$$

Luego la solución del sistema es:

$$\left.\begin{array}{rcccc} x = & \dfrac{1}{2} & - & \dfrac{3}{2}\lambda \\ \\ y = & & & \lambda \\ \\ z = & \dfrac{1}{2} & + & \dfrac{1}{2}\lambda \end{array}\right]$$

Volver al examen

Capítulo 3

Geometría

3.1. Vectores, puntos, rectas y planos en el espacio

3.1.1. Hallar la ecuación de una circunferencia que, siendo tangente a la recta $y = \sqrt{3}\,x$, sea tangente al eje de abcisas en el punto $(3,0)$. (Indicación: $tg60^o = \sqrt{3}$, $tg30^o = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$)

(Septiembre 00)

- Solución:

La figura 3.1 nos muestra una visión del problema.

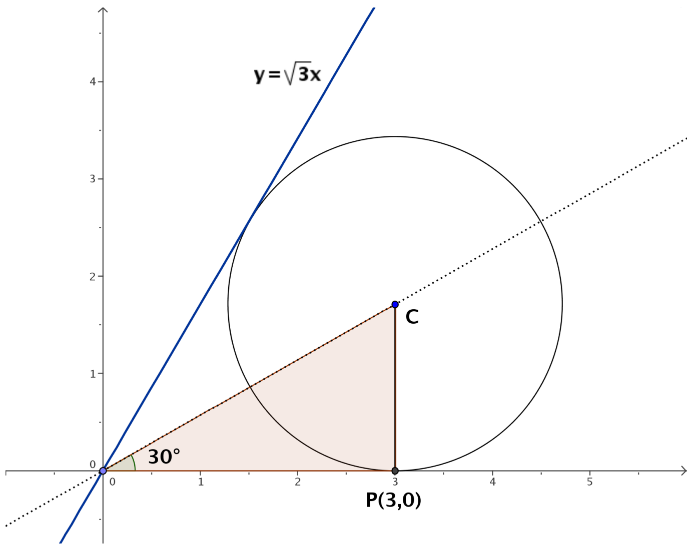


Figura 3.1: Representación detallada del problema

Vamos a utilizar propiedades conocidas de las circunferencias. Se sabe que la recta que pasa por el centro de la circunferencia y por el punto de corte de las dos tangentes (en nuestro caso el origen de coordenadas) es la recta bisectriz del ángulo formado por las tangentes. Como la recta $y = \sqrt{3}\,x$ forma un ángulo con la horizontal de 60^o, se deduce que la recta anteriormente citada forma un ángulo de 30^o con la horizontal (ver figura 3.1). También es obvio que el radio es perpendicular con la horizontal en el punto de tangencia (por ser el eje de abcisas una de las tangentes), luego tenemos el triángulo rectangulo que podemos ver en la figura 3.1.

De aquí deducimos:

$$tg\ 30^o = \frac{r}{3} \Longrightarrow r = 3 \cdot tg\ 30^o = 3\frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

Por tanto el centro es $C\left(3, \sqrt{3}\right)$ y la ecuación buscada es:

$$(x-3)^2 + \left(y - \sqrt{3}\right)^2 = 3$$

Volver al examen

3.1.2. Determinar una recta que sea paralela al plano de ecuación $x+y+z=3$, que corte a la recta de ecuaciones $x=0$, $z=0$, y que también corte a la recta de ecuaciones $z=1$, $y=0$.

(Septiembre 00)

- Solución:

Vamos a coger un plano paralelo al que nos dan. Luego vamos a cortarlo con las dos rectas indicadas. La recta que pasa por estos dos puntos está contenida en este último plano, por tanto es paralela al plano que nos dan y por supuesto corta a las rectas indicadas.

Como plano paralelo vale el plano $x+y+z=1$. Si cortamos este plano con las rectas obtenemos:

- Con $x=0$, $z=0 \Longrightarrow A(0,1,0)$.
- Con $z=1$, $y=0 \Longrightarrow B(0,0,1)$.

La recta buscada pasa por los puntos A y B, por tanto queda definida por $A(0,1,0)$ y por $\overrightarrow{AB}=(0,-1,1)$.

En forma paramétrica, la ecuación resultante es:

$$\left.\begin{array}{rcc} x= & 0 & \\ y= & 1 & -\lambda \\ z= & & +\lambda \end{array}\right]$$

Volver al examen

3.1.3. Calcular alguna recta que sea paralela al plano de ecuación $x-2y+z=1$ y que también sea paralela al plano que pasa por los puntos de coordenadas $(2,0,1), (0,2,1)$ y $(1,-1,0)$.

(Junio 01)

- Solución:

Bastará con coger planos paralelos a los dos que nos dan y el corte de dichos planos será la recta que buscamos.

Vamos a empezar por calcular la ecuación general del plano que pasa por los tres puntos, que denominaremos: $A(2,0,1), B(0,2,1), C(1,-1,0)$.

Como vectores directores de este plano tomamos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$, cuyas coordenadas serán:

$$\overrightarrow{AB}=(-2,2,0) \text{ y } \overrightarrow{AC}=(-1,-1,-1)$$

Por tanto, la ecuación del plano vendrá determinada por $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ y & 2 & -1 \\ z-1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2(x-2)+2(z-1)+2(z-1)-2y =$$

$$= -2x+4+2z-2+2z-2-2y = -2x-2y+4z = 0$$

Por tanto podemos tomar como ecuación de dicho plano $x + y - 2z = 0$.

Tenemos por tanto dos planos que son:

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & - & 1 & = 0 \\ x & + & y & - & 2z & & & = 0 \end{array}\right]$$

Para conseguir nuestra recta cogemos dos planos paralelos a ellos, para lo que basta con cambiar los términos independientes.

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} x & - & 2y & + & z & - & 3 & = 0 \\ x & + & y & - & 2z & + & 8 & = 0 \end{array}\right]$$

Está sería la ecuación de la recta buscada.

Volver al examen

3.1.4. Calcular un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores de coordenadas $(1, 0, 2)$ y $(2, 1, 0)$.

(Junio 01)

- Solución:

Vamos a realizar el producto vectorial de los dos vectores, pues el vector así obtenido será ortogonal a los dos. Después normalizaremos ese vector y obtendremos el vector buscado.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{j} + \vec{k} - 2\vec{i}$$

Luego un vector ortogonal a ambos sería $\vec{w} = (-2, 4, 1)$.

Vamos a normalizarlo. Su módulo vale $|\vec{w}| = \sqrt{4 + 16 + 1} = \sqrt{21}$.

Dividiendo el vector por su módulo obtenemos el vector $\vec{o}$ buscado:

$$\vec{o} = \frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \left(\frac{-2}{\sqrt{21}}, \frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}} \right)$$

Volver al examen

3.1.5. Calcular alguna recta que sea paralela al plano de ecuación $x + z = 2$ y corte perpendicularmente a la recta de ecuaciones $x + y = 0, y + z = 2$.

(Septiembre 01)

- Solución:

El procedimiento que vamos a seguir lo narro a continuación. Nuestra recta va a ser el corte de dos planos, uno paralelo al primero (con eso garantizamos que la recta es paralela al plano) y el otro va a pertenecer al haz de planos que obtenemos a partir de los planos que definen la segunda recta. De esa forma, como nuestra recta estará contenida en dicho plano cortará a la que nos dan. El plano que eligiremos será aquel que haga que la recta obtenida corte perpendicularmente a la dada en el enunciado.

Dicho esto nos ponemos manos a la obra. Es fácil obtener un plano paralelo al que nos dan, valdría $x + z = 0$. Vamos a por el otro. El haz de planos a que nos referíamos tendría la siguiente forma:

$$\alpha(x + y) + y + z - 2 = 0$$

Luego nuestra recta quedará definida por los planos:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+z & = & 0 \\ \alpha(x+y)+y+z-2 & = & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \left.\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ \alpha x & + & (\alpha+1)y & + & z & = & 2 \end{array}\right] \tag{3.1}$$

Vamos a buscar cual es el vector director de las rectas (en función de α) para después decidir cual es el perpendicular a la recta dada. Resolviendo el sistema tenemos:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ \alpha x & + & (\alpha+1)y & + & z & = & 2 \end{array}\right] z=\lambda \Longrightarrow x=-\lambda$$

Sustituyendo:

$$\alpha(-\lambda)+(\alpha+1)y+\lambda=2 \Longrightarrow (\alpha+1)y=2-\lambda+\alpha\lambda \Longrightarrow y=\frac{2}{\alpha+1}+\frac{\alpha-1}{\alpha+1}\lambda$$

Luego la ecuación de la recta en forma paramétrica, en función de α, será:

$$\left.\begin{array}{ccccc} x & = & & - & \lambda \\ y & = & \dfrac{2}{\alpha+1} & + & \dfrac{\alpha-1}{\alpha+1}\lambda \\ z & = & & & \lambda \end{array}\right] \Longrightarrow \vec{v}=\left(-1,\frac{\alpha-1}{\alpha+1},1\right)$$

Vamos a encontrar el vector director de la recta que nos dieron.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=0 \\ y+z=2 \end{array}\right] y=\lambda \Longrightarrow x=-\lambda\ ,\ z=2-\lambda$$

$$\left.\begin{array}{ccccc} x & = & & - & \lambda \\ y & = & & & \lambda \\ z & = & 2 & - & \lambda \end{array}\right] \Longrightarrow \vec{u}=(-1,1,-1)$$

Nos falta por encontrar el valor de α que hace que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sean perpendiculares, es decir, que $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(-1,1,-1)\cdot\left(-1,\frac{\alpha-1}{\alpha+1},1\right)=1+\frac{\alpha-1}{\alpha+1}-1=0 \Longrightarrow \frac{\alpha-1}{\alpha+1}=0 \Longrightarrow \alpha=1$$

Luego, si sutituimos $\alpha=1$ en la ecuación (3.1), la recta pedida es:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & & & + & z & = & 0 \\ x & + & 2y & + & z & = & 2 \end{array}\right]$$

Volver al examen

3.1.6. ¿Qué ángulo deben formar dos vectores no nulos $\vec{e}$ y $\vec{v}$ para que ambos tengan el mismo módulo que su diferencia $\vec{e}-\vec{v}$

(Septiembre 01)

- Solución:

Queremos que:

$$|\vec{e}|=|\vec{v}|=|\vec{e}-\vec{v}| \tag{3.2}$$

Sabemos que

$$cos(\widehat{\vec{u},\vec{w}})=\frac{\vec{u}\cdot\vec{w}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{w}|}$$

Si aplicamos esta última fórmula a los vectores $\vec{e}-\vec{v}$ y $\vec{e}-\vec{v}$ tendremos:

$$cos(\widehat{\vec{e}-\vec{v},\vec{e}-\vec{v}}) = \frac{(\vec{e}-\vec{v})\cdot(\vec{e}-\vec{v})}{|\vec{e}-\vec{v}|\cdot|\vec{e}-\vec{v}|} = \frac{\vec{e}\cdot\vec{e}+\vec{v}\cdot\vec{v}-2\vec{e}\cdot\vec{v}}{|\vec{e}-\vec{v}|\cdot|\vec{e}-\vec{v}|} =$$

$$= \frac{|\vec{e}|^2+|\vec{v}|^2-2\,|\vec{e}|\cdot|\vec{v}|\,cos(\widehat{\vec{e},\vec{v}})}{|\vec{e}-\vec{v}|\cdot|\vec{e}-\vec{v}|}$$

Teniendo en cuenta 3.2 y que $cos(\widehat{\vec{e}-\vec{v},\vec{e}-\vec{v}}) = 1$, resulta:

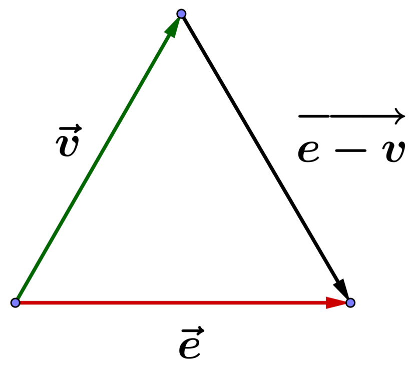
$$1 = \frac{|\vec{e}|^2+|\vec{e}|^2-2\,|\vec{e}|^2\,cos(\widehat{\vec{e},\vec{v}})}{|\vec{e}|^2} \Longrightarrow 2\,|\vec{e}|^2-2\,|\vec{e}|^2\ cos(\widehat{\vec{e},\vec{v}}) = |\vec{e}|^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow 2-2\,cos(\widehat{\vec{e},\vec{v}}) = 1 \Longrightarrow -2\,cos(\widehat{\vec{e},\vec{v}}) = -1 \Longrightarrow cos(\widehat{\vec{e},\vec{v}}) = \frac{1}{2}$$

Luego el ángulo buscado es:

$$(\widehat{\vec{e},\vec{v}}) = \frac{\pi}{3}$$

Otra forma de verlo es darse cuenta que si $\vec{e}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{e-v}$ tienen el mismo módulo, el triángulo que forman es equilátero, como podemos ver en la figura:



De aquí deducimos que el ángulo tiene que ser $\frac{\pi}{3}$.

Volver al examen

3.1.7. Hallar dos vectores linealmente independientes que sean ortogonales al vector $\vec{e}$ de coordenadas $(1,1,3)$.

(Junio 02)

- Solución:

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ los vectores buscados.

Para que sean linealmente independientes basta con no ser proporcionales y para ser ortogonales tiene que cumplirse

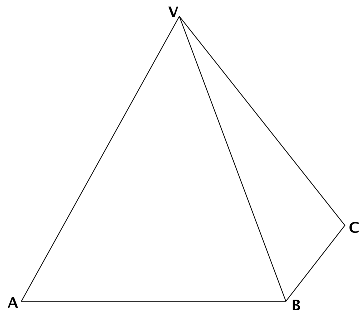
$$\vec{u}\cdot\vec{e} = \vec{v}\cdot\vec{e} = 0$$

Dos vectores válidos para lo que buscamos serían:

$$\vec{u} = (2,1,-1) \Longrightarrow \vec{u}\cdot\vec{e} = (2,1,-1)\cdot(1,1,3) = 2+1-3 = 0$$
$$\vec{v} = (1,2,-1) \Longrightarrow \vec{v}\cdot\vec{e} = (1,2,-1)\cdot(1,1,3) = 1+2-3 = 0$$

Volver al examen

3.1.8. La base de una pirámide es un cuadrado $ABCD$ de 2 metros de largo y su vértice V está situado a una altura de 3 metros sobre el centro de la base. Calcular el ángulo que forman los planos ABV y BCV.



(Junio 02)

- Solución:

Vamos a asignarle coordenadas a los puntos que nos dan. $A(2,0,0)$; $B(2,2,0)$; $C(0,2,0)$ y $V(1,1,3)$. Vamos a calcular los planos.

- Sea $\pi \equiv ABV$. Para calcular la ecuación de este plano vamos a usar el punto A y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AV}$, es decir $A(2,0,0)$; $\overrightarrow{AB} = (0,2,0)$ y $\overrightarrow{AV} = (-1,1,3)$. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 0 & -1 \\ y & 2 & 1 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6(x-2) + 2z = 6x - 12 + 2z = 0$$

Luego la ecuación del primer plano será $\pi \equiv 3x + z = 6$.

- Sea $\pi' \equiv BCV$. Para calcular éste usaremos B y los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BV}$, es decir, $B(2,2,0)$; $\overrightarrow{BC} = (-2,0,0)$ y $\overrightarrow{BV} = (-1,-1,3)$. Por tanto:

$$\begin{vmatrix} x-2 & -2 & -1 \\ y-2 & 0 & -1 \\ z & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2z + 6(y-2) = 2z + 6y - 12 = 0$$

Luego la ecuación del segundo plano es $\pi' \equiv 3y + z = 6$

Vamos a calcular ahora el ángulo que nos piden, es decir el ángulo que forman π y π'. Sus vectores normales son $\vec{n} = (3,0,1)$ y $\vec{n'} = (0,3,1)$. En consecuencia:

$$cos\alpha = \frac{\left|\vec{n} \cdot \vec{n'}\right|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{n'}|} = \frac{1}{\sqrt{10}\,\sqrt{10}} = \frac{1}{10} \Longrightarrow \alpha = 84^o 15' 39''$$

Volver al examen

3.1.9. Determinar si el plano $3x - 2y + z = 1$ es perpendicular a la recta de ecuaciones $-x = 3y + 3z, y + 2z = -1$. Determinar también si es paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(1,-1,1)$ y $(-1,-1,0)$.

(Septiembre 02)

- Solución:

Veamos lo primero.

Vamos a calcular el vector director de la recta ($\vec{u}$) como producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan.

$$\left.\begin{array}{rcrcrl} x & + & 3y & + & 3z & = 0 \\ & & y & + & 2z & = -1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \Longrightarrow \vec{n_1} = (1,3,3) \\ \Longrightarrow \vec{n_2} = (0,1,2) \end{array}$$

$$\vec{u} = \vec{n_1} \wedge \vec{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + \vec{k} - 2\vec{j} - 3\vec{i} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \Longrightarrow \vec{u} = (3,-2,1)$$

Como el vector normal al plano era el mismo, deducimos que la recta es perpendicular al plano.

Veamos ahora lo segundo. Llamemos $P(1,-1,1)$ y $Q(-1,-1,0)$. Por tanto la recta tendrá como vector director $\overrightarrow{PQ} = (-2,0,-1)$.

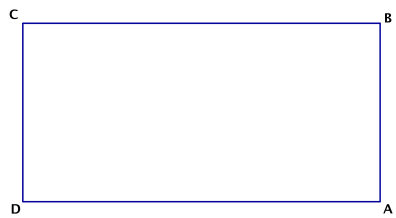
Para ver si la recta es paralela al plano vamos a ver si $\vec{n}$ es ortogonal a $\overrightarrow{PQ}$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PQ} = (3,-2,1).(-2,0,-1) = -6 - 1 = -7 \neq 0$$

Luego no son paralelos.

Volver al examen

3.1.10. Sabiendo que los lados de un rectángulo $ABCD$ miden 1 y 3 metros, calcular el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{AD}$, y el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{BA}$.



(Septiembre 03)

- Solución:

Vamos a asignarles coordenadas a los puntos:

$$D(0,0,0),\ A(3,0,0),\ B(3,1,0),\ C(0,1,0).$$

Vamos a ver paso a paso cada una de las dos cosas que nos piden calcular:

- Para hallar el producto escalar pedido vamos a calcular primero los vectores y a continuación haremos el producto.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{CB}=(3,0,0)\\ \overrightarrow{AD}=(-3,0,0)\end{array}\right]\Longrightarrow \overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}=(3,0,0)\cdot(-3,0,0)=-9$$

También podíamos haber aplicado la definición de producto escalar, ya que el ángulo que forman los vectores es 180º y sus módulos son tres en ambos casos. Por tanto:

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{CB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot cos\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{AD}}\right)=3\cdot 3\cdot(-1)=-9$$

- Para calcular el producto vectorial es necesario calcular el vector $\overrightarrow{BA}$, pues el vector $\overrightarrow{CB}$ ya lo calculamos antes.

$$\overrightarrow{BA}=(0,-1,0)$$

Ahora realizaremos el producto vectorial y posteriormente calcularemos el módulo.

$$\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{BA}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\3&0&0\\0&-1&0\end{vmatrix}=-3\vec{k}$$

Por tanto $\left|\overrightarrow{CB}\wedge\overrightarrow{BA}\right|=3$.
Aquí también podemos utilizar que el módulo del producto vectorial es el área del paralelogramos que forman los vectores, que es obvio que vale 3.

