

**Luciano De Menna**

# Elettrotecnica

**Vittorio Pironti Editore  
Napoli**

PSpice e Probe sono marchi registrati della MicroSim Corporation

© Copyright 1998 by Vittorio Pironti Editore, 209/217, via Lago Patria -  
Giugliano in Campania - Napoli, Italy

Tutti i diritti sono riservati, nessuna parte di questa pubblicazione può essere  
riprodotta con qualsiasi mezzo, memorizzata o trasmessa per mezzo elettronico  
senza il permesso dell'editore.

## **Prefazione**

È questa la seconda edizione di un testo che raccoglie le lezioni del corso di Elettrotecnica da me tenuto nei primi mesi del 1993 per il Consorzio Nettuno, nell'ambito di un Diploma teleimpartito in Ingegneria Informatica ed Automatica. Questo "peccato di origine" ne ha condizionato, nel bene e nel male, la sua stesura. Volendo conservare lo stretto legame tra testo e lezioni videoregistrate, si è stati, infatti, in qualche modo condizionati da scelte a suo tempo fatte in merito ai contenuti ed alla sequenza di esposizione degli argomenti. D'altra parte lo stretto coordinamento ci è sembrato un vantaggio non indifferente che convenisse conservare. La stessa impostazione grafica del libro lo riflette: mentre nella colonna di sinistra si sviluppa il testo, nella colonna di destra scorrono le immagini, con l'indicazione della lezione, utilizzate nel corso video. Spesso le immagini sono soltanto un rimando visivo alla lezione; altre volte esse fanno parte integrante del discorso sviluppato nel testo. Questa continua connessione tra i due "testi", quello scritto e quello per immagini, costituisce un aspetto innovativo a nostro avviso significativo dal punto di vista didattico.

Alcuni argomenti, non trattati nel corso video per motivi di tempo, sono stati aggiunti nel testo ed opportunamente segnalati anche dal punto di vista grafico.

Per altri, di maggior peso, si è preferito una scelta diversa. Il corso del Consorzio Nettuno fu concepito inizialmente, infatti, per essere impartito al secondo semestre del primo anno, a valle di un solo corso di Fisica. In tali condizioni la scelta di limitare il programma al solo modello circuitale era obbligata. Del resto, sempre più spesso, esigenze di varia natura portano a scelte simili anche nei corsi di laurea tradizionali. C'è il rischio però, così facendo, di non riuscire a far cogliere quella stretta connessione tra

il modello dei campi e quello dei circuiti che è uno dei punti formativi di un corso di Elettrotecnica.

Per questo motivo si è pensato di integrare il testo con alcune appendici che ne consentono una duplice lettura, come diffusamente spiegato nell'introduzione.

Questa seconda edizione non è molto diversa dalla precedente; sono stati corretti alcuni errori tipografici e si è cercato in qualche punto di migliorare l'esposizione degli argomenti, in particolare nel capitolo sulla trasformata di Laplace. Inoltre si è deciso di non accludere il software didattico al testo, essenzialmente perché, essendosi esso, nel frattempo, ampliato notevolmente, si è preferito allegarlo ad una nuova pubblicazione specifica, di prossima edizione, che ne illustrasse il funzionamento in modo più dettagliato, dal titolo "Laboratorio Virtuale di Elettrotecnica".

Lo spirito complessivo che ci ha animato è stato quello di produrre un testo essenzialmente *didattico*; così in diversi punti sono proposti al lettore semplici esercizi che hanno lo scopo di chiarire aspetti trattati nella teoria, o di introdurre problematiche nuove. Nei paragrafi successivi le soluzioni di alcuni dei problemi proposti vengono brevemente discusse; per altri si rimanda al testo di esercizi consigliato.

Ogni libro non è mai il frutto del lavoro di una persona sola: oltre a chi materialmente lo scrive, in esso c'è il contributo di quanti hanno interagito con l'autore ed hanno contribuito a creare l'ambiente culturale in cui egli si è formato. Da questo punto di vista sono lieto di dover riconoscere il mio debito nei confronti del mio maestro, Ferdinando Gasparini, e dei colleghi Oreste Greco e Scipione Bobbio. Giovanni Miano ha contribuito in modo importante a definire la impostazione di alcune parti del libro e Luigi Verolino ne ha impietosamente cercato gli errori nella prima edizione.

Napoli 17 settembre 1998

## Introduzione

---

Tradizionalmente il corso di Elettrotecnica per gli allievi elettrici ed elettronici fa parte di quel gruppo di corsi che fanno da ponte tra le materie formative in senso lato del primo biennio e quelle, altrettanto formative, ma in maniera più specifica ed applicativa, del successivo triennio del corso di studi in Ingegneria. In questo senso tale corso avrebbe lo specifico compito di partire dall'approfondimento dei principi base trattati in corsi come Fisica, Analisi, Geometria ecc., e portare l'allievo alla padronanza delle metodologie e tecniche che da questi principi producono applicazioni, fino alle soglie dello studio delle stesse applicazioni concrete. L'Elettrotecnica in particolare ha il compito di approfondire il modello del campo elettromagnetico lentamente variabile, o stazionario, ed il modello circuitale. Sempre più spesso, però, in questi ultimi anni, il corso di Elettrotecnica trova una collocazione, nel curriculum complessivo degli studi, che non consente tale impostazione tradizionale. Talvolta, per esempio, come accade in alcuni Diplomi, il corso viene impartito a valle di un solo corso di Fisica; in tal caso, evidentemente, la trattazione del modello del campo elettromagnetico lentamente variabile, modello che è alla base e giustifica quello circuitale, deve necessariamente essere rimandata ad altro corso.

Consorzio Nettuno  
Corso di Elettrotecnica  
per i Diplomi di Ingegneria

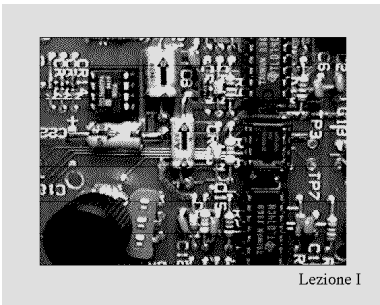
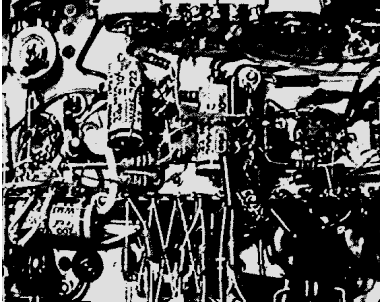
prof. Luciano De Menna  
Facoltà di Ingegneria  
Università di Napoli  
Federico II

Lezione I

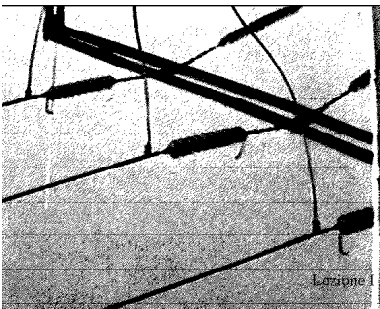


**J.C. Maxwell**  
**(1831 - 1879)**

Lezione I



Lezione I



Lezione I

Gli elementi di base di una teoria dei circuiti elettrici, invece, possono essere forniti in maniera assiomatica, prescindendo, in qualche modo, dalla loro fondamento elettromagnetico: si danno per assunti alcuni assiomi fondamentali e da questi si derivano tutte le proprietà del sistema così costruito. Questo approccio è anzi da alcuni autori preferito, in quanto presenta il vantaggio di una maggiore sistematicità e organicità. La connessione, però, con i fenomeni fisici che quel modello descrive viene ad allentarsi ed è questo, dal punto di vista didattico e formativo, a nostro avviso, un difetto grave delle impostazioni assiomatiche; tali teorie, invece, sono utilissime in una fase successiva di sistematizzazione della materia.

A noi sembra di grande importanza didattica non rinunciare, in un corso di Elettrotecnica, a fornire quegli elementi di connessione con il vasto campo di fenomeni che vengono detti elettromagnetici, così compiutamente descritto dal modello introdotto, nella seconda metà dell'ottocento, dallo scienziato inglese James Clerk Maxwell e racchiuso nel suo famoso sistema di equazioni.

Per questo motivo si è pensato di realizzare un testo che consenta due possibili letture: il corpo centrale della trattazione è costituito dagli elementi di base della teoria dei circuiti, con brevi richiami di nozioni elementari di elettromagnetismo, là dove strettamente necessari. Alcune appendici poi - opportunamente richiamate nel testo - consentono, a chi abbia acquisito in un corso di Fisica le basi necessarie, di approfondire le connessioni tra teoria elettromagnetica e modello circuitale.

Tratteremo dunque del modello circuitale, un modello ed una teoria che danno conto del funzionamento di sistemi apparentemente molto diversi tra di loro: dal tradizionale circuito elettrico, ai dispositivi integrati che sono alla base della moderna elettronica; dai com-

ponenti microscopici che hanno consentito l'incredibile sviluppo dei "computers" dei nostri giorni, agli impianti di grandi dimensioni che consentono la distribuzione dell'energia elettrica in modo capillare. Infine varrà la pena di ricordare che concetti e schemi caratteristici del modello circuitale trovano la loro applicazione anche in campi in cui sembrerebbe più difficile adattarli: nella teoria dei cosiddetti circuiti a microonde, o in sistemi, come le antenne, in cui la propagazione delle onde - teoricamente assente là dove si rende necessaria l'ipotesi del "lentamente variabile" - è un fattore dominante.

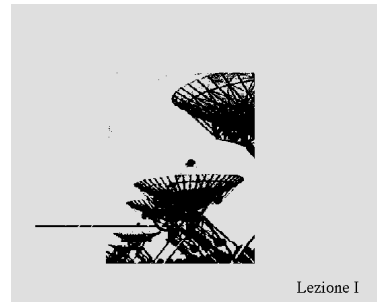
Cominciamo quindi con alcuni richiami elementari di elettromagnetismo - forse sarebbe più indicato dire "elettrologia" - indispensabili per introdurre i due attori principali della teoria dei circuiti: differenza di potenziale ed intensità della corrente elettrica.

Chi ritiene opportuna una introduzione più articolata ed approfondita, può leggere la prima delle menzionate appendici integrative e riprendere poi dal capitolo I.

### **Cariche elettriche e forze elettriche**

I corpi materiali possono presentare proprietà particolari che danno luogo alle cosiddette interazioni elettriche e magnetiche. Elemento chiave di tali interazioni è la carica elettrica, una proprietà individuata da una grandezza scalare  $q$  che prende il nome, appunto, di *carica elettrica*. Per inciso, questa proprietà è quantizzabile, nel senso che esiste una carica minima pari ad  $e$ , tutte le altre essendo multiple di questa.

Le cariche elettriche interagiscono tra di loro esercitando forze le une sulle altre. In particolare esistono due diverse "qualità" di cariche: cariche dello stesso tipo si respingono e cariche di tipo opposto si attraggono. Ciò porta a dare a  $q$  un segno, negativo o positi-



vo, per distinguere le due possibili alternative. In particolare l'*elettrone*, uno dei componenti dell'atomo, ha carica negativa pari a  $-e$ , mentre nel nucleo dell'atomo sono presenti altri elementi, i *protoni*, che presentano una carica positiva pari a  $+e$ .

Apriamo, a questo punto, una brevissima parentesi sui *sistemi di unità di misura*. Non discuteremo questo tema e tutta la sottile problematica che esso implica, perché ci sembra un argomento più adatto ad altro corso; ci limiteremo a dichiarare che nel seguito faremo sempre riferimento al *Sistema Internazionale* (S.I.), e ricorderemo di volta in volta le unità di misura delle grandezze che introdurremo. Daremo per implicito che per ogni grandezza si possa immaginare di costruire uno strumento in grado di misurarla.

Nel Sistema Internazionale la carica elettrica si misura in coulomb (C) e la carica dell'elettrone è, in modulo, pari a  $1,60210 \cdot 10^{-19}$  C.

L'interazione elettrica tra i corpi materiali può essere ricondotta ad una legge elementare che prende il nome di legge di Coulomb. Questa legge immagina una situazione ideale in cui i corpi materiali portatori delle cariche si riducano a punti geometrici. Introduciamo così il concetto di *carica puntiforme*: un corpuscolo che occupa un volume idealmente nullo intorno ad un punto, ma con massa non nulla, e che è portatore di una carica elettrica  $q$  (positiva o negativa). Si tratta certamente di una idealizzazione, ma non del tutto priva di fondamento fisico, se si pensa che i "volumi occupati" dai naturali portatori elementari di cariche, protoni ed elettroni, sono generalmente molto piccoli rispetto alle dimensioni che caratterizzano il fenomeno particolare che si vuole studiare; gli esperimenti ci dicono che, per esempio, la carica di un protone si può immaginare concentrata in una sfera di  $10^{-13}$  cm di raggio.

#### **Carica elettrica**

#### **Carica puntiforme**

$$a = 0,529 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$$

$$e = 1,60210 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

#### **Sistema Internazionale**

Lezione I



Orbene, la legge di Coulomb afferma che se due cariche puntiformi di tale tipo,  $q_1$  e  $q_2$ , fossero poste (ferme) alla distanza  $r$  l'una dall'altra, su ognuna delle cariche agirebbe una forza; in particolare, quella esercitata dalla carica 1 sulla carica 2 è espressa dalla formula:

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} . \tag{1}$$

La forza  $\mathbf{F}_{12}$  è dunque diretta lungo la congiungente tra le due cariche, è proporzionale al prodotto delle stesse, inversamente proporzionale al quadrato della distanza che le separa e, come si desume dalla presenza del versore  $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ , è diretta nel verso che va dalla posizione occupata dalla carica  $q_1$  a quella occupata dalla carica  $q_2$ , se entrambe le cariche hanno lo stesso segno; tale forza è, dunque, attrattiva se le cariche  $q_1$  e  $q_2$  hanno segno opposto, e repulsiva se esse invece hanno lo stesso segno. Sulla carica  $q_1$  agisce una forza eguale ed opposta:

$$\mathbf{F}_{12} = - \mathbf{F}_{21} .$$

Se le cariche sono libere di muoversi, tali forze producono movimento, secondo le ben note leggi della dinamica newtoniana.

Se ci limitassimo a considerare solo cariche ferme ed aggiungessimo, alla legge di Coulomb, la proprietà che tali forze di interazione sono sovrapponibili - in presenza, cioè, di più cariche puntiformi, la forza agente su ognuna di esse è la somma vettoriale delle forze che ogni altra carica produrrebbe sulla stessa carica, in assenza delle altre - potremmo derivare, dalla sola legge di Coulomb, tutte le leggi della interazione elettrica. Le cose si complicano un poco quando consideriamo cariche in movimento: la legge di Coulomb va leggermente modificata, o sostituita con altre leggi ad essa equivalenti. Non possiamo, però, in questa sede, approfondire oltre l'argomento.

Legge di Coulomb (1734-1806)  
Cavendish (1731-1810)

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}$$

Nel sistema S.I.  $k = 1 / 4 \pi \epsilon_0$   
con  $\epsilon_0 = 8,856 \cdot 10^{-12}$  F/m

Lezione I

Legge di Coulomb (1734-1806)  
Cavendish (1731-1810)

$$\mathbf{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}$$

Lezione I

Legge di Coulomb e sovrapposizione degli effetti.

$$\mathbf{F}_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{12} + k \frac{q_3 q_2}{r_{32}^2} \hat{\mathbf{r}}_{32}$$

Lezione I

## Tensione e differenza di potenziale

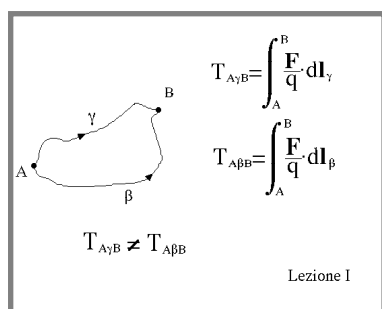
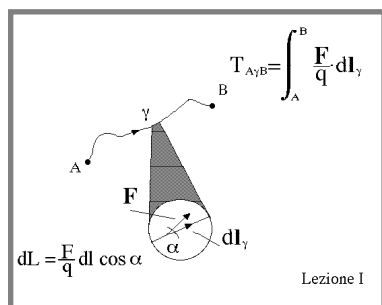
Supponiamo di avere, in una regione dello spazio, una “distribuzione” di cariche. Non ci occuperemo delle caratteristiche di tale distribuzione, ma soltanto dell’azione che tali cariche esercitano su altre cariche. Supponiamo ancora di poter disporre di una carica puntiforme, e positiva, che goda delle proprietà di non disturbare la posizione o il movimento delle altre cariche. In qualsiasi punto si venga a trovare la carica in questione, che d’ora in poi chiameremo *carica di prova*, essa risentirà di una forza prodotta dalle altre cariche, che d’ora in poi chiameremo *cariche sorgenti*. Se la carica di prova è unitaria, chiameremo *campo elettrico E* la forza che essa risente. Per una carica di valore  $q$ , per la legge di Coulomb, la forza sarà  $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ . In realtà la forza percepita dalla carica di prova non dipende soltanto dalla posizione in cui essa si trova, ma anche dalla velocità con cui essa passa per il punto in questione. Anche questo è argomento che non ci è dato approfondire in questa breve sintesi.

In ogni caso se immaginiamo di portare la carica di prova  $q$ , da un punto A ad un punto B lungo una linea  $\gamma$ , la forza  $\mathbf{F}$  che agisce sulla carica compirà un lavoro per unità di carica che potremo calcolare come:

$$T_{A\gamma B} = \int_A^B \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l}_\gamma \quad (2)$$

Nella prima immagine della pagina è illustrato il significato dell’integrale: somma di infiniti contributi infinitesimi. A tale lavoro viene dato il nome di *tensione* lungo la linea  $\gamma$  tra i punti A e B, e si misura in volt (V). Lo strumento che la misura verrà detto *voltmetro* e avremo modo di parlarne nel seguito.

Si noti che per poter parlare di tensione tra due punti bisogna aver specificato una linea  $\gamma$  tra gli stessi, ed il



verso in cui ci si muove sulla linea (da A a B oppure da B ad A); ciò giustifica anche il simbolo utilizzato.

Supponiamo ora di spostare la carica di prova lungo un'altra linea,  $\beta$ , tra gli stessi punti A e B, come mostrato in figura. Anche in questo caso verrà compiuto un lavoro  $T_{A\beta B}$ , che in generale sarà diverso dal precedente.

In determinate situazioni accade invece che tale lavoro sia indipendente dal percorso e dipende esclusivamente dai due punti estremi. Sarebbe facile far vedere, utilizzando la legge di Coulomb, che una tale situazione si verifica se le cariche sorgenti sono tutte ferme e la carica di prova si immagina mossa lentissimamente, un processo che in fisica viene definito *adiabatico*. Si osservi che in questo caso il lavoro compiuto dalla forza  $\mathbf{F}$  quando la carica di prova è mossa lungo un percorso chiuso - per esempio l'unione di  $\gamma$  e  $\beta$ , quest'ultimo orientato nel verso opposto - è identicamente nullo.

Supponiamo di essere in queste condizioni e di calcolare il lavoro che il campo compie quando la carica di prova si muove da un punto qualsiasi nello spazio ad un punto O fisso. Per ogni punto A prescelto avremo un valore di tale lavoro, indipendentemente dal percorso compiuto per andare da A a O. Abbiamo in pratica costruito una funzione  $V(A)$  dei punti dello spazio che chiameremo potenziale del punto A rispetto ad O. In particolare è evidente che la funzione  $V$  in O è nulla. Si dice che il punto O è stato scelto come punto di riferimento dei potenziali. Se ora, per esempio, immaginiamo di calcolare la tensione tra A e B (vedi immagini a lato), otteniamo:

$$T_{A\gamma B} = T_{A\alpha O} - T_{B\beta O} = V(A) - V(B)$$

perché il lavoro da A a B, nelle nostre ipotesi, è lo stesso sia che si vada lungo  $\gamma_{AB}$  sia che si vada lungo  $\alpha$ , nel verso segnato in figura, e lungo  $\beta$ , nel verso opposto.

Nel caso in cui, dunque, il lavoro è indipendente dal

allora  $T_{A\gamma B} = V_{AB}$  è una differenza di potenziale Lezione I

$$\oint_{\gamma\beta} \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l}_{\gamma\beta} = \int_A^B \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l}_\gamma + \int_B^A \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l}_\beta =$$

$$= \int_A^B \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l}_\gamma - \int_A^B \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l}_\beta = 0$$

Lezione I

$$V_{AB} = \int_A^B \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l}_{\gamma\alpha} = \int_A^O \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l}_\alpha - \int_B^O \frac{\mathbf{F}}{q} \cdot d\mathbf{l}_\beta = V(A) - V(B)$$

differenza di potenziale (d.d.p.) Lezione I

Nel Sistema (S.I.) la d.d.p. si misura in Volt (V) A. Volta (1745 - 1827)

Lezione I

percorso esso può essere messo sotto la forma di una *differenza di potenziale* (d.d.p. nel seguito) tra i due punti in esame. Si noti che tale lavoro è positivo, e quindi le sorgenti compiono effettivamente lavoro sulla carica di prova, se il potenziale di A,  $V(A)$ , è maggiore di quello di B,  $V(B)$ .

### Intensità della corrente elettrica

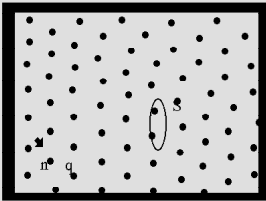
Come si è detto, i *portatori* di cariche elettriche possono essere in movimento. Supponiamo di avere in una regione dello spazio un gran numero di tali portatori, tutti di egual carica  $q$  e tutti con la stessa velocità  $\mathbf{v}$ . Le cariche siano tanto numerose, ed i loro portatori occupino un volume tanto piccolo - è la solita idealizzazione della carica puntiforme - da poter descrivere la loro distribuzione attraverso una funzione densità  $n$ : se  $dV$  è un volumetto elementare, i portatori contenuti in tale volume sono, per definizione,  $dN = n dV$ .

Consideriamo ora una superficie piana  $S$  attraverso la quale, nel loro moto, le cariche si trovano a passare. Vogliamo calcolare la quantità di carica che nel tempo  $dt$  attraversa detta superficie nel verso che va da sinistra a destra. Costruiamo un cilindro con base sulla superficie  $S$  e lunghezza, nella direzione parallela a  $\mathbf{v}$ , pari a  $v dt$ . Per costruzione tutte le particelle che, all'istante  $t$ , si trovano nel cilindro considerato, nel tempo  $dt$ , percorrendo lo spazio  $v dt$ , si troveranno a passare attraverso la superficie  $S$ , mentre tutti i portatori al di fuori del volume considerato, o "mancheranno" la superficie  $S$ , oppure percorreranno una distanza insufficiente ad incontrarla. Se ne deduce che il numero di portatori che attraverseranno la superficie  $S$  nel tempo  $dt$  è pari al numero di portatori contenuti nel cilindro di volume  $S v dt \cos \beta$ , cioè  $n S v dt \cos \beta$ , dove  $\beta$  è l'angolo fra la direzione di  $\mathbf{v}$  e quella della normale ad  $S$ .

#### Cariche in movimento

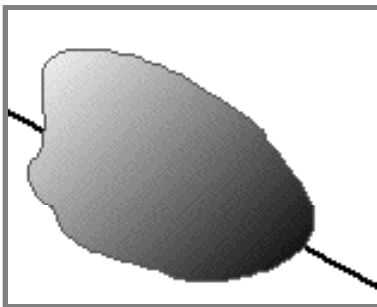
#### L'intensità di corrente elettrica

Lezione II



Intensità di corrente

Lezione II



Dato che ogni portatore è dotato di carica  $q$ , la carica totale che attraversa la superficie  $S$  nel tempo  $dt$  è:

$$dQ = nqS v dt \cos \beta,$$

e nell'unità di tempo:

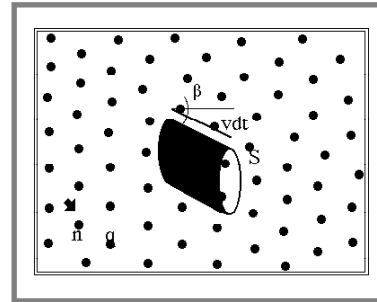
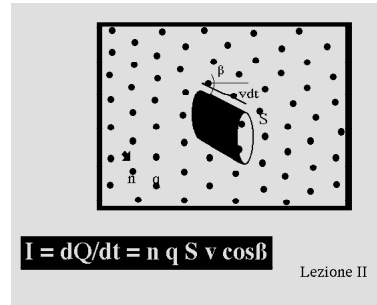
$$I = \frac{dQ}{dt} = nqS v \cos \beta.$$

A tale grandezza viene dato il nome di *intensità di corrente elettrica*.

Naturalmente la definizione di intensità di corrente elettrica che abbiamo illustrato in un caso semplice, può essere estesa al caso in cui i portatori siano dotati di carica diversa, non abbiano tutti la stessa velocità, e la loro densità vari da punto a punto. Si noti che il concetto di intensità di corrente richiede, oltre ad una distribuzione di cariche in movimento, la scelta di una superficie attraverso cui si intende valutare il flusso di cariche e quella di un verso, l'orientazione della normale su  $S$ . Nel seguito parleremo spesso di intensità di corrente senza specificare la superficie attraverso la quale intendiamo calcolarla, mentre specificheremo sempre il verso; ciò accade perché, nei casi in questione, la superficie è implicitamente definita. È il caso in cui il moto dei portatori è obbligato a svilupparsi lungo un percorso determinato, il "conduttore" appunto.

Vale la pena di sottolineare, ancora una volta, che sia il concetto di tensione che quello di corrente presuppongono la scelta di un verso: la tensione da un punto A ad un punto B e la corrente in un verso lungo il percorso stabilito.

Ricordiamo infine che l'unità di misura dell'intensità di corrente elettrica nel Sistema Internazionale è l'*ampere* (A), pari ad un coulomb al secondo, e che lo strumento che la misura viene detto *amperometro*.



Nel sistema S.I. l'intensità di corrente si misura in ampere.

A. M. Ampère  
(1775 - 1836)

Lezione II

## La legge di Ohm ed il “bipolo” resistore

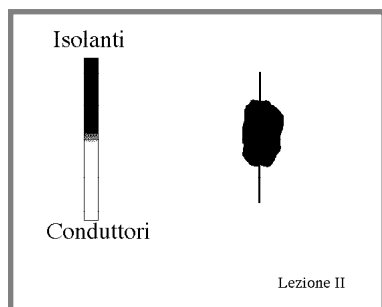
I corpi materiali si comportano in maniera differente quando ad essi viene applicata una differenza di potenziale. Come sappiamo, tra i costituenti elementari della materia vi sono portatori di cariche elettriche: elettroni e ioni. Tali portatori possono essere più o meno legati alla struttura del corpo materiale e quindi più o meno liberi di muoversi. Sotto l'azione della differenza di potenziale i portatori liberi (ma non completamente liberi, come vedremo), si muovono e danno luogo ad una corrente elettrica.

Da questo punto di vista, e con una classificazione per il momento solo grossolana, potremmo inserire ogni materiale in una scala che vede ad un estremo l'*isolante perfetto* - un materiale in cui i portatori di cariche o sono completamente assenti, o, se presenti, sono del tutto impediti nel loro moto - ed all'altro estremo il *conduttore perfetto* in cui i portatori di cariche, presenti in gran numero, sono completamente liberi di muoversi. Il *vuoto perfetto*, per esempio, fin tanto che rimane tale, è certamente un perfetto isolante, mentre un corpo metallico, rame per esempio, portato a bassissima temperatura può essere considerato una buona esemplificazione di un conduttore perfetto. Nei materiali metallici, o *conduttori di prima specie*, in particolare, i portatori di carica responsabili della corrente sono gli elettroni periferici degli atomi o molecole che costituiscono, con il loro reticolo, la struttura del materiale stesso. Tali elettroni, debolmente legati ai rispettivi atomi, formano in effetti una sorta di *nube elettronica* che, sotto l'azione di una forza prodotta dall'applicazione di una differenza di potenziale, si mette in moto e produce una corrente.

Per un gran numero di tali conduttori, e per un campo di variabilità dei parametri in gioco discretamente

### I materiali e le correnti

Lezione II



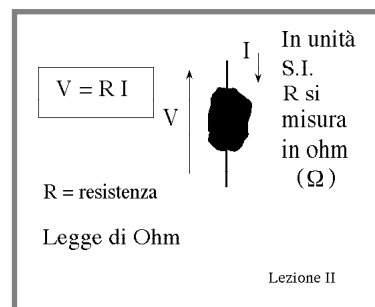
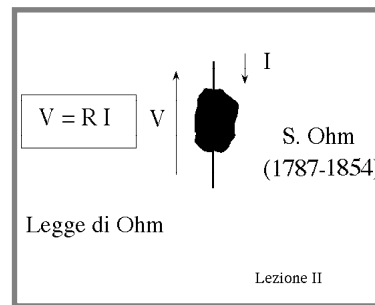
Lezione II

ampio, sussiste una relazione di proporzionalità tra la d.d.p. applicata e la corrente prodotta: a tale relazione di proporzionalità viene dato il nome di *legge di Ohm*. Cerchiamo di approfondire il contenuto della legge di Ohm facendo riferimento ad una configurazione ideale semplice. Supponiamo di avere un corpo materiale e di individuare sulla superficie che lo racchiude due punti ai quali immaginiamo di applicare la d.d.p.  $V$ . Supponiamo inoltre di essere in grado di portare ad uno dei due punti e di prelevare dall'altro, una qualsiasi corrente  $I$ ; non domandiamoci, per il momento, "chi" applica la d.d.p. né "come" portiamo e preleviamo la corrente nei due punti. Una volta fissati i punti di accesso della corrente, il moto delle cariche all'interno del corpo si svilupperà in una ben precisa maniera che non è necessario, però, in questa fase, specificare in maggior dettaglio. Se, in queste condizioni, immaginiamo di applicare agli stessi punti, diverse differenze di potenziale, e misuriamo la corrente che ne deriva, verificheremo che:

$$V = R I. \quad (3)$$

Alla costante di proporzionalità  $R$ , che nel Sistema Internazionale si misura in *ohm*, viene dato il nome di *resistenza* del corpo in esame, quando alimentato nella maniera indicata. Questa precisazione è necessaria perché il valore della costante  $R$ , in generale, cambia se cambiano i due punti di applicazione della d.d.p., così come cambia ancora, se, invece di due punti ideali pensiamo a due superfici attraverso le quali la corrente viene portata e prelevata; in questo caso  $R$  dipende anche dalla forma ed estensione di tali superfici (*gli elettrodi*). Per questo motivo ci siamo resi indipendenti dalla forma degli elettrodi supponendoli, in una situazione ideale, addirittura puntiformi.

Naturalmente la stessa legge di proporzionalità può



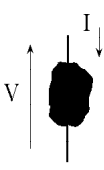
In unità S.I. G si misura in Siemens

$I = G V$

G = conduttanza

W.von Siemens (1816 - 1892)

Lezione II



essere espressa nella forma:

$$I = G V, \quad (4)$$

dove  $G = 1/R$  prende il nome di *conduttanza* ed è misurata in Siemens (S).

È interessante approfondire l'analisi del contenuto della legge di Ohm allo scopo di cercare di distinguere in essa la parte che dipende dalla geometria del corpo da quella che invece dipende strettamente dalla natura del materiale. Per semplicità espositiva assumiamo una geometria molto semplice: un cilindro abbastanza lungo rispetto alla sua dimensione trasversale, in modo da poter ritenere che la maniera in cui viene applicata la d.d.p. non possa influenzare in modo significativo la distribuzione del moto delle cariche all'interno del cilindro. In tali ipotesi una indagine sperimentale mostra che

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad (5)$$

dove  $\rho$  prende il nome di *resistività* del materiale - il suo inverso  $\sigma$  quello di *conducibilità* - e dipende solo dalla sua natura e dalle condizioni fisiche in cui si trova ad operare,  $L$  è la lunghezza ed  $S$  la misura della sezione trasversale del cilindro. Nella immagine a lato sono riportati valori indicativi della resistività di alcuni materiali alla temperatura ambiente. Come si vede rame ed argento hanno una bassa resistività. Il rame costituisce il miglior compromesso - bassa resistività e basso costo - e per questo motivo è di gran lunga il materiale più usato nelle applicazioni elettriche, tanto che nel linguaggio comune rame è diventato sinonimo di conduttore elettrico.

Il valore di R dipende essenzialmente dalla geometria del corpo e dal materiale di cui esso è fatto.

R E S I S T E N Z A

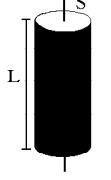
Lezione II

Il valore di R dipende essenzialmente dalla geometria del corpo e dal materiale di cui esso è fatto.

In particolare

$R = \rho \frac{L}{S}$

Lezione II



In unità S.I.  $\rho$  si misura in  $\Omega \cdot m$  o in  $\Omega \cdot \frac{mm^2}{m}$ .

$R = \rho \frac{L}{S}$      $\rho =$  resistività

$\sigma = \frac{1}{\rho} =$  conducibilità

Alcuni valori di  $\rho$  in  $\Omega \cdot \frac{mm^2}{m}$ .

rame 0,0176

argento 0,016

piombo 0,22

Lezione II



### Il modello di Drude

Il fatto che alcuni materiali - che vengono appunto detti ohmici - sottostanno alla legge di Ohm, ha un significato molto sottile che cercheremo di esaminare sia pure solo qualitativamente. Dalla definizione di intensità di corrente risulta evidente che la stessa è proporzionale alla velocità media dei portatori di carica. D'altra parte la differenza di potenziale, in quanto integrale del campo, deve essere proporzionale alla forza esercitata sui portatori stessi; il campo infatti è la forza per unità di carica. La legge di Ohm, dunque, afferma che la velocità è proporzionale alla forza, in apparente contraddizione con le leggi della dinamica che vogliono quest'ultima proporzionale all'accelerazione:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}.$$

In effetti la contraddizione è solo apparente in quanto la legge di Newton immagina il corpo, soggetto a forze, completamente libero di muoversi. Evidentemente i portatori di carica in un conduttore ohmico non sono completamente liberi di muoversi! Il reticolo che costituisce il corpo materiale in cui i portatori sono costretti a muoversi offre un qualche ostacolo al moto delle cariche. La legge di Ohm, in effetti, ci consente di determinare quale tipo di ostacolo. Supponiamo infatti che l'effetto complessivo delle cariche ferme, costituenti il reticolo, sia equivalente ad un attrito e quindi proporzionale alla velocità; la forza complessiva che agisce sulle cariche sarà allora  $\mathbf{F} - k\mathbf{v}$ , dato che l'attrito si oppone all'azione del campo elettrico.

Se si raggiunge una condizione stazionaria, la velocità delle cariche sarà costante, e la loro accelerazione, quindi, nulla. Avremo dunque:

$$\mathbf{F} - k\mathbf{v} = m\mathbf{a} = \mathbf{0},$$

e quindi  $\mathbf{F} = k\mathbf{v}$ , come prescritto dalla legge di Ohm. Questo modello della conduzione nei conduttori ohmici, che va sotto il nome di modello di Drude, e che abbiamo esposto solo in maniera qualitativa, può, in realtà, essere approfondito anche ad un livello quantitativo con buoni risultati. A noi interessava fare cenno soprattutto per sottolineare il fatto che la validità della legge di Ohm richiede il verificarsi di una condizione abbastanza particolare. Non stupisce quindi che tale legge non sia soddisfatta da tutti i materiali, e che

gli stessi materiali ohmici siano tali solo in determinate condizioni; per esempio al variare della temperatura del corpo in esame la resistività del materiale non si mantiene costante, come vedremo meglio nel seguito. Non meno importante, dal punto di vista applicativo, è il caso di quei materiali che non sottostanno alla legge di Ohm e che quindi presentano una dipendenza non lineare tra tensione e corrente. La moderna elettronica è tutta basata sul comportamento di tali materiali.

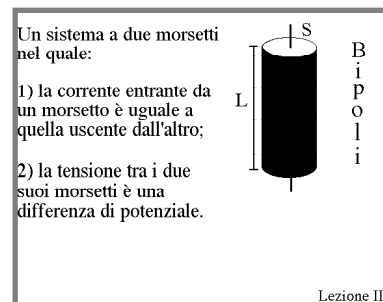
### I bipoli

Al fine di una futura estensione dei concetti esposti, introduciamo una opportuna terminologia: chiameremo *bipolo resistore* il sistema descritto nel capitolo precedente. Le sue proprietà possono essere così riassunte:

*Un bipolo resistore è una “scatola” chiusa che comunica con l'esterno, dal punto di vista elettromagnetico, solo attraverso due suoi punti ben definiti (morsetti del bipolo). Esso gode delle seguenti proprietà:*

- la corrente che entra in un morsetto è uguale a quella che esce dall'altro;
- la tensione tra i due morsetti del bipolo è indipendente dal cammino prescelto per calcolarla e quindi può essere espressa come differenza di potenziale;
- la tensione tra i morsetti è proporzionale all'intensità di corrente che li attraversa; la costante di proporzionalità  $R$  prende il nome di resistenza del bipolo;

Come vedremo in seguito, per estendere il concetto di bipolo, basterà che la seconda proprietà sia verificata per ogni linea che non entri nella “scatola” che racchiude il bipolo in questione, e che tale linea non sia “comunque lunga”. La relazione  $V = RI$  si dice *caratte*



ristica del bipolo. Vogliamo osservare che nello scrivere la legge di Ohm abbiamo implicitamente fatto delle scelte sui versi positivi della corrente e della tensione. Con riferimento alla figura I.1, se  $V$  è l'integrale di linea del campo tra i punti A e B, nel verso che va da A a B, ed  $I$  è la corrente nello stesso verso scelto per calcolare la tensione, cioè da A a B, allora la legge di Ohm assume la forma espressa dalla relazione (3) del capitolo precedente, con  $R$  dato dalla (5), e quindi positivo per definizione.

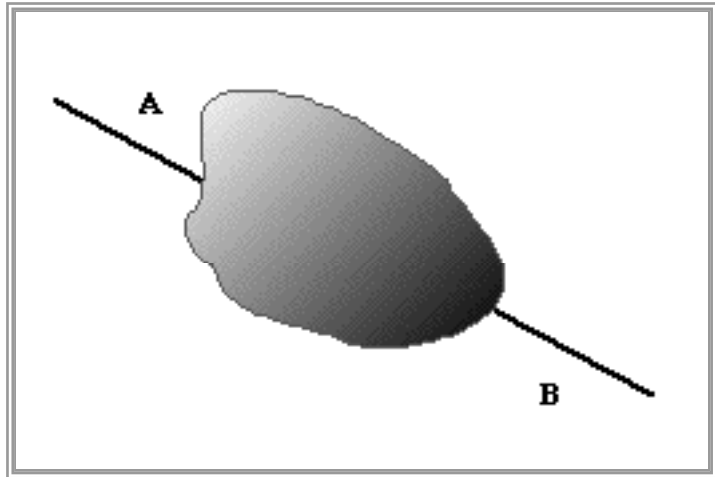
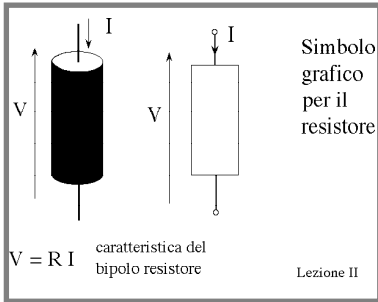
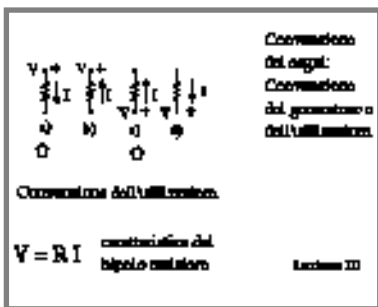


Fig.I.1

Ma erano possibili anche scelte diverse. Si supponga di non conoscere a priori quale dei due morsetti A e B sia quello effettivamente a potenziale maggiore, ma di volere comunque indicare con un simbolo, per esempio  $V^*$ , per distinguerlo dal precedente, la differenza di potenziale; non si potrà, evidentemente, che scegliere arbitrariamente uno dei punti - B per esempio - e definire  $V^*$  la differenza di potenziale tra B e A. Supponiamo invece di mantenere invariata la scelta per la corrente, e cioè definiamo  $I$  la corrente che entra da A ed esce da B. Per quanto detto in precedenza si avrà:

$$V^* = - RI \tag{I.1}$$

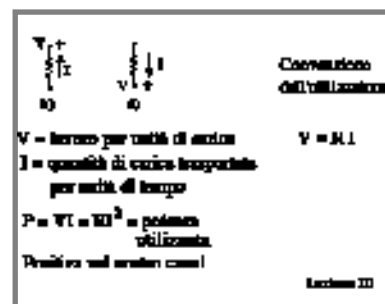
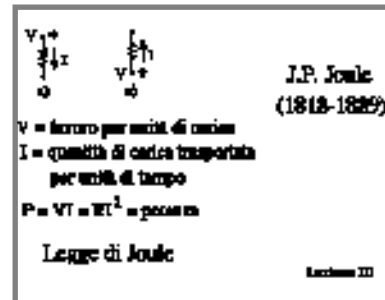


dato che  $V^* = -V$ , evidentemente; la caratteristica del bipolo appare in queste condizioni alquanto diversa! Occorre dunque precisare che un resistore ha una caratteristica del tipo  $V=RI$ , con  $R$  positivo, se i versi positivi scelti per la tensione e la corrente sono tali che *la corrente è positiva quando entra nello stesso morsetto che, se a potenziale maggiore dell'altro, determina una  $V$  positiva*. Questo tipo di scelta viene detta dell'*utilizzatore* per ragioni che saranno chiare in seguito. Prima spendiamo qualche parola sui simboli grafici. Indicheremo un resistore con i simboli mostrati in figura. Il segno + accanto ad un morsetto individua la scelta del verso positivo per le  $V$ , mentre la freccia indica quello delle correnti. Nella stessa figura sono anche indicate le quattro alternative possibili.

È facile convincersi che l'alternativa a) coincide con la c) (basta ruotare di  $180^\circ$  il disegno), mentre quella d) coincide con la b). Le alternative a) e c) le abbiamo già dette dell'*utilizzatore*, diremo invece del *generatore* quelle b) e d). Vediamo perché questa terminologia.

### La legge di Joule

Come è noto, la tensione tra due punti può anche essere vista come il lavoro compiuto per portare una carica unitaria da un punto all'altro. Basta rifarsi alla definizione di tensione e ricordare che  $\mathbf{F} = q \mathbf{E}$ . Se nell'unità di tempo vengono portate  $I$  cariche da un punto all'altro, tra i quali esiste la differenza di potenziale  $V$ , si compirà, dunque, un lavoro per unità di tempo  $VI$ , cioè il resistore sarà interessato da una *potenza*  $VI$ . Con le posizioni fatte, è chiaro a questo punto che il prodotto  $VI$ , cioè la potenza ai morsetti del resistore, risulterà positivo solo se è stata scelta una convenzione dell'utilizzatore per la coppia tensione-corrente. Per l'altra



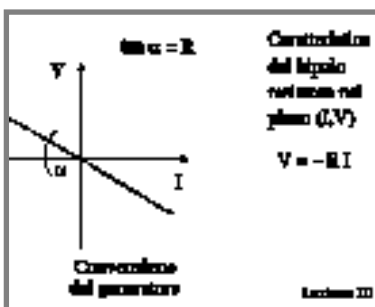
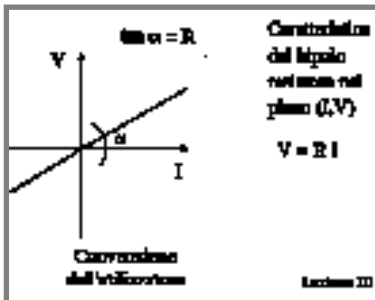
convenzione tale prodotto, sempre nel caso del resistore, risulterà negativo. Consideriamo infatti la convenzione a: per definizione  $V$  è positivo se il punto indicato con il segno  $+$  è a potenziale maggiore dell'altro. Ma in tali condizioni il campo  $\mathbf{E}$  farà muovere le cariche positive nel verso che va dal punto contrassegnato con il  $+$  all'altro, e quindi  $I$  risulterà positiva. D'altra parte, come è noto, l'energia associata alla potenza  $VI$  interessante un resistore, viene "dissipata", o meglio trasformata in un altro tipo di energia: calore. Infatti per un tempo  $dt$  si ha:

$$dW = P dt = VI dt = RI^2 dt,$$

che è, appunto, la ben nota *legge di Joule*. Appare quindi naturale parlare di energia e potenza "assorbita" ed "utilizzata" dal bipolo resistore e definire convenzione dell'utilizzatore quella convenzione che fa sì che tale potenza risulti positiva. Se, dunque, su di un resistore si è fatta la convenzione dell'utilizzatore, la potenza assorbita risulterà sempre positiva. È vero anche l'opposto: se si fa per un resistore la convenzione del generatore, la potenza, che converrà a questo punto chiamare *potenza generata*, risulterà sempre negativa.

La caratteristica di un bipolo, almeno di quelli che intendiamo introdurre in questa prima fase, può essere utilmente rappresentata nel piano  $(I, V)$ . Per un bipolo resistore, tale rappresentazione è, evidentemente, una retta passante per l'origine degli assi. Si noti la diversa rappresentazione a seconda della convenzione scelta. Nel caso di una convenzione dell'utilizzatore, l'inclinazione  $\alpha$  della retta, rispetto all'asse delle correnti, è tale che  $\operatorname{tg} \alpha = R$ .

Supponiamo ora di avere a disposizione più bipoli ed immaginiamo di collegarli tra di loro. Per far ciò abbiamo bisogno di elementi di connessione tra i morsetti, che negli schemi grafici rappresenteremo con dei



tratti di linea che uniscono le scatole rappresentative dei bipoli. Si suppone che tali elementi di connessione non abbiano alcuna influenza sul sistema. Essi si limitano a portare la corrente senza introdurre alcuna d.d.p. aggiuntiva. Nella pratica essi saranno realizzati con conduttori ad elevata conducibilità, tipicamente in rame.

Dati due soli bipoli, sono possibili soltanto due tipi di collegamento e sono mostrati nelle immagini a lato. Il primo collegamento prende il nome di collegamento in parallelo ed il secondo di collegamento in serie. Se nel primo caso consideriamo un nuovo bipolo i cui morsetti siano non quelli A, B del primo bipolo, né quelli C, D del secondo, bensì quelli indicati con E ed F, possiamo domandarci quale sarà la caratteristica di questo nuovo bipolo; o, con linguaggio specifico, quale è la caratteristica del *bipolo equivalente* che si ottiene collegando due bipoli in parallelo.

Evidentemente l'elemento caratterizzante un collegamento in parallelo di due resistori aventi resistenza  $R_1$  ed  $R_2$ , sta nel fatto che i due bipoli sono, per costruzione, soggetti alla stessa tensione  $V$ . Si potrà dunque scrivere, avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore:

$$V = R_1 I_1 = R_2 I_2.$$

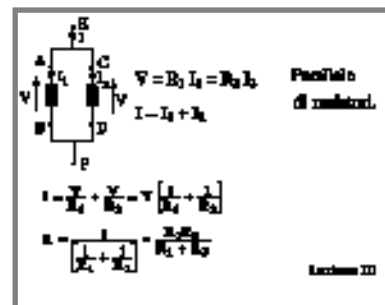
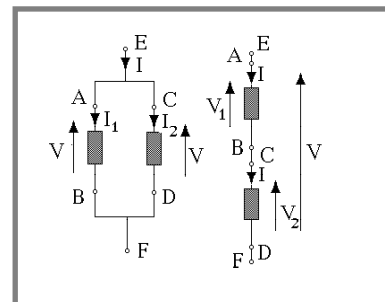
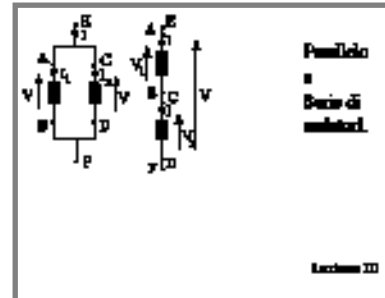
D'altra parte la corrente  $I$  deve essere la somma delle correnti  $I_1$  ed  $I_2$ , per cui si ha:

$$I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (I.2)$$

Il bipolo equivalente avrà dunque una caratteristica individuata dal parametro  $R_{eq}$  :

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (I.3)$$

È interessante notare che la corrente in uno dei rami



del *partitore di corrente* - è questo il nome che viene dato spesso alla disposizione in parallelo di due bipoli - si ottiene facilmente, quando sia nota la corrente totale entrante nel parallelo, con la formula:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = I \frac{R_2}{R_1 + R_2} \quad (I.4)$$

È la così detta formula del *partitore di corrente*. Ragionamenti analoghi portano all'individuazione della caratteristica del bipolo equivalente ad una serie di due resistori. Questa volta l'elemento caratterizzante il collegamento è dato dal fatto che i due resistori sono attraversati dalla stessa corrente. Si avrà dunque:

$$I = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2} \quad (I.5)$$

D'altra parte, per definizione, si ha che  $V=V_1+V_2$  e quindi:

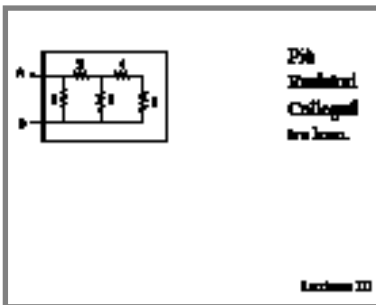
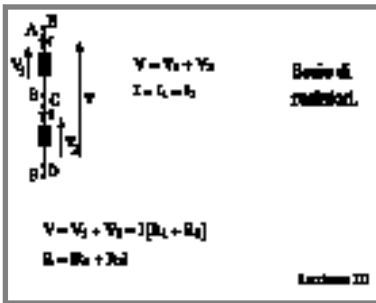
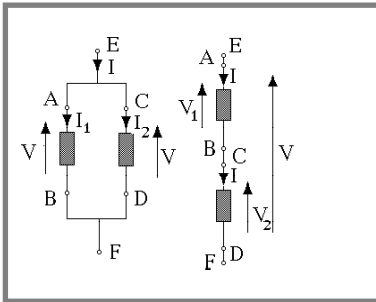
$$V = R_1 I + R_2 I = I (R_1 + R_2) = R_{eq} I \quad (I.6)$$

Ne segue che il bipolo equivalente è ancora un resistore con resistenza pari ad  $R_{eq} = R_1 + R_2$ . In maniera analoga a quanto detto per la disposizione in parallelo è molto semplice ricavare la formula del *partitore di tensione*:

$$V_1 = R_1 I = V \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad (I.12)$$

che fornisce la tensione ad uno dei bipoli in serie, quando sia nota la tensione totale sulla serie delle due resistenze.

Come già notato, i collegamenti serie e parallelo sono gli unici possibili quando si dispone di due soli bipoli. Immaginiamo ora di poter disporre di più bipoli resistori e di collegarli fra di loro in una maniera qualsiasi attraverso i loro morsetti, come nell'esempio mostrato



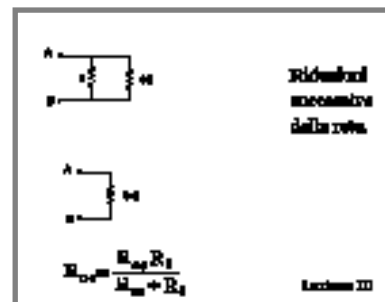
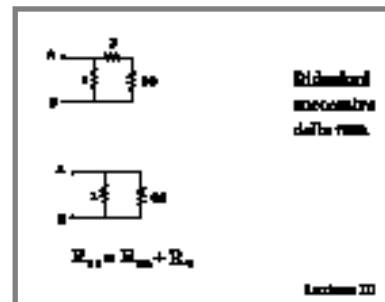
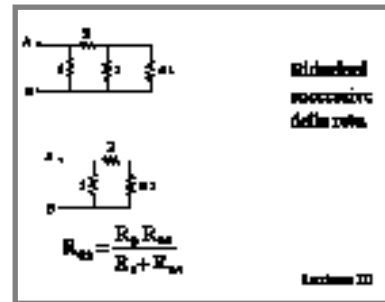
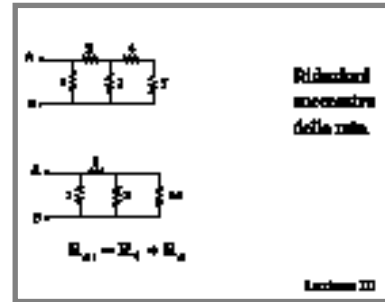


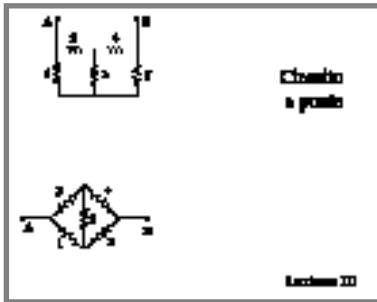
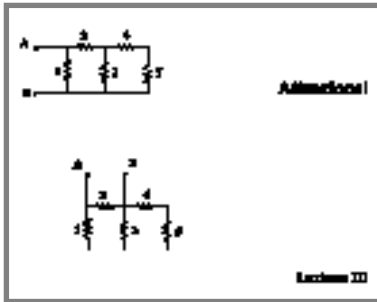
nelle immagini riportate a lato. Il sistema così ottenuto prende il nome di *rete di bipoli* e verrà studiato in dettaglio nel seguito. Per ora vogliamo soltanto porci il problema di determinare il *bipolo equivalente* della rete vista da due sue morsetti. Se immaginiamo infatti di scegliere due morsetti A e B della rete e assumiamo che tali morsetti siano gli unici punti di comunicazione della rete con l'esterno, la rete stessa ci apparirà come un unico bipolo. La caratteristica di un tale bipolo si può generalmente determinare, una volta nota quella dei bipoli componenti, con un procedimento di "riduzione successiva". Con riferimento all'esempio mostrato, infatti, è evidente che i resistori  $R_4$  ed  $R_5$ , essendo attraversati dalla stessa corrente, sono tra di loro in serie. Ad essi potrà quindi essere sostituito un unico bipolo equivalente di valore  $R_{e1}$ , secondo quanto illustrato in precedenza. Nella rete così *ridotta*, i bipoli  $R_2$  ed  $R_{e1}$  sono ora in parallelo e potranno quindi essere sostituiti da un unico bipolo equivalente  $R_{e2}$ . A questo punto  $R_3$  ed  $R_{e2}$  sono in serie e quindi equivalenti ad un bipolo di resistenza  $R_{e3}$ . Infine i bipoli  $R_1$  ed  $R_{e3}$  appaiono ora in parallelo e quindi la resistenza vista dai morsetti A e B è pari a  $R_{e4}$  che - riepilogando - può essere scritta come:

$$R_{e4} = \frac{\left( \frac{(R_4 + R_5) R_3}{R_3 + R_4 + R_5} + R_2 \right) R_1}{R_1 + R_2 + \frac{(R_4 + R_5) R_3}{R_3 + R_4 + R_5}} \quad (I.8)$$

Questo procedimento di riduzione successiva della rete è generalmente molto semplice e conduce alla immediata determinazione della caratteristica del bipolo equivalente.

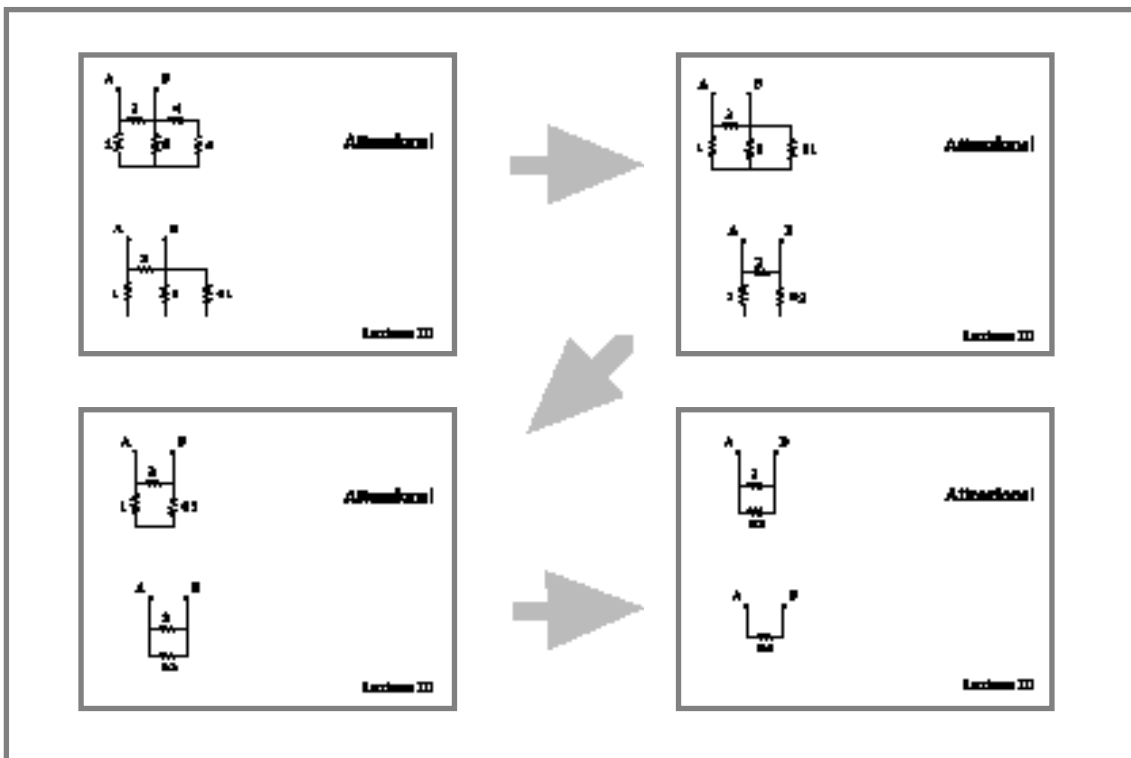
Val la pena però di sottolineare che la resistenza equivalente di una rete di resistori, vista da una coppia di suoi morsetti, dipende dai morsetti prescelti. Nella





stessa rete precedente, infatti, scegliendo un'altra coppia di morsetti si ottiene un risultato diverso, come illustrato dalla sequenza di immagini a fondo pagina che ripercorre il procedimento descritto per la nuova scelta della coppia di morsetti.

Non bisogna però pensare che tutte le reti, per ogni coppia di morsetti, siano riconducibili ad un unico bipolo equivalente, utilizzando esclusivamente le formule della serie e del parallelo di due resistori. Un esempio è mostrato nella figura a sinistra; si tratta di una tipica rete *a ponte* spesso utilizzata in dispositivi di misura per le sue specifiche caratteristiche. La riduzione di una tale rete, per la coppia di morsetti indicata, sarà possibile utilizzando una trasformazione particolare che introdurremo in seguito.



**Esercizi**

Siamo ora in grado di poter proporre qualche semplice esercizio. Cogliamo l'occasione per sottolineare che la parte esercitativa in questo corso è determinante. Come spesso accade in molti campi, non si può affermare di aver realmente assimilato una teoria, in tutte le sue implicazioni, se non si è provato ad applicarla; e spesso l'applicazione riserva inattese sorprese!