Volver al examen

3.1.11. Determinar un plano que, pasando por el origen de coordenadas, sea paralelo a la recta de ecuaciones $x+y=1, y+z=2$, y también sea paralelo a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(1,1,0)$ y $(0,1,1)$.

(Septiembre 03)

- Solución:

Para calcular el plano usaremos un punto y dos vectores. Como punto usaremos el origen y como vectores los vectores directores de las dos rectas. Vamos a calcular estos últimos:

- Empezamos por la primera recta, multiplicando los vectores normales asociados a los planos que la definen.

$$\left.\begin{array}{l}x+y=1\\ y+z=2\end{array}\right]\begin{array}{l}\Longrightarrow \overrightarrow{n_1}=(1,1,0)\\ \Longrightarrow \overrightarrow{n_2}=(0,1,1)\end{array}\Bigg]\Longrightarrow \vec{u}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&1&0\\0&1&1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{k}-\vec{j}$$

Luego el primer vector buscado es $\vec{u}=(1,-1,1)$.

- En la segunda recta un vector válido es:

$$\vec{v}=(0,1,1)-(1,1,0)=(-1,0,1)$$

Por tanto la ecuación del plano es:

$$0=\begin{vmatrix}x&y&z\\1&-1&1\\-1&0&1\end{vmatrix}=-x-y-z-y=-x-2y-z$$

es decir, valdría

$$x + 2y + z = 0$$

Volver al examen

3.1.12. ¿Qué relación hay entre los coeficientes de las ecuaciones

$$ax + by + cz = d \text{ , } a'x + b'y + c'z = d'$$

de dos planos paralelos? Razonar la respuesta.

(Junio 04)

- Solución:

La relación que deben guardar es:

$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} \neq \frac{d}{d'}$$

Ello se debe a:

1. La doble igualdad implica que los vectores normales son proporcionales y por tanto paralelos.

2. La desigualdad hace que no hablemos del mismo plano.

Volver al examen

3.1.13. Determinar una recta que sea paralela al plano que pasa por los puntos de coordenadas $(1, 1, 0); (1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$, que también sea paralela al plano $x + 2y + 3z = 0$, y que no esté contenida en ninguno de estos dos planos.

(Septiembre 04)

- Solución:

Para eso vamos a considerar sendos planos paralelos a los que nos dan y la recta en que se cortan es paralela a ambos planos y no está en ninguno.

Empezemos por calcular la ecuación del plano que pasa por los tres puntos. Dichos puntos son $A(1, 1, 0); B(1, 0, 1)$ y $C(0, 1, 1)$. Para hallar la ecuación del plano vamos a considerar el punto A y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

Los vectores son $\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$. Por tanto la ecuación del plano es:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-1 & -1 & 0 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(x-1) - (y-1) - z = -x + 1 - y + 1 - z = 0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow x + y + z - 2 = 0$$

Tenemos, en consecuencia, dos planos y voy a coger dos planos paralelos a ellos para construir la recta:

$$\text{Plano } 1^{o} \longrightarrow x + y + z - 2 = 0 \longrightarrow x + y + z + 3 = 0 \text{ (Paralelo)}$$

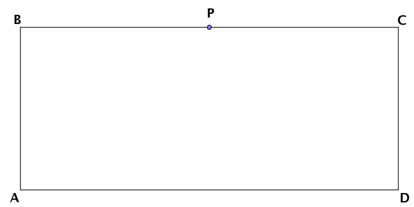
$$\text{Plano } 2^{o} \longrightarrow x + 2y + 3z = 0 \longrightarrow x + 2y + 3z - 1 = 0 \text{ (Paralelo)}$$

Por tanto, una recta posible es:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z + 3 = 0 \\ x + 2y + 3z - 1 = 0 \end{array}\right\}$$

Volver al examen

3.1.14. Si los lados de un rectángulo $ABCD$ miden 1 cm y 4 cm, calcular el coseno del ángulo PAC, donde P es el punto medio del lado BC:



(Junio 05)

- Solución:

El ángulo al que nos referimos viene representado en la figura 3.2

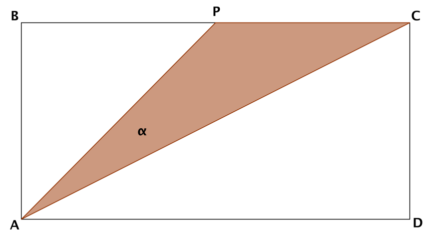


Figura 3.2: Visión del ángulo

Para resolverlo vamos a asignarle coordenadas a los puntos:

$$A(0,0,0); B(0,0,1); C(0,4,1); D(0,4,0); P(0,2,1).$$

El ángulo que buscamos sería el formado por los vectores $\overrightarrow{AP} = (0,2,1)$ y $\overrightarrow{AC} = (0,4,1)$. Por tanto tendríamos:

$$cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AP}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{(0,2,1) \cdot (0,4,1)}{\sqrt{0^2+2^2+1^2} \cdot \sqrt{0^2+4^2+1^2}} = \frac{0+8+1}{\sqrt{4+1} \cdot \sqrt{16+1}} = \frac{9}{\sqrt{85}}$$

En consecuencia:

$$\alpha = arccos\frac{9}{\sqrt{85}} = 12^o 31' 44''$$

Volver al examen

3.1.15. Si A, B y C son los puntos de coordenadas $(1,0,0)$; $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ respectivamente

a) Calcular el área del triángulo que forman los puntos A, B y C.

b) Determinar el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

(Septiembre 05)

- Solución:

Es facil observar que el triángulo que forman los puntos es un triángulo equilátero.

a) Empezaremos por calcular el área del triángulo. Dicho área se calcula con la fórmula:

$$A_T = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|$$

Vamos a calcular los vectores y a realizar el producto vectorial:
$\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$.
Por tanto:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} + \vec{j} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$$

En consecuencia, el área buscada es:

$$A_T = \frac{|(1,1,1)|}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2$$

b) Vamos a calcular ahora el ángulo que nos piden. para ello usamos la fórmula conveniente que es:

$$cos(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{|1+0+0|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

Por tanto:

$$\alpha = arccos \frac{1}{2} = 60^o$$

.

También podíamos haber tenido en cuenta que el triángulo es equilátero, con lo que el ángulo tiene que ser de 60^o.

Volver al examen

3.1.16. Hallar un vector de módulo 1 que sea ortogonal a los vectores de coordenadas $(0, 1, 1)$ y $(2, 1, 0)$.

(Septiembre 05)

- Solución:

Una forma posible es calcular el producto vectorial de los vectores y obtendremos un vector ortogonal a ambos, después lo normalizamos y terminamos.

Vamos a llamar $\vec{u} = (0, 1, 1)$ y $\vec{v} = (2, 1, 0)$.

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{j} - 2\vec{k} - \vec{i} \Longrightarrow \vec{w} = (-1, 2, -2)$$

El vector que buscamos lo obtenemos dividiendo $\vec{w}$ entre su módulo.

$$\frac{\vec{w}}{|\vec{w}|} = \frac{(-1, 2, -2)}{\sqrt{1+4+4}} = \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

Volver al examen

3.1.17. Determina la relación que debe existir entre a y b para que los puntos de coordenadas $(1,0,0),(a,b,0),(a,0,b)$ y $(0,a,b)$ estén en un plano.

(Junio 06)

- Solución:

Para que ocurra lo que nos piden los vectores $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$ tiene que ser linealmente dependientes. Veamos cuales son esos vectores e impongamos que el determinante que los tiene como filas valga 0.

$$\overrightarrow{AB}=(a-1,b,0);\overrightarrow{AC}=(a-1,0,b) \text{ y } \overrightarrow{AD}=(-1,a,b)$$

Su determinate es

$$\begin{vmatrix} a-1 & b & 0 \\ a-1 & 0 & b \\ -1 & a & b \end{vmatrix} = -b^2-b^2(a-1)-ab(a-1)=0 \Longrightarrow \cancel{-b^2}-ab^2+\cancel{b^2}-a^2b+ab=0 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow ab(-b-a+1)=0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ b=0 \\ -b-a+1=0 \Longrightarrow b=-a+1 \end{array}\right.$$

Volver al examen

3.1.18. Determina el plano que pasa por el punto de coordenadas $(1,2,3)$ y por la recta de ecuaciones $x+y=1, y+z=1$.

(Junio 06)

- Solución:

Vamos a llamar A al punto que nos dan. Vamos a pasar a paramétricas la ecuación de la recta y así tendremos un punto (que llamaremos B) y el vector director ($\vec{u}$) de la misma. Para encontrar la ecuación del plano usaremos $A,\overrightarrow{AB},\vec{u}$.

Hacemos $y=\lambda$ y nos resulta:

$$\left.\begin{array}{rl} x+\lambda & =1 \\ y & =\lambda \\ \lambda+z & =1 \end{array}\right] \Longrightarrow \left.\begin{array}{rrr} x= & 1 & -\lambda \\ y= & & \lambda \\ z= & 1 & -\lambda \end{array}\right] \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} B(1,0,1) \\ \vec{u}=(-1,1,-1) \end{array}\right.$$

De aquí deducimos que el plano queda determinado por:

$$A(1,2,3) \qquad \overrightarrow{AB}=(0,-2,-2) \qquad \vec{u}=(-1,1,-1)$$

Por tanto la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 0 & -1 \\ y-2 & -2 & 1 \\ z-3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2(x-1)+2(y-2)-2(z-3)+2(x-1)=$$

$$=2x-2+2y-4-2z+6+2x-2=4x+2y-2z-2=0$$

Una ecuación más simple sería

$$2x+y-z-1=0$$

Volver al examen

3.1.19. **Determina el plano que pase por los puntos de coordenadas** $(1,0,0)$ **y** $(0,1,0)$**, y sea paralelo a la recta**

$$\begin{array}{llll} x & +y & +z & =2 \\ x & -y & +z & =2 \end{array}$$

(Septiembre 06)

- Solución:

Supongamos que nuestros puntos son $A(1,0,0)$ y $B(0,1,0)$.

El plano que buscamos va a quedar definido por uno de los puntos (por ejemplo A), por el vector $\overrightarrow{AB}$ y por el vector director de la recta ($\vec{u}$).

Vamos a calcular primero los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\vec{u}$.

- $\overrightarrow{AB} = (-1,1,0)$.
- El vector $\vec{u}$ lo obtenemos al hacer el producto vectorial de los vectores normales a los planos que definen la recta.

$$\left.\begin{array}{llll} x & +y & +z & =2 \\ x & -y & +z & =2 \end{array}\right] \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} \overrightarrow{n_1} = (1,1,1) \\ \overrightarrow{n_2} = (1,-1,1) \end{array}\right] \Longrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2}$$

Por tanto,

$$\vec{u} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \cancel{\vec{j}} - \vec{k} - \vec{k} - \cancel{\vec{j}} + \vec{i} = 2\vec{i} - 2\vec{k} \Longrightarrow \vec{u} = (2,0,-2)$$

Por tanto la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 2 \\ y & 1 & 0 \\ z & 0 & -2 \end{vmatrix} = -2(x-1) - 2z - 2y = -2x + 2 - 2z - 2y = 0$$

En consecuencia el plano buscado tiene ecuación

$$x + y + z - 1 = 0$$

Volver al examen

3.1.20. **Determina la relación que debe existir entre a y b para que el punto** $P = (0,a,b)$ **esté en el plano determinado por los puntos** $A = (1,0,0)$**,** $B = (1,1,1)$ **y** $C = (0,2,1)$**.**

(Junio 07)

- Solución:

Vamos a empezar por calcular la ecuación del plano. Para ello usamos como punto A(1,0,0) y como vectores $\overrightarrow{AB}(0,1,1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1,2,1)$.

La ecuación será:

$$0 = \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (x-1) - y + z - 2(x-1) = x - 1 - y + z - 2x + 2 = -x - y + z + 1$$

Por tanto, una ecuación válida para el plano será $\pi \equiv x + y - z - 1 = 0$

Vamos a imponer que $P \in \pi$, resultando la relación buscada

$$a - b - 1 = 0$$

Volver al examen

3.1.21. Escribe un vector de módulo 1 que sea ortogonal al vector de coordenadas $(1, 2, 1)$.

(Junio 07)

- Solución:

Llamemos a nuestro vector $\vec{u} = (1, 2, 1)$. Para obtener un vector $\vec{v}$ ortogonal a un vector, en nuestro caso $\vec{u}$, basta con tomar un vector en el que hacemos una coordenada 0, intercambiamos las otras dos y cambiamos una de ellas de signo.

En nuestro caso podríamos tomar el vector $\vec{v} = (0, 1, -2)$. Además nos piden que sea de módulo uno, luego vamos a normalizarlo.

$$|\vec{v}| = \sqrt{0 + 1 + 4} = \sqrt{5}$$

Por tanto, el vector buscado es:

$$\vec{w}\left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$$

Volver al examen

3.1.22. Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores ortogonales de módulo 4 y 3 respectivamente. Calcula el módulo de los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$, indicando los resultados teóricos en que te basas para ello.

(Junio 08)

- Solución:

Tenemos que $\vec{v}$ y $\vec{v}$ son ortogonales y que $|\vec{u}| = 4$ y que $|\vec{v}| = 3$

- Vamos a calcular el módulo de $\vec{u} + \vec{v}$.

$$|\vec{u} + \vec{v}| \overset{(1)}{=} \sqrt{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v})} \overset{(2)}{=} \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}} \overset{(3)}{=} \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

- Vamos a calcular el módulo de $\vec{u} - \vec{v}$.

$$|\vec{u} - \vec{v}| \overset{(1)}{=} \sqrt{(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})} \overset{(2)}{=} \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}} \overset{(3)}{=} \sqrt{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

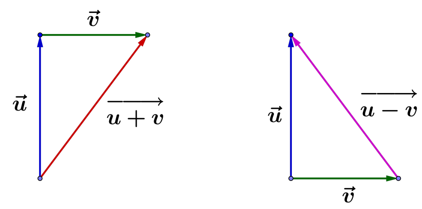
Vamos a comentar los conceptos teóricos utilizados.

(1) Nos basamos en la definición de módulo de un vector en función del producto escalar.

(2) Usamos la propiedad que dice: " $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2$ ".

(3) Hemos utilizado la propiedad del producto escalar que dice: "El producto escalar de dos vectores ortogonales es cero".

También podemos darnos cuenta, como vemos en la gráfica, que son triángulos rectángulos y por tanto basta con aplicar el teorema de Pitágoras.



Volver al examen

3.1.23. **Sean $\vec{a}$ y $\vec{b}$ dos vectores no proporcionales del espacio real tridimensional. ¿Qué relación existe entre las direccciones de $\vec{a}$ y $\vec{b}$ y la dirección de su producto vectorial? ¿Cuánto vale el módulo del producto vectorial de $\vec{a}$ y $\vec{b}$?**

(Junio 08)

- Solución:

A la primera pregunta contestamos, por definición de producto vectorial, que la dirección del mismo es perpendicular a la de los dos vectores.

La segunda pregunta tiene también fácil respuesta.

$$\left|\vec{a} \wedge \vec{b}\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot sen\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$$

Volver al examen

3.1.24.

a) **Determina la recta que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es perpendicular al plano $x+y=1$.**

b) **Calcula el punto donde la recta obtenida corta al plano dado $x+y=1$.**

(Septiembre 08)

- Solución:

Contestaremos primero al apartado *a*.

Como la recta es perpendicular al plano valdrá como vector director de la misma el vector normal al plano.

$$\pi : x+y=1 \Longrightarrow \vec{n}(1,1,0)$$

Por tanto la ecuación paramétrica de la recta es:

$$\left.\begin{array}{l} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = 1 \end{array}\right\}$$

Su ecuación en forma continua será:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{0}$$

De donde deducimos que su ecuación general será:

$$\left.\begin{array}{rcl} x-1 & = & y-1 \\ z & = & 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rl} x-y & =0 \\ z & =1 \end{array}\right\}$$

Veamos ahora el apartado *b*.

Para ello usaremos la ecuación paramétrica de la recta y sustituiremos en la ecuación del plano.

$$1+\lambda+1+\lambda=1 \Longrightarrow 2\lambda=-1 \Longrightarrow \lambda=-\frac{1}{2}$$

Por tanto, el punto buscado es:

$$\left.\begin{array}{l} x=1-\dfrac{1}{2} \\ \\ y=1-\dfrac{1}{2} \\ \\ z=1 \end{array}\right\} \Longrightarrow Q\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$$

Volver al examen

3.1.25.

a) **Determina el plano que pasa por el punto de coordenadas $(1,1,1)$ y corta perpendicularmente a la recta**

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{1}$$

b) **Calcula el punto donde se cortan la recta y el plano.**

(Septiembre 08)

- Solución:

Calculemos primero el plano que nos piden en el apartado *a)*.

Como dicho plano corta perpendicularmente a la recta, el vector director de la misma valdrá como vector normal del plano. Por tanto, dicho vector normal es $\vec{n}(2,1,1)$.

En consecuencia, la ecuación del plano es:

$$2x+y+z+D=0$$

Como el plano pasa por el punto de coordenadas $(1,1,1)$, sustituyendo estas coordenadas en la ecuación anterior podemos calcular el valor de D.

$$2+1+1+D=0 \Longrightarrow D=-4$$

La ecuación del plano buscada es $2x+y+z-4=0$.

Vamos a resolver el segundo apartado.

La ecuación paramétrica de la recta es:

$$r \equiv \left[\begin{array}{rrcr} x= & 1 & + & 2\lambda \\ y= & & & \lambda \\ z= & -1 & + & \lambda \end{array}\right.$$

Sustituyendo en la ecuación del plano obtenemos el valor de λ, y de ahí el punto buscado.

$$2(1+2\lambda)+\lambda-1+\lambda-4=0 \Longrightarrow 2+4\lambda+\lambda-1+\lambda-4=0 \Longrightarrow 6\lambda=3 \Longrightarrow \lambda=\frac{1}{2}$$

Sustituyendo el valor obtenido en la ecuación paramétrica de la recta obtenemos las coordenadas de dicho punto:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x= & & 1 & + & 1 & = & 2 \\ y= & & & & \frac{1}{2} & = & \frac{1}{2} \\ z= & & -1 & + & \frac{1}{2} & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \Longrightarrow Q\left(2,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$$

Volver al examen

3.1.26. Dadas las rectas

$$r:\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-y+z=1 \end{array}\right. \quad , \quad r':\left\{\begin{array}{rcrcrl} x & + & y & + & z & =0 \\ ax & + & & + & bz & =0 \end{array}\right.$$

determine la relación que debe existir entre a y b para que:

a) r **y** r' **sean paralelas.**

b) r **y** r' **sean perpendiculares.**

(Junio 09)

- Solución:

Vamos a empezar calculando unos vectores directores de las rectas y después contestaremos a los interrogantes que nos plantean.

Cada recta viene definida como corte de dos planos, por tanto el producto vectorial de los vectores normales de dichos planos valdrá como vector director de cada recta.