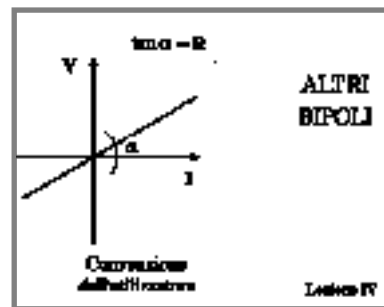
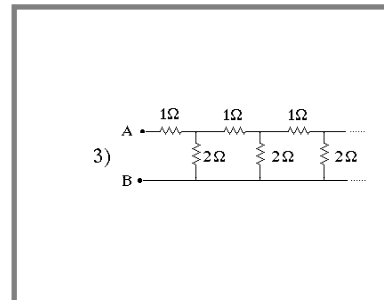
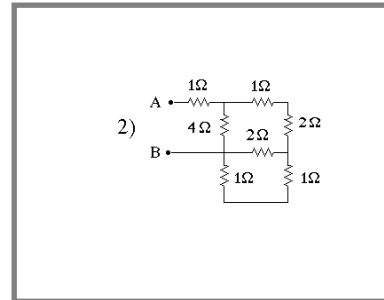
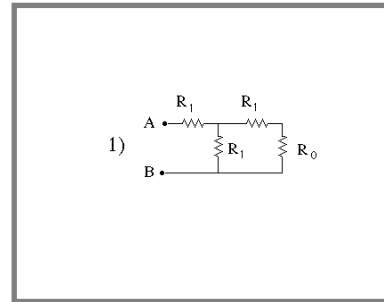
Alcuni problemi verranno proposti nel testo e la loro soluzione sarà illustrata più avanti. Per altri problemi, invece, si rimanda al testo di esercizi proposto: S. Bobbio, L. De Menna, G. Miano, L. Verolino, *Esercizi di Elettrotecnica*, vol. I, II, III e IV, ed. CUEN, Napoli, 1998.

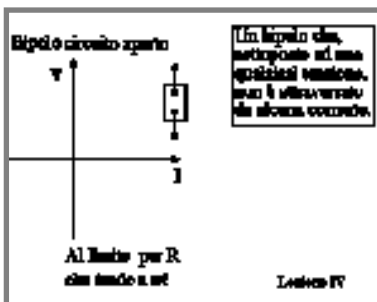
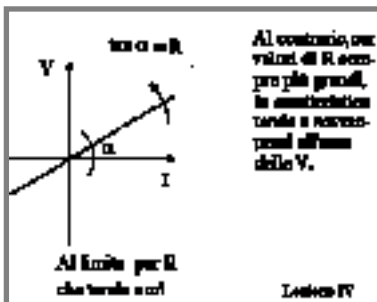
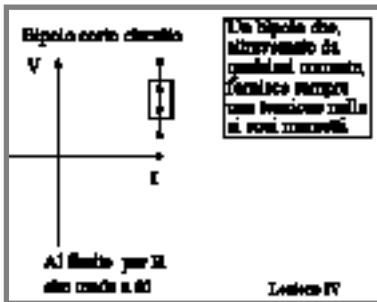
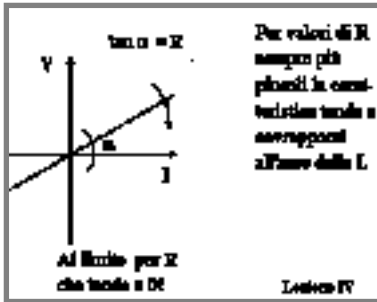
Nel caso presente nelle figure vengono proposte tre reti per le quali calcolare la resistenza equivalente ai morsetti indicati. Per la rete di cui al n.1 si chiede di calcolare anche il valore di  $R_1$  che rende  $R_{AB} = R_0$ . Si noti che la rete contrassegnata con il numero 3) è la successione di infinite celle tutte identiche tra di loro; la risoluzione di questo problema richiede un pizzico di intuizione.

**Altri bipoli**

Come abbiamo visto, nel piano (I,V) la caratteristica  $V=RI$  di un resistore è una retta che passa per l'origine, con inclinazione  $tg \alpha = R$ . Al variare di R, quindi, la retta sarà più o meno inclinata sull'asse delle I.

Si noti che il fatto che la potenza assorbita da un resistore è in ogni caso positiva si riflette nel fatto che la caratteristica dello stesso si trova sempre nel primo e nel terzo quadrante del piano (I,V). Ciò accade, naturalmente, se la convenzione scelta è quella dell'utilizzatore. Si pongono in evidenza immediatamente due casi speciali: il caso in cui l'angolo  $\alpha$  è nullo e quello in cui





esso è pari a  $90^\circ$ . Nel primo caso si ha  $R = 0$ , ed il bipolo, per qualsiasi valore della corrente che lo attraversa, presenta sempre una differenza di potenziale nulla ai suoi morsetti. Un tale bipolo prende il nome di *bipolo corto circuito* e può essere in teoria realizzato con un ideale conduttore perfetto. In un tale conduttore infatti, caratterizzato da una resistività  $\rho$  nulla ( $\sigma = \infty$ ), per qualsiasi valore della corrente si ha sempre una d.d.p. ai morsetti nulla. Naturalmente un buon conduttore reale può al più approssimare tale comportamento, e l'approssimazione sarà tanto migliore quanto più “corto” sarà il tratto di conduttore: da ciò il nome “corto circuito”.

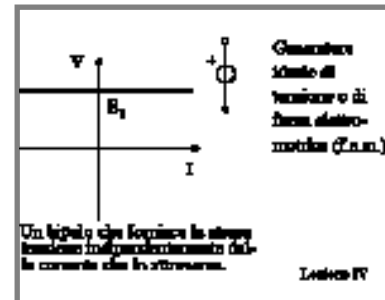
L'altro caso corrisponde a quello in cui  $\sigma = 0$  ( $\rho = \infty$ ). In tale evenienza si ha, al contrario, che per qualsiasi d.d.p.  $V$  ai morsetti la corrente che attraversa il bipolo è sempre nulla. Un tale bipolo si potrebbe realizzare frapponendo tra i morsetti un perfetto “non conduttore”, cioè un materiale isolante. Esso prende il nome di *bipolo circuito aperto* o *a vuoto*. Le denominazioni di corto circuito, circuito aperto o circuito a vuoto sono in parte autoesplicative ed in parte saranno meglio chiarite in seguito.

Immaginiamo ora un bipolo del tutto diverso che sia definito da questa condizione: pur avendo fatto su di esso la convenzione dell'utilizzatore, la potenza risulta, in alcune condizioni, negativa. Un tale bipolo non può certamente essere un resistore. Cerchiamo di capire quale è l'aspetto caratteristico che lo distingue da un resistore. Nel resistore, come abbiamo visto, il moto delle cariche positive va sempre dal punto a potenziale maggiore a quello a potenziale minore, secondo il campo che possiamo immaginare agire al suo interno. È questo che fa sì che la potenza assorbita - convenzione dell'utilizzatore dunque - sia sempre positiva. Nel bipolo che stiamo immaginando deve accadere l'opposto: le cariche devono andare dal punto a potenziale

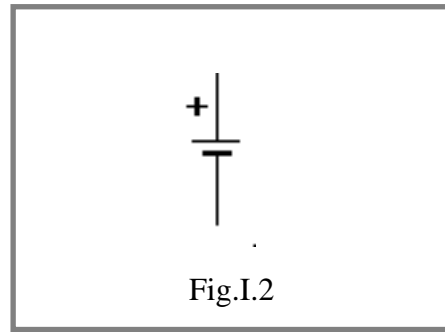
minore a quello a potenziale maggiore, apparentemente contro il campo. Ne consegue che un tale bipolo, se esiste, deve essere sede di fenomeni diversi da quelli fin qui analizzati e - questo è importante - deve mettere in gioco anche fenomeni di natura diversa da quelli che producono il campo. Ipotizziamo per ora l'esistenza di tale bipolo; vedremo in seguito quali possono essere le sue pratiche realizzazioni, anche se lo studio approfondito di tali bipoli, che d'ora in poi chiameremo *generatori*, travalica i limiti di un corso di Elettrotecnica.

Esaminiamo quali forme può assumere la caratteristica di un bipolo generatore. Se abbiamo scelto la convenzione dell'utilizzatore essa dovrà almeno in parte svolgersi nel secondo e nel quarto quadrante: solo in tali quadranti, infatti, il prodotto  $VI$  è negativo. Se invece scegliamo la convenzione del generatore, la caratteristica dovrà, almeno in parte, svilupparsi, per le stesse ragioni, nel primo o nel terzo quadrante. Il caso più semplice, ma ideale, che possiamo immaginare è quello in cui un tale bipolo presenta sempre la stessa d.d.p. ai suoi morsetti, indipendentemente dalla corrente che lo interessa, o che il bipolo eroga. Un tale generatore prende il nome di *generatore ideale di tensione* o anche di *forza elettromotrice* (f.e.m.).

Conveniamo di assumere la convenzione del generatore; in tale ipotesi il bipolo in esame funziona effettivamente come generatore ( $VI > 0$ ) solo per il tratto della sua caratteristica che si trova nel primo quadrante. Nel tratto che interessa il secondo quadrante, esso ha  $VI < 0$  e quindi si comporta come uno strano resistore o utilizzatore. Un elemento che certamente distingue tale bipolo da un resistore normale sta nel fatto che, mentre in un resistore normale la caratteristica passa sempre per l'origine del piano  $(I, V)$  (questa proprietà viene detta *inerzia* del bipolo), nel bipolo generatore ideale anche per  $I = 0$  si ha una tensione ai morsetti diversa da zero. Il simbolo generalmente utilizzato per tale generatore è rappresentato in figura. In realtà tale simbolo



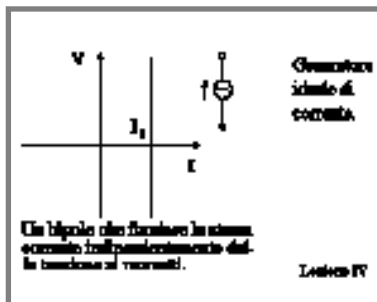
individua una più generale classe di generatori di f.e.m.



che sono in grado di fornire una d.d.p. ai loro morsetti variabile nel tempo e che introdurremo nel seguito. Per il generatore di tensione costante si usa

spesso il simbolo più specifico mostrato in Fig.I.2 dove il tratto più lungo individua il morsetto positivo.

Un caso del tutto analogo, ma opposto, è quello del bipolo che per qualsiasi valore della tensione ai morsetti eroga sempre la stessa corrente  $I$ . È naturale chiamare un tale bipolo *generatore ideale di corrente*. Il simbolo riservato per un tale generatore e la sua caratteristica sono mostrati in figura. Si noti il segno + accanto ad uno dei morsetti o la freccia accanto al simbolo; per il generatore di tensione esso sta ad indicare che la tensione  $E$  è la differenza di potenziale tra il morsetto contrassegnato con il segno + e l'altro, mentre per il generatore di corrente la freccia indica il verso della corrente  $I$  fornita dal generatore stesso. I due generatori fin qui mostrati fanno parte di una più ampia classe di bipoli che per ovvie ragioni si dicono *attivi*. Essi sono anche generatori indipendenti in quanto la tensione o la corrente, nei due casi, da essi erogata ai morsetti non dipende da alcuna caratteristica del sistema in cui vengono inseriti. Introdurremo in seguito generatori che non godono di tale proprietà



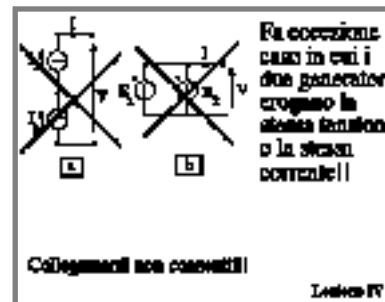
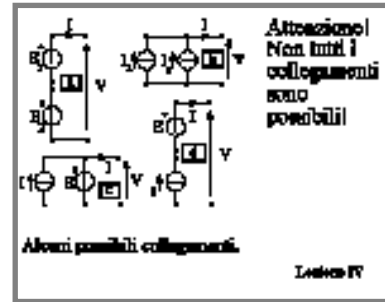
Proviamo ora a prendere in considerazione anche per i bipoli generatori i due tipi di collegamento, serie e parallelo, che abbiamo esaminato nel caso dei bipoli resistori. Nella immagine a lato sono mostrati quattro diversi casi ottenuti combinando generatori ideali di corrente e di tensione. Per quanto riguarda i casi a) e b)

è facile convincersi che il bipolo equivalente è ancora un generatore ideale, rispettivamente di tensione pari ad  $E_1 + E_2$ , e di corrente pari a  $I_1 + I_2$ .

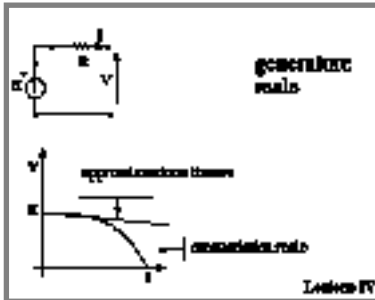
I casi c) e d) sono leggermente meno evidenti: per comprendere la natura del bipolo equivalente rappresentato nel caso c), per esempio, basta considerare che, per il modo in cui il collegamento è realizzato, il generatore di tensione impone la sua tensione ai morsetti del bipolo equivalente; se ne conclude che tale bipolo, che è in grado di erogare qualsiasi corrente mantenendo costante la sua tensione ai morsetti, è ancora un generatore ideale di tensione. Analogamente nel caso d) avremo un generatore equivalente ideale di corrente.

Di proposito abbiamo lasciato da parte i due casi rappresentati nella successiva immagine. Tali collegamenti danno luogo ad una contraddizione non eliminabile.

Infatti, consideriamo per esempio il caso b): i due generatori vorrebbero entrambi imporre la loro tensione ai morsetti del generatore equivalente. D'altra parte tale tensione non può che essere unica. In sintesi si può dire che questo è un caso in cui entrano in contraddizione due "idealità": quella dei generatori - appunto ideali -, che presentano, in quanto tali, sempre la stessa tensione ai loro morsetti, e quella dei conduttori di collegamento che, essendo anche essi ideali, non possono produrre una caduta di tensione. È un caso di contrasto non raro quando in un modello vengono introdotti elementi "ideali". Il caso a) si analizza in maniera analoga. Allo scopo di approfondire meglio il problema, osserviamo che un generatore ideale di tensione o di corrente è per definizione in grado di fornire ai suoi morsetti una potenza infinita; la potenza fornita è infatti pari al prodotto della tensione per la corrente erogata e, quindi, nei due casi considerati può essere infinita se una



delle due grandezze può andare all'infinito - la corrente per il generatore di tensione e la tensione per il generatore di corrente. Si può facilmente immaginare che nessun generatore "reale" potrà mai essere in grado di erogare una potenza infinita. La caratteristica di un *generatore reale* dovrà dunque essere sostanzialmente diversa da quella di un generatore ideale; all'aumentare della corrente erogata, la tensione ai morsetti non potrà rimanere costante, come, per esempio, nella caratteristica mostrata in figura.

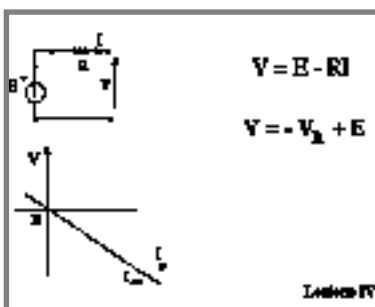


In una tale caratteristica possiamo individuare un valore della "tensione a vuoto"  $E_0$ , presente ai morsetti del generatore quando esso non eroga corrente, - ossia la tensione che dovrebbe essere mantenuta dal generatore per qualsiasi valore di corrente, qualora fosse un generatore ideale di tensione - e la corrente di corto circuito  $I_{cc}$ , cioè la corrente che il generatore fornisce quando è chiuso, appunto, in corto circuito.

Facciamo vedere che è possibile costruire, con gli elementi che abbiamo a disposizione, un bipolo che, pur essendo ancora ideale, approssima il comportamento del generatore reale, almeno in un tratto della sua caratteristica. Consideriamo, infatti, i possibili collegamenti serie-parallelo che si possono realizzare utilizzando un bipolo generatore ideale ed un bipolo resistore. È l'ultimo caso che ci resta da esaminare; nelle figure sono rappresentati le due configurazioni significative. Nella stesse figure sono rappresentate anche le relative caratteristiche dei bipoli equivalenti; nel caso del generatore ideale di tensione con in serie una resistenza, infatti, la tensione  $V$  ai morsetti del bipolo equivalente sarà pari alla tensione  $E_0$  del generatore diminuita della tensione  $RI$  che "cade" sulla resistenza  $R$ :

$$V = E_0 - RI, \quad (I.9)$$

che è appunto la caratteristica descritta nel diagramma



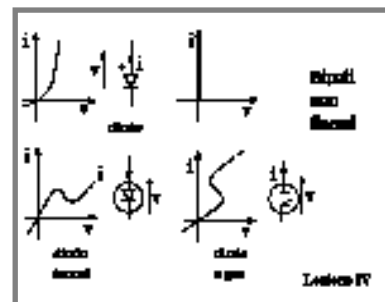
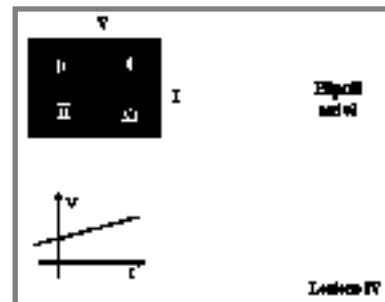
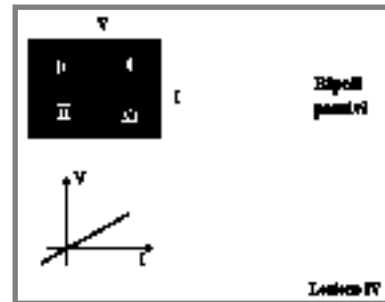
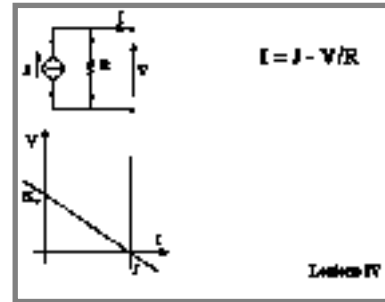


in figura. Come si vede, dunque, il bipolo equivalente in questione è ancora un bipolo attivo, ma la potenza che esso è in grado di fornire non può più essere illimitata. È ancora dunque un bipolo “ideale” - nessun generatore reale avrà mai una caratteristica rappresentabile rigorosamente con una retta - ma il suo comportamento è indubbiamente più vicino a quello di un generatore reale: potremmo chiamare un tale bipolo *generatore reale idealizzato*. Nella figura in cui è rappresentata la caratteristica di un possibile generatore reale, è indicata anche la retta che ne approssimerebbe, almeno nel primo tratto, il comportamento con un generatore reale idealizzato.

Per il caso del generatore di corrente con un resistore in parallelo si possono fare analoghe considerazioni.

Fin qui abbiamo descritto bipoli la cui caratteristica può essere individuata da una relazione tra  $V$  ed  $I$  del tipo  $V=aI+b$ . Tali bipoli prendono il nome di *bipoli normali*. Se  $b=0$ , se cioè il bipolo è anche *inerte*, si parla di *bipolo lineare*. Abbiamo già visto invece che se la caratteristica - avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore - giace tutta nel primo e terzo quadrante, si parla di bipoli passivi, mentre se essa ha tratti nei quadranti adiacenti, per esempio primo e secondo, si dice che il bipolo è attivo. Questa definizione di passività ed attività del bipolo - che è adeguata in regime stazionario, altrimenti detto anche regime di *corrente continua* (c.c.) - dovrà essere opportunamente modificata quando introdurremo i bipoli in regime dinamico.

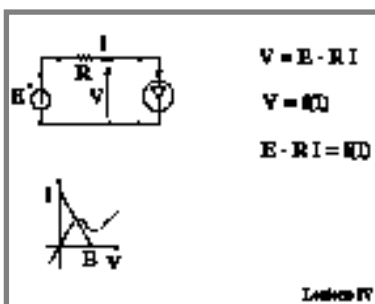
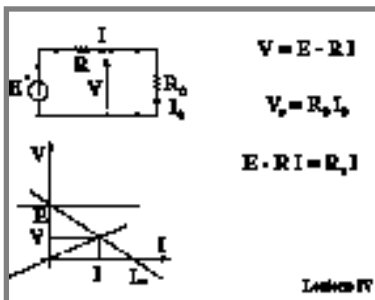
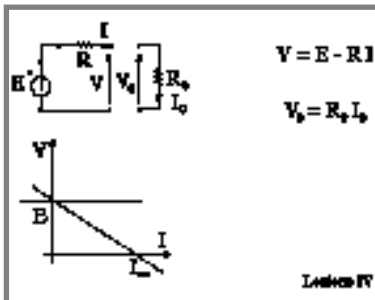
È possibile però concepire anche bipoli la cui caratteristica sia “non normale”, e quindi anche non lineare. Un esempio classico è quello del bipolo *diodo* nella sua forma reale ed idealizzata mostrate in figura. Ma si possono presentare anche altre tipologie di caratteristiche, come quelle del bipolo *diodo tunnel* o del *diodo a gas* mostrate anche esse, qualitativamente, in figura. Tali



bipoli sono tutti passivi, nel senso precisato precedentemente. Si osservi che mentre per il diodo tunnel la caratteristica  $I=I(V)$  è una funzione ad un sol valore, quella  $V=V(I)$  è, in alcuni tratti, a più valori. Per il diodo a gas accade l'opposto. Per questa proprietà si dice che il diodo tunnel è *controllato in tensione* ed il diodo a gas, invece, è *controllato in corrente*.

Affrontiamo, infine, il caso della serie di un bipolo generatore reale idealizzato e di un resistore. Se assumiamo le convenzioni indicate in figura, possiamo immaginare di riportare entrambe le caratteristiche dei due bipoli sullo stesso piano  $(I,V)$ . Questa rappresentazione consente una soluzione grafica del problema della determinazione della corrente e della tensione comune ai due bipoli. Infatti, dovendo il punto caratterizzato dalle coordinate  $I$  e  $V$  - soluzioni del nostro problema - necessariamente appartenere sia alla caratteristica del generatore che a quella del resistore, esso non potrà che essere il punto di intersezione tra le due caratteristiche. Tale punto prende il nome di *punto di lavoro* e la retta che rappresenta la caratteristica del bipolo passivo  $R$ , è detta *retta di carico* per il bipolo attivo ai cui morsetti tale *carico* è appunto collegato. Si noti che questo tipo di soluzione grafica è applicabile anche quando uno dei bipoli non è lineare, o anche quando entrambi non sono lineari, a condizione però che il punto di intersezione tra le due caratteristiche sia unico. In presenza di intersezioni multiple occorrerà avere un criterio, che esula dall'attuale modello, per determinare quale dei diversi punti possibili sia quello di *lavoro* effettivo.

Come è noto i bipoli non lineari sono di estrema importanza nelle pratiche applicazioni. Naturalmente la loro non linearità introduce notevoli difficoltà nella soluzione di problemi in cui essi sono coinvolti. Un artificio



che può essere utilizzato è quello di approssimare la loro caratteristica con una opportuna “spezzata”. Si parla di *linearizzazione a tratti*. D’altra parte tale artificio, se risolve alcuni aspetti del problema, introduce a volte altre difficoltà connesse con la presenza di punti di discontinuità nella caratteristica. Lo studio delle reti non lineari rappresenta un affascinante campo in cui molto c’è ancora da chiarire. Naturalmente la piena complessità e varietà di queste reti si manifesta soltanto quando si introduce la variabile temporale; ma questo è un discorso che affronteremo nel seguito.

**Esercizi**

Nel primo degli esercizi proposti si richiede di determinare il valore di R per il quale la potenza dissipata nel *carico* - il bipolo R, appunto - sia massima.

Evidentemente, al variare di R, la corrente erogata dal generatore di tensione varia e con essa varierà anche la potenza dissipata in R. Per R=0 tale potenza è nulla perché è nulla la tensione sul bipolo (bipolo corto circuito); analogamente per R=∞, la potenza è ancora nulla perché è nulla la corrente che circola nel bipolo (bipolo circuito aperto). Esisterà necessariamente quindi un valore di R per il quale la potenza dissipata assume un valore massimo. Si chiede di determinare tale valore. Per inciso, quando la condizione di massimo trasferimento di potenza è verificata, si dice che il carico ed il generatore sono *adattati in potenza*.

Nel secondo problema proposto si chiede di determinare quale dovrebbe essere la suddivisione della corrente totale I entrante nel parallelo dei due resistori, perché la potenza dissipata nel sistema nel suo complesso sia minima. Commenteremo più avanti il risultato.

$V = E - RI$   
 $V = RI$   
 $E - RI = RI$

Lezione V

Esercizi

Determinare il valore di R che rende massima la potenza dissipata in essa.

Lezione V

5

Esercizi

Trovare la ripartizione della corrente I nei due rami imponendo che la potenza dissipata nel circuito sia minima, con la condizione  $I = I_1 + I_2$ .

Lezione V

**Esercizi**

$$R = R_1 + \frac{(R_2 + R_3)R_4}{2R_3 + R_4}$$

$$(2R_3 + R_4)(R_2 - R_3) - (R_2 - R_3)R_4 = 0$$

$$R_2 = \frac{R_3}{2}$$

Lezione V

Nelle altre immagini sono illustrate le soluzioni di problemi proposti nelle pagine precedenti. I primi due non richiedono particolari commenti: il valore di  $R_1$  che rende la resistenza equivalente del bipolo uguale a quella di carico  $R_0$ , è dato in figura.

**Esercizi**

$R = 3\Omega$

Lezione V

Per quanto riguarda il terzo esercizio, osserviamo che la chiave per la sua soluzione sta nella osservazione che, se la rete si ripete identicamente a se stessa all'infinito, in qualsiasi punto della catena di celle identiche si immagini di valutare la resistenza equivalente, si dovrà ritrovare lo stesso risultato. Questa considerazione giustifica lo schema equivalente mostrato in figura che porta ad una equazione di secondo grado la cui incognita è la risposta cercata. Inutile dire che, delle due soluzioni possibili, quella negativa va scartata perché fisicamente inconsistente: nei limiti dei bipoli finora introdotti la resistenza non può essere negativa!

**Esercizi**

$R = 2\Omega$

$$R = R_1 + \frac{R R_2}{R + R_2} \quad \Leftrightarrow \quad R^2 - R_1 R - R_1 R_2 = 0$$

$$R = \frac{+R_1 \pm \sqrt{R_1^2 + 4 R_1 R_2}}{2}$$

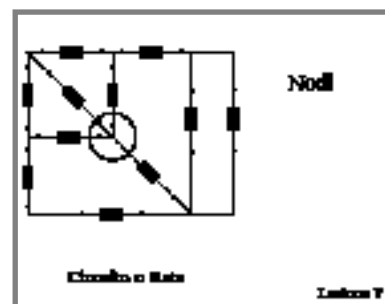
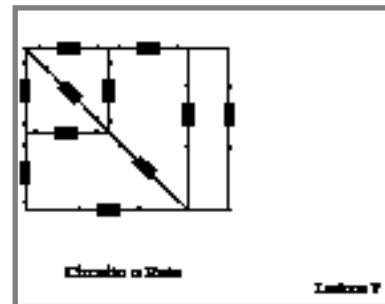
Lezione V

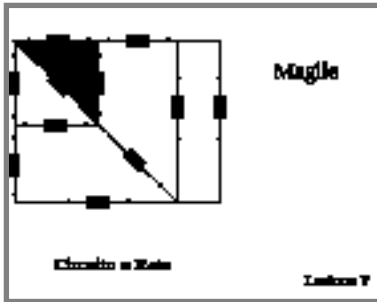
### Le reti elettriche

Fino ad ora abbiamo immaginato di disporre di due soli bipoli da collegare attraverso i loro morsetti; supponiamo ora, invece, di disporre di  $l$  bipoli e di collegarli tra di loro in una maniera qualsiasi. Quello che si ottiene è un *circuito elettrico* o anche *rete elettrica* (il secondo termine è a volte riservato ai circuiti di grande estensione).

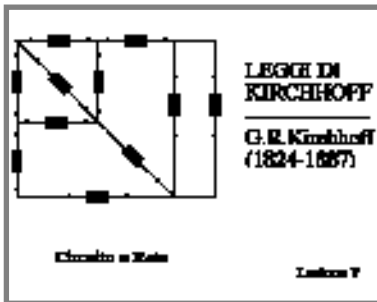
In generale sono note le caratteristiche dei singoli bipoli, quindi i legami tra tensioni ai morsetti e correnti circolanti - naturalmente una volta scelta una convenzione per i versi positivi di tensioni e correnti - mentre invece non è noto il particolare valore di corrente o di tensione che effettivamente si stabilisce nella rete così fatta in ogni bipolo. Determinare tali valori significa "risolvere la rete". Le leggi da noi introdotte ci consentono di risolvere tale problema.

Per studiare in maniera sistematica i metodi di soluzione delle reti elettriche conviene premettere qualche definizione. In primo luogo chiameremo *lato* o *ramo* di una rete l'insieme di quei bipoli che nella rete stessa compaiono fra di loro collegati in serie. Come abbiamo visto per i resistori, e vedremo in seguito per altri tipi di bipoli, ad essi si potrebbe sostituire un unico bipolo





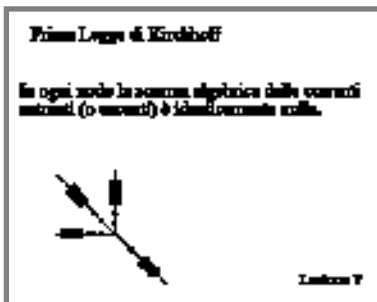
equivalente. Chiameremo ancora *nodo* di una rete un punto in cui convergono più di due lati della rete stessa. Infine ogni insieme di lati della rete che forma un anello chiuso prenderà il nome di *maglia della rete*. Orbene, in base alle definizioni ora date ed a quella di bipolo, è facile vedere che per ogni rete è possibile scrivere un certo numero di equazioni che legano tensioni tra i nodi e correnti nei lati fra loro.



**La prima legge di Kirchhoff**

La **prima legge di Kirchhoff** o **legge di Kirchhoff per le correnti (LKC)** afferma: *in ogni nodo la somma algebrica delle correnti entranti (o uscenti) nel nodo è identicamente nulla*. Il termine “algebraica” sta a indicare che ogni corrente va presa con il suo segno se il verso positivo scelto sul ramo corrispondente è effettivamente entrante nel nodo (o uscente se si è scelto di effettuare la somma delle correnti uscenti dal nodo!), o con il segno opposto nel caso contrario. In simboli:

$$I_1 + I_2 + I_2 + \dots + I_k = 0 \quad (II.1)$$

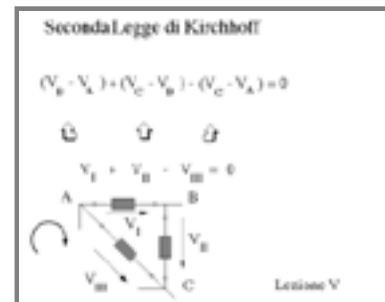


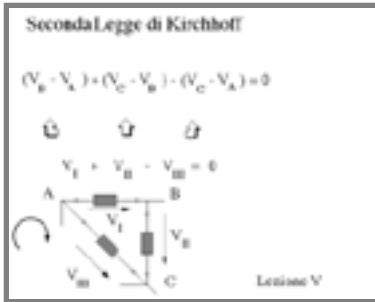
Val la pena di osservare che la validità di tale legge è strettamente legata alla definizione di bipolo, e precisamente al fatto che ogni bipolo è supposto interagire con l'esterno esclusivamente attraverso i suoi morsetti. In più, la conservazione della carica è presupposta. Infatti la somma algebrica delle correnti entranti nel nodo rappresenta, per definizione di intensità della corrente elettrica, la quantità di carica che nell'unità di tempo viene globalmente portata nel nodo. In regime stazionario, quando cioè le correnti non variano nel tempo, tale contributo, per unità di tempo, resta evidentemente costante. In queste condizioni se esso non

fosse nullo, a condizione di attendere un tempo sufficientemente lungo, si potrebbe portare nel nodo in questione una carica grande quanto si vuole. Ciò è evidentemente impossibile, non fosse altro per il fatto che i portatori di carica sono dotati di massa non nulla e, quindi, con la carica, crescerebbe indefinitamente anche la massa del nodo. In un regime dinamico, con correnti che variano nel tempo, occorrerà fare un discorso più articolato. Osserviamo infine che se  $n$  sono i nodi presenti in una rete, le LKC ci forniscono  $n$  relazioni lineari tra le varie correnti di lato della rete stessa. Dimosteremo in seguito che di queste  $n$  equazioni una, scelta a caso, può essere ottenuta come combinazione lineare delle altre  $n-1$ , che risultano invece indipendenti.

### La seconda legge di Kirchhoff

Consideriamo ora una maglia di una rete e supponiamo di percorrerla - di andare cioè da un lato al successivo - in uno dei due possibili versi. La scelta di un verso su di una maglia equivale, in termini specifici, alla sua "orientazione". Proviamo a sommare algebricamente le tensioni su ogni lato della maglia così come le incontriamo seguendo l'orientazione prescelta. Anche qui "algebricamente" sta a indicare che ogni tensione verrà presa con il proprio segno o con il segno opposto a seconda che il verso prescelto per essa sul singolo lato coincida o non con quello di orientazione della maglia. Dato che la tensione su ogni ramo è per definizione l'integrale di linea del campo  $\mathbf{E}$  lungo una linea che collega i due morsetti del bipolo inserito nel ramo, ed in virtù della scelta di sommare "algebricamente" tali tensioni lungo la maglia, tale somma verrà a coincidere con l'integrale di  $\mathbf{E}$  lungo una linea chiusa. In regime stazionario tale circuitazione deve essere nulla e tale sarà dunque la somma delle tensioni lungo la maglia.

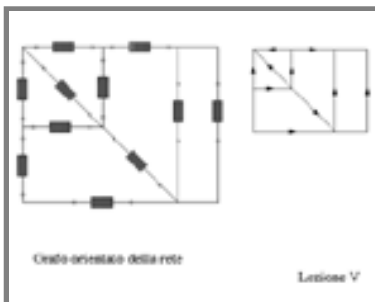




$$V_{12} + V_{23} + V_{34} + V_{45} + \dots + V_{k1} = 0 \quad (\text{II.2})$$

Ne discende dunque la seguente **seconda legge di Kirchhoff** o **legge di Kirchhoff per le tensioni (LKT)**: *in una maglia la somma delle tensioni di lato, prese con il proprio segno o con il segno opposto a seconda che il loro verso coincida o non con un verso di orientazione della maglia in precedenza scelto, è identicamente nulla.* Possiamo verificare la validità della legge precedentemente enunciata ragionando anche in un altro modo: in regime stazionario ogni tensione è in realtà una differenza di potenziale e potrà essere messa sotto la forma  $V_r - V_s$ , dove con  $V_r$  e  $V_s$  si sono indicati i potenziali nei nodi, rispettivamente, r ed s. La somma di cui sopra avrà dunque l'aspetto seguente:

$$V_1 - V_2 + V_2 - V_3 + V_3 - V_4 + \dots + V_k - V_1,$$



ed è, evidentemente, identicamente nulla perché ogni potenziale di nodo compare due volte e con segno opposto. Osserviamo quindi che la validità della LKT può essere anche fatta discendere dalla semplice definizione di bipolo, in particolare dal fatto che per un bipolo si può, per definizione parlare di una tensione ai suoi morsetti indipendente dal percorso, cioè di una differenza di potenziale. Osserviamo infine che la LKT impone legami lineari tra le tensioni di lato.

Per una rete di  $l$  lati non è in generale possibile dire, senza specificare meglio la rete, quante sono le maglie chiuse che in essa si possono formare. E ciò è evidente se si pensa che alcuni nodi possono non essere collegati tra di loro direttamente. Anche in questo caso vedremo però che solo un sottoinsieme di tutte le equazioni che si possono scrivere alle maglie è in realtà costituito da equazioni linearmente indipendenti: per la preci-



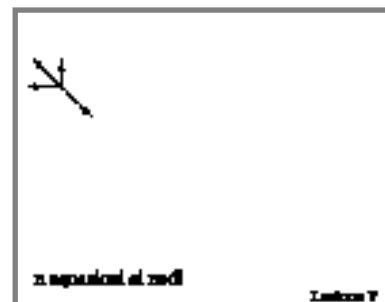
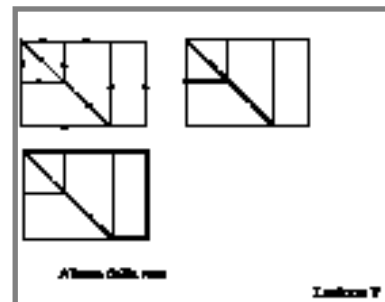
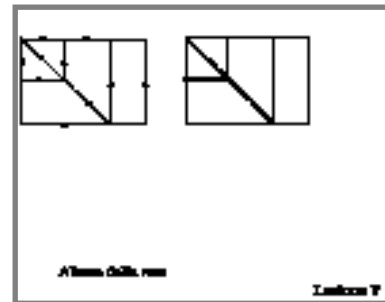
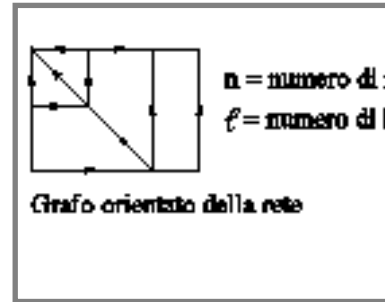
sione un numero di  $l - (n - 1)$  equazioni. Vedremo in seguito come le equazioni scritte in base alla LKC ed alla LKT ci consentono di risolvere una qualsiasi rete, nel senso specificato in precedenza.

**Il grafo di una rete e le equazioni indipendenti**

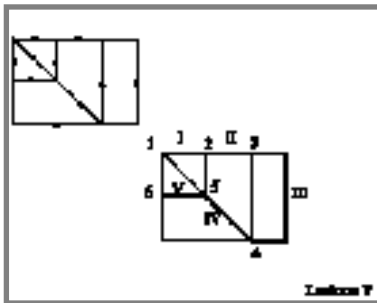
Per studiare una rete possiamo per il momento prescindere dalla natura dei vari bipoli che ne costituiscono i diversi rami, e focalizzare la nostra attenzione sulla struttura della rete stessa, cioè sul modo in cui i bipoli sono collegati tra loro. Una tale struttura, che per la rete in esame è mostrata nelle immagini a lato, prende il nome di *grafo della rete*.

In un grafo possiamo individuare rami e nodi, i punti cioè in cui convergono più di due rami. Se poi orientiamo ogni ramo del grafo, scegliendo uno dei due versi possibili su ogni ramo, diremo che il grafo è *orientato*. Chiameremo *albero di una rete* un insieme di rami che unisce fra di loro tutti i nodi della rete senza formare maglie chiuse. Ovviamente esistono in generale più alberi per una rete avente un determinato grafo. Il complemento di un dato albero a tutta la rete, cioè l'insieme dei rami che restano esclusi dall'albero, prende il nome di *coalbero della rete*. Nelle immagini sono indicati con tratto più grosso due possibili alberi per la rete che stiamo esaminando.

Sfruttando queste definizioni è possibile ricavare in maniera molto semplice alcune proprietà generali di un grafo. Per un grafo orientato, infatti, possiamo scrivere  $n$  equazioni ai nodi, se  $n$  sono i nodi, che derivano dall'applicazione della LKC ad ogni singolo nodo. Supponiamo di scrivere tali equazioni nella forma che esse assumono quando si sceglie di imporre l'annullamento della somma delle correnti entranti; naturalmente è possibile anche la scelta opposta, ma, per il



ragionamento che vogliamo sviluppare, è essenziale che si convenga di fare la stessa scelta per ogni nodo. In queste condizioni nel sistema di equazioni così ottenuto ogni corrente comparirà una volta con il segno “meno” in una equazione ed una volta con il segno “più” in un’altra equazione, dato che ogni ramo collega due nodi ed uno stesso orientamento risulterà entrante per l’uno e uscente per l’altro. Se, a questo punto, sommiamo tutti i primi membri delle equazioni del sistema abbiamo una espressione algebrica che, per costruzione, è identicamente nulla. La stessa cosa accade per la somma dei secondi membri. Il fatto che dal nostro sistema di equazioni, sommando membro a membro tutte le equazioni, si ottiene una identità, ci dice che in realtà almeno una delle equazioni presa a caso potrebbe essere ottenuta con una opportuna combinazione lineare delle altre  $n-1$ . Le  $n$  equazioni, dunque, non sono tra di loro indipendenti, il che significa, in termini fisici, che l’informazione contenuta in una delle equazioni è già contenuta nelle altre: essa è in realtà *ridondante*.

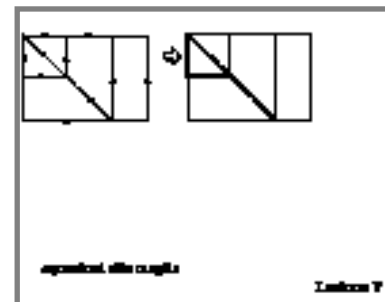


Siamo portati a dire, dunque, che la LKC consente, per una rete con  $n$  nodi, di scrivere al più  $n-1$  equazioni indipendenti tra di loro. È possibile affermare anche che almeno  $n-1$  sono indipendenti. Infatti immaginiamo di scegliere un albero della rete che abbia la caratteristica di non avere più di due rami che confluiscono in ogni singolo nodo, così come è mostrato, per esempio, nelle immagini; esso sarà costituito per definizione da  $n-1$  rami.

Supponiamo di numerare i nodi del grafo in ordine progressivo così come essi vengono incontrati percorrendo l’albero prescelto. Per ognuno dei primi  $n-1$  nodi scriviamo le equazioni che esprimono la LKC. Numeriamo anche i rami, magari con numeri romani per non creare confusione, così come vengono incon-

trati percorrendo l'albero della rete. Si avrà dunque che il ramo I dell'albero congiungerà i nodi 1 e 2, il ramo II i nodi 2 e 3 e così via. Nella figura sono mostrati anche, con tratto più sottile, i rami del coalbero. Orbene dalla equazione che esprime la LKC al primo nodo possiamo ricavare l'incognita  $i_I$  in funzione delle correnti in altri rami non appartenenti all'albero, cioè del coalbero. Nella equazione relativa al secondo nodo compariranno le correnti  $i_I$  ed  $i_{II}$ , ma utilizzando la prima equazione si potrà ottenere una equazione in cui  $i_{II}$  comparirà in funzione di tutte correnti del coalbero. L'operazione può essere evidentemente ripetuta per tutte le  $n-1$  correnti dei rami dell'albero. A questo punto abbiamo ottenuto un sistema di equazioni, derivato dal precedente, nel quale in ogni equazione compare in esclusiva una corrente di un ramo dell'albero. Pertanto tale sistema deve essere necessariamente costituito da equazioni tutte indipendenti tra loro.

Abbiamo, dunque mostrato che la LKC consente di scrivere  $n - 1$  equazioni indipendenti per le correnti della rete. Dimosteremo ora che le LKT consentono invece di scrivere  $l - (n - 1)$  equazioni indipendenti tra le tensioni di lato ( $l$  è il numero complessivo di rami del grafo). Infatti osserviamo in primo luogo che i rami del coalbero sono pari ad  $l - (n - 1)$  per definizione. Costruiamo, poi, un sistema di  $l - (n - 1)$  maglie chiuse aggiungendo, di volta in volta, ai rami dell'albero uno ramo, ed uno solo, del coalbero. Che questa operazione porti alla costruzione di maglie chiuse discende in maniera evidente dalla definizione di albero. Esso, infatti, congiunge tutti i nodi della rete. L'aggiunta di un altro ramo, che collega due nodi a caso, dovrà necessariamente chiudere una maglia - eventualmente con qualche appendice che converremo di non prendere in considerazione. Orbene le equazioni che si



ottengono dalla LKT per tali maglie sono necessariamente indipendenti, in quanto in ognuna di esse comparirà una incognita in esclusiva: quella del particolare ramo del coalbero che ha contribuito a formare la maglia.

In conclusione, dunque, la LKT ci consente di scrivere un numero di  $l - (n - 1)$  relazioni lineari tra le tensioni sui rami della rete. Nel complesso, dunque, attraverso l'applicazione della LKC e della LKT si possono scrivere  $l$  relazioni lineari indipendenti tra le  $l$  correnti di lato e le  $l$  tensioni di lato. D'altra parte le caratteristiche dei bipoli ci forniscono ancora  $l$  relazioni - questa volta non necessariamente lineari - tra le tensioni e le correnti, per cui nel complesso avremo  $2l$  equazioni in  $2l$  incognite. Se la rete è costituita da generatori indipendenti e da bipoli con caratteristiche lineari, allora le  $2l$  equazioni sono anch'esse tutte lineari. In tal caso, essendo esse anche indipendenti, come abbiamo mostrato, forniscono certamente una ed una sola soluzione del problema: la conoscenza di tutte le tensioni sui rami e di tutte le correnti nei rami. Il problema di come si arrivi a trovare tale soluzione è a questo punto di puro carattere matematico risolvibile con diversi metodi: dal semplice metodo di sostituzione, molto conveniente quando il numero di equazioni è ridotto, al più complesso, ma ancora di semplice applicazione, metodo detto di Cramer che utilizza concetti studiati nella teoria dei sistemi di equazioni algebriche lineari. Se invece le caratteristiche dei bipoli non sono tutte lineari, allora il problema di trovare una soluzione diventa più delicato; può accadere, per esempio, che esista più di una soluzione, se sono presenti bipoli con caratteristiche a più valori. In generale la presenza di bipoli non lineari rende difficile una trattazione generale ed ogni caso va studiato nei suoi aspetti particolari.

Incognite (tensioni e correnti)	$2l$	
Caratteristiche dei bipoli	$l$	
Equazioni ai nodi	$n-1$	
Equazioni alle maglie	$l-(n-1)$	
<b>Totali</b>	$2l$	$2l$

**Tabella V**

### Equazioni nelle incognite correnti

Limitiamoci per ora ai bipoli lineari e osserviamo che, in generale, non è necessario trattare l'intero sistema di  $2l$  equazioni di cui si parlava in precedenza; una semplice sostituzione delle relazioni caratteristiche dei bipoli nelle equazioni ottenute applicando la LKC e la LKT, ci conduce immediatamente ad un sistema di  $l$  equazioni in  $l$  incognite, siano esse le correnti nei rami o le tensioni sui rami. La scelta delle incognite in questo caso è del tutto equivalente.

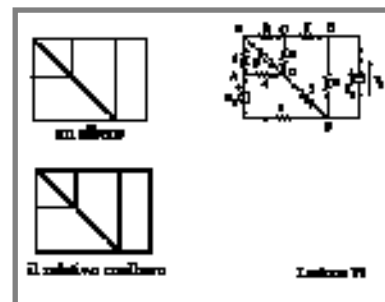
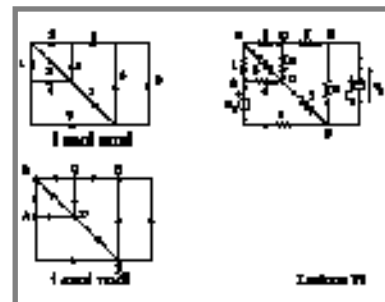
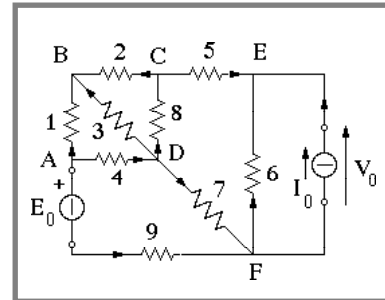
Un esempio a questo punto chiarirà più di molte parole: prendiamo in considerazione una rete particolare e mostriamo tutte le fasi della sua "risoluzione", riducendo il commento al minimo necessario.

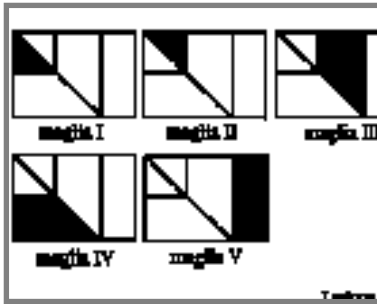
Nelle immagini a lato sono rappresentati il circuito, il suo grafo orientato (formato da 10 lati), i nodi (sei nel caso particolare), un possibile albero, il relativo coalbero e le cinque maglie che da esso possono essere generate.

Infine, le equazioni ai nodi (si è scelto di non utilizzare l'equazione al nodo F):

$$\begin{aligned}
 \text{nodo A)} \quad & I + I_1 + I_4 = 0, \\
 \text{nodo B)} \quad & I_1 + I_2 + I_3 = 0, \\
 \text{nodo C)} \quad & I_2 + I_5 - I_8 = 0, \\
 \text{nodo D)} \quad & I_3 - I_4 + I_7 + I_8 = 0, \\
 \text{nodo E)} \quad & I_5 + I_6 + I_0 = 0,
 \end{aligned}
 \tag{II.3}$$

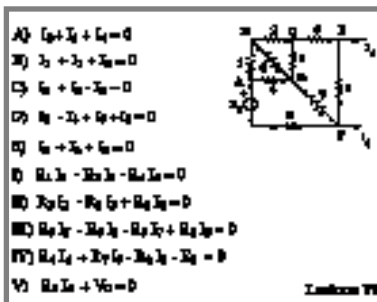
e le equazioni alle maglie:





$$\begin{aligned}
 \text{maglia I)} \quad & R_1 I_1 - R_3 I_3 - R_4 I_4 = 0, \\
 \text{maglia II)} \quad & R_2 I_2 - R_3 I_3 + R_8 I_8 = 0, \\
 \text{maglia III)} \quad & R_5 I_5 - R_6 I_6 - R_7 I_7 + R_8 I_8 = 0, \\
 \text{maglia IV)} \quad & R_4 I_4 + R_7 I_7 - R_1 I_1 - E_0 = 0, \\
 \text{maglia V)} \quad & R_6 I_6 + V_0 = 0.
 \end{aligned} \tag{II.4}$$

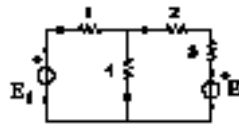
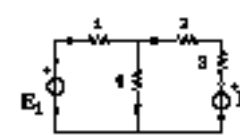
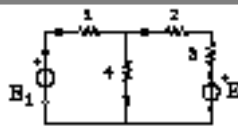
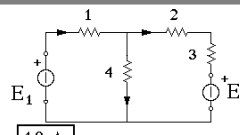
Notiamo subito che l'equazione alla maglia V si limita a fornirci il valore della tensione  $V_0$  ai capi del generatore di corrente una volta nota la corrente  $I_6$ ; essa aumenta di uno il numero di equazioni ma contemporaneamente aggiunge una nuova incognita,  $V_0$ . Infatti, se non si è interessati a conoscere il valore di tale tensione, la maglia V può essere completamente ignorata, come se il circuito fosse effettivamente costituito da 9 lati e non da 10; ciò naturalmente dipende dalla presenza in un ramo di un solo generatore ideale di corrente. Il circuito in esame, infatti, potrebbe anche essere ridisegnato alla maniera mostrata nella immagine a lato.



$$\begin{aligned}
 \text{A)} \quad & I_1 + I_2 + I_3 = 0 \\
 \text{B)} \quad & I_2 + I_3 + I_4 = 0 \\
 \text{C)} \quad & I_4 + I_5 - I_6 = 0 \\
 \text{D)} \quad & I_5 - I_1 + I_7 + I_8 = 0 \\
 \text{E)} \quad & I_5 + I_6 + I_9 = 0 \\
 \text{F)} \quad & R_1 I_1 - R_2 I_2 - R_3 I_3 = 0 \\
 \text{G)} \quad & R_2 I_2 - R_4 I_4 + R_5 I_5 = 0 \\
 \text{H)} \quad & R_4 I_4 - R_6 I_6 - R_7 I_7 + R_8 I_8 = 0 \\
 \text{I)} \quad & R_4 I_4 + R_7 I_7 - R_1 I_1 - E_0 = 0 \\
 \text{V)} \quad & R_6 I_6 + V_0 = 0
 \end{aligned}$$

Il sistema di equazioni formato dalle II.3 e II.4 (escluso l'ultima) costituisce il sistema di 9 equazioni in 9 incognite che ci consente di risolvere la rete.

Per essere ancora più espliciti, sviluppiamo fino al risultato numerico un caso più semplice (minor numero di equazioni). Le immagini che seguono descrivono il circuito (con i valori assegnati), il procedimento ed i risultati in maniera esauriente.

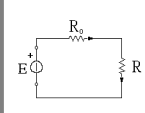
 <p style="margin-top: 10px;"> <math>E_1 - R_1 I_1 - R_4 I_4 = 0</math>  <math>E_2 + R_3 I_3 + R_2 I_2 - R_4 I_4 = 0</math>  <math>I_1 - I_2 - I_4 = 0</math>  <math>I_4 = I_1 - I_2</math> </p> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 5px;"> <math>E_2 + R_3 I_3 + R_2 I_2 - E_1 + R_4 I_4 = 0</math>  <math>E_1 - R_1 I_1 - R_4 I_1 + R_4 I_2 = 0</math> </div> <p style="text-align: right; margin-top: 5px;"><b>Lezione VI</b></p>	 <p style="margin-top: 10px;"> <math>E_2 + R_3 I_3 + R_2 I_2 - E_1 + R_4 I_1 = 0</math>  <math>E_1 - R_1 I_1 - R_4 I_1 + R_4 I_2 = 0</math>  <math>I_4 = I_1 - I_2</math>  <math>I_1 = \frac{E_2 + R_3 I_3 + R_2 I_2 - E_1}{R_1}</math>  <math>E_1 + (R_1 + R_4) \frac{E_2 + R_3 I_3 + R_2 I_2 - E_1}{R_1} + R_4 I_2 = 0</math> </p> <p style="text-align: right; margin-top: 5px;"><b>Lezione VI</b></p>
 <p style="margin-top: 10px;"> <math>I_4 = I_1 - I_2</math>  <math>I_1 = - \frac{E_2 + R_3 I_3 + R_2 I_2 - E_1}{R_1}</math>  <math>E_1 + (R_1 + R_4) \frac{E_2 + R_3 I_3 + R_2 I_2 - E_1}{R_1} + R_4 I_2 = 0</math>  <math>I_2 = - \frac{E_1 + (R_1 + R_4) \frac{E_2 - E_1}{R_1}}{R_4 + (R_1 + R_4) \frac{R_3 + R_2}{R_1}}</math>  <math>= -2A</math> </p> <p style="text-align: right; margin-top: 5px;"><b>Lezione VI</b></p>	 <p style="margin-top: 10px;"> <math>I_4 = I_1 - I_2 = 10A</math>  <math>I_1 = - \frac{E_2 + R_3 I_3 + R_2 I_2 - E_1}{R_1} = 8A</math>  <math>E_1 + (R_1 + R_4) \frac{E_2 + R_3 I_3 + R_2 I_2 - E_1}{R_1} + R_4 I_2 = 0</math>  <math>I_2 = - \frac{E_1 + (R_1 + R_4) \frac{E_2 - E_1}{R_1}}{R_4 + (R_1 + R_4) \frac{R_3 + R_2}{R_1}} = -2A</math> </p> <p style="text-align: right; margin-top: 5px;"><b>Lezione VI</b></p>

**Esercizi**

A lato sono proposti alcuni circuiti da risolvere scrivendo le equazioni che esprimono la validità delle leggi di Kirchhoff ai nodi ed alle maglie. Le soluzioni saranno discusse in seguito. Infine forniamo la soluzione di problemi proposti in precedenza.

La condizione di massimo trasferimento di potenza, per il problema già posto in un precedente paragrafo, si determina agevolmente una volta espressa la potenza dissipata nel resistore in funzione della sua resistenza:

$$P = R \frac{E^2}{(R + R_0)^2} \tag{II.5}$$



**Esercizi**

Determinare il valore di R che rende massima la potenza dissipata in essa.

Lezione V

Derivando, infatti, rispetto ad  $R$  tale espressione si ottiene facilmente la condizione di stazionarietà:

$$R = R_0 \tag{II.6}$$

Che si tratti poi di un massimo è di facile verifica.

Si noti che, nelle condizioni di massimo trasferimento di potenza, metà della potenza viene dissipata nella resistenza di carico e l'altra metà nella *resistenza interna del generatore*. È questo lo scotto che bisogna pagare per ottenere l'adattamento in potenza tra generatore e carico: un rendimento, inteso come rapporto tra la potenza utilizzata e quella generata, di appena 0,5.

Il successivo problema chiedeva di calcolare la ripartizione delle correnti in un parallelo di due resistori imponendo che la potenza dissipata nel circuito sia minima, con il vincolo che la somma delle due correnti si mantenga fissata ad un assegnato valore  $I$ . In altri termini si utilizza la LKC ai nodi ma non si utilizza la LKT alle maglie. Vediamo il risultato per poi commentarlo. La potenza dissipata nel circuito è:

$$P = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = R_1 I_1^2 + R_2 (I - I_1)^2 \tag{II.7}$$

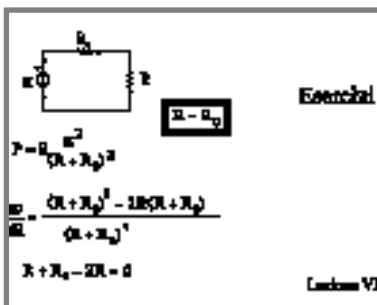
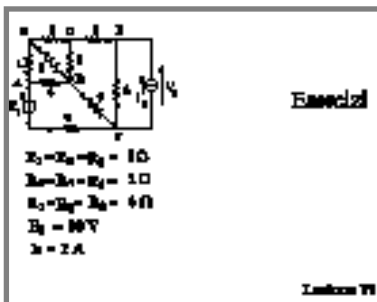
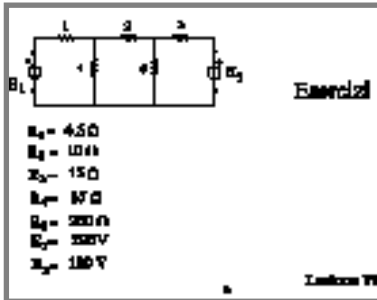
Si è naturalmente fatto uso della condizione  $I_1 + I_2 = I$ . Derivando rispetto ad  $I_1$ , per determinare la condizione di stazionarietà, si ottiene:

$$2R_1 I_1 - 2R_2 (I - I_1) = 0,$$

o anche

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I,$$

che è la stessa relazione che si sarebbe ottenuta applicando la LKT all'unica maglia presente. In definitiva la configurazione di equilibrio per le correnti che si stabilisce nel circuito è quella che assicura la minima dissipazione di potenza, e questo è un risultato molto significativo dal punto di vista fisico.



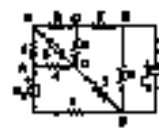


### Metodo dei potenziali ai nodi

Esiste un modo per ridurre ulteriormente il numero delle incognite. Esso consiste nello scegliere, come incognite del problema, invece delle tensioni sui lati o delle correnti nei rami, i potenziali relativi ai nodi della rete. A tale scopo, possiamo porre ogni tensione di lato nella forma  $V_r - V_s$ , dove  $V_r$  e  $V_s$  sono, evidentemente, i potenziali dei nodi  $r$  ed  $s$  rispetto ad un riferimento che, come è noto, è arbitrario. Se in particolare scegliamo come riferimento per i potenziali quello assunto da uno dei nodi, che per comodità poniamo a potenziale zero, ci ritroveremo con  $n - 1$  incognite  $V_i$ , potenziali assunti dai restanti nodi della rete. Il nodo con potenziale nullo viene detto *nodo di riferimento* o *nodo a terra* - terminologia che ricorda il fatto che in un circuito in generale è conveniente collegare un punto dello stesso ad un corpo il cui potenziale sia eguale a quello dell'operatore e possa ritenersi stabile, e ciò sia per ragioni di sicurezza degli operatori, sia per evitare che gli effetti esterni al circuito stesso possano rendere fluttuanti, entro certi limiti, i potenziali dei nodi. Entrambi questi fenomeni, per essere compresi a pieno, richiedono l'analisi della struttura dei campi coinvolti.

Il sistema di  $n - 1$  equazione nelle  $n - 1$  incognite (i potenziali ai nodi) che ci occorre per risolvere la rete, si può facilmente ottenere scrivendo le equazioni dettate dalla LKC ad  $n - 1$  nodi esprimendo però, attraverso le relazioni caratteristiche, le correnti nei singoli rami mediante le differenze di potenziale  $V_i - V_j$ . Osserviamo che per le incognite  $V_i$  non occorre scrivere le equazioni che esprimono la LKT; esse infatti, per definizione, le soddisfano, trattandosi, appunto, di potenziali.