Empecemos por r:

Los vectores directores de los planos que definen a r son $\overrightarrow{n_1}=(1,1,1)$ y $\overrightarrow{n_2}=(1,-1,1)$.

Por tanto:

$$\vec{d}=\overrightarrow{n_1}\wedge\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}-\vec{k}-\vec{j}+\vec{i}=2\vec{i}-2\vec{k} \Rightarrow \vec{d}=(2,0,-2)$$

Hacemos lo mismo con r' y tenemos que los vectores normales en este caso son $\overrightarrow{n_1'}=(1,1,1)$ y $\overrightarrow{n_2'}=(a,0,b)$.

Luego,

$$\overrightarrow{d'}=\overrightarrow{n_1'}\wedge\overrightarrow{n_2'}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ a & 0 & b \end{vmatrix}=b\vec{i}+a\vec{j}-a\vec{k}-b\vec{j}=b\vec{i}+(a-b)\vec{j}-a\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{d'}=(b,a-b,-a)$$

Una vez calculados los vectores pasamos a contestar las cuestiones que nos plantean.

a) Para que sean paralelas tiene que ocurrir que $\vec{d}$ tenga la misma dirección que $\overrightarrow{d'}$, es decir, sus coordenadas tienen que ser proporcionales. Por tanto

$$\frac{2}{b} = \frac{0}{a-b} = \frac{-2}{-a} \Rightarrow -2a = -2b \Rightarrow a = b$$

b) Para que sean perpendiculares el producto escalar de los vectores directores de las rectas tiene que valer 0. Luego

$$\vec{d} \cdot \overrightarrow{d'} = 0 \Rightarrow (2, 0, -2) \cdot (b, a-b, -a) = 2b + 2a = 0 \Rightarrow 2b = -2a \Rightarrow b = -a$$

Volver al examen

3.1.27.

a) Calcule el punto de corte del plano $\Pi : x + y = 0$ y la recta

$$r : \left\{ \begin{array}{rrcr} x = & & & \lambda \\ y = & -2 & & \\ z = & 1 & + & \lambda \end{array} \right.$$

b) Determine la recta s que está contenida en el plano Π y corta perpendicularmente a r.

(Junio 09)

- Solución:

Vamos a responder a los dos apartados.

a) Un punto cualquiera de r tiene la siguiente forma $(\lambda, -2, 1 + \lambda)$. Vamos a sustituir este punto en la ecuación del plano y calcularemos de esa forma λ y el punto en cuestión.

$$\lambda - 2 = 0 \Rightarrow \lambda = 2$$

En consecuencia el punto buscado es $P(2, -2, 3)$.

b) La recta s vendrá definida por el punto P calculado anteriormente (ya que corta a r y está contenida en Π) y como vector director el producto vectorial de los vectores directores de r y el normal al plano Π (por la misma razón anterior).

El vector nomal de Π es $\vec{n} = (1, 1, 0)$ y el director de r es $\vec{d} = (1, 0, 1)$.

Luego el vector director de s será:

$$\vec{u} = \vec{d} \wedge \vec{n} = \left| \begin{array}{ccc} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = \vec{j} + \vec{k} - \vec{i} \Rightarrow \vec{u} = (-1, 1, 1)$$

Por tanto la ecuación de la recta s es:

$$s : \left\{ \begin{array}{rrcr} x = & 2 & - & \lambda \\ y = & -2 & + & \lambda \\ z = & 3 & + & \lambda \end{array} \right.$$

Volver al examen

3.1.28. Considere las rectas $r : \left\{ \begin{array}{rrr} x = & & \lambda \\ y = & - & \lambda \\ z = & 1 & \end{array} \right.$ **y** $s : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - z = 1 \end{array} \right.$

a) Compruebe que r **y** s **son coplanarias.**

b) Obtenga las ecuaciones de la recta que corta a r **y a** s**, y es perpendicular a ambas.**

(Septiembre 09)

- Solución:

a) Para comprobar eso vamos a coger los vectores directores de las dos rectas y el vector que va de un punto cualquiera de r a uno de s. Si los vectores resultantes son dependientes, las rectas serán coplanarias.

En la recta r es muy fácil de calcular:

$$r : \left\{ \begin{array}{rrr} x = & & \lambda \\ y = & - & \lambda \\ z = & 1 & \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} P(0,0,1) \\ \vec{u} = (1,-1,0) \end{array} \right.$$

Vayamos a con la recta s. Vamos a pasarla a paramétricas haciendo $x = \alpha$.

$$s : \left\{ \begin{array}{rrrrr} x & + & y & & = 0 \\ x & & & - \; z & = 1 \end{array} \right. \Rightarrow \left. \begin{array}{rrrr} x = & & & \alpha \\ y = & & - & \alpha \\ z = & -1 & + & \alpha \end{array} \right] \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Q(0,0,-1) \\ \vec{v} = (1,-1,1) \end{array} \right.$$

El vector tercero que íbamos a calcular era el vector que va de P a Q. Dicho vector es $\overrightarrow{PQ} = (0,0,-2)$.

Para comprobar que los tres vectores son coplanarios vamos a calcular el determinante que los tiene como filas.

$$det\left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2 = 0$$

Luego los vectores son dependientes y en consecuencia las rectas son coplanarias.

b) Dicha recta puede venir definida por:

- Punto: Punto de corte de r y s.
- Vector: $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Vamos a calcular el punto de corte de las dos rectas. Un punto genérico de r tendrá la forma $R(\lambda, -\lambda, 1)$.

Si sustituimos en s obtenemos:

$$\left. \begin{array}{rrrr} \lambda & - & \lambda & = 0 \\ \lambda & - & 1 & = 1 \end{array} \right] \Rightarrow \lambda = 2$$

Por tanto el punto buscado es $R(2,-2,1)$.

El vector es:

$$\vec{d} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} - \vec{k} + \vec{k} - \vec{j} \Rightarrow \vec{d} = (-1, -1, 0)$$

Luego la recta buscada es:

$$r_1 : \left\{ \begin{array}{rcrcr} x = & & 2 & - & \lambda \\ y = & & -2 & - & \lambda \\ z = & & 1 & & \end{array} \right.$$

Volver al examen

3.1.29. De todos los planos que pasan por los puntos $P = (0, 0, -1)$ y $Q = (1, 0, 0)$, calcule uno que sea paralelo a la recta de ecuaciones $x + y = 1$, $x - z = 0$

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

Sea Π el plano buscado y r la recta. Vamos a determinar el plano Π con un punto y dos vectores. Como punto vamos a usar P y como vectores el vector $\overrightarrow{PQ}$ y el vector director de la recta, ya que es paralela al plano. Tenemos que $\overrightarrow{PQ} = (1, 0, 1)$. Vamos a pasar la ecuación de la recta a paramétricas para hallar un vector director de la misma.

$$z = \lambda \ ; \qquad \left. \begin{array}{r} x + y = 1 \\ x - z = 0 \end{array} \right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 - \lambda \\ x = \lambda \end{array} \right.$$

La ecuación paramétrica será:

$$\left. \begin{array}{rcccr} x = & & & & \lambda \\ y = & 1 & - & & \lambda \\ z = & & & & \lambda \end{array} \right\}$$

De aquí deducimos que un vector director de la recta puede ser $\vec{u} = (1, -1, 1)$.

Por tanto, la ecuación paramétrica del plano es:

$$\left. \begin{array}{rcccccc} x = & & & \lambda & + & \mu \\ y = & & & & - & \mu \\ z = & -1 & + & \lambda & + & \mu \end{array} \right\}$$

Volver al examen

3.1.30. Dados los puntos $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 0, 0)$ y $C = (0, 2, 1)$, sea r la recta que pasa por A y B, y sea Π el plano que pasa por C y es perpendicular a r. Calcule el punto P_0 en el que se cortan r y Π.

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

Vamos a encontrar la ecuación paramétrica de la recta. Tenemos que $\overrightarrow{AB} = (0, -1, -1)$ y usando el punto B obtenemos:

$$\left. \begin{array}{rcccr} x = & 1 & & & \\ y = & & - & & \lambda \\ z = & & - & & \lambda \end{array} \right\}$$

La ecuación general del plano la obtenemos usando como vector normal $\overrightarrow{AB}$, luego,

$$-y - z + D = 0$$

imponiendo que pase por C encontramos el valor de D.

$$-2 - 1 + D = 0 \Longrightarrow D = 3$$

En consecuencia la ecuación del plano es $-y - z + 3 = 0$.

Vamos a calcular el punto de corte usando la ecuación general del plano y un punto genérico de la recta $P(1, -\lambda, -\lambda)$.

$$\lambda + \lambda + 3 = 0 \Longrightarrow \lambda = \frac{-3}{2}$$

Por tanto el punto buscado es $P\left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Volver al examen

3.1.31. Sea θ el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (\lambda, 1, 0)$ y $\vec{v} = (1, \mu, 0)$, donde λ y μ son número reales.

a) Obtenga la relación que deben cumplir λ y μ para que se cumpla que $cos\theta = 0$.

b) Obtenga la relación que deben cumplir λ y μ para que se cumpla que $sen\theta = 0$.

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

a) Sabemos que

$$cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Por tanto tenemos que

$$cos\theta = 0 \Longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Longrightarrow \lambda + \mu = 0 \Longrightarrow \mu = -\lambda$$

b) Si $sen\theta = 0 \Longrightarrow$ los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales. Luego

$$\frac{\lambda}{1} = \frac{1}{\mu} \Longrightarrow \mu = \frac{1}{\lambda}$$

Volver al examen

3.1.32. Considere las rectas $r: \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = z \end{array} \right.$ y $s: \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = z \end{array} \right.$.

Obtenga un punto P de r y un punto Q de s tales que el vector $\overrightarrow{PQ}$ tenga módulo igual a 1 y sea ortogonal al vector $(-1, 0, 1)$

(Septiembre 10 - Fase específica)

- Solución:

Hay muchos puntos que cumplen la condición de que el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$ sea 1. Vamos a usar los puntos genéricos de las rectas, que dependeran de dos parámetros, por lo que necesitaremos dos ecuaciones para poder determinarlos. De ahí que nos den dos condiciones, pues de cada una saldrá una ecuación.

Las ecuaciones paramétricas de las rectas son:

$$r : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & \lambda \\ z & = & \lambda \end{array} \right. \qquad \text{y} \qquad s : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \mu \\ y & = & 0 \\ z & = & \mu \end{array} \right.$$

Luego los puntos genéricos de las rectas son $P(1, \lambda, \lambda)$ y $Q(\mu, 0, \mu)$. Por tanto $\overrightarrow{PQ} = (\mu - 1, -\lambda, \mu - \lambda)$.

Vamos a imponer las dos condiciones y obtendremos el sistema que nos permitirá calcular λ y μ.

$$\left. \begin{array}{l} \left|\overrightarrow{PQ}\right| = 1 \Longrightarrow \sqrt{(\mu-1)^2 + \lambda^2 + (\mu-\lambda)^2} = 1 \Longrightarrow (\mu-1)^2 + \lambda^2 + (\mu-\lambda)^2 = 1 \\ \\ \overrightarrow{PQ} \perp (-1, 0, -1) \Longrightarrow (\mu - 1, -\lambda, \mu - \lambda) \cdot (-1, 0, 1) = 0 \Longrightarrow -\mu + 1 + \mu - \lambda = 0 \end{array} \right]$$

De la segunda condición obtenemos que $\lambda = 1$ y sustituyendo en la primera tenemos:

$$\begin{aligned} (\mu-1)^2 + 1 + (\mu-1)^2 = 1 \quad & \Longrightarrow \quad \mu^2 - 2\mu + 1 + 1 + \mu^2 - 2\mu + 1 = 1 \Longrightarrow \\ & \Longrightarrow \quad 2\mu^2 - 4\mu + 2 = 0 \Longrightarrow \mu^2 - 2\mu + 1 = 0 \Longrightarrow \\ & \Longrightarrow \quad \mu = 1 \end{aligned}$$

Luego los puntos buscados son $P(1, 1, 1)$ y $Q(1, 0, 1)$.

Volver al examen

3.1.33.

a) Determine el plano Π que pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es perpendicular a la recta de ecuaciones $x + y + z = 0$, $x - z = 1$.

b) Calcule el punto en el que se cortan r y Π.

(Septiembre 10 - Fase específica)

- Solución:

a) Usaremos como vector normal del plano el vector director de la recta. Vamos a calcular la ecuación paramétrica de la recta.

$$\left. \begin{array}{ccccccc} x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 1 \end{array} \right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \lambda \\ x = 1 + \lambda \; ; \; y = -1 - 2\lambda \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcrcr} x & = & 1 & + & \lambda \\ y & = & -1 & - & 2\lambda \\ z & = & & & \lambda \end{array} \right.$$

Luego el plano buscado viene determinado por $P(1, 0, 1)$ y $\vec{n} = (1, -2, 1)$.

Por tanto

$$x - 2y + z + D = 0$$

Imponiendo que P pertenezca al plano calculamos D.

$$1 + 1 + D = 0 \Longrightarrow D = -2$$

En consecuencia el plano buscado es

$$x - 2y + z - 2 = 0$$

b) Un punto genérico de la recta es $Q(1+\lambda, -1-2\lambda, \lambda)$. Vamos a sustituirlo en la ecuación del plano para calcular λ.

$$1 + \lambda + 2 + 4\lambda + \lambda - 2 = 0 \Longrightarrow 6\lambda + 1 = 0 \Longrightarrow \lambda = -\frac{1}{6}$$

Luego el punto buscado es $Q\left(\frac{5}{6}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}\right)$.

Volver al examen

3.1.34.

a) Estudie, en función de los parámetros a y b, la posición relativa de la recta $r: \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$ y el plano $\Pi \equiv x + y + az = b$.

b) Para cada una de las posiciones obtenidas, diga cómo es el sistema formado por las tres ecuaciones

$$x = 0, \qquad y = 0, \qquad x + y + az = b$$

(Junio 11)

- Solución:

En el primer apartado, la recta que nos dan es el propio eje Z, luego puedo usar como punto de la recta $O(0,0,0)$ y como vector director $\vec{k} = (0,0,1)$. Por otro lado tenemos que un vector normal al plano es $\vec{n} = (1,1,a)$ y un punto del mismo es $P(b,0,0)$ (basta con sustituir $y = z = 0$).

Hagamos el producto escalar de los dos vectores y tenemos:

$$\vec{k} \cdot \vec{n} = a$$

De aquí deducimos que si $a \neq 0$ la recta r corta al plano Π en un punto.

Si $a = 0$ la recta es paralela o está contenida en el plano.

Para que la recta esté contenida en el plano basta con que el O esté en el plano. Eso sólo es posible si $b = 0$.

En resumen:

- Si $a \neq 0 \Longrightarrow r$ corta a Π.
- Si $a = 0$ y $b = 0 \Longrightarrow r$ está contenida en el plano.
- Si $a = 0$ y $b \neq 0 \Longrightarrow r$ es paralela al plano.

Otra forma de hacerlo sería haber estudiado el sistema formado por la recta y el plano:

$$\left. \begin{array}{ccccccc} x & & & & & = & 0 \\ & & y & & & = & 0 \\ x & + & y & + & az & = & b \end{array} \right]$$

Veámoslo y contestaremos de paso al segundo apartado. La matriz asociada es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & a & b \end{array}\right)$$

Es evidente que el rango de la matriz de los coeficientes es al menos 2, pues $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Vamos a calcular el determinante de la matriz de los coeficientes para ver los casos resultantes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a$$

En consecuencia tenemos que si $a \neq 0$ el sistema es compatible determinado, y por tanto la recta y el plano se cortan en un punto.

Si $a = 0$ vamos a estudiar el rango de la matriz ampliada. Es obvio que dicho rango es mayor o igual que 2. Estudiemos el menor de orden 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{vmatrix} = b$$

Por tanto:

- Si $a = 0$ y $b = 0 \Longrightarrow RgA = RgA' = 2 \Longrightarrow$ Sistema compatible indeterminado ($r \subset \Pi$).
- Si $a = 0$ y $b \neq 0 \Longrightarrow RgA = 2 \neq 3 = RgA' \Longrightarrow$ Sistema incompatible ($r \parallel \Pi$).

Volver al examen

3.1.35. Considere las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 0 \\ x - z = 1 \end{array} \right.$ **y** $s : \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right.$

a) Determine el plano Π que contiene a la recta r y corta perpendicularmente a la recta s.

b) Calcule el punto donde se cortan el plano Π y la recta s.

(Junio 11)

- Solución:

Vamos a pasar la recta r a paramétricas. Hacemos $x = \mu$ y tenemos:

$$r : \left\{ \begin{array}{rrcl} x = & & & \mu \\ y = & & - & \mu \\ z = & -1 & + & \mu \end{array} \right.$$

Es evidente que $r \perp s$, pues lo son sus vectores directores. Veamos el primer apartado.

Como $\Pi \perp s$ el propio vector director de la recta nos vale como vector normal al plano. Además como $r \perp s$ tenemos que, o bien Π contiene a r, o bien $r \parallel \Pi$.

Luego, para que la recta esté contenida en el plano, basta con imponer que un punto de la recta esté en el plano (podemos tomar $A(0,0,-1)$ que pertenece a r).

$$\left.\begin{array}{l} \Pi : y+z=D \\ A(0,0,-1)\in\Pi \end{array}\right] \Longrightarrow D=-1 \Longrightarrow \Pi : y+z=-1$$

El segundo apartado nos pide que encontremos el punto de corte de s y Π. El punto que buscamos, por pertenecer a s, tiene la siguiente forma $P(1,\lambda,\lambda)$. Sustituyendo en Π tenemos.

$$\lambda+\lambda=-1 \Longrightarrow \lambda=\frac{-1}{2} \Longrightarrow P\left(1,\frac{-1}{2},\frac{-1}{2}\right)$$

Volver al examen

3.1.36. Calcule todos los vectores de módulo 2 que son ortogonales a los vectores $\vec{u}=(1,-1,-1)$ y $\vec{v}=(-1,2,1)$.

(Junio 12)

- Solución:

Para obtener un vector ortogonal a dos vectores a la vez lo mejor es hacer su producto vectorial. Hecho esto, todos los vectores ortogonales a los dos son proporcionales al producto vectorial.

Vamos a calcular el producto vectorial:

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}-\vec{k}-\vec{j}+2\vec{i}=\vec{i}+\vec{k} \Longrightarrow \vec{u}\wedge\vec{v}=(1,0,1)$$

Todos los vectores proporcionales a $\vec{u}\wedge\vec{v}$ serán de la forma $\vec{w_a}=(a,0,a)$, $a\neq 0$.

Veamos cuales tienen módulo 2.

$$|\vec{w}_a|=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}$$

Igualando a 2 tenemos:

$$\sqrt{2a^2}=2 \Longrightarrow 2a^2=4 \Longrightarrow a^2=2 \Longrightarrow a=\pm\sqrt{2}$$

Por tanto los vectores buscados son:

$$\vec{w}_{\sqrt{2}}=(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$$

$$\vec{w}_{-\sqrt{2}}=(-\sqrt{2},0,-\sqrt{2})$$

Volver al examen

3.1.37. Sea Π el plano determinado por los puntos $A=(1,0,0)$, $B=(0,1,0)$ y $P=(0,0,c)$, y sea la recta $r:\left\{\begin{array}{l} x-y=3 \\ 2x-z=3 \end{array}\right.$

a) Obtenga la ecuación implícita de Π.

b) Determine los valores de c para los que r y Π son paralelos.

c) Determine los valores de c para los que r y Π son perpendiculares.

(Septiembre 12)

- Solución:

Vamos a usar el punto A y los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP}$ para obtener la ecuación del plano que nos piden. Los vectores son $\overrightarrow{AB} = (-1,1,0)$ y $\overrightarrow{AP} = (-1,0,c)$.

Por tanto la ecuación resultante será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & c \end{vmatrix} = c(x-1) + z + cy = 0 \Longrightarrow \mathbf{cx + cy + z - c = 0}$$

Para los dos próximos apartados vamos a pasar la recta r a paramétricas para saber cual es su vector director.

$$\begin{array}{rcl} x & = & \lambda \\ -y = 3 - \lambda & \Longrightarrow & y = -3 + \lambda \\ -z = 3 - 2\,\lambda & \Longrightarrow & z = -3 + 2\,\lambda \end{array}$$

Luego el vertor director de r es $\vec{u} = (1,1,2)$. A su vez sabemos que el vector normal del plano es $\vec{n} = (c,c,1)$.

En el apartado b) tendríamos:

$$r \parallel \Pi \Longrightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Longrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Longrightarrow c + c + 2 = 0 \Longrightarrow 2c = -2 \Longrightarrow c = -1$$

En el apartado c) tendríamos:

$$r \perp \Pi \Longrightarrow \vec{u} \parallel \vec{n} \Longrightarrow \frac{1}{c} = \frac{1}{c} = \frac{2}{1} \Longrightarrow 2c = 1 \Longrightarrow c = \frac{1}{2}$$

Volver al examen

3.1.38. **Sean en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{e} = (2,0,0)$, $\vec{u} = (1,0,-1)$ y $\vec{v} = (-2,3,-2)$.**

a) Calcule el producto vectorial $\vec{e} \times \vec{u}$.

b) Calcule el seno del ángulo θ que forman $\vec{e}$ y $\vec{u}$.

c) Calcule el ángulo ϕ que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

(Junio 13)

- Solución:

a) Vamos a realizar el producto vectorial.

$$\vec{e} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{j} \Longrightarrow \vec{e} \times \vec{u} = (0,2,0)$$

b) Para calcular este ángulo que nos piden vamos a usar la fórmula del módulo del producto vectorial.

$$|\vec{e} \times \vec{u}| = |\vec{e}| \cdot |\vec{u}| \cdot sen\,\theta$$

Para realizar las operaciones me falta el valor del módulo del vector $\vec{u}$. Vamos a calcularlo.

$$|\vec{u}| = \sqrt{1+0+1} = \sqrt{2}$$

Por tanto:

$$sen\,\theta = \frac{|\vec{e}\times\vec{u}|}{|\vec{e}|\cdot|\vec{u}|} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Para hallar el ángulo que nos piden ahora vamos a usar la fórmula del producto escalar.

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot cos\,\phi$$

Para poder aplicarla necesitamos saber cuanto vale el módulo del vector $\vec{v}$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{4+9+4} = \sqrt{17}$$

Luego:

$$cos\,\phi = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{-2+2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}} = 0$$

Por tanto $\phi = 90^o$.

Volver al examen

3.1.39.

a) Calcule las ecuaciones implícitas de la recta r que pasa por el punto $P = (1,-1,0)$ y es paralela a los planos $\Pi_1 \equiv x+y=2$ y $\Pi_2 \equiv x-y+z=1$.

b) Calcule también las ecuaciones paramétricas de r y un vector director de r.

(Junio 13)

- Solución:

a) Como la recta es paralela a los dos planos, su ecuación ecuación implícita será de la forma:

$$\begin{aligned} x+y &= d \\ x-y+z &= d' \end{aligned}$$

ya que estos planos son paralelos a los que nos dan. Vamos a imponer que pasen por el punto P y de esa forma calcularemos d y d'.

$$\begin{aligned} 1-1=d &\implies d=0 \\ 1+1=d' &\implies d'=2 \end{aligned}$$

Luego las ecuaciones buscadas son:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} x & + & y & & & = 0 \\ x & - & y & + & z & = 2 \end{array}\right]$$

b) Para resolver este apartado basta con resolver el sistema planteado por las dos ecuaciones.

Vamos a hacer $y = \lambda$.

$$\begin{aligned}
&y = \lambda \\
&x + y = 0 \Longrightarrow x = -\lambda \\
&x - y + z = 2 \Longrightarrow z = 2 + \lambda + \lambda = 2 + 2\lambda
\end{aligned}$$

Luego las ecuaciones paramétricas buscadas son:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{lccc} x = & & - & \lambda \\ y = & & & \lambda \\ z = & 2 & + & 2\lambda \end{array} \right.$$

Un vector director sería $\vec{u} = (-1, 1, 2)$.

Volver al examen

3.1.40. Considere en $\mathbb{R}^3$ las rectas $r : \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$, $s : \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{array} \right.$ **.**

a) Obtenga un vector director de la recta s.

b) Obtenga el plano Π que contiene a r y es paralelo a s.

c) Obtenga el plano $\overline{\Pi}$ que contiene a r y es perpendicular a s.

(Junio 14)

- Solución:

a) Para encontrar el vector director de la recta s basta con que pasemos a paramétricas la ecuación de la recta.
Hacemos $z = t$ y por reducción llegamos a que la ecuación paramétrica de la recta es:

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{ccc} x & = & 1 \\ y & = & 0 \\ z & = & \quad t \end{array} \right.$$

De aquí deducimos que un vector director de s es $\vec{v} = (0, 0, 1)$. Otra forma de obtener este vector es multiplicar vectorialmente los vectores normales de los planos que determinan la ecuación general de la recta.

b) La recta r es el eje Y, por lo que un punto y un vector de dicha recta pueden ser $O(0, 0, 0)$ y $\vec{u} = (0, 1, 0)$.
El plano que nos piden vendrá determinado por dicho punto O y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.
Por tanto la ecuación será:

$$0 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x$$

Luego el plano buscado será $\Pi \equiv x = 0$

c) Si es perpendicular a s tenemos que el vector normal del plano buscado es el vector director de s, es decir, $\vec{v}$. Además, al pasar por r, podemos utilizar como punto el punto $O = (0, 0, 0)$.
Por tanto, el plano buscado será $\overline{\Pi} \equiv z = 0$

Volver al examen

3.1.41.

a) **Dado el plano Π_1 de ecuación $z = 0$, escriba las ecuaciones de dos planos Π_2 y Π_3 tales que los planos Π_1, Π_2 y Π_3 se corten dos a dos pero no exista ningún punto común a los tres.**

b) **Clasifique el sistema formado por las ecuaciones de los tres planos Π_1, Π_2 y Π_3.**

(Junio 14)

- Solución:

Comencemos por el primer apartado, aunque vamos a contestar al segundo con el planteamiento que hacemos para resolver el primero.

Vamos a plantear el problema algebraicamente, aunque sea un problema geométrico. Si nos dicen que los planos se cortan dos a dos, pero que no tienen ningún punto en común, estamos hablando de que el sistema formado por los tres planos es incompatible. Con esto respondemos al segundo apartado.

Para que se cumpla lo que nos piden en la primera condición, basta con encontrar ecuaciones de planos que no sean proporcionales dos a dos (eso conlleva que se cortan dos a dos).

Hay muchas maneras de hacer esto, pero una válida sería elegir dos planos no proporcionales (uno de ellos $z = 0$), sumarlos y cambiar el término independiente que nos sale al sumar, por ejemplo

$$\left.\begin{array}{ccccccc} & & & & z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & - & 2y & + & 4z & = & 7 \end{array}\right\}$$

Volver al examen

3.1.42. En $\mathbb{R}^3$, considere los cuatro puntos $A = (0, 1, 1)$, $B = (-2, 0, -1)$, $C = (-1, 1, 0)$ y $D = (-2, 2, 1)$, y sea r la recta que pasa por C y por D.

a) **Obtenga ecuaciones paramétricas de r.**

b) **Halle los puntos P de la recta r para los que el triángulo APB sea rectángulo en su vértice P.**

(Julio 14)

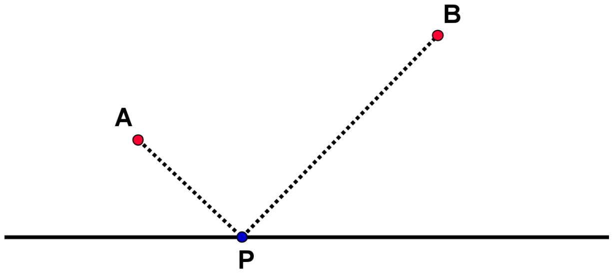
- Solución:

Para calcular la ecuación paramétrica que nos piden necesitamos un punto y un vector que determinen la recta. Como punto puede servir cualquiera de los dos, tomaremos por ejemplo C. Como vector director de la recta tomaremos el vector $\overrightarrow{CD}$. Por tanto nuestra recta viene determinada por $C = (-1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{CD} = (-1, 1, 1)$.

Dicha ecuación será:

$$\left.\begin{array}{rrr} x = & -1 & -\lambda \\ y = & 1 & +\lambda \\ z = & & \lambda \end{array}\right\}$$

Vamos a buscar el punto P que cumple la condición que nos piden en el segundo apartado. Podemos ver en el siguiente gráfico que pretendemos.



El punto P, por estar en la recta, tiene una expresión, en función de λ, como la que sigue $P(-1-\lambda, 1+\lambda, \lambda)$.

Se tratará de calcular el valor de λ que hace que $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$.

Tenemos que:

$$\overrightarrow{PA} = (1+\lambda, -\lambda, 1-\lambda) \qquad \overrightarrow{PB} = (-1+\lambda, -1-\lambda, -1-\lambda)$$

Por tanto:

$$0 = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \lambda^2 - 1 + \lambda + \lambda^2 - 1 + \lambda^2 = 3\lambda^2 + \lambda - 2$$

Resolvemos esta ecuación de segundo grado y tenemos dos valores para λ que son:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = \frac{2}{3}$$

Para cada valor de λ obtenemos un punto que cumple lo que queremos. Dichos puntos son:

$$\lambda_1 = -1 \Longrightarrow P_1 = (0, 0, -1) \qquad \lambda_2 = \frac{2}{3} \Longrightarrow P_2 = \left(-\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

Volver al examen

3.1.43. Sean $\vec{e}$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$ vectores en $\mathbb{R}^3$ tales que $\vec{e} \times \vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} \times \vec{e} = (0, 1, 1)$.

a) Calcule el vector $(\vec{e} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{e})$.

b) Calcule el vector $\vec{w} = \vec{e} \times (2\vec{u} - \vec{e} + 3\vec{v})$.

(Julio 15)

- Solución:

Vamos a resolver el primer apartado.

$$(\vec{e} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{e}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{k} - \vec{j} + \vec{i}$$

Por tanto $(\vec{e} \times \vec{u}) \times (\vec{v} \times \vec{e}) = (1, -1, 1)$.

Para resolver el segundo apartado tendremos en cuenta que el producto vectorial es distributivo respecto de la suma, es anticonmutativo $(\vec{e} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{e})$ y sus propiedades con el producto con escalares. Por tanto:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{e}\times(2\,\vec{u}-\vec{e}+3\,\vec{v}) = 2\,(\vec{e}\times\vec{u})-\vec{e}\times\vec{e}+3\,(\vec{e}\times\vec{v}) = \\ &= 2\,(1,0,-1)-(0,0,0)+3\,(0,-1,-1) = (2,0,-2)+(0,-3,-3) = (2,-3,-5) \end{aligned}$$

Volver al examen

3.1.44. Sean en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{u}=(1,1,0)$ y $\vec{v}=(-1,0,1)$.

a) Calcule el producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$.

b) Obtenga un vector $\vec{e_1}$ de $\mathbb{R}^3$ que cumpla $\cos\left(\widehat{\vec{e_1},\vec{u}}\right)=0$.

c) Obtenga un vector $\vec{e_2}$ de $\mathbb{R}^3$ que cumpla $\operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{e_2},\vec{v}}\right)=0$.

(Junio 16)

- Solución:

Vamos calcular el producto vectorial.

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}+\vec{k}-\vec{j} \Longrightarrow \vec{u}\times\vec{v}=(1,-1,1)$$

En el segundo apartado nos piden un vector que cumpla la condición $\cos\left(\widehat{\vec{e_1},\vec{u}}\right)=0$, es decir, un vector ortogonal a $\vec{u}$. Para esto nos vale el vector calculado anteriormente, $\vec{u}\times\vec{v}$, pues el producto vectorial es ortogonal a los dos vectores.

Por último, el vector $\vec{e_2}$, para que el $\operatorname{sen}\left(\widehat{\vec{e_2},\vec{v}}\right)=0$, tiene que tener la misma dirección que $\vec{v}$, por lo que basta con coger un vector proporcional a él. Por tanto un posible vector sería $\vec{e_2}=(-2,0,2)$.

Volver al examen

3.1.45. En $\mathbb{R}^3$, considere el punto $P=(1,0,1)$ y los planos $\Pi_1\equiv\ x+z=0$, $\Pi_2\equiv\ y-z=0$. Obtenga un plano Π_3 que cumpla a la vez las siguientes condiciones: (i) $P\in\Pi_3$; (ii) Π_1 corta a Π_3 en una recta; (iii) los planos Π_1 Π_2 y Π_3 no tienen puntos en común.

(Julio 16)

- Solución:

El ejercicio es un poco imaginativo. Veamos, si tomamos Π_3 como suma de Π_1 y Π_2, obtendremos un plano que pasa por la recta en la que se cortan Π_1 y Π_2. Si cambiamos el término independiente de ese plano resultante lo que hacemos es desplazar el plano obtenido, con lo que obtendremos un plano que cumple la tercera condición.

Π_3 quedaría

$$\Pi_3\equiv x+y=d \qquad d\neq 0$$

Veamos que se cumple la segunda condición.

$$\begin{aligned} \Pi_1 &\equiv x+z=0 \\ \Pi_3 &\equiv x+y=d \end{aligned}$$

Es obvio que, si lo consideramos un sistema de ecuaciones, el $Rg\, C = 2$, por tanto el sistema es compatible indeterminado independientemente del valor de d.

Por tanto se cortarían en una recta.

Para calcular d vamos a usar la primera condición.

$$P \in \Pi_3 \Longrightarrow d = 1$$

Luego el plano buscado es $\Pi_3 \equiv x + y = 1$.

Otra forma de resolver el problema, aportada por mi compañero Sergio Santos y cuento a continuación.

El ejercicio tiene infinitas soluciones. Demos una de ellas.

Sabemos que Π_1 y Π_2 se cortan en una recta, porque sus vectores normales $n_1 = (1, 0, 1)$ y $n_2 = (0, 1, -1)$ no son proporcionales.

Además es fácil comprobar que $P \notin \Pi_1$ y $P \notin \Pi_2$. Podemos ver la situación en la siguiente imagen:

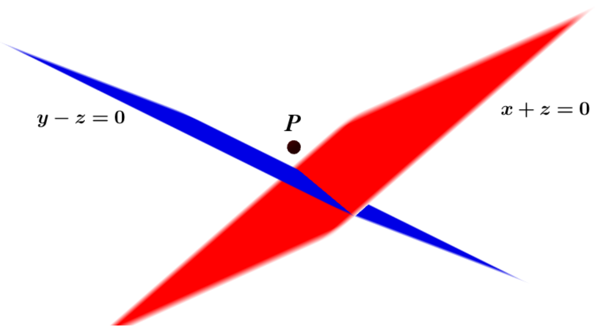


Figura 3.3: Representación gráfica de los planos y el punto.

Si construimos el plano paralelo a Π_2 que pase por P, ese plano cumplirá las condiciones del plano que nos piden. Como podemos ver en la siguiente imagen.

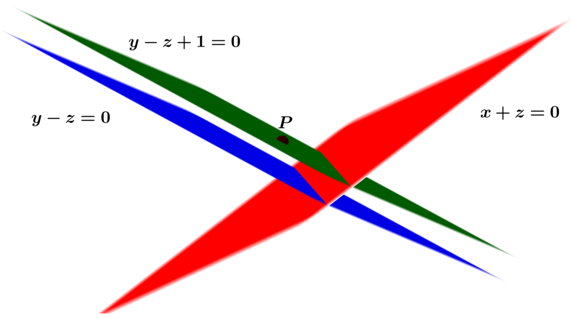


Figura 3.4: Representación gráfica de los planos y el punto.

Tenemos que Π_3 es paralelo a Π_2, luego $\Pi_3 = y - z + d = 0$. Además $P \in \Pi_3$ por tanto

$$0 - 1 + d = 0 \Longrightarrow d = 1$$

Luego $\Pi_3 \equiv y - z + 1 = 0$ es el plano que estábamos buscando.

Volver al examen

3.1.46. Sean en $\mathbb{R}^3$ los vectores $\vec{e} = (0,1,0)$, $\vec{u} = (3,-2,2)$ y $\vec{v} = (0,1,1)$.

a) Calcule el producto vectorial $\vec{e} \times \vec{u}$.

b) Calcule el ángulo ϕ que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) Demuestre que la familia de vectores $\{\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}\}$ es linealmente independiente.

(Junio 17)

- Solución:

Vamos a resolver el primer apartado.

$$\vec{e} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 3\vec{k} \Longrightarrow \vec{e} \times \vec{u} = (2,0,-3)$$

Vayamos ahora a por el segundo apartado.

$$\cos \phi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{3 \cdot 0 - 2 \cdot 1 + 2 \cdot 1}{\sqrt{9+4+4} \cdot \sqrt{1+1}} = 0$$

Luego el ángulo que forman los dos vectores es de 90º.

Para hacer el tercer apartado tenemos que calcular el producto mixto de los tres vectores.

$$[\vec{e}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$$

El resultado es distinto de cero, luego los vectores son linealmente independientes.

Volver al examen

3.1.47. Considere en $\mathbb{R}^3$ las rectas $r: \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array} \right.$, $s: \left\{ \begin{array}{l} x + y = 1 \\ z = 0 \end{array} \right.$.

a) Obtenga un vector director de la recta s.

b) Obtenga el plano Π_1 que contiene a r y es paralelo a s.

c) Obtenga el plano Π_2 que contiene a r y es perpendicular a s.

(Julio 17)

- Solución:

Es fácil constatar que la recta r no es otra que el Eje Z.

Vamos a responder al primer apartado. Basta con resolver el sistema que define la recta s y de esa forma obtenemos la ecuación paramétrica y por tanto un punto y un vector.

Para resolverlo hacemos $y = \lambda$. Tendremos

$$\left. \begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{array} \right] \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A(1,0,0) \\ \vec{v} = (-1,1,0) \end{array} \right.$$

Vamos a ver el segundo apartado. Como r es el Eje Z, podemos tomar como punto de la recta el origen, $O(0,0,0)$ y como vector director el vector $\vec{k} = (0,0,1)$.