L'automatica riduzione delle equazioni rende pertanto

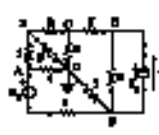


$V_s = V_c - V_b$

$I_1 = \frac{V_1}{R_2} = \frac{V_c - V_b}{R_2}$

metodo dei potenziali ai nodi

Lezione VII



1)  $\frac{V_1 - V_2}{R_1} + \frac{V_1 - V_3}{R_2} + \frac{V_1}{R_3} = 0$

2)  $\frac{V_2 - V_1}{R_1} + \frac{V_2 - V_4}{R_4} + \frac{V_2}{R_5} = 0$

3)  $\frac{V_3 - V_1}{R_2} + \frac{V_3 - V_4}{R_4} + \frac{V_3}{R_6} = 0$

4)  $\frac{V_4 - V_2}{R_4} + \frac{V_4 - V_3}{R_4} + \frac{V_4}{R_7} = 0$

5)  $\frac{V_4 - V_3}{R_4} + \frac{V_4 - V_5}{R_8} + \frac{V_4}{R_9} = 0$

6)  $\frac{V_5 - V_4}{R_8} + \frac{V_5 - V_6}{R_{10}} + \frac{V_5}{R_{11}} = 0$

7)  $\frac{V_6 - V_5}{R_{10}} + \frac{V_6 - V_7}{R_{12}} + \frac{V_6}{R_{13}} = 0$

8)  $\frac{V_7 - V_6}{R_{12}} + \frac{V_7 - V_8}{R_{14}} + \frac{V_7}{R_{15}} = 0$

9)  $\frac{V_8 - V_7}{R_{14}} + \frac{V_8 - V_9}{R_{16}} + \frac{V_8}{R_{17}} = 0$

10)  $\frac{V_9 - V_8}{R_{16}} + \frac{V_9 - V_{10}}{R_{18}} + \frac{V_9}{R_{19}} = 0$

11)  $\frac{V_{10} - V_9}{R_{18}} + \frac{V_{10} - V_{11}}{R_{20}} + \frac{V_{10}}{R_{21}} = 0$

12)  $\frac{V_{11} - V_{10}}{R_{20}} + \frac{V_{11} - V_{12}}{R_{22}} + \frac{V_{11}}{R_{23}} = 0$

13)  $\frac{V_{12} - V_{11}}{R_{22}} + \frac{V_{12} - V_{13}}{R_{24}} + \frac{V_{12}}{R_{25}} = 0$

14)  $\frac{V_{13} - V_{12}}{R_{24}} + \frac{V_{13} - V_{14}}{R_{26}} + \frac{V_{13}}{R_{27}} = 0$

15)  $\frac{V_{14} - V_{13}}{R_{26}} + \frac{V_{14} - V_{15}}{R_{28}} + \frac{V_{14}}{R_{29}} = 0$

16)  $\frac{V_{15} - V_{14}}{R_{28}} + \frac{V_{15} - V_{16}}{R_{30}} + \frac{V_{15}}{R_{31}} = 0$

17)  $\frac{V_{16} - V_{15}}{R_{30}} + \frac{V_{16} - V_{17}}{R_{32}} + \frac{V_{16}}{R_{33}} = 0$

18)  $\frac{V_{17} - V_{16}}{R_{32}} + \frac{V_{17} - V_{18}}{R_{34}} + \frac{V_{17}}{R_{35}} = 0$

19)  $\frac{V_{18} - V_{17}}{R_{34}} + \frac{V_{18} - V_{19}}{R_{36}} + \frac{V_{18}}{R_{37}} = 0$

20)  $\frac{V_{19} - V_{18}}{R_{36}} + \frac{V_{19} - V_{20}}{R_{38}} + \frac{V_{19}}{R_{39}} = 0$

21)  $\frac{V_{20} - V_{19}}{R_{38}} + \frac{V_{20} - V_{21}}{R_{40}} + \frac{V_{20}}{R_{41}} = 0$

22)  $\frac{V_{21} - V_{20}}{R_{40}} + \frac{V_{21} - V_{22}}{R_{42}} + \frac{V_{21}}{R_{43}} = 0$

23)  $\frac{V_{22} - V_{21}}{R_{42}} + \frac{V_{22} - V_{23}}{R_{44}} + \frac{V_{22}}{R_{45}} = 0$

24)  $\frac{V_{23} - V_{22}}{R_{44}} + \frac{V_{23} - V_{24}}{R_{46}} + \frac{V_{23}}{R_{47}} = 0$

25)  $\frac{V_{24} - V_{23}}{R_{46}} + \frac{V_{24} - V_{25}}{R_{48}} + \frac{V_{24}}{R_{49}} = 0$

26)  $\frac{V_{25} - V_{24}}{R_{48}} + \frac{V_{25} - V_{26}}{R_{50}} + \frac{V_{25}}{R_{51}} = 0$

27)  $\frac{V_{26} - V_{25}}{R_{50}} + \frac{V_{26} - V_{27}}{R_{52}} + \frac{V_{26}}{R_{53}} = 0$

28)  $\frac{V_{27} - V_{26}}{R_{52}} + \frac{V_{27} - V_{28}}{R_{54}} + \frac{V_{27}}{R_{55}} = 0$

29)  $\frac{V_{28} - V_{27}}{R_{54}} + \frac{V_{28} - V_{29}}{R_{56}} + \frac{V_{28}}{R_{57}} = 0$

30)  $\frac{V_{29} - V_{28}}{R_{56}} + \frac{V_{29} - V_{30}}{R_{58}} + \frac{V_{29}}{R_{59}} = 0$

31)  $\frac{V_{30} - V_{29}}{R_{58}} + \frac{V_{30} - V_{31}}{R_{60}} + \frac{V_{30}}{R_{61}} = 0$

32)  $\frac{V_{31} - V_{30}}{R_{60}} + \frac{V_{31} - V_{32}}{R_{62}} + \frac{V_{31}}{R_{63}} = 0$

33)  $\frac{V_{32} - V_{31}}{R_{62}} + \frac{V_{32} - V_{33}}{R_{64}} + \frac{V_{32}}{R_{65}} = 0$

34)  $\frac{V_{33} - V_{32}}{R_{64}} + \frac{V_{33} - V_{34}}{R_{66}} + \frac{V_{33}}{R_{67}} = 0$

35)  $\frac{V_{34} - V_{33}}{R_{66}} + \frac{V_{34} - V_{35}}{R_{68}} + \frac{V_{34}}{R_{69}} = 0$

36)  $\frac{V_{35} - V_{34}}{R_{68}} + \frac{V_{35} - V_{36}}{R_{70}} + \frac{V_{35}}{R_{71}} = 0$

37)  $\frac{V_{36} - V_{35}}{R_{70}} + \frac{V_{36} - V_{37}}{R_{72}} + \frac{V_{36}}{R_{73}} = 0$

38)  $\frac{V_{37} - V_{36}}{R_{72}} + \frac{V_{37} - V_{38}}{R_{74}} + \frac{V_{37}}{R_{75}} = 0$

39)  $\frac{V_{38} - V_{37}}{R_{74}} + \frac{V_{38} - V_{39}}{R_{76}} + \frac{V_{38}}{R_{77}} = 0$

40)  $\frac{V_{39} - V_{38}}{R_{76}} + \frac{V_{39} - V_{40}}{R_{78}} + \frac{V_{39}}{R_{79}} = 0$

41)  $\frac{V_{40} - V_{39}}{R_{78}} + \frac{V_{40} - V_{41}}{R_{80}} + \frac{V_{40}}{R_{81}} = 0$

42)  $\frac{V_{41} - V_{40}}{R_{80}} + \frac{V_{41} - V_{42}}{R_{82}} + \frac{V_{41}}{R_{83}} = 0$

43)  $\frac{V_{42} - V_{41}}{R_{82}} + \frac{V_{42} - V_{43}}{R_{84}} + \frac{V_{42}}{R_{85}} = 0$

44)  $\frac{V_{43} - V_{42}}{R_{84}} + \frac{V_{43} - V_{44}}{R_{86}} + \frac{V_{43}}{R_{87}} = 0$

45)  $\frac{V_{44} - V_{43}}{R_{86}} + \frac{V_{44} - V_{45}}{R_{88}} + \frac{V_{44}}{R_{89}} = 0$

46)  $\frac{V_{45} - V_{44}}{R_{88}} + \frac{V_{45} - V_{46}}{R_{90}} + \frac{V_{45}}{R_{91}} = 0$

47)  $\frac{V_{46} - V_{45}}{R_{90}} + \frac{V_{46} - V_{47}}{R_{92}} + \frac{V_{46}}{R_{93}} = 0$

48)  $\frac{V_{47} - V_{46}}{R_{92}} + \frac{V_{47} - V_{48}}{R_{94}} + \frac{V_{47}}{R_{95}} = 0$

49)  $\frac{V_{48} - V_{47}}{R_{94}} + \frac{V_{48} - V_{49}}{R_{96}} + \frac{V_{48}}{R_{97}} = 0$

50)  $\frac{V_{49} - V_{48}}{R_{96}} + \frac{V_{49} - V_{50}}{R_{98}} + \frac{V_{49}}{R_{99}} = 0$

51)  $\frac{V_{50} - V_{49}}{R_{98}} + \frac{V_{50} - V_{51}}{R_{100}} + \frac{V_{50}}{R_{101}} = 0$

52)  $\frac{V_{51} - V_{50}}{R_{100}} + \frac{V_{51} - V_{52}}{R_{102}} + \frac{V_{51}}{R_{103}} = 0$

53)  $\frac{V_{52} - V_{51}}{R_{102}} + \frac{V_{52} - V_{53}}{R_{104}} + \frac{V_{52}}{R_{105}} = 0$

54)  $\frac{V_{53} - V_{52}}{R_{104}} + \frac{V_{53} - V_{54}}{R_{106}} + \frac{V_{53}}{R_{107}} = 0$

55)  $\frac{V_{54} - V_{53}}{R_{106}} + \frac{V_{54} - V_{55}}{R_{108}} + \frac{V_{54}}{R_{109}} = 0$

56)  $\frac{V_{55} - V_{54}}{R_{108}} + \frac{V_{55} - V_{56}}{R_{110}} + \frac{V_{55}}{R_{111}} = 0$

57)  $\frac{V_{56} - V_{55}}{R_{110}} + \frac{V_{56} - V_{57}}{R_{112}} + \frac{V_{56}}{R_{113}} = 0$

58)  $\frac{V_{57} - V_{56}}{R_{112}} + \frac{V_{57} - V_{58}}{R_{114}} + \frac{V_{57}}{R_{115}} = 0$

59)  $\frac{V_{58} - V_{57}}{R_{114}} + \frac{V_{58} - V_{59}}{R_{116}} + \frac{V_{58}}{R_{117}} = 0$

60)  $\frac{V_{59} - V_{58}}{R_{116}} + \frac{V_{59} - V_{60}}{R_{118}} + \frac{V_{59}}{R_{119}} = 0$

61)  $\frac{V_{60} - V_{59}}{R_{118}} + \frac{V_{60} - V_{61}}{R_{120}} + \frac{V_{60}}{R_{121}} = 0$

62)  $\frac{V_{61} - V_{60}}{R_{120}} + \frac{V_{61} - V_{62}}{R_{122}} + \frac{V_{61}}{R_{123}} = 0$

63)  $\frac{V_{62} - V_{61}}{R_{122}} + \frac{V_{62} - V_{63}}{R_{124}} + \frac{V_{62}}{R_{125}} = 0$

64)  $\frac{V_{63} - V_{62}}{R_{124}} + \frac{V_{63} - V_{64}}{R_{126}} + \frac{V_{63}}{R_{127}} = 0$

65)  $\frac{V_{64} - V_{63}}{R_{126}} + \frac{V_{64} - V_{65}}{R_{128}} + \frac{V_{64}}{R_{129}} = 0$

66)  $\frac{V_{65} - V_{64}}{R_{128}} + \frac{V_{65} - V_{66}}{R_{130}} + \frac{V_{65}}{R_{131}} = 0$

67)  $\frac{V_{66} - V_{65}}{R_{130}} + \frac{V_{66} - V_{67}}{R_{132}} + \frac{V_{66}}{R_{133}} = 0$

68)  $\frac{V_{67} - V_{66}}{R_{132}} + \frac{V_{67} - V_{68}}{R_{134}} + \frac{V_{67}}{R_{135}} = 0$

69)  $\frac{V_{68} - V_{67}}{R_{134}} + \frac{V_{68} - V_{69}}{R_{136}} + \frac{V_{68}}{R_{137}} = 0$

70)  $\frac{V_{69} - V_{68}}{R_{136}} + \frac{V_{69} - V_{70}}{R_{138}} + \frac{V_{69}}{R_{139}} = 0$

71)  $\frac{V_{70} - V_{69}}{R_{138}} + \frac{V_{70} - V_{71}}{R_{140}} + \frac{V_{70}}{R_{141}} = 0$

72)  $\frac{V_{71} - V_{70}}{R_{140}} + \frac{V_{71} - V_{72}}{R_{142}} + \frac{V_{71}}{R_{143}} = 0$

73)  $\frac{V_{72} - V_{71}}{R_{142}} + \frac{V_{72} - V_{73}}{R_{144}} + \frac{V_{72}}{R_{145}} = 0$

74)  $\frac{V_{73} - V_{72}}{R_{144}} + \frac{V_{73} - V_{74}}{R_{146}} + \frac{V_{73}}{R_{147}} = 0$

75)  $\frac{V_{74} - V_{73}}{R_{146}} + \frac{V_{74} - V_{75}}{R_{148}} + \frac{V_{74}}{R_{149}} = 0$

76)  $\frac{V_{75} - V_{74}}{R_{148}} + \frac{V_{75} - V_{76}}{R_{150}} + \frac{V_{75}}{R_{151}} = 0$

77)  $\frac{V_{76} - V_{75}}{R_{150}} + \frac{V_{76} - V_{77}}{R_{152}} + \frac{V_{76}}{R_{153}} = 0$

78)  $\frac{V_{77} - V_{76}}{R_{152}} + \frac{V_{77} - V_{78}}{R_{154}} + \frac{V_{77}}{R_{155}} = 0$

79)  $\frac{V_{78} - V_{77}}{R_{154}} + \frac{V_{78} - V_{79}}{R_{156}} + \frac{V_{78}}{R_{157}} = 0$

80)  $\frac{V_{79} - V_{78}}{R_{156}} + \frac{V_{79} - V_{80}}{R_{158}} + \frac{V_{79}}{R_{159}} = 0$

81)  $\frac{V_{80} - V_{79}}{R_{158}} + \frac{V_{80} - V_{81}}{R_{160}} + \frac{V_{80}}{R_{161}} = 0$

82)  $\frac{V_{81} - V_{80}}{R_{160}} + \frac{V_{81} - V_{82}}{R_{162}} + \frac{V_{81}}{R_{163}} = 0$

83)  $\frac{V_{82} - V_{81}}{R_{162}} + \frac{V_{82} - V_{83}}{R_{164}} + \frac{V_{82}}{R_{165}} = 0$

84)  $\frac{V_{83} - V_{82}}{R_{164}} + \frac{V_{83} - V_{84}}{R_{166}} + \frac{V_{83}}{R_{167}} = 0$

85)  $\frac{V_{84} - V_{83}}{R_{166}} + \frac{V_{84} - V_{85}}{R_{168}} + \frac{V_{84}}{R_{169}} = 0$

86)  $\frac{V_{85} - V_{84}}{R_{168}} + \frac{V_{85} - V_{86}}{R_{170}} + \frac{V_{85}}{R_{171}} = 0$

87)  $\frac{V_{86} - V_{85}}{R_{170}} + \frac{V_{86} - V_{87}}{R_{172}} + \frac{V_{86}}{R_{173}} = 0$

88)  $\frac{V_{87} - V_{86}}{R_{172}} + \frac{V_{87} - V_{88}}{R_{174}} + \frac{V_{87}}{R_{175}} = 0$

89)  $\frac{V_{88} - V_{87}}{R_{174}} + \frac{V_{88} - V_{89}}{R_{176}} + \frac{V_{88}}{R_{177}} = 0$

90)  $\frac{V_{89} - V_{88}}{R_{176}} + \frac{V_{89} - V_{90}}{R_{178}} + \frac{V_{89}}{R_{179}} = 0$

91)  $\frac{V_{90} - V_{89}}{R_{178}} + \frac{V_{90} - V_{91}}{R_{180}} + \frac{V_{90}}{R_{181}} = 0$

92)  $\frac{V_{91} - V_{90}}{R_{180}} + \frac{V_{91} - V_{92}}{R_{182}} + \frac{V_{91}}{R_{183}} = 0$

93)  $\frac{V_{92} - V_{91}}{R_{182}} + \frac{V_{92} - V_{93}}{R_{184}} + \frac{V_{92}}{R_{185}} = 0$

94)  $\frac{V_{93} - V_{92}}{R_{184}} + \frac{V_{93} - V_{94}}{R_{186}} + \frac{V_{93}}{R_{187}} = 0$

95)  $\frac{V_{94} - V_{93}}{R_{186}} + \frac{V_{94} - V_{95}}{R_{188}} + \frac{V_{94}}{R_{189}} = 0$

96)  $\frac{V_{95} - V_{94}}{R_{188}} + \frac{V_{95} - V_{96}}{R_{190}} + \frac{V_{95}}{R_{191}} = 0$

97)  $\frac{V_{96} - V_{95}}{R_{190}} + \frac{V_{96} - V_{97}}{R_{192}} + \frac{V_{96}}{R_{193}} = 0$

98)  $\frac{V_{97} - V_{96}}{R_{192}} + \frac{V_{97} - V_{98}}{R_{194}} + \frac{V_{97}}{R_{195}} = 0$

99)  $\frac{V_{98} - V_{97}}{R_{194}} + \frac{V_{98} - V_{99}}{R_{196}} + \frac{V_{98}}{R_{197}} = 0$

100)  $\frac{V_{99} - V_{98}}{R_{196}} + \frac{V_{99} - V_{100}}{R_{198}} + \frac{V_{99}}{R_{199}} = 0$

101)  $\frac{V_{100} - V_{99}}{R_{198}} + \frac{V_{100} - V_{101}}{R_{200}} + \frac{V_{100}}{R_{201}} = 0$

102)  $\frac{V_{101} - V_{100}}{R_{200}} + \frac{V_{101} - V_{102}}{R_{202}} + \frac{V_{101}}{R_{203}} = 0$

103)  $\frac{V_{102} - V_{101}}{R_{202}} + \frac{V_{102} - V_{103}}{R_{204}} + \frac{V_{102}}{R_{205}} = 0$

104)  $\frac{V_{103} - V_{102}}{R_{204}} + \frac{V_{103} - V_{104}}{R_{206}} + \frac{V_{103}}{R_{207}} = 0$

105)  $\frac{V_{104} - V_{103}}{R_{206}} + \frac{V_{104} - V_{105}}{R_{208}} + \frac{V_{104}}{R_{209}} = 0$

106)  $\frac{V_{105} - V_{104}}{R_{208}} + \frac{V_{105} - V_{106}}{R_{210}} + \frac{V_{105}}{R_{211}} = 0$

107)  $\frac{V_{106} - V_{105}}{R_{210}} + \frac{V_{106} - V_{107}}{R_{212}} + \frac{V_{106}}{R_{213}} = 0$

108)  $\frac{V_{107} - V_{106}}{R_{212}} + \frac{V_{107} - V_{108}}{R_{214}} + \frac{V_{107}}{R_{215}} = 0$

109)  $\frac{V_{108} - V_{107}}{R_{214}} + \frac{V_{108} - V_{109}}{R_{216}} + \frac{V_{108}}{R_{217}} = 0$

110)  $\frac{V_{109} - V_{108}}{R_{216}} + \frac{V_{109} - V_{110}}{R_{218}} + \frac{V_{109}}{R_{219}} = 0$

111)  $\frac{V_{110} - V_{109}}{R_{218}} + \frac{V_{110} - V_{111}}{R_{220}} + \frac{V_{110}}{R_{221}} = 0$

112)  $\frac{V_{111} - V_{110}}{R_{220}} + \frac{V_{111} - V_{112}}{R_{222}} + \frac{V_{111}}{R_{223}} = 0$

113)  $\frac{V_{112} - V_{111}}{R_{222}} + \frac{V_{112} - V_{113}}{R_{224}} + \frac{V_{112}}{R_{225}} = 0$

114)  $\frac{V_{113} - V_{112}}{R_{224}} + \frac{V_{113} - V_{114}}{R_{226}} + \frac{V_{113}}{R_{227}} = 0$

115)  $\frac{V_{114} - V_{113}}{R_{226}} + \frac{V_{114} - V_{115}}{R_{228}} + \frac{V_{114}}{R_{229}} = 0$

116)  $\frac{V_{115} - V_{114}}{R_{228}} + \frac{V_{115} - V_{116}}{R_{230}} + \frac{V_{115}}{R_{231}} = 0$

117)  $\frac{V_{116} - V_{115}}{R_{230}} + \frac{V_{116} - V_{117}}{R_{232}} + \frac{V_{116}}{R_{233}} = 0$

118)  $\frac{V_{117} - V_{116}}{R_{232}} + \frac{V_{117} - V_{118}}{R_{234}} + \frac{V_{117}}{R_{235}} = 0$

119)  $\frac{V_{118} - V_{117}}{R_{234}} + \frac{V_{118} - V_{119}}{R_{236}} + \frac{V_{118}}{R_{237}} = 0$

120)  $\frac{V_{119} - V_{118}}{R_{236}} + \frac{V_{119} - V_{120}}{R_{238}} + \frac{V_{119}}{R_{239}} = 0$

121)  $\frac{V_{120} - V_{119}}{R_{238}} + \frac{V_{120} - V_{121}}{R_{240}} + \frac{V_{120}}{R_{241}} = 0$

122)  $\frac{V_{121} - V_{120}}{R_{240}} + \frac{V_{121} - V_{122}}{R_{242}} + \frac{V_{121}}{R_{243}} = 0$

123)  $\frac{V_{122} - V_{121}}{R_{242}} + \frac{V_{122} - V_{123}}{R_{244}} + \frac{V_{122}}{R_{245}} = 0$

124)  $\frac{V_{123} - V_{122}}{R_{244}} + \frac{V_{123} - V_{124}}{R_{246}} + \frac{V_{123}}{R_{247}} = 0$

125)  $\frac{V_{124} - V_{123}}{R_{246}} + \frac{V_{124} - V_{125}}{R_{248}} + \frac{V_{124}}{R_{249}} = 0$

126)  $\frac{V_{125} - V_{124}}{R_{248}} + \frac{V_{125} - V_{126}}{R_{250}} + \frac{V_{125}}{R_{251}} = 0$

127)  $\frac{V_{126} - V_{125}}{R_{250}} + \frac{V_{126} - V_{127}}{R_{252}} + \frac{V_{126}}{R_{253}} = 0$

128)  $\frac{V_{127} - V_{126}}{R_{252}} + \frac{V_{127} - V_{128}}{R_{254}} + \frac{V_{127}}{R_{255}} = 0$

129)  $\frac{V_{128} - V_{127}}{R_{254}} + \frac{V_{128} - V_{129}}{R_{256}} + \frac{V_{128}}{R_{257}} = 0$

130)  $\frac{V_{129} - V_{128}}{R_{256}} + \frac{V_{129} - V_{130}}{R_{258}} + \frac{V_{129}}{R_{259}} = 0$

131)  $\frac{V_{130} - V_{129}}{R_{258}} + \frac{V_{130} - V_{131}}{R_{260}} + \frac{V_{130}}{R_{261}} = 0$

132)  $\frac{V_{131} - V_{130}}{R_{260}} + \frac{V_{131} - V_{132}}{R_{262}} + \frac{V_{131}}{R_{263}} = 0$

133)  $\frac{V_{132} - V_{131}}{R_{262}} + \frac{V_{132} - V_{133}}{R_{264}} + \frac{V_{132}}{R_{265}} = 0$

134)  $\frac{V_{133} - V_{132}}{R_{264}} + \frac{V_{133} - V_{134}}{R_{266}} + \frac{V_{133}}{R_{267}} = 0$

135)  $\frac{V_{134} - V_{133}}{R_{266}} + \frac{V_{134} - V_{135}}{R_{268}} + \frac{V_{134}}{R_{269}} = 0$

136)  $\frac{V_{135} - V_{134}}{R_{268}} + \frac{V_{135} - V_{136}}{R_{270}} + \frac{V_{135}}{R_{271}} = 0$

137)  $\frac{V_{136} - V_{135}}{R_{270}} + \frac{V_{136} - V_{137}}{R_{272}} + \frac{V_{136}}{R_{273}} = 0$

138)  $\frac{V_{137} - V_{136}}{R_{272}} + \frac{V_{137} - V_{138}}{R_{274}} + \frac{V_{137}}{R_{275}} = 0$

139)  $\frac{V_{138} - V_{137}}{R_{274}} + \frac{V_{138} - V_{139}}{R_{276}} + \frac{V_{138}}{R_{277}} = 0$

140)  $\frac{V_{139} - V_{138}}{R_{276}} + \frac{V_{139} - V_{140}}{R_{278}} + \frac{V_{139}}{R_{279}} = 0$

141)  $\frac{V_{140} - V_{139}}{R_{278}} + \frac{V_{140} - V_{141}}{R_{280}} + \frac{V_{140}}{R_{281}} = 0$

142)  $\frac{V_{141} - V_{140}}{R_{280}} + \frac{V_{141} - V_{142}}{R_{282}} + \frac{V_{141}}{R_{283}} = 0$

143)  $\frac{V_{142} - V_{141}}{R_{282}} + \frac{V_{142} - V_{143}}{R_{284}} + \frac{V_{142}}{R_{285}} = 0$

144)  $\frac{V_{143} - V_{142}}{R_{284}} + \frac{V_{143} - V_{144}}{R_{286}} + \frac{V_{143}}{R_{287}} = 0$

145)  $\frac{V_{144} - V_{143}}{R_{286}} + \frac{V_{144} - V_{145}}{R_{288}} + \frac{V_{144}}{R_{289}} = 0$

146)  $\frac{V_{145} - V_{144}}{R_{288}} + \frac{V_{145} - V_{146}}{R_{290}} + \frac{V_{145}}{R_{291}} = 0$

147)  $\frac{V_{146} - V_{145}}{R_{290}} + \frac{V_{146} - V_{147}}{R_{292}} + \frac{V_{146}}{R_{293}} = 0$

148)  $\frac{V_{147} - V_{146}}{R_{292}} + \frac{V_{147} - V_{148}}{R_{294}} + \frac{V_{147}}{R_{295}} = 0$

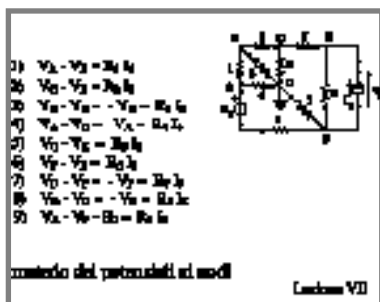
149)  $\frac{V_{148} - V_{147}}{R_{294}} + \frac{V_{148} - V_{149}}{R_{296}} + \frac{V_{148}}{R_{297}} = 0$

150)  $\frac{V_{149} - V_{148}}{R_{296}} + \frac{V_{149} - V_{150}}{R_{298}} + \frac{V_{149}}{R_{299}} = 0$

151)  $\frac{V_{150} - V_{149}}{R_{298}} + \frac{V_{150} - V_{151}}{R_{300}} + \frac{V_{150}}{R_{301}} = 0$

152)  $\frac{V_{151} - V_{150}}{R_{300}} + \frac{V_{151} - V_{152}}{R_{302}} + \frac{V_{151}}{R_{303}} = 0$

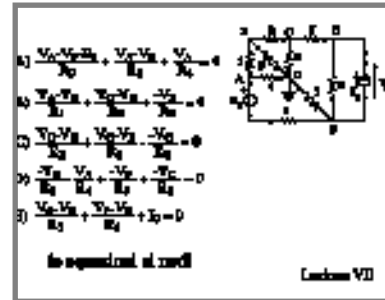
conveniente la scelta dei potenziali ai nodi come incognite. Naturalmente la conoscenza dei potenziali in ogni nodo equivale ad aver risolto la rete. Infatti, la differenza dei due potenziali relativi ad un determinato ramo fornisce la tensione sul lato, e da questa, mediante la caratteristica del lato, si può risalire alla corrente che lo interessa. Per chiarire meglio il metodo, proviamo a scrivere le relative equazioni per il circuito già precedentemente analizzato, avendo scelto come potenziale di riferimento quello del nodo D ( $V_D = 0$ )  
In primo luogo le caratteristiche dei singoli rami:



- |                 |                               |
|-----------------|-------------------------------|
| ramo 1)         | $V_A - V_B = R_1 I_1,$        |
| ramo 2)         | $V_C - V_B = R_2 I_2,$        |
| ramo 3)         | $V_D - V_B = -V_B = R_3 I_3,$ |
| ramo 4)         | $V_A - V_D = V_A = R_4 I_4,$  |
| ramo 5)         | $V_C - V_E = R_5 I_5,$        |
| ramo 6)         | $V_F - V_E = R_6 I_6,$        |
| ramo 7)         | $V_D - V_F = -V_F = R_7 I_7,$ |
| ramo 8)         | $V_D - V_C = -V_C = R_8 I_8,$ |
| ramo di $E_0$ ) | $V_A - V_F - E_0 = R I.$      |

Quindi, ricavandole dalle equazioni precedenti, le correnti in funzione delle differenze di potenziale:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \frac{V_A - V_B}{R_1}, \\
 I_2 &= \frac{V_C - V_B}{R_2}, \\
 I_3 &= \frac{-V_B}{R_3}, \\
 I_4 &= \frac{V_A}{R_4}, \\
 I_5 &= \frac{V_C - V_E}{R_5}, \\
 I_6 &= \frac{V_F - V_E}{R_6}, \\
 I_7 &= \frac{-V_F}{R_7}, \\
 I_8 &= \frac{-V_C}{R_8}, \\
 I &= \frac{V_A - V_F - E_0}{R}.
 \end{aligned}$$



Ed infine, le equazioni ai nodi scritte in termini delle differenze di potenziale:

$$\text{nodo A) } \frac{V_A - V_F - E_0}{R} + \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_A}{R_4} = 0,$$

$$\text{nodo B) } \frac{V_A - V_B}{R_1} + \frac{V_C - V_B}{R_2} + \frac{-V_B}{R_3} = 0,$$

$$\text{nodo C) } \frac{V_C - V_B}{R_2} + \frac{V_C - V_E}{R_5} - \frac{V_C}{R_8} = 0,$$

$$\text{nodo D) } \frac{-V_B}{R_3} - \frac{V_A}{R_4} + \frac{-V_F}{R_7} + \frac{-V_C}{R_8} = 0,$$

$$\text{nodo E) } \frac{V_C - V_E}{R_5} + \frac{V_F - V_E}{R_6} + I_0 = 0.$$

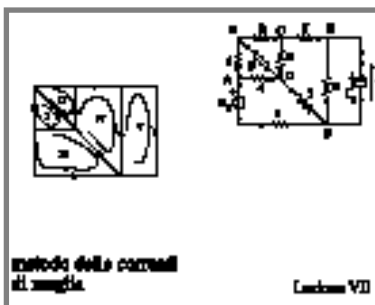
Il sistema così ottenuto, di 5 equazioni nelle 5 incognite “potenziali dei nodi rispetto al nodo D”, consente di risolvere la rete. Si noti che, mentre abbiamo scelto di non scrivere l'equazione per il nodo F, come potenzia-

le di riferimento è stato scelto quello del nodo D; le due scelte sono infatti indipendenti. Un po' di pratica metterà in condizione di scrivere queste equazioni direttamente senza passare per l'espressione esplicita delle correnti di ramo in funzione dei potenziali di nodo.