Dado que el plano contiene a r podemos usar para determinarlo el punto y el vector director de r. A su vez, como es paralelo a s, **solo** podemos usar su vector director para la determinación del plano. Por tanto

$$\Pi_1 \equiv O, \vec{v}, \vec{k}$$

La ecuación será

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x + y = 0$$

Por último vamos a calcular el plano que contiene a r y es perpendicular a s. Por ser perpendicular a s, el vector director de la recta nos sirve como vector normal del plano. La ecuación de todos los planos perpendiculares a s sería

$$-x + y + D = 0$$

Como tiene que contener a r pasará por cualquier punto de r, en concreto por el origen, y por tanto $D = 0$.

Luego la ecuación pedida es

$$\Pi_2 \equiv -x + y = 0$$

Es fácil comprobar que la recta r en este caso estaría contenida en el plano (no tendría que haber ocurrido), pues todos los puntos de dicha recta tienen la forma $(0, 0, z)$, que obviamente cumplen la ecuación del plano.

Volver al examen

3.1.48. Sean el plano $\Pi : y + z = 0$ y la recta $r : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-1}{1}$.

a) Calcule la intersección del plano y la recta.

b) Determine la recta s que pasa por el punto $P = (1, 0, 0)$, es paralela la plano Π y es perpendicular a la recta r.

(Junio 18)

- Solución:

Vamos a resolver el primer apartado. Para ello vamos a poner la ecuación de la recta en paramétricas. De ahí sacaremos un punto genérico de la recta que utilizaremos para encontrar el punto de corte que nos piden.

$$\left.\begin{array}{rrcr} x = & -1 & + & \lambda \\ y = & 1 & - & 2\lambda \\ z = & 1 & + & \lambda \end{array}\right] \Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A = (-1, 1, 1) \\ \vec{u} = (1, -2, 1) \\ P = (-1 + \lambda, 1 - 2\lambda, 1 + \lambda \end{array}\right.$$

Sustituimos este punto P en la ecuación del plano.

$$1 - 2\lambda + 1 + \lambda = 0 \Longrightarrow -\lambda + 2 = 0 \Longrightarrow \lambda = 2$$

Luego el punto buscado es $P = (-1 + 2, 1 - 4, 1 + 2) = (1, -3, 3)$.

Resolvamos ahora el segundo apartado. La recta s va a venir determinada por el punto P y tendrá como vector director el producto vectorial del vector director de r y el normal del palno. Así se cumplirá que sea paralela a Π y perpendicular a r.

Tenemos que $\vec{u} = (1, -2, 1)$ y $\vec{n} = (0, 1, 1)$. Luego

$$\vec{v} = \vec{u} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + \vec{k} - \vec{j} - \vec{i} = -3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$$

Como no nos especifican ningún tipo de ecuación de la recta concreto vamos a poner la ecuación paramétrica.

$$\left.\begin{array}{rccc} x = & 1 & - & 3\lambda \\ y = & & - & \lambda \\ z = & & + & \lambda \end{array}\right]$$

Volver al examen

3.2. Problemas métricos

3.2.1. Calcular la distancia del punto de coordenadas $(1,1,2)$ al plano que pasa por los puntos de coordenadas $(1,1,0);(1,0,1)$ y $(0,1,1)$.

(Junio 00)

- Solución:

Vamos a asignarles un nombre a los puntos $A(1,1,2)$; $B(1,1,0)$; $C(1,0,1)$ y $D(0,1,1)$.

Vamos a calcular la ecuación del plano que pasa por B, C y D. Para ello vamos a usar $B, \overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BD}$. Empecemos por calcular los vectores, que tendrían por coordenadas $\overrightarrow{BC}(0,-1,1)$ y $\overrightarrow{BD}(-1,0,1)$.

Por tanto la ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(x-1)-(y-1)-z = -x+1-y+1-z = -x-y-z+2$$

Por tanto vale como ecuación $\pi \equiv x+y+z-2=0$.

Vamos a calcular la distancia.

$$d(A,\pi) = \frac{|1+1+2-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\ u$$

Volver al examen

3.2.2. Calcular la distancia del punto de coordenadas $(3,5,0)$ a la recta que pasa por los puntos de coordenadas $(0,1,2)$ y $(0,1,1)$.

(Junio 00)

- Solución:

A los puntos vamos a designarlos por $A(3,5,0), B(0,1,2)$ y $C(0,1,1)$. La recta que pasa por B y C queda definida por $B(0,1,2)$ y $\overrightarrow{BC}=(0,0,-1)$. La distancia la calculamos por la fórmula conocida.

$$d(A,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC}\right|}{\left|\overrightarrow{BC}\right|}$$

donde $\overrightarrow{AB}=(-3,-4,2)$. El producto vectorial del numerador queda:

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 4\vec{i}-3\vec{j} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BC} = (4,-3,0)$$

Luego:

$$d(A,r) = \frac{\sqrt{16+9}}{\sqrt{1}} = 5 \text{ u.}$$

Volver al examen

3.2.3. Definir el producto escalar de vectores y enunciar su relación con los conceptos de ángulo y distancia entre dos puntos.

(Junio 01)

- Solución:

La respuesta a este ejercicio puedes encontrarla en los puntos 33, 39 a) y 40 a) del resumen teórico que hay al principio del libro.

Volver al examen

3.2.4. Calcular el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de coordenadas $(1,0,1),(2,0,2),(3,1,3)$ y $(1,2,1)$.

(Septiembre 02)

- Solución:

Para que formen un cuadrilátero tienen que ser coplanarios. Vamos a empezar por comprobar esto. Para eso vamos a asignarles nombre a los puntos $A(1,0,1); B(2,0,2)$; $C(3,1,3)$ y $D(1,2,1)$. Vamos a considerar los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,0,1); \overrightarrow{AC}=(2,1,2)$ y $\overrightarrow{AD}=(0,2,0)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4-4=0$$

En consecuencia los vectores son linealmente dependientes y por tanto los puntos son coplanarios. La figura 3.5 nos muestra el cuadrilátero.

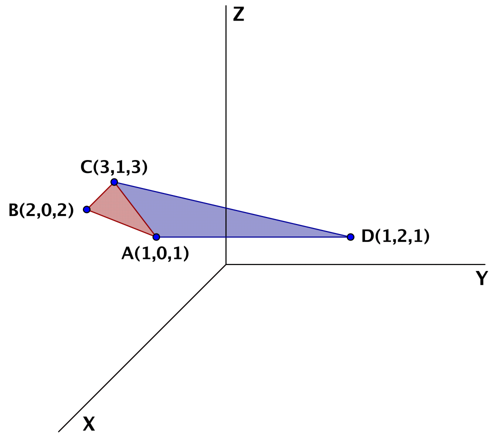


Figura 3.5: Representación gráfica del cuadrilátero.

Para calcular el área vamos a dividir el cuadrilátero, como observamos en la figura 3.5, en dos triángulos que serían ABC y ACD, después calcularemos el área de cada uno y por último sumaremos las dos para obtener el área que nos solicitan.

- Área de ABC

$$A_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \cancel{2\vec{j}}+\vec{k}-\cancel{2\vec{j}}-\vec{i} \Longrightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=(-1,0,1)$$

Luego:

$$A_{ABC}=\frac{1}{2}\left|(-1,0,1)\right|=\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{u}^2$$

- Área de ACD

$$A_{ACD} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD}\right|$$

$$\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{k} - 4\vec{i} \Longrightarrow \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} = (-4, 0, 4)$$

Luego:

$$A_{ACD} = \frac{1}{2}\left|(-4, 0, 4)\right| = \frac{1}{2}\sqrt{32} = 2\sqrt{2}\ \mathrm{u}^2$$

Luego el área que nos pedían es:

$$A = A_{ABD} + A_{ACD} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\ \mathrm{u}^2$$

Volver al examen

3.2.5. Determinar una constante a para que el plano de ecuación $ax + y + z = 2$ forme un ángulo de $\pi/3$ radianes con el plano $z = 0$.

(Junio 03)

- Solución:

Sabemos que la fórmula para hallar el ángulo es:

$$cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}|}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$$

Los vectores normales de cada plano son:

$$\begin{array}{lll} ax + y + z = 2 & \Longrightarrow & \overrightarrow{n_1} = (a, 1, 1) \\ z = 0 & \Longrightarrow & \overrightarrow{n_2} = (0, 0, 1) \end{array}$$

Luego tenemos que

$$cos\alpha = \frac{|(a, 1, 1) \cdot (0, 0, 1)|}{|(a, 1, 1)| \cdot |(0, 0, 1)|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + 2} \cdot 1}$$

Como $\alpha = \pi/3$, sustituyendo resulta:

$$\frac{1}{\sqrt{a^2 + 2}} = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Luego

$$\sqrt{a^2 + 2} = 2 \Longrightarrow a^2 + 2 = 4 \Longrightarrow a^2 = 2 \Longrightarrow a = \pm\sqrt{2}$$

Volver al examen

3.2.6. Calcular la ecuación del plano que pasa por los puntos de coordenadas $(1, 0, 0)$; $(0, 1, 1)$; $(1, 2, 0)$. Determinar la distancia del punto $(2, 1, 1)$ a dicho plano.

(Junio 04)

- Solución:

Vamos a calcular la ecuación del plano que pasa por los tres puntos. Para ello vamos a considerar los tres puntos con los siguientes nombres: $A(1, 0, 0); B(0, 1, 1); C(1, 2, 0)$. Dicho esto, vamos a calcular la ecuación del plano que pasa por el punto A y tiene como vectores directores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

Por tanto tenemos $A(1,0,0), \overrightarrow{AB} = (-1,1,1)$ y $\overrightarrow{AC} = (0,2,0)$.

$$\pi = \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2z - 2(x-1) = -2x - 2z + 2 = 0 \Rightarrow x + z - 1 = 0$$

Una vez hallada la ecuación del plano vamos a calcular la distancia del punto $P(2,1,1)$ a dicho plano.

$$d(P,\pi) = \frac{|2+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} \text{ u.}$$

Volver al examen

3.2.7. Determinar las coordenadas de un punto que diste 2 unidades de la recta

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

(Junio 05)

- Solución:

Basta con tomar un vector perpendicular al vector director de la recta ($\vec{u}$) y un punto A de la misma. Le sumamos a dicho punto un vector de módulo 2 y que tenga la dirección y sentido del vector perpendicular calculado. De entrada tenemos que el punto A puede ser $A(1,0,1)$ y que el vector director puede ser $\vec{u} = (1,1,-1)$. Un vector perpendicular a $\vec{u}$ puede ser $\vec{v} = (0,1,1)$, pues tenemos que:

$$\vec{u} \perp \vec{v}, \text{ pues } (0,1,1).(1,1,-1) = 0$$

Falta por encontrar un vector de la dirección de $\vec{v}$ pero de módulo 2. Por ejemplo podemos tomar $\vec{w} = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Con estos datos, el punto buscado es:

$$P = A + \vec{w} = (1,0,1) + (0,\sqrt{2},\sqrt{2}) = (1,\sqrt{2},1+\sqrt{2})$$

Volver al examen

3.2.8. Calcula el ángulo que forma el plano $x+y+z=0$ con la recta de ecuaciones $x+y=1$, $y+z=1$.

(Septiembre 06)

- Solución:

Para hallar el ángulo vamos a utilizar la fórmula:

$$cos(90^o - \alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

donde $\vec{u}$ es el vector director de la recta y $\vec{n}$ el vector normal al plano. Vamos a calcularlos.

- Empezemos por el plano $x+y+z=0$, cuyo vector normal es $\vec{n} = (1,1,1)$.
- El vector director de la recta vamos a obtenerlo haciendo el producto vectorial de los vectores normales ($\overrightarrow{n_1}$ y $\overrightarrow{n_2}$) de los planos que determinan la recta. Dichos vectores normales son:

$$x + y = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{n_1} = (1,1,0)$$

$$y + z = 1 \Longrightarrow \overrightarrow{n_2} = (0, 1, 1)$$

Por tanto el vector director será:

$$\vec{u} = \overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} - \vec{j} \Longrightarrow \vec{u} = (1, -1, 1)$$

Por tanto el coseno del ángulo buscado es:

$$cos(90^o - \alpha) = \frac{|(1,1,1) \cdot (1,-1,1)|}{\sqrt{1+1+1} \cdot \sqrt{1+1+1}} = \frac{|1-1+1|}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{1}{3}$$

En consecuencia:

$$90^o - \alpha = arccos\frac{1}{3} \Longrightarrow 90^o - \alpha = 70^o31'42'' \Longrightarrow \alpha = 90^o - 70^o31'42'' = 19^o28'18''$$

Volver al examen

3.2.9. Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano $x + y + z = 1$ con los ejes coordenados.

(Septiembre 07)

- Solución:

Vamos a calcular las coordenadas de los vértices del triángulo.

- Eje X $\Longrightarrow (y = 0; z = 0) \Longrightarrow x = 1 \longrightarrow A(1, 0, 0)$

- Eje Y $\Longrightarrow (x = 0; z = 0) \Longrightarrow y = 1 \longrightarrow B(0, 1, 0)$

- Eje Z $\Longrightarrow (x = 0; y = 0) \Longrightarrow z = 1 \longrightarrow C(0, 0, 1)$

Conocidos los vértices vamos a calcular el área que nos piden. Sabemos que:

$$A_T = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|$$

Las coordenadas de los vectores son $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, 0)$; $\overrightarrow{AC} = (-1, 0, 1)$.
El producto vectorial de ambos es:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{k} + \vec{j}$$

Por tanto:

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (1, 1, 1)$$

El área buscada será:

$$A_T = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{1+1+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2$$

Volver al examen

3.2.10.

a) Determina la posición relativa de plano $x - y + z = 2$ y la recta de ecuaciones

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1}$$

b) Calcula la distancia entre la recta y el plano anteriores.

(Septiembre 07)

- Solución:

a) El vector normal del plano es

$$x - y + z = 2 \Longrightarrow \vec{n} = (1, -1, 1)$$

Ahora veremos el vector director y un punto de la recta:

$$\frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-1} \Longrightarrow \vec{u} = (2, 1, -1) \text{ y } B = (0, -1, -2)$$

Tenemos que $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 - 1 - 1 = 0 \Longrightarrow$ La recta es paralela al plano o está contenida en él.

Si $B \in \pi$ entonces la recta estaría contenida en el plano, pero al sustituir B en π tenemos:

$$0 + 1 - 2 \neq 2$$

Luego la recta es paralela al plano.

b) Vamos a calcular la distancia de la recta al plano.

$$d(r, \pi) = d(B, \pi) = \frac{|0 + 1 - 2 - 2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\ u$$

Volver al examen

3.2.11.

a) Compruebe que la recta $r : \left\{ \begin{array}{rcccc} x = & 1 & + & \lambda \\ y = & & & \lambda \\ z = & & & \lambda \end{array} \right.$ **es perpendicular al plano** $\Pi : x + y + z = 1$**.**

b) Calcule los dos puntos de la recta r cuya distancia al plano Π es igual a $\sqrt{3}$ unidades.

(Septiembre 09)

- Solución:

Vamos a responder en primer lugar al primer apartado. Para comprobar lo que nos piden tenemos que probar que el vector director de la recta tiene la misma dirección que el vector normal del plano, es decir, son proporcionales.

El vector director de r es $\vec{d} = (1, 1, 1)$ y el vector normal del plano Π es $\vec{n} = (1, 1, 1)$, luego r es perpendicular a Π.

Para resolver el segundo apartado vamos a coger un punto genérico de la recta r, que tienen la forma $P(1 + \lambda, \lambda, \lambda)$.

Vamos a calcular la distancia de estos puntos al plano Π e imponer que dicha distancia valga $\sqrt{3}$.

$$d(P,\Pi) = \frac{|1+\lambda+\lambda+\lambda-1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow |3\lambda| = 3$$

Por tanto tenemos que:

$$|3\lambda| = 3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow P_1(2,1,1) \\ 3\lambda = -3 \Rightarrow \lambda = -1 \Rightarrow P_2(0,-1,-1) \end{array} \right.$$

Volver al examen

3.2.12. Calcula el ángulo que forma el plano $\sqrt{3}x - z = 3$ con la recta de ecuaciones $x + y = 1$, $y - x = -1$ (Los ángulos se miden en radianes)

(Junio 10 - Fase general)

- Solución:

La fórmula para calcular el ángulo pedido sería:

$$sen\alpha = \frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}$$

El vector normal al plano es $\vec{n} = \left(\sqrt{3}, 0, -1\right)$.

Para hallar el vector director de la recta vamos a pasar la ecuación de la misma a paramétricas. Resolvemos el sistema haciendo $z = \lambda$. Por reducción obtenemos que:

$$2y = 0 \Longrightarrow y = 0$$

Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos que $x = 1$. Por tanto, la ecuación paramétrica de la recta es:

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{array} \right.$$

de lo que deducimos que el vector director sería $\vec{v} = (0,0,1)$.

Ya que tenemos todos los datos vamos a calcular el ángulo:

$$sen\alpha = \frac{\left|\sqrt{3}\cdot 0 + 0\cdot 0 - 1\cdot 1\right|}{\sqrt{1}\cdot\sqrt{3+1}} = \frac{1}{2}$$

En consecuencia:

$$\alpha = arcsen\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\ rad$$

Volver al examen

3.2.13. Determine la relación que deben cumplir λ y μ para que la distancia del punto $P = (\lambda, 1, \mu)$ al plano determinado por los puntos $A = (1,1,1)$, $B = (1,0,0)$ y $C = (0,2,1)$ sea igual a 1.

(Junio 10 - Fase específica)

- Solución:

Vamos a calcular la ecuación general del plano. Dicho plano puede venir determinado por A, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$. Tenemos que $A(1,1,1)$, $\overrightarrow{AB} = (0,-1,-1)$ y $\overrightarrow{AC} = (-1,1,0)$.

Por tanto la ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = y-1-(z-1)+x-1 = x+y-z-1=0$$

En consecuencia tenemos que el plano es $x+y-z-1=0$. La distancia del punto P al plano es:

$$d(P,\Pi) = \frac{|\lambda+1-\mu-1|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{|\lambda-\mu|}{\sqrt{3}}$$

Para que la distancia sea 1 tiene que cumplirse que:

$$\frac{|\lambda-\mu|}{\sqrt{3}} = 1 \Longrightarrow |\lambda-\mu| = \sqrt{3}$$

Volver al examen

3.2.14. **Fijados los puntos $A=(1,0,0)$ y $B=(0,1,0)$, obtenga la relación que deben cumplir los número reales λ y μ para que el punto $P=(\lambda,\mu,0)$ sea tal que el triángulo ABP tenga área igual a 1.**

(Septiembre 10 - Fase general)

- Solución:

Vamos a construir los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AP}$.
Tenemos que $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$ y que $\overrightarrow{AP}=(\lambda-1,\mu,0)$.
El área del triángulo se calcula usando la fórmula

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AP}\right|$$

Calculemos primero el producto vectorial

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ \lambda-1 & \mu & 0 \end{vmatrix} = -\mu\vec{k}-(\lambda-1)\vec{k} = (-\lambda-\mu+1)\vec{k}$$

Por tanto

$$\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AP}\right| = |-\lambda-\mu+1|$$

Y en consecuencia:

$$A = \frac{|-\lambda-\mu+1|}{2} = 1 \Longrightarrow |-\lambda-\mu+1| = 2 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} -\lambda-\mu+1=2 \Longrightarrow \mu=-\lambda-1 \\ \lambda+\mu-1=2 \Longrightarrow \mu=-\lambda+3 \end{array}\right.$$

Volver al examen

3.2.15. **Sea r la recta que pasa por los puntos $A=(1,0,0)$ y $B=(1,-1,0)$, y sea s la recta que pasa por los puntos $C=(0,1,1)$ y $D=(1,0,-1)$.**

a) Calcule el plano Π que contiene a s y es paralelo a r.

b) Calcule la distancia entre las rectas r y s.

(Septiembre 11)

- Solución:

Vamos a calcular antes de nada las ecuaciones de r y s.

- r viene determinada por A y $\overrightarrow{AB}$. Es fácil ver que $\overrightarrow{AB}=(0,-1,0)$.
- s viene determinada por C y $\overrightarrow{CD}$. Es fácil ver que $\overrightarrow{CD}=(1,-1,-2)$.

Vamos a contestar a los apartados.

a) Para construir el plano vamos a usar el punto C y el vector $\overrightarrow{CD}$ (pues $s\subset\Pi$) y el vector $\overrightarrow{AB}$ (pues $r\parallel\Pi$). En paramétricas tenemos:

$$\Pi:\left\{\begin{array}{rcccc} x= & & & + & \mu \\ y= & 1 & - & \lambda & - & \mu \\ z= & 1 & & - & 2\mu \end{array}\right.$$

La ecuación general será:

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=2x+(z-1)=0\Longrightarrow 2x+z=1$$

b) Como sus vectores directores no son proporcionales las rectas r y s se cortan o se cruzan. Vamos a aplicar, para calcular la distancia, la fórmula de dos rectas que se cruzan, pues si se cortan la distancia dará 0.

$$d(r,s)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AC},\vec{u},\vec{v}\right]\right|}{|\vec{u}\wedge\vec{v}|}$$

Vamos calcular primero el producto mixto y el producto vectorial. Tomamos $\vec{u}=\overrightarrow{AB}$ y $\vec{v}=\overrightarrow{CD}$.

$$\left[\overrightarrow{AC},\vec{u},\vec{v}\right]=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=-2+1=-1$$

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}=2\vec{i}+\vec{k}\Longrightarrow \vec{u}\wedge\vec{v}=(2,0,1)$$

Luego:

$$d(r,s)=\frac{|-1|}{|(2,0,1)|}=\frac{1}{\sqrt{4+1}}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}\,u$$

Volver al examen

3.2.16.

a) Calcule las ecuaciones implicitas de la recta r que pasa por los puntos $A=(1,0,0)$ y $B=(-1,0,-1)$.

b) De todos los planos que contienen a la recta r, obtenga uno cuya distancia al punto $C=(0,-1,0)$ sea igual a 1.

(Septiembre 11)

- Solución:

a) Vamos a usar el punto A y el vector $\overrightarrow{AB}$.
El vector buscado es: $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, -1)$. Por comodidad vamos a usar $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 1)$.
La recta en forma continua será:
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{0} = \frac{z}{1}$$
La ecuación implicita es:
$$\left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x - 1 = 2z \end{array}\right] \Longrightarrow \left.\begin{array}{l} y = 0 \\ x - 2z = 1 \end{array}\right]$$

b) Un plano que contenga a r tiene que pasar por un punto de r y su vector normal ser ortogonal al vector director de r. El plano será $\Pi \equiv ax + by + cz = d$.
Como $A \in \Pi \Longrightarrow a = d \Longrightarrow \Pi \equiv ax + by + cz = a$.
Además tenemos que:
$$\overrightarrow{AB} \perp \vec{n} \Longrightarrow (2, 0, 1) \cdot (a, b, c) = 0 \Longrightarrow 2a + c = 0 \Longrightarrow c = -2a$$
En consecuencia nuestro plano tiene una ecuación de la forma $\Pi \equiv ax + by - 2az = a$.
Impongamos la condición de la distancia:
$$d(C, \Pi) = \frac{|-b-a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + 4a^2}} = 1 \Longrightarrow \frac{|-b-a|}{\sqrt{5a^2 + b^2}} = 1 \Longrightarrow \sqrt{5a^2 + b^2} = |-b-a|$$
Nos piden un plano que cumpla lo dicho. Basta con tomar $a = 0$ y $b = 1$, que cumplen las condiciones. El plano obtenido es
$$\Pi \equiv y = 0$$

Volver al examen

3.2.17. Calcule la distancia del punto $P = (3, -1, 2)$ a la recta

$$r : \left\{\begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{array}\right. .$$

(Junio 12)

- Solución:

Vamos a pasar primero la ecuación de la recta a paramétricas, pues necesitamos para aplicar la fórmula un punto y el vector director de la misma.
$$r : \left\{\begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{array}\right.$$

Hacemos $z = \lambda$. Sustituyendo en la segunda ecuación tenemos $x = -\lambda$. Sustituyendo en la primera tendríamos:
$$-\lambda - y + \lambda = 1 \Longrightarrow y = -1$$

La ecuación paramétrica de la recta es:
$$\left.\begin{array}{rcrr} x & = & & -\lambda \\ y & = & -1 & \\ z & = & & \lambda \end{array}\right] \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} A = (0, -1, 0) \\ \vec{u} = (-1, 0, 1) \end{array}\right.$$

Para calcular la distancia usamos la fórmula:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\wedge\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$$

En nuestro caso $\overrightarrow{AP}=(3,0,2)$.
Por tanto:

$$\overrightarrow{AP}\wedge\vec{u} \;=\; \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{j}-3\vec{j}=-5\vec{j}\Longrightarrow \overrightarrow{AP}\wedge\vec{u}=(0,-5,0)$$

En consecuencia:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{AP}\wedge\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{1+1}}=\frac{5}{\sqrt{2}}\;u=\frac{5\sqrt{2}}{2}\;u$$

Volver al examen

3.2.18. Dados el plano Π de ecuación $x+z=1$ y los puntos $A=(1,0,0)$ y $B=(0,1,0)$, calcule los valores de c para los que el punto $P=(0,0,c)$ cumple "área del triángulo ABP"="distancia de P a Π".

(Septiembre 12)

- Solución:

El área del triángulo ABP (A_T) es:

$$A_T=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AP}\right|$$

Tenemos que $\overrightarrow{AB}=(-1,1,0)$ y $\overrightarrow{AP}=(-1,0,c)$. Vamos a realizar el producto vectorial.

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & c \end{vmatrix}=c\vec{i}+\vec{k}+c\vec{j}\Longrightarrow \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AP}=(c,c,1)$$

Luego:

$$A_T=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AP}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{c^2+c^2+1}=\frac{1}{2}\sqrt{2c^2+1}$$

La distancia de P a Π es:

$$d(P,\Pi)=\frac{|0+c-1|}{\sqrt{2}}=\frac{|c-1|}{\sqrt{2}}$$

Por tanto, igualando el área y la distancia tenemos:

$$\begin{aligned} A_T &= d(P,\Pi) \\ \frac{1}{2}\sqrt{2c^2+1} &= \frac{|c-1|}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2c^2+1}\sqrt{2}}{2} &= |c-1| \\ \sqrt{\frac{4c^2+2}{4}} &= |c-1| \\ \sqrt{c^2+\frac{1}{2}} &= |c-1| \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado en ambos miembros de la igualdad tenemos:

$$\begin{aligned} c^2 + \frac{1}{2} &= c^2 + 1 - 2c \\ 2c &= \frac{1}{2} \\ c &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Volver al examen

3.2.19. En $\mathbb{R}^3$, calcule la distancia del punto $P = (1, -1, 2)$ a la recta r que pasa por los puntos $A = (0, -1, 1)$ y $B = (1, 0, 1)$.

(Septiembre 13)

- Solución:

La recta va a venir determinada por A y $\overrightarrow{AB}$. Para aplicar la fórmula de la distancia de un punto a una recta vamos a calcular también el vector $\overrightarrow{AP}$.

Los vectores resultantes son $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 0)$ y $\overrightarrow{AP} = (1, 0, 1)$.

Sabemos que la fórmula de la distancia es:

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$$

Vamos a calcular el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} - \vec{k} - \vec{j} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = (1, -1, -1)$$

Vamos a calcular los módulos de dichos vectores:

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{1 + 1 + 1} = \sqrt{3}$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

Por tanto, la distancia requerida es:

$$d(P, r) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\, u = \frac{\sqrt{6}}{2}\, u$$

Volver al examen

3.2.20. Fijados los puntos $A = (1, 1, 0)$ y $B = (1, 0, 1)$, calcule todos los puntos de la forma $X = (0, \lambda, \mu)$ para los que el triángulo ABX es equilátero.

(Septiembre 13)

- Solución:

Vamos a calcular los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AX}$ y $\overrightarrow{BX}$.

$$\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1)\ ;\ \overrightarrow{AX} = (-1, \lambda - 1, \mu)\ ;\ \overrightarrow{BX} = (-1, \lambda, \mu - 1)$$

Vamos a calcular los módulos de dichos vectores y luego los igualaremos para que sea equilátero, lo que dará lugar a un sistema de ecuaciones que resolveremos.

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{AB}\right| &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \left|\overrightarrow{AX}\right| &= \sqrt{1+(\lambda-1)^2+\mu^2} = \sqrt{1+\lambda^2-2\lambda+1+\mu^2} \\ \left|\overrightarrow{BX}\right| &= \sqrt{1+\lambda^2+(\mu-1)^2} = \sqrt{1+\lambda^2+\mu^2-2\mu+1} \end{aligned}$$

De igualar al primero los otros dos obtenemos sendas ecuaciones que formarán nuestro sistema.

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{AX}\right| &\Longrightarrow \sqrt{1+\lambda^2-2\lambda+1+\mu^2} = \sqrt{2} \Longrightarrow \lambda^2-2\lambda+\mu^2 = 0 \\ \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BX}\right| &\Longrightarrow \sqrt{1+\lambda^2+\mu^2-2\mu+1} = \sqrt{2} \Longrightarrow \lambda^2+\mu^2-2\mu = 0 \end{aligned}$$

Restando las dos ecuaciones tenemos:

$$-2\lambda+2\mu = 0 \Longrightarrow -2\lambda = -2\mu \Longrightarrow \lambda = \mu$$

Sustituyendo en cualquiera de ellas obtenemos:

$$\lambda^2-2\lambda+\lambda^2 = 0 \Longrightarrow 2\lambda^2-2\lambda = 0 \Longrightarrow 2\lambda(\lambda-1) = 0 \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{array}\right.$$

Los puntos buscados son:

$$\begin{aligned} \lambda = \mu = 0 &\Longrightarrow X_1 = (0,0,0) \\ \lambda = \mu = 1 &\Longrightarrow X_2 = (0,1,1) \end{aligned}$$

Volver al examen

3.2.21.

a) **Calcule el valor del parámetro k para que la recta $r : \left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x-y-z=1 \end{array}\right.$ sea paralela al plano Π de ecuación $kx+y+kz=1$.**

b) **Para el valor de k obtenido en el apartado anterior, calcule la distancia de la recta r al plano Π.**

(Julio 14)

- Solución:

Para que la recta sea paralela al plano, el vector director de la misma tiene que ser ortogonal al vector normal del plano.

Como en el siguiente apartado vamos a necesitar un punto de la recta además del vector sería bueno resolver el sistema que defina la recta. De esa forma obtenemos punto y vector. Vamos pues a resolverlo.

Podemos transformar z en un parámetro $(z=\lambda)$.

El sistema quedaría de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} x+y &= -\lambda \\ x-y &= 1+\lambda \end{aligned}$$

La resolución es trivial y daría la siguiente ecuación paramétrica de la recta.

$$\left.\begin{array}{rrrr} x = & \dfrac{1}{2} & & \\ y = & -\dfrac{1}{2} & - & \lambda \\ z = & & & \lambda \end{array}\right\}$$

Luego un punto de la recta podría ser $P = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, 0\right)$ y el vector sería $\vec{u} = (0, -1, 1)$.

Un vector normal al plano es $\vec{n} = (k, 1, k)$. Por tanto:

$$r \parallel \Pi \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow (0, -1, 1) \cdot (k, 1, k) = -1 + k = 0 \Longrightarrow k = 1$$

El plano resultante sería $\pi \equiv x + y + z = 1$.

Vamos a calcular la distancia que nos piden. Hay que tener en cuenta que $r \parallel \pi$, por tanto la distancia de la recta al plano será la distancia de cualquier punto de la recta a dicho plano.

Como tenemos el punto P y la ecuación del plano, la distancia sería.

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{\left|\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 0 - 1\right|}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} u$$

Volver al examen

3.2.22. En $\mathbb{R}^3$, considere el plano $\Pi : ax + by + cz = d$, la recta $r : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, y el punto $P = (1, 0, 1)$.

a) Obtenga cómo deben ser los números reales *a, b, c, d* para que el plano Π contenga a la recta r.

b) Supuesto que Π contiene a r, pruebe que la distancia del punto P a Π es menor o igual a 1: $d(P, \Pi) \leqslant 1$.

(Junio 15)

- Solución:

Es importante darnos cuenta que la recta r no es otra que el eje Z. Por tanto tenemos que su vector director es $\vec{k} = (0, 0, 1)$ y que pasa por el origen de coordenadas. Vamos a utilizar estas dos ideas para resolver el primer apartado.

Como $r \subset \Pi$ tendremos que el vector director de r tiene que ser ortogonal al vector normal del plano. Por tanto:

$$(a, b, c) \cdot (0, 0, 1) = 0 \Longrightarrow c = 0$$

Además el plano pasa por el origen, ya que lo hace r, y por tanto:

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = d \Longrightarrow d = 0$$

Luego las ecuaciones de los planos que cumplen lo que queremos es:

$$ax + by = 0$$

Una vez encontrada la ecuación es fácil comprobar el segundo apartado, pues

$$d(P,\Pi)=\frac{|a\cdot 1+b\cdot 0|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Esta expresión vale uno cuando $b=0$, pero para cualquier otro valor de b el denominador es mayor que el numerador y por tanto el cociente será menor que 1.

Volver al examen

3.2.23. Dados en $\mathbb{R}^3$ los planos $\Pi_1\equiv x+y-z=1$ y $\Pi_2\equiv x-y+z=1$, obtenga el conjunto H de los puntos de $\mathbb{R}^3$ que distan igual de dichos planos.

(Junio 15)

- Solución:

Otra forma de enunciar este problema sería pedir los planos bisectores a los dos planos que nos dan. Consideremos que los puntos que van a cumplir la condición que nos piden son de forma genérica $P(x,y,z)$.

$$d(P,\Pi_1)=\frac{|x+y-z-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

$$d(P,\Pi_2)=\frac{|x-y+z-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}$$

Igualando tenemos.

$$d(P,\Pi_1)=d(P,\Pi_2)$$

$$\frac{|x+y-z-1|}{\sqrt{3}}=\frac{|x-y+z-1|}{\sqrt{3}}$$

$$|x+y-z-1|=|x-y+z-1|$$

De aquí deducimos dos posibilidades, que van a ser los dos planos bisectores que estamos calculando, pues si dos valores absolutos son iguales entonces lo que tienen dentro tienen que ser iguales u opuestos.

- $x+y-z-1=x-y+z-1\Longrightarrow 2y-2z=0\Longrightarrow \mathbf{y-z=0}$
- $x+y-z-1=-x+y-z+1\Longrightarrow 2x-2=0\Longrightarrow \mathbf{x=1}$

Volver al examen

3.2.24.

a) **Calcule las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $A=(0,1,1)$ y $B=(1,1,-1)$.**

b) **Calcule todos los puntos de la recta r que equidistan de los planos $\Pi_1\equiv x+y=-2$ y $\Pi_2\equiv x-z=1$.**

(Julio 15)

- Solución:

Vamos a calcular la ecuación de la recta r. Para ello vamos a usar el punto A y el vector $\overrightarrow{AB}$. Tenemos queda

$$\begin{array}{r} A = (0,1,1) \\ \\ \overrightarrow{AB} = (1,0,-2) \end{array} \Longrightarrow \left| \begin{array}{lcccc} x & = & & & \lambda \\ y & = & 1 & & \\ z & = & 1 & - & 2\,\lambda \end{array} \right.$$

Para resolver el segundo apartado vamos a utilizar un punto genérico de la recta y vamos a calcular λ para que cumpla la condición que nos dan. Sustituyendo λ sacaremos los puntos que nos piden.

Un punto genérico de nuestra recta sería

$$P(\lambda, 1, 1-2\,\lambda)$$

Imponemos la condición y tenemos

$$\begin{aligned} d(P,\Pi_1) &= d(P,\Pi_2) \\ \frac{|\lambda+1+2|}{\sqrt{1+1}} &= \frac{|\lambda-1+2\,\lambda-1|}{\sqrt{1+1}} \\ |\lambda+3| &= |3\,\lambda-2| \end{aligned}$$

Esta igualdad se cumple cuando

- $\lambda+3 = 3\,\lambda-2 \Longrightarrow -2\,\lambda = -5 \Longrightarrow \lambda = \dfrac{5}{2}$
- $\lambda+3 = -(3\,\lambda-2) \Longrightarrow \lambda+3 = -3\,\lambda+2 \Longrightarrow 4\,\lambda = -1 \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{1}{4}$

Sustituyendo cada valor de λ en el punto genérico obtenemos los dos puntos buscados.

- $\lambda = \dfrac{5}{2} \Longrightarrow P_1 = \left(\dfrac{5}{2}, 1, -4\right)$
- $\lambda = -\dfrac{1}{4} \Longrightarrow P_2 = \left(-\dfrac{1}{4}, 1, \dfrac{3}{2}\right)$

Volver al examen

3.2.25. Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A = (1,1,-1)$ y $B = (0,1,1)$ y los planos $\Pi_1 : x+y = 0$ y $\Pi_2 : x-z = 0$.

a) Calcule las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos A y B.

b) Obtenga un punto P de la recta r cuya distancia al plano Π_1 sea el doble de su distancia al plano Π_2, esto es, $d(P,\Pi_1) = 2\,d(P,\Pi_2)$.

(Junio 16)

- Solución:

Para encontrar la ecuación de la recta que nos piden vamos a usar como punto, por ejemplo, B y como vector director de la misma el vector $\overrightarrow{AB}$.

Con estos datos la ecuación resultante es:

$$r : \left\{ \begin{array}{lccc} x = & & - & \lambda \\ y = & 1 & & \\ z = & 1 & + & 2\lambda \end{array} \right.$$

Con esto terminamos el primer apartado del ejercicio.

Vamos a calcular los puntos de la recta que cumplen la condición que nos piden. Para eso nos viene muy bien el apartado anterior, pues un punto genérico de la recta r tiene la forma $P(-\lambda, 1, 1+2\lambda)$

Se trata de encontrar los valores de λ que cumplen la igualdad $d(P,\Pi_1) = 2\,d(P,\Pi_2)$.

$$\begin{aligned} d(P,\Pi_1) &= 2\,d(P,\Pi_2) \\ \frac{|-\lambda+1|}{\sqrt{1+1}} &= \frac{2|-\lambda-1-2\lambda|}{\sqrt{1+1}} \\ |-\lambda+1| &= 2|-1-3\lambda| \end{aligned}$$

Esta igualdad se cumple cuando lo que hay dentro de los valores absolutos, o es igual, o son opuestos.