### Metodo delle correnti di maglia (o di Maxwell)

Come abbiamo visto la caratteristica che rende le incognite potenziali ai nodi così convenienti, sta nel fatto che tali incognite soddisfano automaticamente la LKT alle maglie; occorre quindi solo imporre che soddisfino la LKC. È possibile fare una scelta analoga per le correnti. Si tratta di scegliere un sistema di correnti ( $l - 1$  in particolare) che soddisfi automaticamente la LKC ai nodi e che richieda quindi soltanto la scrittura della LKT alle maglie. Per costruire un tale sistema consideriamo un insieme di maglie indipendenti della rete in esame: un sistema di maglie chiuse, cioè, le cui equazioni ottenute attraverso l'applicazione della LKT siano indipendenti tra di loro. Abbiamo già visto che attraverso la scelta di un albero è facile individuare un sistema di tale tipo. Associamo ora ad ogni maglia una corrente di maglia ed esprimiamo la corrente in ogni lato come la somma o differenza di correnti di maglia - di cui il lato in questione rappresenta la parte in comune - a seconda dei versi scelti per le correnti di maglia. Un semplice esempio, ancora una volta, sarà chiarificatore.

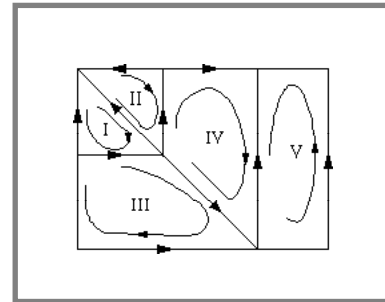
Nelle immagini sono mostrate, per la rete già considerata, le maglie indipendenti scelte e le relative correnti di maglia: per esempio, con questo formalismo, la corrente nel ramo 3 sarà espressa come differenza tra la corrente di maglia  $I_{II}$  e la corrente di maglia  $I_I$  (il segno meno è dovuto alla scelta fatta per i versi delle correnti di maglia); la corrente nel ramo 1, invece, coinciderà



con la corrente di maglia  $I_1$ . Tutte le correnti nei rami saranno esprimibili in tale modo. Infatti, se il nostro insieme di maglie è stato costruito aggiungendo ai rami dell'albero di volta in volta un ramo del coalbero, in ogni maglia esisterà almeno un ramo in esclusiva, quello appunto del coalbero; per un tale ramo, corrente di ramo e corrente di maglia dovranno necessariamente coincidere - al più possono essere opposte se si è scelto un verso per la corrente di maglia che non coincide nel ramo con quello scelto per il ramo stesso. La corrente in ogni altro ramo, essendo tale ramo necessariamente in comune con un'altra maglia, si potrà porre come somma o differenza di correnti di maglia.

Abbiamo in pratica dimostrato l'assunto perché abbiamo trovato  $l - (n - 1)$  incognite - una per ogni maglia - attraverso le quali è possibile esprimere tutte le  $l$  correnti di ramo. Orbene tali incognite *correnti di maglia* godono, per costruzione, della proprietà di soddisfare la LKC ai nodi. Infatti in ogni nodo una corrente di maglia entra ed esce e quindi le LKC ai nodi, scritte in termini di correnti di maglia, si riconducono a pure identità. Per tali incognite occorrerà scrivere esclusivamente la LKT alle maglie. Le immagini possono aiutare a comprendere quanto detto: si guardi quella in cui, a scopo esplicativo, le maglie sono state fisicamente separate ed in ognuna di esse è segnato il verso della corrente di maglia in ogni ramo.

Descriviamo a questo punto in dettaglio tutti i passi del procedimento. In primo luogo, le correnti nei rami in funzione delle correnti di maglia:

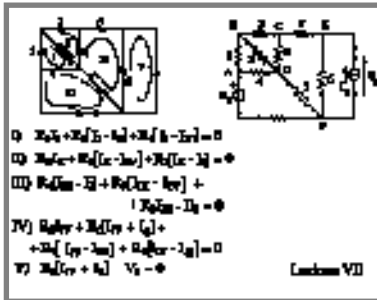


$I_1 = I_2$	$I_4 = -I_{11} - I_{12}$
$I_2 = -I_3$	$I_5 = -I_{11} + I_{12}$
$I_3 = I_4 - I_5$	$I_6 = I_{11} - I_{12}$
$I_4 = I_{11} - I_6$	$I_7 = -I_{12}$
$I_5 = I_{12}$	

[Lecture VII]



$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_I, \\
 I_2 &= -I_{II}, \\
 I_3 &= I_{II} - I_I, \\
 I_4 &= I_{III} - I_I, \\
 I_5 &= I_{IV}, \\
 I_6 &= -I_{IV} - I_V, \\
 I_7 &= -I_{IV} + I_{III}, \\
 I_8 &= I_{IV} - I_{II}, \\
 I &= -I_{III}, \\
 I_0 &= I_V.
 \end{aligned}$$



Successivamente, le equazioni alle maglie in termini delle correnti di maglia:

$$\text{I)} R_1 I_I - R_3 (I_{II} - I_I) - R_4 (I_{III} - I_I) = 0,$$

$$\text{II)} R_2 I_{II} - R_3 (I_{II} - I_I) - R_8 (I_{IV} - I_{II}) = 0,$$

$$\text{III)} R_4 (I_{III} - I_I) - R_7 (-I_{IV} + I_{III}) - R_1 - E_0 = 0,$$

$$\text{IV)} R_5 I_{IV} + R_6 (I_{IV} + I_V) - R_7 (-I_{IV} + I_{III}) + R_8 (I_{IV} - I_{II}) = 0,$$

$$\text{V)} -R_6 (I_{IV} + I_V) + V_0 = 0.$$

Anche in questo caso la pratica metterà in condizione di scrivere direttamente tali equazioni senza passare attraverso l'espressione esplicita delle correnti di ramo in funzione di quelle di maglia; in ogni caso il metodo che abbiamo seguito nell'esempio, e cioè di scrivere prima le equazioni della LKT in termini delle correnti di ramo e poi sostituire ad ognuna di esse la sua espressione in termini di correnti di maglia, è sempre applicabile. Si osservi che, nel caso illustrato, la quinta equazione introduce una nuova incognita; la tensione ai morsetti del generatore. Infatti la corrente di maglia  $I_V$  coincide con la corrente erogata dal generatore di corrente ed è quindi nota. Da questo punto di vista il cir-

cuito avrebbe potuto essere riguardato come un circuito a quattro maglie indipendenti, segnalando soltanto i nodi di ingresso e di uscita della corrente del generatore con delle opportune frecce. La quinta maglia, però, anche se non esplicitamente disegnata, fa sentire la sua presenza: infatti essendo il ramo 10, per il nostro sistema di maglie indipendenti, il ramo di chiusura della quinta maglia, la corrente  $I_0$ , che coincide con  $I_{10}$ , circolerà in tale ramo. Una scelta diversa di maglie indipendenti avrebbe portato ad un altro percorso per la corrente del generatore, e quindi a diverse equazioni, così come è illustrato nelle immagini a lato. Queste considerazioni giustificano l'apparente stranezza della seguente affermazione:

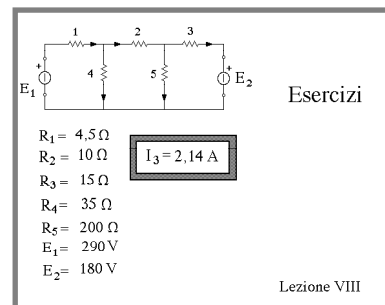
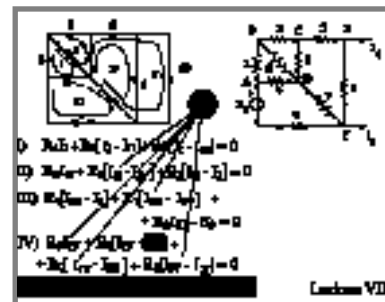
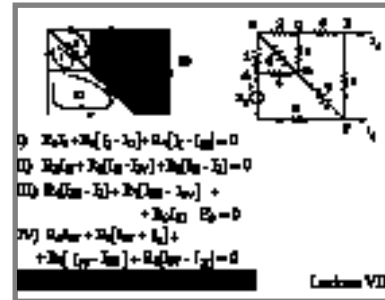
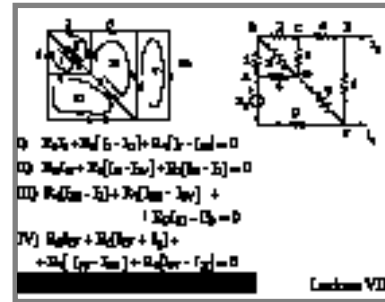
*In presenza di generatori di corrente in una rete per la quale si intende applicare il metodo delle correnti di maglia, si può scegliere ad arbitrio il percorso della corrente del generatore tra il nodo di ingresso e quello di uscita.*

È chiaro ora che l'arbitrarietà riguarda, in effetti, la scelta del sistema di maglie indipendenti.

Abbiamo, dunque, visto come sia possibile scrivere in diversi modi un sistema di equazioni che consenta di risolvere una rete. In seguito vedremo ancora altri metodi, più formali, che consentono addirittura di rendere automatica tale scrittura; il che è molto conveniente in modo particolare per la realizzazione di codici numerici per la soluzione delle reti.

**Esercizi**

Ancora un pò di spazio agli esercizi. Per la reti mostrate nelle immagini, già proposte in precedenza, diamo come risultato, per una verifica, il valore della corrente nel ramo 3,  $I_3=2,14A$ , e di quella nel ramo 7,  $I_7=1,2A$ ,



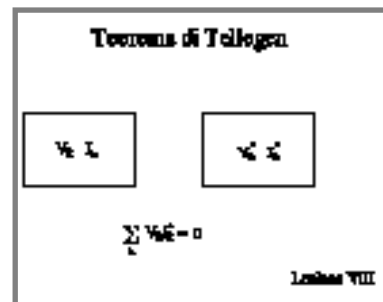
### Il teorema di Tellegen

Continuando l'esame generale di una rete dal punto di vista del suo grafo, vogliamo illustrare ora una notevole proprietà caratteristica delle reti di bipoli: la proprietà descritta dal teorema che va sotto il nome di *Teorema di Tellegen*. Consideriamo due reti che abbiano lo stesso grafo, cioè due reti in cui bipoli diversi sono collegati alla stessa maniera tra di loro. Consideriamo per la prima rete un sistema di tensioni  $V_k$  sui rami che soddisfi la LKT e per la seconda rete un sistema di correnti  $I_k^*$  che soddisfi la LKC. Con  $V_k$  intendiamo la tensione positiva nel nodo in cui entra la corrente  $I_k^*$  positiva - convenzione dell'utilizzatore per ogni ramo della rete! Per ogni ramo del grafo consideriamo il prodotto  $V_k I_k^*$  e sommiamo tali prodotti per tutti i rami della rete:

$$\sum_k V_k I_k^* \quad (III.1)$$

Il teorema di Tellegen afferma che tale sommatoria è identicamente nulla.

C'è qualche difficoltà ad esprimere, in generale, questa sommatoria in termini dei nodi  $r$  ed  $s$  perché non sappiamo a priori quali rami, tra due nodi  $(r,s)$ , effettiva-







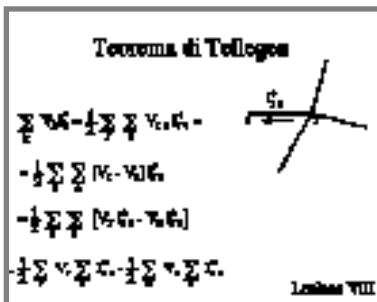
mente sono presenti nella rete; in un grafo, infatti, non tutti i nodi sono direttamente collegati tra loro. Possiamo, però, facilmente superare l'ostacolo aggiungendo al grafo i rami di collegamento che mancano tra i nodi, assumendo però che nelle due reti particolari considerate tali rami aggiunti siano in realtà dei "bipoli a vuoto". È chiaro che una tale modifica non cambia in nulla la rete, né modifica la sommatoria di cui sopra, in quanto per tali rami sarà  $I_{rs}^* = 0$ . A questo punto la sommatoria può essere estesa a tutti i valori possibili di  $r$  e di  $s$ , e si ottiene:

$$\sum_k v_k i_k^* = \frac{1}{2} \sum_{r,s} v_{rs} i_{rs}^* \tag{III.2}$$

Il fattore un mezzo è necessario, altrimenti ogni ramo è preso due volte in considerazione; per esempio il ramo tra i nodi 1 e 2 sarà incluso per  $r=1$  ed  $s=2$  nonché per  $s=1$  ed  $r=2$ !

Se le  $V_{rs}$  soddisfano la LKT sarà possibile metterle sotto la forma di differenza di potenziale  $V_{rs} = V_r - V_s$  ottenendo:

$$\sum_{r,s} v_{rs} i_{rs}^* = \sum_{r,s} V_r i_{rs}^* - \sum_{r,s} V_s i_{rs}^* \tag{III.3}$$



D'altra parte nella prima sommatoria  $V_r$  può essere portato fuori della sommatoria su  $s$  ( $V_r$  è per definizione fisso quando  $s$  *corre*!) mentre nella seconda sommatoria si può fare una cosa analoga per  $V_s$  se prima si scambiano le sommatorie su  $r$  e su  $s$ . Si ha, in conclusione:

$$\sum_{r,s} v_{rs} i_{rs}^* = \sum_r V_r \sum_s i_{rs}^* - \sum_s V_s \sum_r i_{rs}^* \tag{III.4}$$

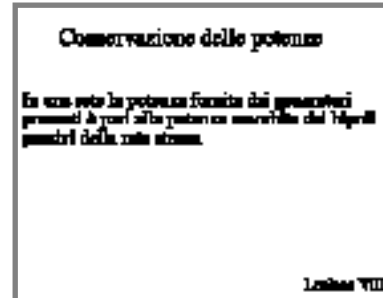
In entrambe le sommatorie compaiono termini del tipo  $\sum_s i_{rs}^*$  per un fissato  $r$  o  $\sum_r i_{rs}^*$  per un fissato  $s$ . Tali termini, per un fissato nodo, esprimono la somma delle

correnti uscenti dal nodo o delle correnti entranti nel nodo. Si osservi che quanto affermato è vero solo se si è avuto la cura di usare sempre la stessa convenzione su ogni bipolo: convenzione dell'utilizzatore, come nel nostro caso, o convenzione del generatore, indifferentemente. Le sommatorie del tipo  $\sum_s I_{rs}^*$  sono, dunque, nulle in base alla LKC. Se ne deduce:

$$\sum_k V_k I_k^* = \frac{1}{2} \sum_{r,s} V_{rs} I_{rs}^* = 0 \quad (\text{III.5})$$

È importante sottolineare che non si sono dovute fare speciali ipotesi sulla natura dei bipoli o del grafo. La proprietà descritta dalla (III.5) è molto generale e discende soltanto dal fatto che sono soddisfatte la LKT e la LKC per le due reti. *La proprietà è quindi valida anche se sono presenti bipoli non lineari.* Naturalmente essa è ancora valida per il caso particolare in cui le due reti coincidono: in tal caso i prodotti  $V_k I_k$  sono le potenze assorbite dai singoli bipoli ed il Teorema di Tellegen si riduce all'affermazione che in una rete la somma di tutte le potenze assorbite dai rami della rete è nulla. Si badi bene, *assorbite*; e ciò in base alle scelte che abbiamo inizialmente fatte sul verso di  $I_k$  ed  $V_k$ . Se in qualche ramo sono presenti generatori, la loro potenza assorbita risulterà negativa e quindi si può anche dire che il Teorema di Tellegen afferma che *in una rete la potenza fornita dai generatori presenti è pari alla potenza assorbita dai bipoli passivi della rete stessa.* Con buona pace, dunque, del principio di conservazione dell'energia, che altrimenti sarebbe violato!

Ma nella forma (III.5) il teorema di Tellegen stabilisce qualcosa in più. In questa forma esso prende anche il nome di *teorema delle potenze virtuali*, e ci sarà molto utile in regime sinusoidale per introdurre il concetto di *potenza reattiva*.



## Le proprietà di non-amplificazione

Un'altra proprietà delle reti di bipoli che discende dal mero fatto che per tali reti valgono la LKT e la LKC, è il così detto *principio di non amplificazione delle tensioni* : se in una rete di bipoli esiste un solo lato attivo, allora il potenziale dei due nodi a cui il lato si appoggia sono l'uno il massimo e l'altro il minimo tra tutti i potenziali dei nodi della rete. La dimostrazione è immediata se ci

si convince prima della seguente affermazione: se per un nodo  $r$  di una rete tutti i prodotti  $V_{rs} I_{rs}$  delle tensioni e correnti di tutti i lati che convergono nel nodo stesso - con le convenzioni implicite nell'ordine dei pedici - sono maggiori od eguali a zero, il potenziale di tale nodo non può essere né quello massimo né quello minimo della rete. Infatti dato che  $\sum_s I_{rs} = 0$  per la LKC, alcune delle  $I_{rs}$  - per  $r$  fissato - saranno positive ed altre negative. Ciò comporta che, nella ipotesi che tutti i prodotti  $V_{rs} I_{rs}$  siano maggiori di zero - sempre per un fissato  $r$  -, anche tra le  $V_{rs}$  ve ne saranno alcune positive ed altre negative; ciò equivale a dire che il potenziale del nodo  $r$  non è né il minimo né il massimo della rete. Ritornando ora al nostro teorema iniziale si vede chiaramente che nel caso sia presente un solo lato attivo nella rete, i suoi nodi sono gli unici per i quali non si può affermare che  $V_{sr} I_{rs} > 0$  per ogni  $s$ , perché nel ramo in questione è presente un generatore. Per i nodi interni, a cui fanno capo solo bipoli passivi, questa proprietà è invece certamente verificata. D'altra parte in ogni rete deve pur esserci un nodo a potenziale minimo ed uno a potenziale massimo; se ne conclude che tali potenziali sono assunti dai due nodi dell'unico lato attivo. Qualcuno avrà forse riconosciuto in questa affermazione il riflesso di quella proprietà di cui gode la funzione potenziale di un campo conservativo: essa, infatti, non può avere né massimi né minimi nei punti



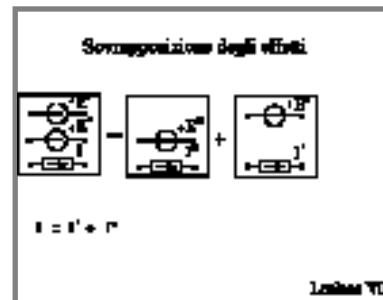
interni del suo dominio di definizione. Massimi e minimi sono assunti sui punti della frontiera.

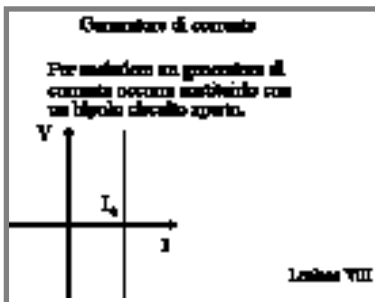
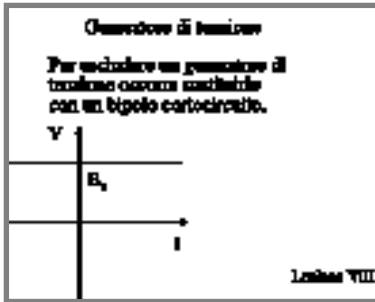
Lasciamo al lettore l'enunciato e la dimostrazione del teorema duale che prende il nome di *principio di non amplificazione delle correnti*.

Va osservato, però, che i due teoremi di non amplificazione valgono soltanto in regime stazionario; vedremo in seguito dove la dimostrazione illustrata cade in difetto in regime dinamico.

### Sovrapposizione degli effetti

Fin qui si è parlato soltanto di proprietà delle reti di bipoli che non dipendono dalla natura dei bipoli stessi, ma solo dal fatto che tali reti sono sottoposte ai dettami della LKC e della LKT. Vogliamo ora invece occuparci di proprietà delle reti di bipoli che dipendono dalla natura dei bipoli stessi. In primo luogo la *sovrapposibilità degli effetti*. È questa una proprietà del tutto generale dei *sistemi lineari*; sistemi, cioè, in cui l'*effetto* è linearmente dipendente dalla *causa*. Essa si può esprimere affermando che una particolare combinazione lineare di cause produce la stessa combinazione lineare degli effetti che ognuna delle cause produrrebbe se si trovasse ad agire da sola. Si potrebbe utilizzare la precedente affermazione quale definizione di sistema lineare, tanto i due fatti sono intimamente legati. In particolare consideriamo una rete con più generatori; se individuiamo nei singoli generatori le cause e nelle correnti e nelle tensioni sui rami gli effetti, siamo portati ad affermare che le correnti o le tensioni sui lati di una rete in cui agiscono più generatori possono essere calcolate come somma delle tensioni e correnti indotte sugli stessi rami dai generatori quando essi agiscono singolarmente. È necessario qualche commento su quest'ultima affermazione: per far sí che un generatore agi-





sca da solo occorre evidentemente “eliminare” gli altri. Cosa significhi “eliminare un generatore” dipende evidentemente dal tipo di generatore: un generatore di tensione ideale, per esempio, per sua natura si lascia percorrere da una qualsiasi corrente e produce ai suoi morsetti sempre la stessa tensione. Per eliminare i suoi effetti bisogna ridurre la sua tensione a zero ma non impedire il passaggio della corrente nel ramo occupato dal generatore. Questo, in realtà, equivale a sostituire il bipolo generatore ideale di tensione con un bipolo corto circuito. Un ragionamento del tutto analogo porta alla conclusione che i generatori ideali di corrente, invece, debbono essere sostituiti con dei bipoli a vuoto. Nel linguaggio corrente si parla di *cortocircuitare i generatori di tensione ed aprire i generatori di corrente*, il che, preso alla lettera non è corretto; un generatore ideale di tensione, per definizione, non consente che la sua tensione venga annullata da un corto circuito in parallelo. Analogo discorso si può fare per il generatore ideale di corrente. Ciò nonostante l'espressione sintetica è molto comoda e largamente usata; essa va intesa nel senso prima specificato di sostituire i bipoli in questione rispettivamente con bipoli corto circuito ed a vuoto. A questo punto è perfettamente definito ogni aspetto della sovrapposizione degli effetti nelle reti lineari.

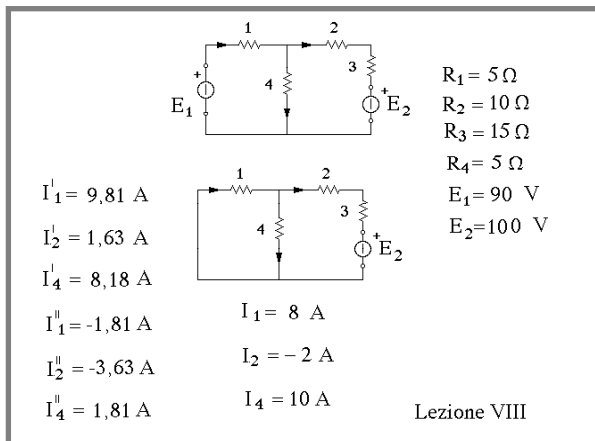
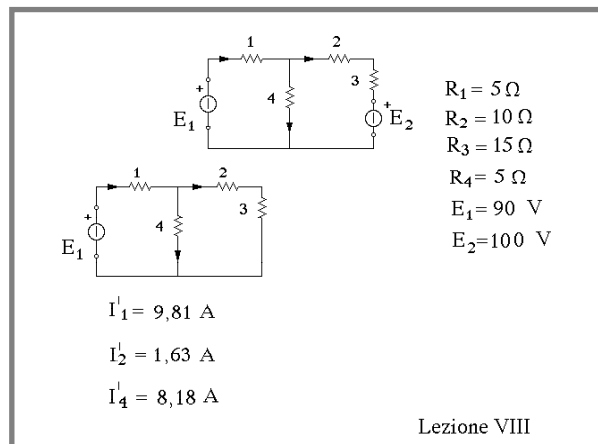
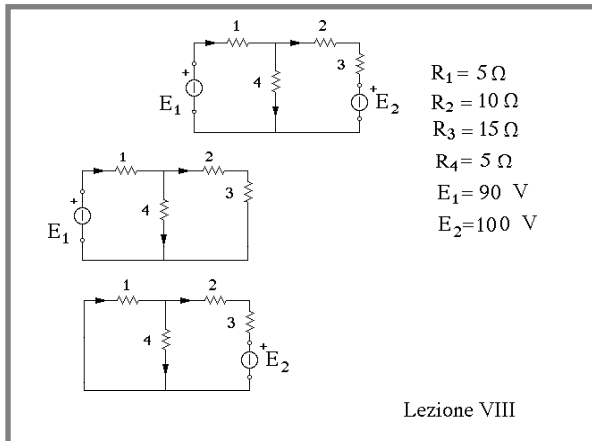
Ancora una osservazione di carattere pratico: quando si applica il principio di sovrapposizione degli effetti bisogna fare attenzione ad utilizzare, in ognuna delle reti elementari in cui si scompone la rete con più generatori, sempre la stessa orientazione per ogni ramo. Altrimenti si rischia di sottrarre quello che andrebbe sommato o viceversa!

Il principio di sovrapposizione degli effetti è di grande utilità sia dal punto di vista pratico che dal punto di vista puramente speculativo. Dal punto di vista pratico

esso fornisce, se vogliamo, il più elementare metodo di soluzione di una rete. Il principio ci consente infatti di affermare che la soluzione di una rete comunque complessa, con più generatori, è riconducibile alla soluzione di più reti in ognuna delle quali agisce un solo generatore. Orbene, come abbiamo già sottolineato, una rete con un solo generatore può essere ricondotta ad una rete elementare, di una sola maglia, in cui il generatore in questione è chiuso su di un unico bipolo equivalente. Tale bipolo si identifica attraverso successive riduzioni della rete, mediante sostituzione di rami in serie o di rami in parallelo con il loro bipolo equivalente. Naturalmente, come abbiamo già sottolineato, non sempre queste due trasformazioni sono sufficienti; occorre anche, talvolta, una ulteriore trasformazione che viene detta *stella - poligono* e che studieremo in seguito. In ogni caso quello che più importa è che è sempre possibile ricondurre la rete passiva, vista dai due morsetti dell'unico generatore presente, ad un unico bipolo equivalente. Una volta effettuata questa operazione è facile calcolare la corrente erogata dal generatore, se di tensione, o la tensione che compare ai suoi morsetti, se di corrente; basta applicare la relazione caratteristica del bipolo equivalente trovato. A questo punto si tratta di determinare le correnti nei vari rami effettivi della rete, ripercorrendo a ritroso la strada precedentemente fatta.

Una semplice applicazione renderà subito chiaro il metodo. Nel circuito, mostrato nelle figure, agiscono due generatori di tensione. Nelle stesse figure sono mostrati i due circuiti in cui la rete può essere scomposta cortocircuitando un generatore di tensione alla volta. La determinazione delle correnti nei vari rami, nei due casi, è molto agevole, ed i risultati sono sinteticamente riportati. Le correnti nella rete di partenza si ottengono sommando quelle omologhe delle reti com-

ponenti.



### Generatori equivalenti di tensione e corrente

Il teorema di sovrapposizione degli effetti è anche una notevole arma speculativa che consente di dimostrare proprietà particolari delle reti lineari. Esaminiamone una applicazione estremamente importante. Abbiamo visto che una rete passiva vista tra due nodi è sempre riconducibile ad un unico bipolo equivalente. È possibile una riduzione simile anche per una rete che contenga bipoli attivi, in base a quanto affermato dal *teorema del generatore equivalente di tensione*, comunemente detto anche *teorema di Thévenin*, e dal suo “duale”, *teorema del generatore equivalente di corrente*, o *teorema di Norton*.

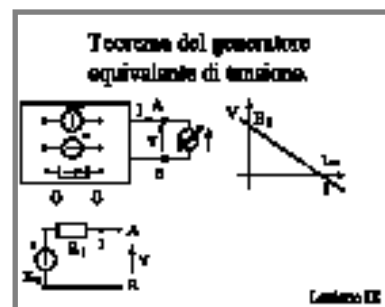
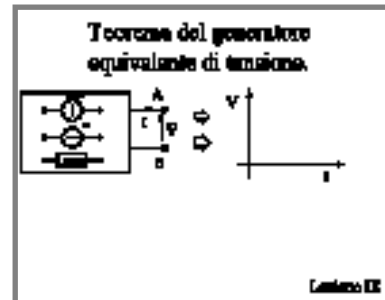
Consideriamo, dunque, una qualsiasi rete attiva e scegliamo su di essa due nodi. Per sottolinearne la generalità, rappresenteremo la rete con una scatola chiusa. I simboli all'interno della scatola stanno a ricordare che nella rete sono in generale presenti generatori di tensione, generatori di corrente e bipoli passivi.