- $-\lambda+1 = 2(-1-3\lambda) \Longrightarrow -\lambda+1 = -2-6\lambda \Longrightarrow 5\lambda = -3 \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{3}{5} \Longrightarrow P_1 = \left(\dfrac{3}{5}, 1, -\dfrac{1}{5}\right)$.
- $-\lambda+1 = 2(1+3\lambda) \Longrightarrow -\lambda+1 = 2+6\lambda \Longrightarrow -7\lambda = 1 \Longrightarrow \lambda = -\dfrac{1}{7} \Longrightarrow P_2 = \left(\dfrac{1}{7}, 1, \dfrac{5}{7}\right)$.

que coinciden con los puntos A y B del enunciado del problema.

Volver al examen

3.2.26. En $\mathbb{R}^3$, sea Π el plano de ecuación $x - z = 2$, y sea r la recta que pasa por los puntos $A = (1,0,0)$ y $B = (0,0,b)$.

a) Calcule un vector director de la recta r.

b) Determine b para que r y Π sean perpendiculares.

c) Determine b para que r y Π sean paralelos.

d) ¿Está r contenida en Π para algún valor de b? Razone la respuesta.

(Julio 16)

- Solución:

En primer lugar tenemos que un vector normal al plano que nos dan es $\vec{n} = (1,0,-1)$. Lo necesitaremos más adelante.

En el primer apartado nos piden hallar un vector director de la recta. Vamos a tomar el vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-1,0,b)$.

En el segundo apartado, para que $r \perp \Pi$ tiene que ocurrir que $\vec{u} \parallel \vec{n}$, es decir, tienen que ser proporcionales.

$$\frac{-1}{1} = \frac{b}{-1} \Longrightarrow b = 1$$

Veamos el tercer apartado. Para que $r \parallel \Pi$ tiene que ocurrir que $\vec{u} \perp \vec{n}$, es decir, $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = -1 - b = 0 \Longrightarrow b = -1$$

Por último, vamos a ver el cuarto apartado. Para que la recta esté contenida en el plano, todos los puntos de la recta tendrían que estar en el plano, luego el punto A de la recta tendría que estar en el plano, es decir, tendría que cumplir la ecuación del plano. Es fácil ver que si sustituimos las coordenadas de A en la ecuación del plano no se cumple la igualdad, por tanto la recta no puede estar contenida en ningún caso.

Volver al examen

3.2.27. En $\mathbb{R}^3$ se consideran las rectas de ecuaciones:

$$r : \left\{ \begin{array}{rcl} 3x + 2y & = & 0 \\ x \,-\, 2\,z & = & -8 \end{array} \right. , \qquad s : \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{a} = \frac{z-1}{-1} .$$

a) Halle el valor de a para que r y s sean paralelas.

b) Para el valor de a obtenido en el anterior apartado, calcule la distancia entre las rectas r y s.

(Junio 17)

- Solución:

Vamos a pasar la ecuación de $\mathbf{r}$ a paramétricas para sacar un punto y un vector director de la misma.

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y = 0 \\ x - 2z = -8 \end{array} \right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \lambda \\ \\ y = \dfrac{-3}{2}\lambda \\ \\ z = 4 + \dfrac{1}{2}\lambda \end{array} \right.$$

Como punto de la recta podemos coger $A(0,0,4)$ y como vector director $\vec{v} = \left(1, \dfrac{-3}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, aunque, por comodidad, podemos tomar $\vec{v} = (2,-3,1)$.

Tenemos por tanto queda

$$r \equiv \left[\begin{array}{l} A(0,0,4) \\ \vec{v} = (2,-3,1) \end{array} \right. \quad \text{y} \quad s \equiv \left[\begin{array}{l} B(-1,3,1) \\ \vec{u} = (-2,a,-1) \end{array} \right.$$

Para que sean paralelas los vectores directores tienen que ser proporcionales, luego

$$\frac{2}{-2} = \frac{-3}{a} = \frac{1}{-1} \Longrightarrow 2a = 6 \Longrightarrow a = 3$$

Además, para ese valor, si se sustituye A en $\mathbf{s}$ veo que no se cumple la ecuación

$$\frac{1}{-2} \neq \frac{-3}{3}$$

Vamos a calcular la distancia entre las dos rectas. Como son paralelas, dicha distancia coincidirá con la $d(A,s)$.

$$d(r,s) = d(A,s) = \frac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{AB}\right|}{|\vec{u}|}$$

Vamos a calcular $\overrightarrow{AB}$ y a realizar el producto vectorial.

$$\overrightarrow{AB} = (-1,3,-3)$$

Luego

$$\vec{u} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + \vec{j} - 6\vec{k} + 3\vec{k} - 6\vec{j} + 3\vec{i} = -6\vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$$

Por tanto

$$d(r,s) = d(A.s) = \frac{\sqrt{36+25+9}}{\sqrt{4+9+1}} = \frac{70}{14} = \sqrt{5}\, u^2$$

Volver al examen

3.2.28. Considere en $\mathbb{R}^3$ los puntos $A = (1,2,1)$, $B = (-2,-1,-3)$, $C = (0,1,-1)$ y $D = (0,3,-1)$, y sea r la recta que pasa por A y B.

a) Calcule ecuaciones paramétricas de r.

b) Obtenga un punto P de la recta r tal que la distancia de C a P sea igual a la distancia de D a P.

(Julio 17)

- Solución:

Vamos a calcular el vector $\overrightarrow{AB}$ que usaremos como vector director de r.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-3,-3,-4)$$

La recta r puede quedar determinada por cualquiera de los dos puntos, A o B, y por el vector $\vec{u}$ que acabamos de calcular. Sus ecuaciones paramétricas serán

$$\left.\begin{array}{l} x = 1-3\lambda \\ y = 2-3\lambda \\ z = 1-4\lambda \end{array}\right\}$$

Para hacer el segundo apartado vamos a considerar un punto P genérico de la recta y vamos a calcular λ para que se cumpla la condición. Dicho punto tiene la forma $P(1-3\lambda, 2-3\lambda, 1-4\lambda)$.

Para hallar las distancias de las que habla este apartado vamos a calcular los vectores $\overrightarrow{CP}$ y $\overrightarrow{DP}$. Después vamos a calcular sus módulos, que serán las distancias que buscamos.

$$\overrightarrow{CP} = (1-3\lambda, 1-3\lambda, 2-4\lambda) \qquad \overrightarrow{DP} = (1-3\lambda, -1-3\lambda, 2-4\lambda)$$

$$d(C,P) = \left|\overrightarrow{CP}\right| = \sqrt{(1-3\lambda)^2+(1-3\lambda)^2+(2-4\lambda)^2}$$

$$d(D,P) = \left|\overrightarrow{DP}\right| = \sqrt{(1-3\lambda)^2+(-1-3\lambda)^2+(2-4\lambda)^2}$$

Igualando y operando tenemos

$$\begin{array}{rcl} \sqrt{(1-3\lambda)^2+(1-3\lambda)^2+(2-4\lambda)^2} & = & \sqrt{(1-3\lambda)^2+(-1-3\lambda)^2+(2-4\lambda)^2} \\ (1-3\lambda)^2+(1-3\lambda)^2+(2-4\lambda)^2 & = & (1-3\lambda)^2+(-1-3\lambda)^2+(2-4\lambda)^2 \\ (1-3\lambda)^2 & = & (-1-3\lambda)^2 \\ 1+9\lambda^2-6\lambda & = & 1+9\lambda^2+6\lambda \\ -12\lambda & = & 0 \\ \lambda & = & 0 \end{array}$$

Luego el punto buscado no es otro que el propio punto A.

Volver al examen

3.2.29. **Una nave espacial sigue una trayectoria aproximadamente recta dada por la ecuación** $r \equiv x+1 = \dfrac{y}{2} = 2z+1$**. Se acerca a un asteroide situado en el punto** $P=(1,1,2)$**. Calcule:**

a) La distancia mínima a la que la nave pasa el asteroide.

b) El punto de la trayectoria de la nave más cercano al asteroide.

(Junio 18 - Anulado)

- Solución:

Vamos a escribir la ecuación de la recta en forma continua

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

De aquí deducimos que un punto de la recta podría ser $A\left(-1,0,-\dfrac{1}{2}\right)$ y un vector director de la misma podría ser $\vec{u} = \left(1,2,\dfrac{1}{2}\right)$.

El primer apartado nos pide la distancia del punto P a la recta, llamémosla r. La fórmula de la distancia de un punto a una recta es

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$$

Tenemos que el vector $\overrightarrow{AP} = \left(2,1,\dfrac{5}{2}\right)$

Vamos a calcular el producto vectorial del numerador.

$$\overrightarrow{AP} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & \frac{5}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\vec{i} + \frac{5}{2}\vec{j} + 4\vec{k} - \vec{k} - \vec{j} - 5\vec{i} = -\frac{9}{2} + \frac{3}{2}\vec{j} + 3\vec{k}$$

Luego la distancia buscada es

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \times \vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{\left(-\frac{9}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 9}}{\sqrt{1+4+\frac{1}{4}}} = \frac{\sqrt{\frac{81}{4} + \frac{9}{4} + 9}}{\sqrt{\frac{21}{4}}} = \frac{\sqrt{\frac{126}{4}}}{\sqrt{\frac{21}{4}}} = \sqrt{\frac{126}{21}} = \sqrt{6}\,u$$

Vayamos ahora al apartado b. El punto que nos piden es el punto de corte del plano perpendicular a la recta que pasa por P con dicha recta. El vector director de la recta nos sirve como vector normal del plano. Por tanto el plano tendría la siguiente forma

$$\Pi : x + 2y + \frac{1}{2}z = D$$

Para calcular D vamos a imponer que el punto P pertenece al plano.

$$1+2+1 = D \Longrightarrow D = 4$$

Luego el plano buscado es

$$x + 2y + \frac{1}{2}z = 4 \Longrightarrow 2x + 4y + z = 8$$

Un punto genérico de la recta sería $Q\left(-1+\lambda, 2\lambda, -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda\right)$ y sustituyendo en la ecuación del plano para calcular λ tendríamos

$$-2+2\lambda+8\lambda-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\lambda-8=0 \Longrightarrow \frac{21}{2}\lambda=\frac{21}{2} \Longrightarrow \lambda=1$$

Por lo tanto el punto buscado es $Q(0,2,0)$.

Volver al examen

3.2.30. Sean r la recta dada por el punto $P=(2,-4,1)$ y el vector $\vec{v}=(3,-4,0)$, y el plano $\Pi: 7x-y=8$.

a) Demuestre que r y Π se cortan y calcule el ángulo que forman.

b) Calcule el plano que contiene a r y es perpendicular a Π.

(Junio 18 - Anulado)

- Solución:

Para ver el primer apartado basta con comprobar que los vectores director de la recta y normal del plano no son perpendiculares, es decir, su producto escalar no es cero.

De la ecuación que nos dan del plano deducimos que el vector normal del plano es $\vec{n}=(7,-1,0)$. El director de la recta es $\vec{v}=(3,-4,0)$. Por tanto

$$\vec{v}\cdot\vec{n}=21+4=25\neq 0$$

Por tanto la recta y el plano se cortan.

Vamos a calcular el ángulo que forman. El ángulo que forman recta y plano se calcula usando el seno del ángulo que forman el vector director de la recta y el normal del plano. En consecuencia

$$\text{sen}\ \alpha=\frac{|\vec{v}\cdot\vec{n}|}{|\vec{v}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{25}{5\cdot\sqrt{50}}=\frac{25}{25\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Longrightarrow \alpha=45^{\text{o}}$$

En el segundo apartado nos piden calcular el plano que contiene a r y es perpendicular a Π. Dicho plano, por contener a r, puede venir determinado por el punto P, $\vec{v}$, y por ser perpendicular a Π podemos usar el vector normal de este plano como vector director del que queremos calcular.

Por tanto, el plano que vamos a calcular está determinado por P, $\vec{v}$ y $\vec{n}$

La ecuación del plano sería

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+4 & z-1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 7 & -1 & 0 \end{vmatrix}=25(z-1)=0\Longrightarrow z-1=0$$

Volver al examen

3.2.31. Sean el punto $A=(1,0,1)$ y la recta r dada por el punto $B=(-1,0,2)$ y el vector $\vec{v}=(-1,1,0)$.

a) Calcule la distancia del punto A a la recta r.

b) Calcule el área del triángulo de vértices A, B y O siendo $O=(0,0,0)$.

(Junio 18)

- Solución:

Veamos el primer apartado. Sabemos que

$$d(A,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{v}\right|}{|\vec{v}|}$$

Tenemos que $\overrightarrow{AB} = (-2,0,1)$. Vamos a calcular el producto vectorial del numerador.

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{j} - 2\vec{k} - \vec{i} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \times \vec{v} = (-1,-1,-2)$$

Por tanto

$$d(A,r) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{v}\right|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{1+1+4}}{\sqrt{1+1}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}\ u$$

Veamos el segundo apartado.

Vamos a empezar por calcular los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ y el área será $A_T = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right|$

Obviamente las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$ coinciden con las coordenadas de los puntos A y B.

Hagamos primero el producto vectorial.

$$\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -3\vec{j}$$

Luego

$$A_T = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}\right| = \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}\ u^2$$

Volver al examen

3.2.32. **Sean los puntos $A = (2,0,1)$, $B = (2,0,3)$ y la recta r dada por el punto $C = (1,0,2)$ y el vector $\vec{v} = (-1,0,0)$. Determine los puntos P de la recta r para los cuales el área del triángulo $\widehat{ABP}$ es 2.**

(Julio 18)

- Solución:

Vamos a expresar la ecuación de la recta en forma paramétrica. De ahí saldrá un punto genérico que utilizaremos para resolver el ejercicio.

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - \lambda \\ y = 0 \\ z = 2 \end{array}\right] \Longrightarrow P = (1-\lambda, 0, 2)$$

El área del triángulo puede calcularse mediante

$$A_T = \frac{\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}}{2}$$

Tenemos que $\overrightarrow{AB}=(0,0,2)$ y $\overrightarrow{AP}=(-1-\lambda,0,1)$. Vamos a hacer el producto vectorial.

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AP}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & 2\\ -1-\lambda & 0 & 1\end{vmatrix}=(-2-2\lambda)\vec{j}$$

Luego

$$A_T=\frac{|-2-2\lambda|}{2}=|-1-\lambda|$$

Si igualamos a 2 obtendremos los valores de λ.

$$|-1-\lambda|=2\Longrightarrow\left|\begin{array}{l}-1-\lambda=2\Longrightarrow\lambda=-3\\ -1-\lambda=-2\Longrightarrow\lambda=1\end{array}\right.$$

Luego los puntos buscados son

$$P_1=(4,0,2)\qquad\qquad P_2=(0,0,2)$$

Volver al examen

3.2.33. Sean las rectas $r=\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-5}{-1}=\dfrac{z-2}{4}$ **y** $s=\begin{cases}x-y-z=2\\ 2x+2y-z=4\end{cases}$.

a) Estudie la posición relativa de dichas rectas.

b) Halle la distancia entre ambas rectas.

(Julio 18)

- Solución:

Vamos a calcular un punto y un vector de cada una de las rectas. La recta r, al estar en forma continua, nos los da de forma sencilla.

$$r\equiv A=(3,5,2)\,;\,\vec{u}=(3,-1,4)$$

Para encontrarlos en la recta s tenemos que resolver el sistema. Por ejemplo hacemos $z=\lambda$ y tendríamos

$$\left.\begin{array}{l}x-y=2+\lambda\\ 2x+2y=4+\lambda\end{array}\right]\Longrightarrow\begin{array}{l}2x-2y=4+2\lambda\\ 2x+2y=4+\lambda\end{array}\Longrightarrow 4x=8+3\lambda\Longrightarrow x=2+\frac{3}{4}\lambda$$

Sustituyendo calculamos y

$$2+\frac{3}{4}\lambda-y=2+\lambda\Longrightarrow y=-\frac{1}{4}\lambda$$

Por tanto

$$s\equiv\begin{cases}x= & 2 & + & \dfrac{3}{4}\lambda\\ y= & & - & \dfrac{1}{4}\lambda\\ z= & & & \lambda\end{cases}$$

Por lo tanto

$$s\equiv B=(2,0,0)\,;\,\vec{v}=\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{4},1\right)$$

Vamos a ver ahora la posición relativa de las dos rectas. Primero comparamos los dos vectores directores. Es fácil observar que son proporcionales, por lo tanto marcan la misma dirección. Eso no lleva a afirmar que las rectas se cortan o son paralelas. Para decidir cual de las dos es vamos a calcular el vector $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = (-1, -5, -2)$$

Dicho vector no es proporcional a los anteriores, luego las rectas son paralelas.

Para hallar la distancia basta con calcular la distancia de un punto de una de las rectas a la otra recta. Por ejemplo

$$d(r, s) = d(B, r) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{u}\right|}{|\vec{u}|} \qquad (1)$$

Vamos a calcular el producto vectorial

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -5 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -20\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k} + 15\vec{k} + 4\vec{j} - 2\vec{i} = -22\vec{i} - 2\vec{j} + 16\vec{k}$$

Sustituyendo en (1) tenemos

$$d(r, s) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{484 + 4 + 256}}{\sqrt{9 + 1 + 16}} = \frac{\sqrt{744}}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{372}}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{4836}}{13}\, u$$

Volver al examen

Capítulo 4

Probabilidad y Estadística

4.1. Probabilidad

4.1.1. En una población se sabe que el 80 % de los jóvenes tiene ordenador portátil, el 60 % tiene teléfono móvil, y el 10 % no tiene portátil ni móvil. Si un joven de esa población tiene teléfono móvil, calcule la probabilidad de que dicho joven tenga también ordenador portátil.

(Junio 17)

- Solución:

Vamos a asignarles un nombre a los distintos sucesos. Llamaremos P={Tener portátil} y M={Tener móvil}.