I due nodi scelti sono stati “prolungati” fuori della scatola, mediante conduttori perfetti che, com'è noto, non introducono nessun disturbo, e sono indicati con le lettere A e B.

Se volessimo ricavare sperimentalmente la caratteristica del bipolo equivalente, il legame cioè tra tensione ai morsetti e corrente che attraversa il bipolo, potremmo inserire tra i morsetti A e B un generatore ideale di corrente  $I$  che sia regolabile a piacere, che sia cioè in grado di erogare una corrente  $I$  del valore desiderato.

In figura sono anche mostrati i versi positivi scelti. Si noti che abbiamo scelto la convenzione del generatore per il bipolo equivalente della rete e quella dell'utilizzatore per il generatore di corrente.

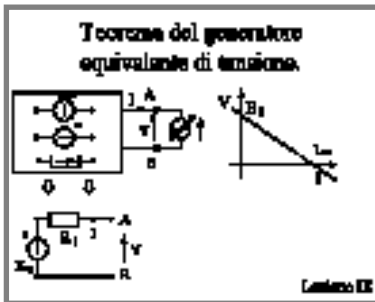
Se riportiamo nel piano  $(I, V)$  per ogni valore di  $I$  il corrispondente valore di  $V$ , opportunamente misurato,





otterremo graficamente la caratteristica cercata.

Senza effettivamente compiere le misure cerchiamo di anticipare, in base ad alcune elementari considerazioni, il tipo di caratteristica che possiamo aspettarci. In effetti, essendo la rete per definizione una rete di bipoli lineari, non c'è motivo di pensare che la caratteristica equivalente non sia anche essa lineare. Questo risultato di per sé evidente, sarà anche ottenuto tra breve per via più formale.



Nel piano (I,V) dunque, la caratteristica è una retta che in generale non passa per l'origine degli assi, essendo presenti anche bipoli attivi. Sarà, pertanto, una retta del tipo mostrato in figura.

Per individuare una retta occorrono, naturalmente, due suoi punti. Si propongono a tale scopo, in maniera molto evidente, i due punti in cui la caratteristica interseca gli assi coordinati. Il primo punto di coordinate  $V=E_0$  ed  $I=0$  corrisponde alle condizioni in cui il bipolo non è attraversato da corrente; i suoi morsetti sono, dunque, “chiusi su di un bipolo circuito aperto”. Appare naturale indicare questa tensione con il termine *tensione a vuoto del bipolo*. L'altro punto è quello individuato da  $V=0$  ed  $I=I_{cc}$ . In tali condizioni di funzionamento tra i morsetti A e B c'è tensione nulla, come se il bipolo fosse “chiuso su di un bipolo corto circuito”. Chiameremo, quindi,  $I_{cc}$  la *corrente di corto circuito* del bipolo. Data la rete, è generalmente molto agevole calcolare sia  $E_0$  che  $I_{cc}$  e quindi la caratteristica del bipolo equivalente, che sarà rappresentata da una equazione del tipo:

$$V = E_0 - \frac{E_0}{I_{cc}} I. \quad (\text{III.6})$$

Tale è, infatti, l'equazione della retta che passa per i punti  $(E_0,0)$  ed  $(0,I_{cc})$ . Se poniamo  $R_i=E_0/I_{cc}$  la (III.6)

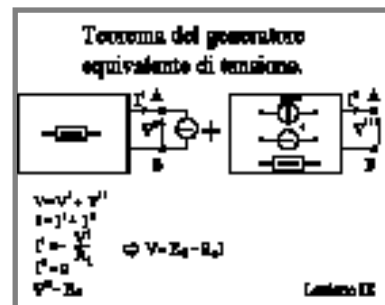
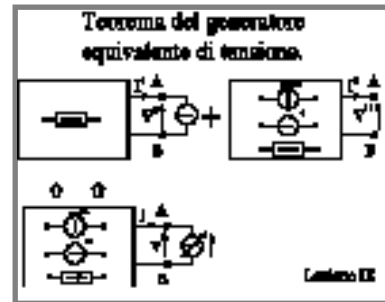
si può scrivere nel seguente modo:

$$V = E_0 - R_i I \quad (III.7)$$

La (III.7) ci appare come la caratteristica, di cui si è già parlato, di un bipolo costituito da un generatore di tensione  $E_0$  con in serie un bipolo passivo  $R_i$ .

Abbiamo dunque dimostrato l'equivalenza, almeno ai morsetti A e B - faremo qualche ulteriore commento su questo punto - tra la rete originaria ed una elementare costituita dalla serie di un generatore di tensione ed un resistore. Di tale resistore, introdotto in precedenza come rapporto tra  $E_0$  ed  $I_{cc}$ , può darsi una interpretazione molto interessante che è, se vogliamo, il vero contenuto del teorema del generatore equivalente di tensione. Appliciamo, infatti, la sovrapposizione degli effetti alla rete originaria - con il generatore di corrente tra i morsetti A e B - scomponendola in due reti componenti. Nella prima abbiamo lasciato tutti i generatori della rete e abbiamo aperto, come prescritto dalla sovrapposizione, il generatore di corrente esterno; nella seconda invece abbiamo cortocircuitato tutti i generatori di tensione ed abbiamo aperto quelli di corrente presenti nella rete, lasciando agire il solo generatore di corrente esterno da noi applicato. Con locuzione concisa, ma molto espressiva, si dice che nel secondo caso la rete di partenza è stata resa passiva.

Il teorema di sovrapposizione ci assicura che ogni grandezza elettrica nella rete di partenza può essere ottenuta come somma dei valori assunti dalla stessa grandezza nei due circuiti componenti; abbiamo avuto infatti l'accortezza di conservare le stesse convenzioni dei segni. Per esempio la tensione  $V$  ai morsetti, nella rete originaria, potrà essere posta come somma di una  $V''$  e di una  $V'$ , dove  $V''=E_0$ , perché i morsetti A e B nella seconda rete sono aperti, e  $V'=-R_i I'$ , avendo indicato



con  $R_i$  la resistenza equivalente vista dai morsetti A e B della rete resa passiva. Quindi:

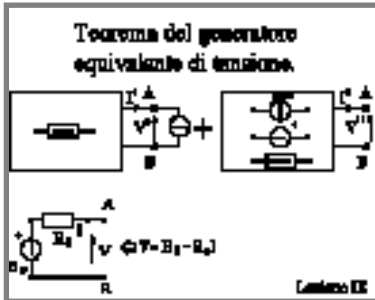
$$V = E_0 - R_i I' \quad (\text{III.8})$$

D'altra parte la sovrapposizione per le correnti fornisce:

$$I = I' + I'' = I'$$

dato che  $I''$  è evidentemente nulla, per cui, come avevamo già dedotto in precedenza:

$$V = E_0 - R_i I \quad (\text{III.9})$$



Va notato però che ora sappiamo anche come calcolare  $R_i$ .

Concludendo enunciamo il *teorema del generatore equivalente di tensione* :

*Ogni rete considerata da una coppia di nodi può essere vista come un bipolo attivo costituito dalla serie di un generatore ideale di tensione pari alla tensione a vuoto tra i morsetti in esame della rete, ed un resistore la cui resistenza è pari a quella vista tra gli stessi morsetti quando si sia provveduto a rendere passiva la rete di partenza, "cortocircuitando" i generatori ideali di tensione e "aprendo" quelli di corrente.*

Questo teorema è, come vedremo, di grande utilità sia pratica che speculativa. È importante sottolineare che il teorema enunciato assicura l'equivalenza tra i due bipoli soltanto ai fini di quello che accade a valle dei morsetti A e B. Ciò sembra del tutto evidente dato che nel bipolo equivalente si è persa qualsiasi traccia della complessità della rete di partenza. Si potrebbe però incorrere nell'errore di pensare che l'equivalenza si estenda anche ad altre grandezze globali; si potrebbe per esempio credere di poter affermare che quando il bipolo di partenza eroga una corrente  $I$ , la potenza dissipata al suo interno sia pari ad  $R_i I^2$ , che è, appunto, la

potenza dissipata nel bipolo equivalente. Ciò non è assolutamente vero! Per convincersene basta immaginare che nella rete di partenza vi sia da qualche parte un resistore  $R$  in parallelo ad un generatore ideale di tensione  $E$ . In tale resistore sarà dissipata una potenza  $E^2/R$ . Di tale resistore  $R$  invece non c'è alcuna traccia in  $R_i$ , perché quest'ultima è stata calcolata nella rete resa passiva, in cui al generatore ideale di tensione è stato sostituito un cortocircuito. Come è noto il parallelo di un resistore qualsiasi con un bipolo cortocircuito è ancora un bipolo corto circuito, indipendentemente dal resistore ad esso in parallelo! Bisogna dunque fare attenzione ad interpretare correttamente l'equivalenza imposta dal teorema del generatore equivalente di tensione!

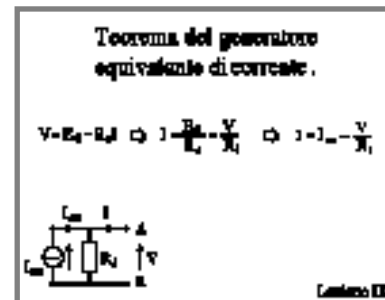
La caratteristica di cui alle immagini precedenti è però interpretabile anche in un altro modo. Essa può essere vista come la caratteristica di un generatore ideale di corrente che eroga la corrente  $I_{cc}$  con in parallelo un resistore  $R_i$ . Si ha, infatti, applicando la LKC ad uno dei due nodi (vedi figura a lato):

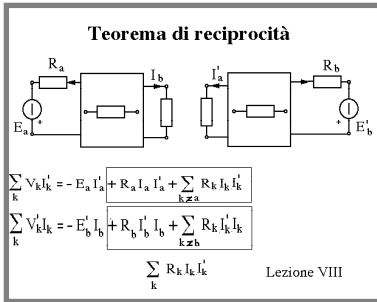
$$I_{cc} = \frac{V}{R_i} + I,$$

che, tenendo conto della relazione  $E_0 = R_i I_{cc}$ , è equivalente alla III.9. È questo il teorema del *generatore equivalente di corrente* :

*Una qualsiasi rete vista da due morsetti può ritenersi equivalente ad un generatore di corrente che eroga la stessa corrente che, nella rete di partenza, circolerebbe tra i due morsetti scelti, qualora gli stessi siano messi in corto circuito, con in parallelo un resistore  $R_i$  di resistenza pari a quella vista dai due morsetti dopo aver avuto l'accortezza di rendere passiva la rete, cioè ecc. ecc.*

È facile modificare la dimostrazione descritta per il teorema del generatore equivalente di tensione in modo da



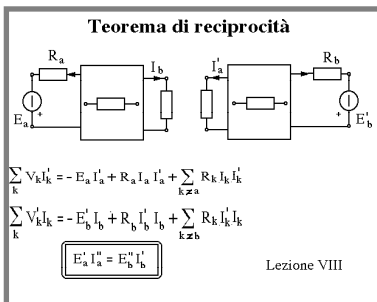


ottenere direttamente quella del generatore equivalente di corrente.

**Reciprocità nelle reti elettriche**

Un'altra proprietà generale delle reti è quella descritta dal cosiddetto *principio di reciprocità*. Eccone l'enunciato: si consideri una rete passiva qualsiasi e si individuino in essa due rami, diciamo il ramo *a* ed il ramo *b*. Alimentiamo la rete ponendo un generatore di tensione  $E_a$  nel ramo *a* e indichiamo con  $I_b$  la corrente, in un determinato verso, che circola nel ramo *b* in conseguenza dell'inserimento del generatore  $E_a$  nel ramo *a*. Viceversa sia  $I'_a$  la corrente prodotta nel ramo *a* quando un generatore  $E'_b$  è inserito nel ramo *b* della rete passiva. In conclusione una volta si alimenta la rete dal lato *a* ed un'altra volta si alimenta dal lato *b* individuando le rispettive correnti prodotte nei rami *b* e *a*.

Orbene il teorema afferma che:  $E_a/I_b = E'_b/I'_a$ . Cioè, in sintesi, il rapporto tra causa in *a* ed effetto in *b* è uguale al rapporto tra causa in *b* ed effetto in *a*. Da ciò il nome di reciprocità.



La dimostrazione è immediata se si applica il teorema di Tellegen alle due reti mostrate in figura. Nel riquadro c'è, evidentemente, una rete passiva. Il teorema di Tellegen afferma che:

$$\sum_k V_k I'_k = 0 \quad \text{ed} \quad \sum_k V'_k I_k = 0$$

Cioè, evidenziando il ramo attivo, e tenendo conto che per ogni ramo della rete passiva è  $V_k = R_k I_k$  ed  $V'_k = R_k I'_k$ :

$$-E_a I'_a + R_a I_a I'_a + \sum_{k \neq a} R_k I_k I'_k = 0,$$

$$-E'_b I_b + R_b I'_b I_b + \sum_{k \neq b} R_k I'_k I_k = 0.$$

Inserendo di nuovo i termini relativi ai lati *a* e *b* nelle

sommatorie:

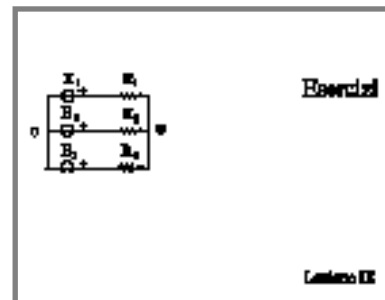
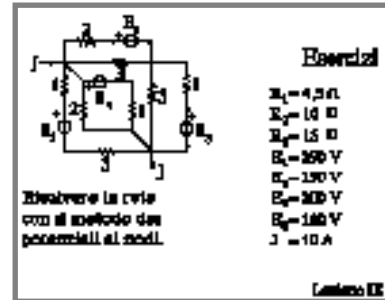
$$- E_a I'_a + \sum_k R_k I_k I'_k = 0,$$

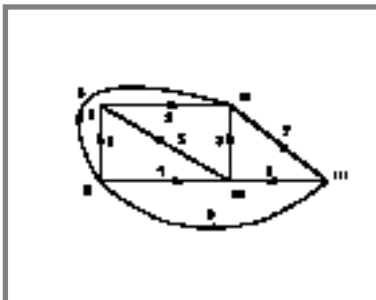
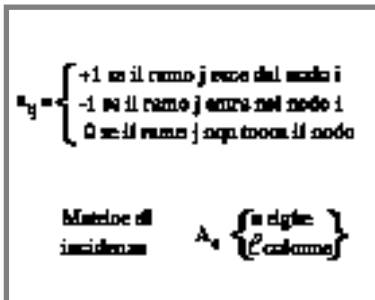
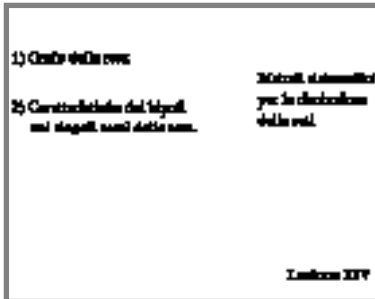
$$- E'_b I_b + \sum_k R_k I'_k I_k = 0.$$

Le sommatorie stesse sono ora estese a tutti i rami della rete. Dalla eguaglianza di tali sommatorie deriva  $E_a/I_b = E'_b/I'_a$ , che è quanto volevasi dimostrare.

### Esercizi

Ancora due reti da risolvere. Per la seconda è istruttivo applicare il metodo dei potenziali ai nodi per calcolare la differenza di potenziale tra il nodo O ed O'. La formula che si ottiene può essere facilmente generalizzata e va sotto il nome di formula di Millmann; ci sarà molto utile per lo studio dei sistemi trifasi squilibrati.





	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
I	-1	+1	0	0	-1	0	0	0	0
II	0	-1	-1	0	0	+1	-1	0	0
III	0	0	0	0	0	0	+1	+1	-1
IV	0	0	+1	-1	+1	0	0	-1	0
V	+1	0	0	+1	0	-1	0	0	+1

## Metodi sistematici per la risoluzione delle reti

La scrittura delle equazioni risolventi per una rete di bipoli attivi e passivi può essere resa automatica e quindi adatta ad essere implementata in un codice per calcolatore; tra le diverse impostazioni possibili, ci limiteremo a descrivere quella basata sul concetto di matrice delle conduttanze ai nodi, anche perché essa presenta una stretta analogia con quanto diremo per la descrizione di un sistema a più poli nel prossimo capitolo.

Sia dunque data una qualsiasi rete di  $n$  nodi ed  $l$  lati; come abbiamo più volte rilevato, le informazioni contenute in una rete elettrica sono di due tipologie distinte. In primo luogo la rete descrive un particolare modo di connettere bipoli tra di loro; tale descrizione è contenuta in quello che abbiamo detto grafo della rete. In secondo luogo deve essere fornita la particolare natura di ogni bipolo presente nei rami della rete; in altre parole debbono essere note le caratteristiche dei bipoli. Queste informazioni contenute nello schema di una rete possono essere mantenute distinte e trattate separatamente. Cominciamo dal grafo della rete e poniamoci il problema di fornire le informazioni in esso contenute in una maniera diversa.

Costruiamoci una matrice  $A_c$ , di  $n$  righe ed  $l$  colonne, il cui generico elemento  $a_{ij}$  sia così definito:

$$a_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{se il lato } j \text{ esce dal nodo } i \\ -1 & \text{se il lato } j \text{ entra nel nodo } i \\ 0 & \text{se il lato } j \text{ non interessa il nodo } i \end{cases} \quad (\text{III.10})$$

È chiaro che una tale matrice, che prende il nome di *matrice d'incidenza completa* della rete, definisce univocamente il grafo orientato della rete stessa. Per dare più concretezza all'esposizione riportiamo nelle immagini a lato un esempio di grafo orientato e la relativa matrice d'incidenza.

Facendo uso della matrice di incidenza si possono esprimere le equazioni di Kirchhoff per la rete in forma matriciale. È facile verificare che il sistema di equazioni simbolicamente espresso dalla relazione (dove  $\mathbf{I}$  è naturalmente il vettore colonna delle correnti nei rami):

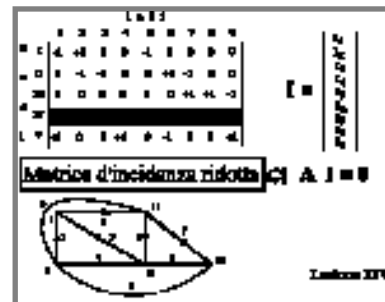
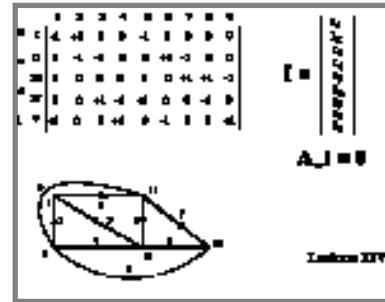
$$\mathbf{A}_c \mathbf{I} = 0, \tag{III.11}$$

è il sistema di equazioni che esprime l'applicazione della prima legge di Kirchhoff agli  $n$  nodi della rete. Infatti in ognuna delle equazioni della (III.11) - per esempio quella relativa al nodo  $r$  (riga  $r$ -esima) - la generica corrente  $I_k$  comparirà con il segno positivo, negativo o non comparirà affatto, a seconda che il ramo orientato  $k$  rispettivamente esca, entri o non interessi affatto il nodo  $r$ . Una semplice applicazione al caso descritto dal grafo mostrato potrà meglio chiarire quanto affermato.

Come sappiamo le equazioni di un tale sistema non sono tutte linearmente indipendenti; basta però eliminare una delle equazioni per ottenere  $n-1$  equazioni indipendenti ai nodi. Ciò equivale ad eliminare una riga della matrice di incidenza completa, per esempio quella relativa al nodo IV negli schemi mostrati, e considerare la matrice  $A$  di dimensioni  $(n-1) \times l$ . Tale matrice prende il nome di *matrice di incidenza ridotta* o semplicemente *matrice di incidenza*, quando è implicito che si tratti di quella ridotta. Con questo formalismo le equazioni indipendenti agli  $n-1$  nodi saranno espresse dalla relazione:

$$\mathbf{A} \mathbf{I} = 0. \tag{III.12}$$

Per quanto riguarda le LKT, abbiamo più volte osservato che esse risultano automaticamente soddisfatte se si esprimono le tensioni sui lati come differenza di potenziale nei nodi. Se il lato  $k$ , per esempio, insiste tra il nodo  $r$  ed il nodo  $s$ , si avrà  $V_k = E_r - E_s$ , dove  $E_r$  ed  $E_s$



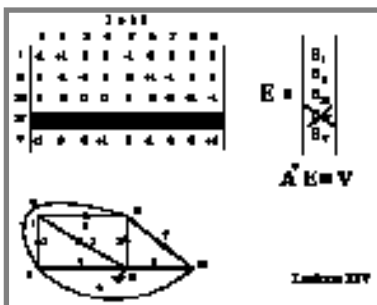
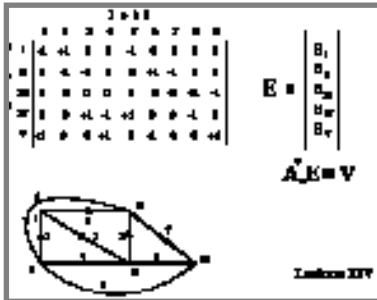


sono i potenziali dei nodi  $r$  ed  $s$  rispetto ad un riferimento preso ad arbitrio. In particolare possiamo scegliere, come riferimento, il potenziale del nodo per il quale si è scelto di non scrivere la corrispondente equazione. In tal modo le  $l$  tensioni di lato  $V_k$  saranno esprimibili attraverso gli  $n-1$  potenziali ai nodi  $E_r$ . Se definiamo, a questo punto, il vettore colonna  $\mathbf{E}$  dei potenziali degli  $n-1$  nodi, per i quali abbiamo scritto le LKC, rispetto al restante nodo preso come riferimento, è facile convincersi che le  $l$  relazioni, che esprimono le tensioni di lato in funzione dei potenziali ai nodi, hanno la seguente espressione matriciale:

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}^T \mathbf{E}, \quad (\text{III.13})$$

dove  $\mathbf{A}^T$  è la matrice, di dimensioni  $l \times (n-1)$ , trasposta di  $\mathbf{A}$ . Infatti nella espressione della generica  $V_k$ , fornita dalla (III.13), compariranno i potenziali dei due nodi a cui il lato  $k$  afferisce, con il segno positivo o negativo a seconda dell'orientazione del lato  $k$  stesso; se, in particolare il lato  $k$  è connesso al nodo di riferimento, nella sua espressione comparirà soltanto il potenziale dell'altro nodo, essendo il nodo di riferimento a potenziale 0 per costruzione. Anche in questo caso la semplice verifica delle affermazioni fatte per il caso della rete descritta dal grafo in esame, potrà essere chiarificatoria.

Affrontiamo ora il problema della descrizione della generica caratteristica di lato. I teoremi del generatore equivalente di f.e.m. e di corrente ci consentono di assumere che ogni lato della rete sia riconducibile, indifferentemente, o ad un generatore ideale di f.e.m. con una resistenza in serie, o ad un generatore ideale di corrente con una conduttanza in parallelo, così come mostrato in Fig.III.1 a e b, rispettivamente.



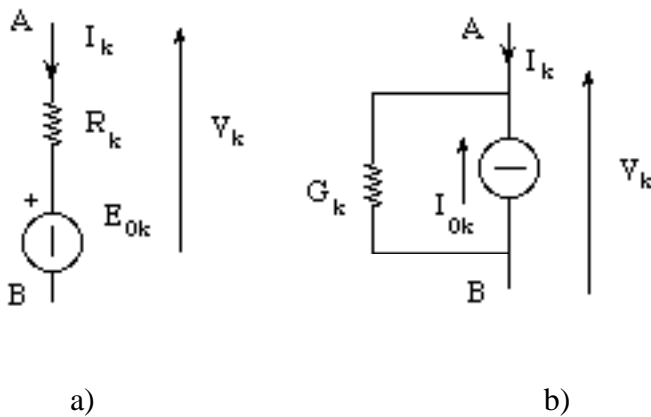


Fig. III.1

È facile infatti trasformare un ramo del tipo descritto in Fig. III.1a, con caratteristica

$$V_k = E_{0k} + R_k I_k, \quad (III.14)$$

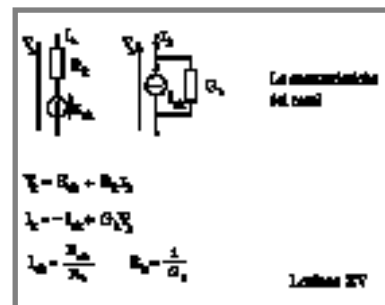
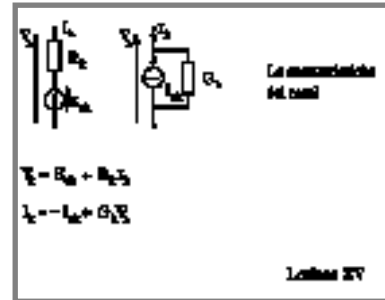
in uno equivalente del tipo descritto in Fig. VIII.1b, con caratteristica

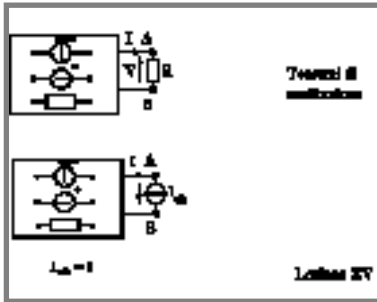
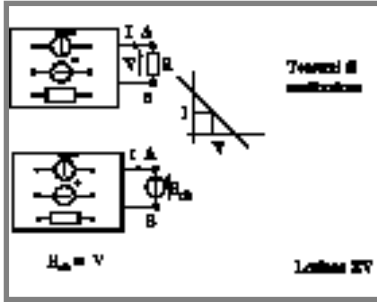
$$I_k = - I_{0k} + G_k V_k, \quad (III.15)$$

e viceversa.

Applicando, per esempio, al bipolo di Fig. III.1a il teorema di Norton, si ottengono immediatamente la corrente di corto circuito ai morsetti AB e la resistenza equivalente vista dagli stessi morsetti per la rete resa passiva.

Per trasformare dunque una caratteristica di lato del tipo descritto dalla relazione III.14 in una del tipo descritta dalla relazione III.15, basta porre  $I_{0k} = E_{0k}/R_k$  ed  $G_k = 1/R_k$ . Si osservi che allo stesso risultato si poteva banalmente giungere dividendo l'equazione III.14 per  $R_k$  e risolvendo rispetto ad  $I_k$ . Quest'ultima osservazione evidenzia, in realtà, un problema: esistono due casi limiti in cui la trasformazione non è possibile ed i teoremi di equivalenza non consentono di passare da un ramo con generatore ideale di f.e.m. ad un ramo con





Se due nodi di una rete lineare sono allo stesso potenziale, è possibile collegarli con un corto circuito senza che nulla cambi nella restante parte della rete.

Eliminazione dei generatori ideali di f.e.m. e di corrente ideali

L'esempio 27

generatore ideale di corrente. Sono evidentemente i due casi del generatore ideale di f.e.m. senza resistenza in serie e quello del generatore ideale di corrente senza conduttanza in parallelo. Nel primo caso, infatti, l'applicazione del teorema di Norton ci porterebbe alla necessità di porre il generatore ideale di f.e.m. in corto circuito, per calcolare la corrente di corto circuito ai morsetti AB, il che, come sappiamo, è contraddittorio. Alla stessa conclusione ci conduce la semplice operazione algebrica di dividere l'equazione III.14 per  $R_k$ , dato che, nel nostro caso, tale resistenza è nulla. Se ne conclude che non è possibile trasformare un generatore ideale di f.e.m. in uno di corrente e viceversa, quando essi siano da soli nel ramo in esame. Poiché nel seguito ci sarà utile poter assumere per il generico lato  $k$  indifferentemente una caratteristica del tipo descritto dalla III.14 o dalla III.15, mostreremo come tali situazioni limiti siano in realtà non essenziali ed eliminabili. Ci sarà utile allo scopo fare uso del così detto *teorema di sostituzione*. Tale teorema afferma che se in una rete di bipoli lineare si sostituisce, ad un ramo interessato dalla tensione  $V$ , un generatore ideale di f.e.m.  $E_0 = V$ , nulla cambia nella restante parte della rete. È facile convincersi della veridicità di tale affermazione se si considera che la "restante parte della rete" è in realtà anche essa rappresentabile come un bipolo lineare - ossia con un legame caratteristico tensione-corrente di tipo lineare e, quindi, anche ad un sol valore: ad ogni valore della corrente corrisponde un valore, ed uno solo, della tensione e viceversa. Se quindi la tensione imposta ai morsetti dal generatore è identica a quella  $V$  esistente agli stessi morsetti nella rete originaria, la corrente erogata dal bipolo equivalente alla restante parte della rete non può che essere identica a quella presente nel ramo in esame nella rete di parten-

za.

In maniera del tutto simile si può dimostrare la forma duale del teorema di sostituzione: se in un rete lineare si sostituisce ad un ramo interessato dalla corrente  $I$  un generatore di corrente che fornisce la stessa corrente, nulla cambia nella restante parte della rete. Dalle due forme enunciate del teorema di sostituzione discendono immediatamente le seguenti conseguenze: se due punti di una rete lineare sono allo stesso potenziale essi possono essere collegati con un bipolo corto circuito senza modificare in alcun modo il funzionamento della rete stessa. E ancora: se in un ramo di una rete lineare non circola corrente, tale ramo può essere sostituito con un bipolo circuito aperto senza modificare in alcun modo il funzionamento della rete.

Le due conseguenze appaiono subito evidenti se si considera che un generatore di f.e.m. ideale di tensione nulla equivale ad un bipolo corto circuito e che un generatore ideale di corrente che eroghi una corrente nulla equivale ad un bipolo circuito aperto.

Facendo uso di questi risultati si vede facilmente che un ramo di una rete in cui sia presente un solo generatore ideale di f.e.m. può essere facilmente eliminato modificando la rete, come è mostrato nelle immagini a lato.