Los datos que nos da el problema son:

$$P(P) = 0'8 \qquad , \qquad P(M) = 0'6 \qquad , \qquad P(\overline{M} \cap \overline{P}) = 0'10$$

De estos datos, usando las leyes de Morgan, tendríamos que

$$P(\overline{M \cup P}) = P(\overline{M} \cap \overline{P}) = 0'10 \Longrightarrow P(M \cup P) = 0'9$$

El problema nos pide una probabilidad condicionada

$$P(P/M) = \frac{P(P \cap M)}{P(M)}$$

De la probabilidad de la unión podemos sacar la probabilidad de la intersección que necesitamos.

$$P(M \cup P) = P(M) + P(P) - P(M \cap P)$$

Despejando la probabilidad de la intersección y sustituyendo tendríamos

$$P(M \cap P) = P(M) + P(P) - P(M \cup P) = 0'6 + 0'8 - 0'9 = 0'5$$

Por tanto

$$P(P/M) = \frac{P(P \cap M)}{P(M)} = \frac{0'5}{0'6} = \frac{5}{6}$$

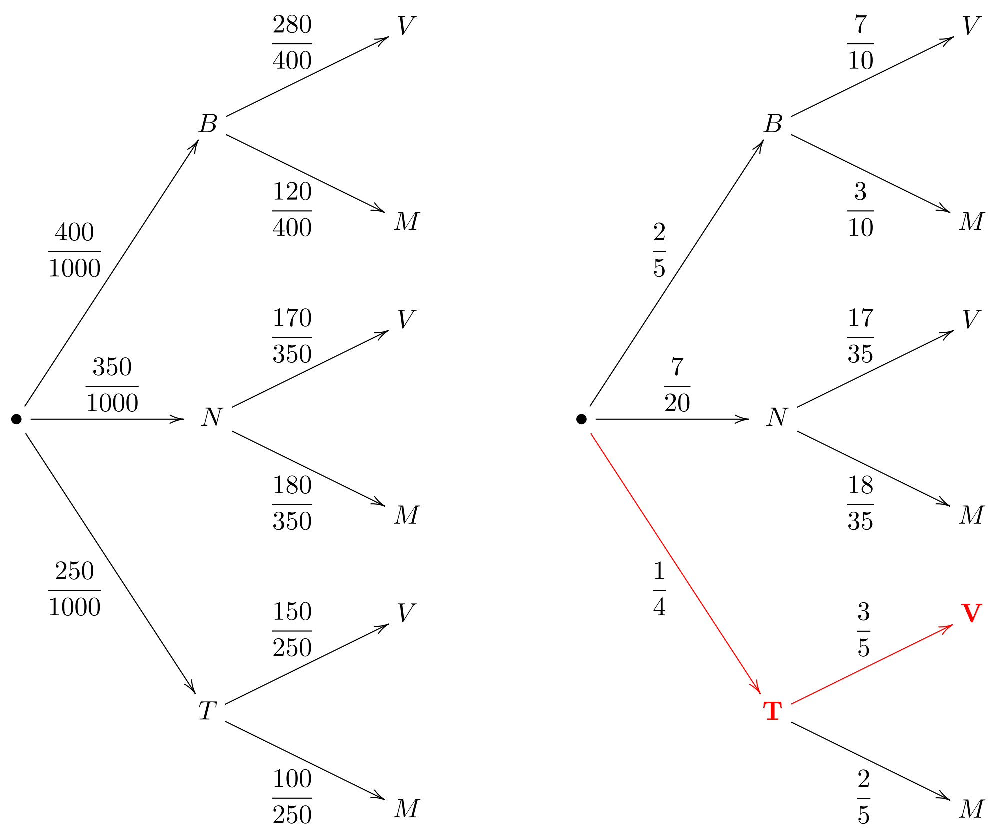
Volver al examen

4.1.2. Una asociación deportiva tiene 1000 socios, el 40 % de ellos mujeres. Están repartidos en tres secciones y cada socio sólo pertenece a una sección. En la sección de baloncesto hay 400 socios, 120 de ellos mujeres, en la de natación hay 350 socios, 180 de ellos mujeres, y en la de tenis están el resto de los socios. Calcule la probabilidad de que un socio seleccionado al azar sea varón y de la sección de tenis.

(Junio 17)

- Solución:

Vamos a construir el diagrama de árbol. Pondremos dos, el primero con los datos que tenemos del enunciado y el segundo con los valores simplificados.



Nos piden sólo un camino, aquel que aparece en el diagrama de la derecha en rojo (tenis y varón), por tanto

$$P(T \cap V) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{5} = \frac{3}{20}$$

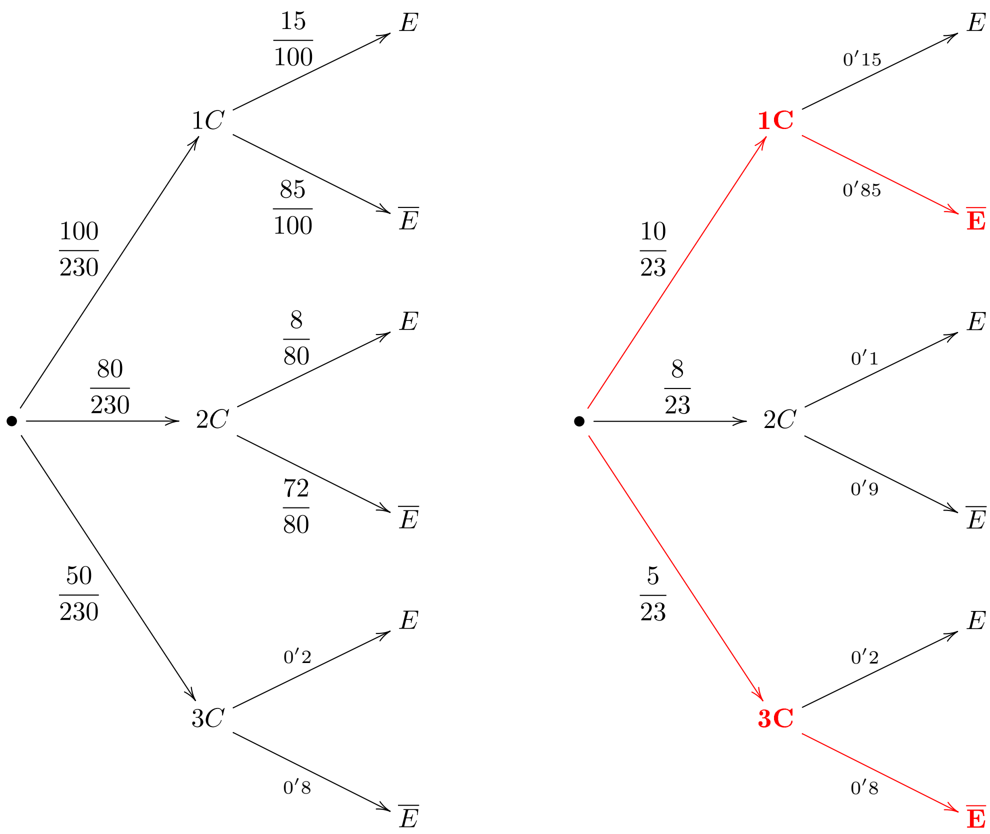
Volver al examen

4.1.3. En un libro con 3 capítulos, el primero consta de 100 páginas y 15 de ellas contienen errores. El segundo capítulo, de 80 páginas, tiene 8 con error, y en el tercero, de 50 páginas, el 80 % no tiene ningún error. Calcule la probabilidad de que una página elegida al azar no esté en el capítulo dos y no tenga errores.

(Julio 17)

- Solución:

Vamos a construir el diagrama de árbol. Pondremos dos, el primero con los datos que tenemos del enunciado y el segundo con los valores simplificados.



El suceso que nos piden está formado por dos caminos, y que hemos remarcado en rojo, luego vamos a aplicar la regla de la suma. Llamaremos A al suceso que nos piden.

$$P(a) = P(1C \cap \overline{E}) + P(3C \cap \overline{E}) = \frac{10}{23} \cdot 0'85 + \frac{5}{23} \cdot 0'8 \simeq 0'5435$$

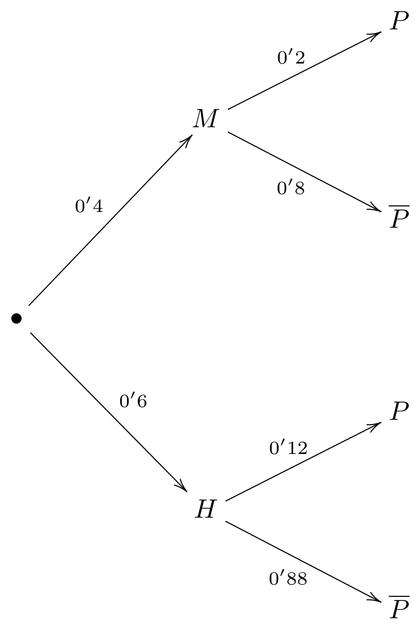
Volver al examen

4.1.4. El 40 % de la población activa de una ciudad son mujeres. Se sabe que el 20 % de las mujeres y el 12 % de los varones está en el paro. Elegida al azar una persona entre la población activa que no está en paro, calcule la probabilidad de que dicha persona sea mujer.

(Julio 17)

- Solución:

Vamos a construir el diagrama de árbol.



En el ejercicio nos piden $P(M/\overline{P})$. Es una aplicación evidente del teorema de Bayes.

$$P(M/\overline{P}) = \frac{P(M \cap \overline{P})}{P(\overline{P})} = \frac{0'4 \cdot 0'8}{0'4 \cdot 0'8 + 0'6 \cdot 0'88} = \frac{0'32}{0'848} \simeq 0'3774$$

Volver al examen

4.1.5. Se conoce que el ganado caprino padece un 10 % la tuberculosis. La prueba de tuberculosis caprina no es completamente fiable, ya que da un 10 % de positivos en cabras realmente sanas y también da negativo en el 5 % de cabras enfermas.

a) Calcule la probabilidad de que la prueba sea positiva.

b) Calcula la probabilidad de que una cabra elegida al azar esté sana sabiendo que en la prueba ha dado positiva.

(Junio 18 - Anulado)

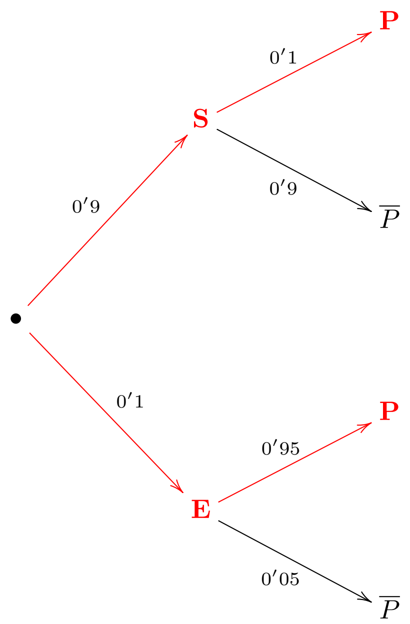
- Solución:

Vamos a empezar por construir el diagrama de árbol. Si somos un poco espabilados basta con ver el apartado b, que parece ser que hay que aplicar el teorema de Bayes, para ver como construir el árbol.

Vamos a llamar S al suceso estar sana, E al suceso estar enferma y P al suceso dar positivo en el análisis.

En el diagrama vamos a colorear de rojo los caminos que son la solución del apartado a.

El diagrama de árbol nos quedaría como sigue



Vamos a contestar a los dos apartados.

a) $P(P) = 0,9 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,95 = 0,09 + 0,095 = 0,185$

b) $P(S/P) = \dfrac{P(S \cap P)}{P(P)} = \dfrac{0,9 \cdot 0,1}{0,185} = \dfrac{0,09}{0,185} = 0,4865 \Longrightarrow 48,65\,\%$

Volver al examen

4.1.6. En una red social el 55 % lee noticias deportivas, el 65 % lee noticias de información, y el 10 % no lee las noticias deportivas ni las de información. Tomando al azar una persona de esta red social:

a) Calcule la probabilidad de que lea noticias deportivas y de información.

b) Sabiendo que lee noticias de información, calcule la probabilidad de que también lea noticias de deportes.

c) Sabiendo que lee noticias de deportes, calcule la probabilidad de que no lea noticias de información.

(Junio 18)

- Solución:

Llamemos D al suceso *leer noticias deportivas* e I al suceso *leer noticias de información.* Tenemos queda

$$P(D) = 0,55 \qquad P(I) = 0,65 \qquad P(\overline{D} \cap \overline{I}) = 0,1$$

a) De la última afirmación, y usando las leyes de Morgan, tenemos

$$P(\overline{D} \cap \overline{I}) = P(\overline{D \cup I}) = 0,1 \Longrightarrow P(D \cup I) = 0,9$$

b) Se trata de una probabilidad condicionada

$$P(D/I) = \frac{P(D \cap I)}{P(I)}$$

Vamos a empezar calculando la $P(D \cap I)$. Tenemos queda

$$P(D \cup I) = P(D) + P(I) - P(D \cap I) \Longrightarrow P(D \cap I) = P(D) + P(I) - P(D \cup I) = 0,55 + 0,65 - 0,9 = 0,3$$

Luego

$$P(D/I) = \frac{0,3}{0,65} \approx 0,4615 \Longrightarrow 46,15\,\%$$

c) Vuelve a ser otra probabilidad condicionada

$$P(\overline{I}/D) = \frac{P(\overline{I} \cap D}{P(D)} = \frac{P(D) - P(D \cap I)}{P(D)} = \frac{0,55 - 0,3}{0,55} = \frac{0,25}{0,55} \approx 0,4545 \Longrightarrow 45,45\,\%$$

Volver al examen

4.1.7. En un centro comercial el 35 % de los clientes utiliza carro. El 70 % de los que utilizan carro son hombres y el 40 % de los que no utilizan carro son mujeres.

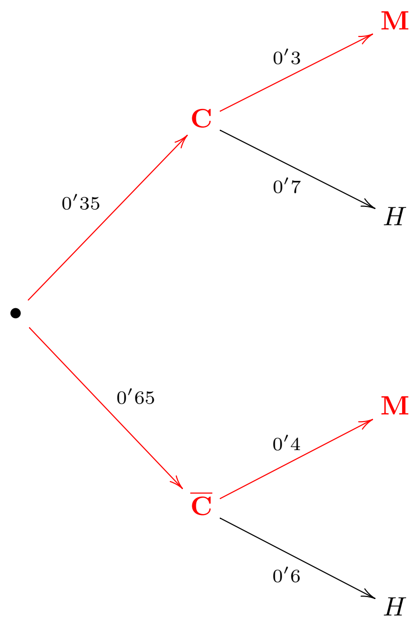
a) Calcule la probabilidad de que un cliente elegido al azar sea mujer.

b) Sabiendo que un cliente elegido al azar ha sido hombre, qué probabilidad hay de que utilice carro.

(Julio 18)

- Solución:

Vamos a construir el diagrama de árbol



a) $P(mujer) = P(C \cap M) + P(\overline{C} \cap M) = 0,35 \cdot 0,3 + 0,65 \cdot 0,4 = 0,365 \Longrightarrow 36,5\,\%$

b) Se trata de un teorema de Bayes.

$$P(C/H) = \frac{P(C \cap H)}{P(H)} = \frac{0,35 \cdot 0,7}{0,635} = 0,3858 \Longrightarrow 38,58\,\%$$

En el denominador hemos utilizado que $P(H) = 1 - P(M) = 1 - 0,365 = 0,635$

Volver al examen

4.2. Estadística

4.2.1. La edad de los habitantes de Altojardín se distribuye normalmente con una media de 36 años y una desviación típica de 12 años.

a) Calcule el porcentaje de habitantes de Altojardín entre 30 y 48 años.

b) ¿Qué edad tiene la reina de Altojardín sabiendo que el 67 % de los habitantes tiene más edad que la reina?

(Junio 18 - Anulado)

- Solución:

Estamos ante un caso de una $N(36, 12)$. Sabemos que nuestra tabla sólo funciona para la $N(, 0, 1)$. Hay por tanto que tipificar la variable utilizando la fórmula

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{x - 36}{12}$$

Vamos a resolver el primer apartado.

$$\begin{aligned} P(30 \leqslant x \leqslant 48) &= P\left(\frac{30-36}{12} \leqslant z \leqslant \frac{48-36}{12}\right) = P(-0,5 \leqslant z \leqslant 1) = P(z \leqslant 1) - P(z \leqslant -0,5) = \\ &= P(z \leqslant 1) - P(z \geqslant -0,5) = P(z \leqslant 1) - (1 - P(z \leqslant -0,5)) = \\ &= 0,8413 - (1 - 0,6915) = 0,5328 \Longrightarrow 53,28\,\% \end{aligned}$$

El segundo apartado consiste en aplicar la normal en sentido contrario, es decir, en averiguar el valor de la variable para el que se tiene una determinada probabilidad. Puedes entenderlo mejor si ves el vídeo que acompaña al ejercicio. de todas formas, nosotros vamos a buscar el valor de la variable que nos piden en la $N(0, 1)$ y después lo tipificaremos. Como la probabilidad excede el 50 %, tendríamos que el valor que vamos a obtener es un valor negativo de la variable. Vamos a llamarlo $-a$. Tendremos

$$P(z \geqslant -a) = 0,67 \Longrightarrow P(z \leqslant a) = 0,67 \Longrightarrow a = 0,44$$

El valor que estamos buscando es $-0,44$. Tipificando la variable tendríamos

$$\frac{x - 36}{12} = -0,44 \Longrightarrow x = 36 - 0,44 \cdot 12 = 30,72$$

Por tanto la edad de la reina, para garantizar el 67 %, sería de 30 años.

Volver al examen

4.2.2. A una prueba de oposición se han presentado 2500 aspirantes para 300 plazas. Las calificaciones que han obtenido los aspirantes tienen una distribución normal de media 6,5 y desviación típica 2. Calcule:

a) La nota de corte para los admitidos.

b) La probabilidad de que un alumno elegido al azar tenga una nota mayor que 9.

(Junio 18)

- Solución:

Se trata de una $N(6'5, 2)$. Nuestra variable x va a contar la nota que sacamos en el examen.

a) Del enunciado del problema deducimos que la probabilidad de aprobar es

$$P(x \geqslant a) = \frac{300}{2500} = 0,12$$

Vamos a empezar buscando el valor en una $N(0,1)$ y después destipificaremos.

$$P(z \leqslant k) = 1 - P(z \geqslant k) = 1 - 0,12 = 0,88$$

Buscando en la tabla tendríamos que $k = 1,175$. Destipificando saldría

$$\frac{x - 6,5}{2} = 1,175 \Longrightarrow x = 6,5 + 2 \cdot 1,175 = 6,5 + 2,35 = 8,85$$

Luego la nota de corte sería 8,85.

b) Dicha probabilidad será

$$\begin{aligned} P(x \geqslant 9) &= P\left(z \geqslant \frac{9 - 6,5}{2}\right) = P(z \geqslant 1,25) = 1 - P(z \leqslant 1,25) = \\ &= 1 - 0,8944 = 0,1056 \end{aligned}$$

Luego la probabilidad de que la nota sea mayor que 9 es de un $10,56\,\%$.

Volver al examen

4.2.3. Se estima que en una partida de bombillas el $10\,\%$ son defectuosas. Si se eligen al azar 6 bombillas de esta partida, calcule:

a) la probabilidad de que ninguna sea defectuosa.

b) la probabilidad de obtener más de 2 defectuosas.

c) la media y la destivación típica de la distribución.

(Julio 18)

- Solución:

La distribución que nos dan es una binomial del tipo $B(6, 0'1)$, suponiendo que nuestra variable X cuenta las bombillas defectuosas.

a) $P(X = 0) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 0'1^0 \cdot 0'9^6 = 0'5314 \Longrightarrow 53'41\,\%$

b) Vamos a calcular la probabilidad que nos piden, $P(X > 2)$.

$$\begin{aligned} P(X > 2) &= 1 - P(X \leqslant 2) = 1 - (P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)) = \\ &= 1 - \left(0'5314 + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0'1^1 \cdot 0'9^5 + \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 0'1^2 \cdot 0'9^4\right) = \\ &= 1 - (0'5314 + 0'3543 + 0'0984) = 0'0159 \Longrightarrow 1'59\,\% \end{aligned}$$

c) Se trata de aplicar dos fórmulas

$$\begin{aligned} &\mu = n \cdot p = 6 \cdot 0'1 = 0'6 \\ &\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{6 \cdot 0'1 \cdot 0'9} = 0'7348 \end{aligned}$$

Volver al examen