Infatti, in tale rete modificata, i punti C,D ed F sono allo stesso potenziale per costruzione; ne consegue che essi possono essere cortocircuitati, così come è mostrato nella successiva immagine. È evidente, a questo punto, che la rete così ottenuta è equivalente a quella di partenza, perché i tre generatori ideali di egual f.e.m. in parallelo possono essere sostituiti con un solo generatore.

Analogo è il caso del generatore ideale di corrente senza una conduttanza in parallelo.

Dalla rete mostrata in alto nella immagine qui a lato si passa facilmente a quella mostrata in basso nella stessa

Se in un ramo di una rete lineare non circola alcuna corrente, tale ramo può essere aperto (sostituito con un bipolo a vuoto) senza modificare in alcun modo la restante parte della rete.

Eliminazione dei generatori ideali di f.e.m. e di corrente ideali.

Lezione XV

Eliminazione dei generatori ideali di f.e.m. e di corrente ideali.

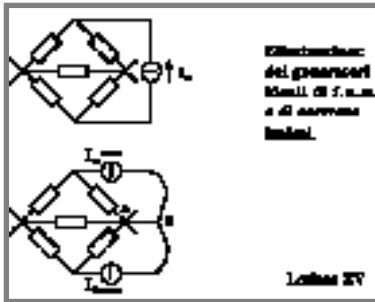
Lezione XV

Eliminazione dei generatori ideali di f.e.m. e di corrente ideali.

Lezione XV

Eliminazione dei generatori ideali di f.e.m. e di corrente ideali.

Lezione XV



immagine, passando attraverso la rete mostrata nell'immagine a sinistra, considerando che essa è identica alla rete modificata salvo per il fatto che si è usato l'artificio di scomporre un nodo in due nodi, A e B. Non circolando nel tratto AB alcuna corrente - per convincersene basta applicare la prima legge di Kirchhoff - tale tratto può essere eliminato ritornando alla rete di partenza.

Avendo eliminato in questo modo tutti i lati singolari di una rete possiamo a questo punto supporre che nel generico lato siano presenti o un generatore ideale di f.e.m. con una resistenza in serie o un generatore di corrente con una conduttanza in parallelo; per mantenere aperte tutte le possibilità possiamo addirittura supporre che in ogni ramo siano presenti entrambi i generatori, così come è mostrato in Fig.III.2a e b, nelle due configurazioni equivalenti.

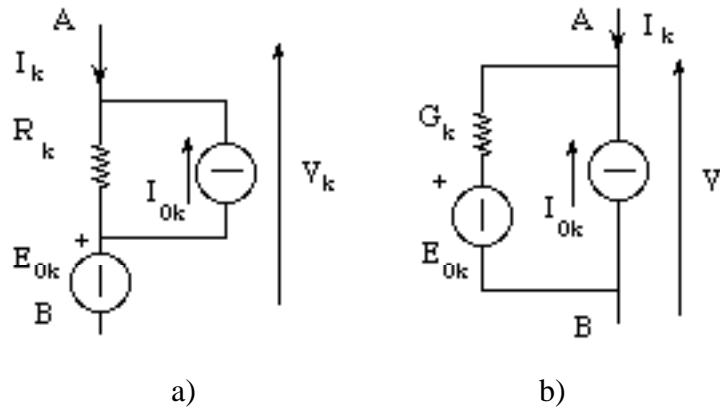


Fig.III.2

Se tutte le  $I_{0k}$  sono nulle i generatori di corrente sono stati ricondotti a generatori di f.e.m. e viceversa nel caso in cui tutte le  $E_{0k}$  sono nulle. In conclusione, senza perdere alcuna generalità, si può assumere che la generica caratteristica di lato sia in una delle due forme equivalenti:

$$V_k = E_{0k} + R_k(I_k + I_{0k}), \quad (\text{III.16})$$

$$I_k = - I_{0k} + G_k(V_k - E_{0k}) \quad (III.17)$$

Possiamo descrivere le caratteristiche di lato in una forma molto sintetica utilizzando il formalismo matriciale. Sia infatti  $\mathbf{G}$  la *matrice delle conduttanze di lato*, definita come la matrice quadrata e diagonale, di dimensioni  $l \times l$ , il cui generico elemento  $G_{rk}$  è nullo se  $r \neq k$  ed è pari a  $G_k$  se  $r=k$ :

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} G_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & G_{rr} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_{ll} \end{pmatrix},$$

e siano  $\mathbf{I}_0, \mathbf{E}_0, \mathbf{I}$  e  $\mathbf{V}$  i vettori colonne (o righe) così definiti:

$$\mathbf{I}_0 = \begin{pmatrix} I_{01} \\ I_{02} \\ \dots \\ I_{0l-1} \\ I_{0l} \end{pmatrix}, \mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} E_{01} \\ E_{02} \\ \dots \\ E_{0l-1} \\ E_{0l} \end{pmatrix}, \mathbf{I} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_{l-1} \\ I_l \end{pmatrix}, \mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_{l-1} \\ V_l \end{pmatrix}.$$

Con questo formalismo, e facendo riferimento alla formulazione di cui alla (III.17), le caratteristiche di lato possono essere sinteticamente descritte dalla relazione:

$$\mathbf{I} = - \mathbf{I}_0 + \mathbf{G}\mathbf{V} - \mathbf{G}\mathbf{E}_0, \quad (III.18)$$

dove i prodotti tra matrici vanno intesi nel senso usuale (righe per colonne).

Sostituendo nella relazione (III.12) l'espressione del vettore  $\mathbf{I}$  fornita dalla (III.18), e utilizzando la (III.13) per esprimere il vettore  $\mathbf{V}$  in funzione del vettore  $\mathbf{E}$ , si ottiene:

$$\mathbf{Y}\mathbf{E} = \mathbf{A}\mathbf{I}_0 + \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{E}_0, \quad (III.19)$$

$V_k = E_{0k} + I_k / G_k + E_{0k}$   
 $I_k = -I_{0k} + G_k V_k - G_k E_{0k}$   
 $\mathbf{I} = -\mathbf{I}_0 + \mathbf{G}\mathbf{V} - \mathbf{G}\mathbf{E}_0$

$\begin{vmatrix} G_1 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 \\ 0 & 0 & G_l \end{vmatrix}$

Lezione XV

$\mathbf{I} = -\mathbf{I}_0 + \mathbf{G}\mathbf{V} - \mathbf{G}\mathbf{E}_0$   
 $\Delta \mathbf{I} = \mathbf{0}$   
 $\Delta^2 \mathbf{E} = \mathbf{V}$   
 $-\Delta \mathbf{I}_0 + \Delta \mathbf{G} \Delta^2 \mathbf{E} - \Delta \mathbf{G} \mathbf{E}_0 = \mathbf{0}$

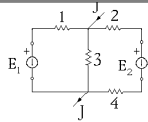
$\mathbf{Y}\mathbf{E} = \mathbf{J}$   
 $\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{G}\mathbf{A}^T \quad \mathbf{J} = \Delta \mathbf{I}_0 + \Delta \mathbf{G}\mathbf{E}_0$

Lezione XV

dove si è posto:

$$Y = AGA^T. \tag{III.20}$$

La matrice  $Y$ , di dimensioni  $(n-1) \times (n-1)$ , prende il nome di *matrice delle conduttanze ai nodi*. Il sistema di equazioni rappresentato dalla III.19, nelle incognite potenziali ai nodi, è il sistema risolvete della rete. Nel capitolo successivo ritorneremo risultati analoghi partendo da un altro punto di vista.



**Esercizi**

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, risolvere la rete disegnata in figura.

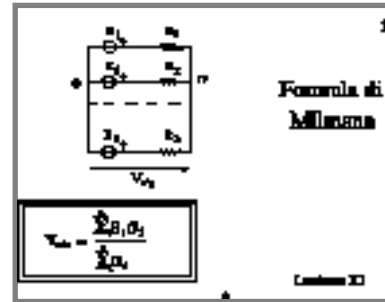
$E_1 = 4\text{ V}; E_2 = 8\text{ V}; J = 2\text{ A};$   
 $R_1 = 2\ \Omega; R_2 = 2\ \Omega; R_3 = 4\ \Omega;$   
 $R_4 = 2\ \Omega;$

Lezione X

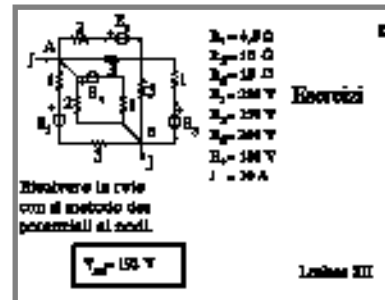
**Esercizi**

Nei due schemi proposti si richiede di risolvere la rete, nel primo caso applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, e nel secondo caso applicando il teorema del generatore equivalente ai morsetti A e B. In quest'ultimo caso, infatti, l'applicazione del teorema del generatore equivalente - di tensione, per esempio, - consente di ridurre la rete ad una con due sole maglie. La corrente nel ramo 5 si calcola quindi agevolmente e dalla sua conoscenza è facile risalire ad ogni altra corrente nei rami della rete. Un'altra notevole semplificazione si ottiene applicando lo stesso teorema ai morsetti del lato 2!

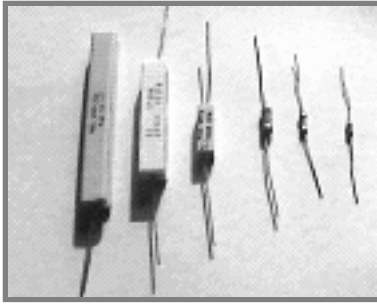
$$V_{O'O} = \frac{\sum_i^n E_i G_i}{\sum_i^n G_i} \quad (III.21)$$



Infine per la verifica della soluzione dell'esercizio proposto nell'ultima immagine, diamo il valore della tensione tra i morsetti A e B,  $V_{AB} = 192 \text{ V}$ .







### I resistori nella loro realizzazione concreta

Nella prima immagine a lato sono mostrati alcuni resistori di dimensioni molto diverse. Si potrebbe pensare che ciò corrisponda al fatto che essi hanno valori di resistenza molto diversi tra loro. Per inciso, per poter indicare tutta la gamma di possibili valori delle resistenze, oltre all'unità di misura ohm ( $\Omega$ ), si utilizzano multipli e sottomultipli dell'unità fondamentale, come indicato nel quadro riassuntivo. Così un resistore di  $10\text{k}\Omega$  (dieci kilohm) è in realtà un resistore di  $10 \times 10^3 = 10.000$  ohm.

Per resistori di dimensioni abbastanza ridotte, può risultare difficile riportare sulla loro superficie esterna il valore della resistenza da essi offerta. Si è convenuto quindi di segnalare tali valori mediante un codice a barre colorate, che risulta per altro anche molto più visibile ed evidente. Il significato dei vari colori è riportato in tabelle che si possono trovare in qualsiasi manuale specialistico.

Multipli		Sottomultipli	
$10^{12}$	tera T	$10^{-3}$	milli m
$10^9$	giga G	$10^{-6}$	micro $\mu$
$10^6$	mega M	$10^{-9}$	nano n
$10^3$	kilo k	$10^{-12}$	pico p

Accanto alle bande che indicano il colore, se ne trova, in generale, una che indica la precisione con cui il valore della resistenza viene fornito. Questa *tolleranza* dipende naturalmente dalle diverse tecniche costruttive ed ha, come è facile immaginare, una grande influenza sul costo del componente.

Ma torniamo ai resistori di diverse dimensioni. L'idea che tali dimensioni dipendano soltanto dalle differenze dei valori in ohm delle rispettive resistenze, non è esatta. Infatti, nel caso particolare, i tre resistori hanno la stessa resistenza. Il valore in ohm della resistenza di un resistore non è quindi l'unico parametro sufficiente a caratterizzare il bipolo "fisico" resistore. Vediamo brevemente per quali motivi.

In primo luogo ricordiamo che quando abbiamo introdotto il bipolo resistore, abbiamo sottolineato come la

sua resistenza dipenda, oltre che dalla geometria del sistema, anche dal materiale di cui il bipolo è costituito.

Nella formula (5) tale ruolo è svolto dalla resistività  $\rho$ . Abbiamo anche visto che il modello della conduzione elettrica di Drude dà una giustificazione microscopica di questa dipendenza lineare tra tensione e corrente.

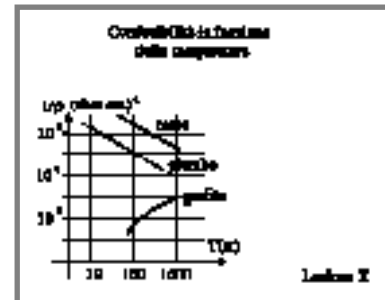
Proprio il modello di Drude, però, ci ha indotti a immaginare che la legge di proporzionalità tra "attrito" resistente e "velocità" dei portatori di cariche, che è alla base appunto della legge di Ohm, non possa essere verificata in ogni condizione. È logico quindi supporre che la resistività di un materiale non sia una costante indipendente dalle condizioni fisiche del materiale stesso.

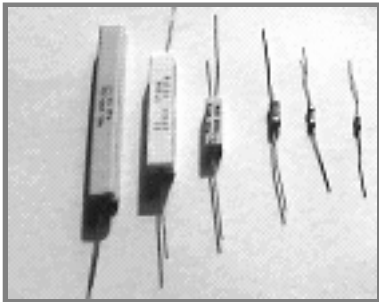
Un fattore importante da cui la resistività dipende è la temperatura del corpo. Nell'immagine a lato sono riportate qualitativamente in un diagramma alcune tipiche dipendenze della conducibilità  $\sigma = 1/\rho$  in funzione della temperatura, per tre materiali diversi.

Come si vede si riscontrano comportamenti anche molto diversi: mentre la conducibilità del rame e del piombo diminuisce al crescere della temperatura, quella della grafite aumenta. E comportamenti anche più complessi si possono riscontrare se si aumenta il campo di variazione delle temperature o se si usano materiali diversi. Ma limitiamoci ai casi classici mostrati in figura e osserviamo che la dipendenza  $\rho(T)$  non è in generale sempre lineare. Ciò nonostante se il campo di variazione delle temperature è limitato, possiamo pensare di approssimare tale dipendenza con una relazione lineare del tipo:

$$\rho(T) = \rho_0 [1 + \alpha_0(T - T_0)] \quad (\text{III.22})$$

dove  $\rho_0$  è la resistività alla temperatura  $T_0$  e  $\alpha_0$  un





opportuno coefficiente che prende il nome di *coefficiente di temperatura*. Un osservatore attento riconoscerà nella (III.22) il semplice sviluppo in serie di potenze della funzione  $\rho(T)$  con punto iniziale  $T_0$ ; il termine  $\rho_0\alpha_0$  non è altro che il valore di  $d\rho/dT$  valutato in  $T_0$ , e ciò giustifica il fatto che tale coefficiente dipende dalla scelta del punto iniziale. I valori di  $\alpha_0$  si trovano facilmente in opportune tabelle per i diversi materiali: generalmente per  $T_0$  si sceglie la "temperatura ambiente" che si assume pari a  $20^\circ\text{C}$  circa. Per il rame, prodotto con procedimento elettrolitico, per esempio, tale coefficiente vale  $\alpha_0 = 0,0038 (\text{°C})^{-1}$ .

Dalle curve osserviamo che  $\alpha_0$  può anche essere negativo.

Il fatto che la resistività vari con la temperatura porta una conseguenza che non si rileva, forse, immediatamente. Come sappiamo, un resistore  $R$  attraversato da una corrente  $I$  per un tempo  $\Delta t$  è sede di una trasformazione energetica che porta alla produzione di una certa quantità di calore  $\Delta Q = RI^2 \Delta t$ . In conseguenza di questo fenomeno, la temperatura del bipolo resistore tende a crescere e quindi la sua resistenza a variare. Ne consegue dunque una indiretta dipendenza di  $R$  da  $I$ , con il che la legge di proporzionalità tra  $V$  ed  $I$  non risulta più verificata. In effetti però si raggiunge rapidamente una temperatura di regime, che si può facilmente determinare con un semplice bilancio energetico; la temperatura raggiunta sarà quella alla quale la potenza dissipata per effetto Joule è esattamente eguale alla quantità di calore che nell'unità di tempo il bipolo resistore trasferisce all'ambiente esterno. Una volta che la temperatura si sia stabilizzata, anche il valore di  $R$  resta costante pur se diverso da quello iniziale.

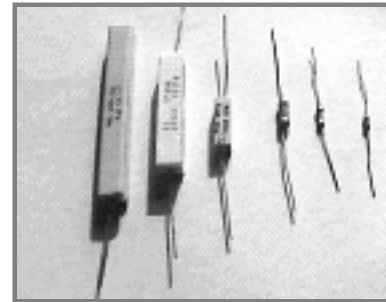
Ma c'è di più. Se infatti la temperatura di regime che si dovrebbe raggiungere per il valore della corrente che

attraversa il bipolo, e quindi per la potenza che esso è costretto a sviluppare, è troppo elevata, le caratteristiche del materiale possono cambiare totalmente: al limite, per correnti troppo elevate, il conduttore di cui è fatto il resistore, può fondersi localmente e la conduzione stessa può esserne compromessa.

È chiaro dunque che di ogni resistore deve essere fornito, oltre al valore della sua resistenza, anche il valore della corrente limite che esso è in grado di tollerare senza uscire dai margini di precisione indicati o, conseguenza più grave, senza autodistruggersi.

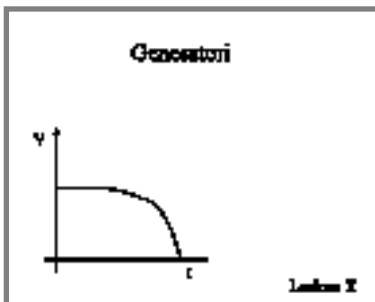
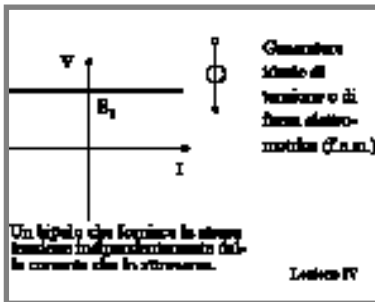
Naturalmente per consentire ad un resistore di dissipare una maggiore potenza, mantenendo la sua temperatura entro limiti accettabili, il metodo più immediato che possiamo immaginare è quello di aumentare la sua superficie di contatto con l'ambiente esterno, di modo che aumenti la quantità di calore trasmessa nell'unità di tempo all'ambiente esterno. Ma potremmo immaginare anche altre tecniche: per esempio, una ventilazione forzata. D'altra parte superfici più grandi comportano volumi maggiori; ecco quindi uno dei motivi per cui resistori con lo stesso valore di resistenza possono avere volumi anche molto differenti. Sono progettati per diverse potenze!

Un altro fattore che può influenzare le dimensioni di un bipolo resistore è la tensione di lavoro per cui esso è costruito. Questo parametro è importante per resistori costruiti per tensioni elevate. Fino ad ora abbiamo implicitamente assunto il resistore immerso in un mezzo isolante - l'aria tipicamente - di modo che il moto delle cariche fosse obbligato a svilupparsi esclusivamente attraverso il resistore stesso. In effetti qualsiasi mezzo isolante si comporta come tale solo se la forza che agisce sulle cariche in esso presenti, che è proporzionale al campo  $E$ , non supera determinati limiti.



Oltre tali limiti l'isolante perde le sue caratteristiche, si sviluppa una *scarica* al suo interno ed il passaggio di cariche non è più interdetto. Per l'aria, per esempio, tale valore, che prende il nome di *rigidità dielettrica*, si aggira intorno ai 25 kV/cm, e dipende dalle sue condizioni fisiche. È chiaro dunque che non sarebbe possibile realizzare un bipolo resistore, atto a sopportare una tensione di 25kV, che non abbia tra i suoi morsetti una distanza sufficientemente maggiore di un centimetro. Anche per questo motivo i resistori per elevate tensioni hanno generalmente dimensioni più grandi, indipendentemente dalla potenza, generalmente non elevata, che sono in grado di dissipare.

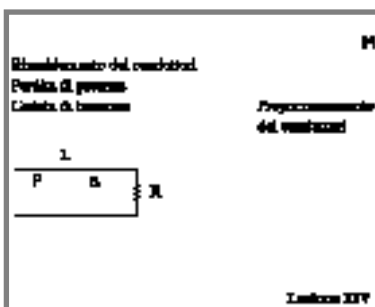
Dei generatori “reali” abbiamo già fatto cenno in precedenza e del come essi debbano necessariamente avere una caratteristica del tipo mostrato in figura in cui con l'aumentare della corrente erogata, la tensione ai morsetti, come suol dirsi, “si siede”. Avremo dunque una tensione a vuoto, che sarà la massima possibile, ed una corrente di cortocircuito, valore che in generale non è concretamente raggiungibile, a meno che non si voglia rischiare di distruggere il dispositivo.



### Il proporzionamento dei conduttori

Abbiamo sempre immaginato di poter connettere i nostri generatori al carico mediante conduttori perfetti che non introducono alcuna caduta di tensione. Naturalmente ciò non è possibile nella realtà; le connessioni al carico utilizzatore sono realizzate con materiali che, per quanto buoni conduttori, presentano sempre una certa resistività.

Con riferimento allo schema riportato a lato, immaginiamo che la distanza tra carico e generatore sia  $L$  e che la sezione del conduttore sia  $S$ . Quali conseguenze dovremo attenderci da queste circostanze?



In primo luogo, evidentemente, la tensione sul carico R non sarà uguale a quella fornita dal generatore ai suoi morsetti; è facile calcolare tale caduta di tensione, tenendo conto che la lunghezza complessiva del collegamento è  $2L$ :

$$\Delta V = \rho \frac{2L}{S} I . \quad (III.23)$$

Dalla (III.23) appare chiaro che, se immaginiamo fissa la corrente I assorbita dal carico e la distanza L, la caduta di tensione può essere ridotta attraverso l'utilizzo di un miglior materiale conduttore (generalmente più costoso), oppure aumentando la sezione S dei conduttori. È ragionevole dunque un *proporzionamento dei conduttori* inteso ad ottimizzare aspetti specifici dell'impianto nel suo complesso. La caduta di tensione, infatti, non è l'unico elemento che va tenuto in conto: la corrente I, che attraversa i conduttori di resistività  $\rho$ , produce una dissipazione di potenza che, per la legge di Joule, è data da:

$$\Delta P = R_I I^2 = \rho \frac{2L}{S} I^2 . \quad (III.24)$$

Volendo ridurre tale potenza dissipata, è chiaro che ancora una volta è possibile agire sulla sezione S in base a quanto dettato dalla formula (III.24), piuttosto che dalla formula (III.23). Ma non è tutto: la potenza dissipata nel conduttore viene, come è noto, trasformata in calore e di conseguenza produce un innalzamento della temperatura T del conduttore rispetto alla temperatura ambiente  $T_0$ . La temperatura di regime che si raggiunge è, come sempre, fissata dalla condizione di equilibrio tra la potenza elettrica dissipata e la quantità di calore che, nell'unità di tempo, viene trasferita all'ambiente esterno. Quest'ultima è proporzionale al salto di temperatura  $T - T_0$  ed all'area della superficie di contatto tra corpo conduttore ed ambiente esterno.

Riscaldamento dei conduttori

Proporzionamento dei conduttori

$$\rho \frac{2L}{S} I^2 = k L p_1 (T - T_0)$$

$$S = \pi r^2 ; \quad p_1 = 2 \pi r$$

Lezione XIV

Perdita di potenza

Proporzionamento dei conduttori

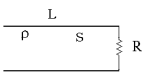
$$\rho \frac{2L}{S} I^2 = k L p_1 (T - T_0)$$

$$S = \pi r^2 ; \quad p_1 = 2 \pi r$$

$$\rho \frac{2L}{S} I^2 = \Delta P$$

Lezione XIV

Caduta di tensione



Proporzionamento dei conduttori

$$\rho \frac{2L}{S} I^2 = k L p_1 (T - T_0)$$

$$S = \pi r^2; \quad p_1 = 2 \pi r$$

$$\rho \frac{2L}{S} I^2 = \Delta P$$

$$\rho \frac{2L}{S} I = \Delta V$$

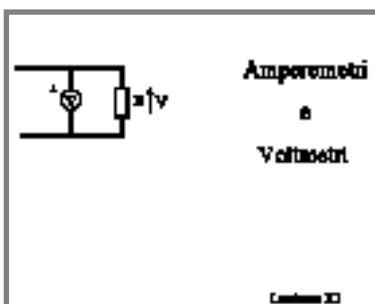
Lezione XIV

Abbiamo implicitamente fatto l'ipotesi che il meccanismo principale di trasferimento del calore all'ambiente esterno sia quello della convezione, il che è abbastanza naturale dato che il conduttore sarà, in ultima analisi, circondato da un fluido isolante - l'aria, per esempio. In definitiva, all'equilibrio si avrà:

$$\Delta P = \rho \frac{2L}{S} I^2 = k 2L p_1 \Delta T, \quad (\text{III.25})$$

dove  $k$  è un coefficiente di convezione che dipende da diversi fattori che sarebbe lungo qui elencare,  $S = \pi r^2$  e  $p_1 = 2\pi r$  sono rispettivamente l'area ed il perimetro della sezione trasversale del conduttore supposto cilindrico e di raggio  $r$ . È questa la relazione che bisogna prendere in considerazione qualora sia  $\Delta T = T - T_0$  la grandezza che si vuole tenere sotto controllo. Naturalmente la (III.25) può essere ulteriormente raffinata se si tiene in conto che la stessa resistività  $\rho$  del materiale dipende dalla temperatura.

Come si vede il problema del proporzionamento dei conduttori, almeno in corrente continua, è, in linea di principio, abbastanza semplice: una volta fissati i valori di  $\Delta V$ ,  $\Delta P$  e  $\Delta T$  ammissibili, basta determinare quale delle tre relazioni (III.23), (III.24) e (III.25) porta alla condizione più stringente nel caso specifico. Per impianti comuni di tipo classico spesso si assume che tutto ciò porti in definitiva a fissare la densità di corrente  $I/S$  ammissibile nel conduttore. In altri casi i valori delle sezioni necessarie sono direttamente riportati in tabelle che si trovano nei diversi manuali.



### Gli strumenti di misura visti come bipoli

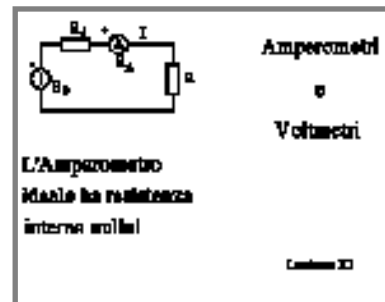
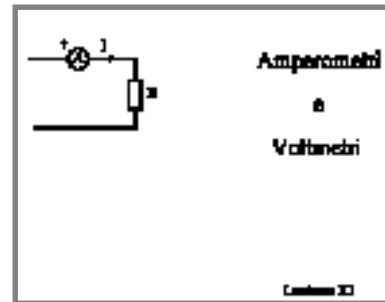
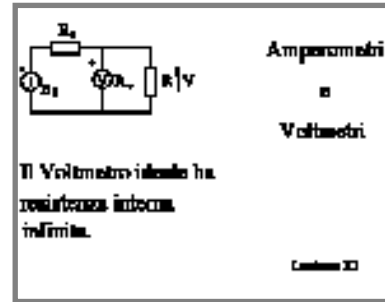
Un cenno agli strumenti di misura delle grandezze elettriche. Fino ad ora non ne abbiamo parlato anche perché il loro studio dettagliato esula certamente dai limiti di un corso di base di Elettrotecnica. In effetti quel-

lo che ci interessa discutere non è tanto il principio di funzionamento di tali strumenti, quanto il ruolo che essi si trovano a svolgere in quanto elementi di una rete, quando vengono inseriti in essa per misurare le diverse grandezze elettriche.

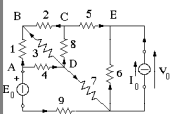
Cominciamo dal *voltmetro* che è, ovviamente, uno strumento in grado di misurare la d.d.p. tra due punti. Un tale dispositivo dovrà disporre di due *sonde* - o morsetti - che dovranno essere posti in contatto elettrico con i punti tra i quali si desidera misurare la differenza di potenziale. Se si prescinde dalla sua specifica funzione e si focalizza l'attenzione sul suo inserimento nella rete, si può vedere un voltmetro come un bipolo; in tal senso esso sarà caratterizzato da una sua resistenza interna, se supponiamo si tratti di un voltmetro per la misura di tensioni continue.

Supponiamo dunque di voler caratterizzare dal punto di vista elettrico un voltmetro di tal tipo. Considerato come bipolo, esso presenterà ai suoi morsetti una resistenza interna  $R_i$ . Una caratteristica fondamentale di ogni strumento di misura è che esso deve "disturbare" quanto meno è possibile il sistema in cui esso viene inserito. Se ciò non fosse, lo strumento non misurerebbe la grandezza voluta nel sistema "indisturbato" dalla sua presenza. Uno sguardo allo schema di principio mostrato a lato - dove, per inciso, è anche mostrato il simbolo che utilizzeremo per lo strumento in esame - fa subito comprendere che un voltmetro ideale, per avere una tale proprietà, deve presentare ai suoi morsetti una resistenza infinita; solo in tal caso infatti la corrente derivata dal voltmetro è nulla e quindi la tensione ai morsetti del carico risulta indipendente dalla presenza del voltmetro stesso.

Considerazioni del tutto analoghe possono svolgersi per l'*amperometro*, lo strumento che misura l'intensità







14


**Esercizi**

Matrice di incidenza  
Matrice delle  
conduttanze di lato

$R_1=R_2=R_3=1\ \Omega$   
 $R_4=R_5=R_6=2\ \Omega$   
 $R_7=R_8=R_9=4\ \Omega$   
 $E_0=10\ \text{V}$   
 $I_0=2\ \text{A}$

Lezione XIV

della corrente. L'amperometro, naturalmente, dovrà essere inserito in serie nel ramo di cui si vuole misurare la corrente, così come è indicato schematicamente. Esso, se ideale, dovrà presentare una resistenza nulla ai suoi morsetti, altrimenti la tensione ai morsetti del carico, e quindi la corrente da esso assorbita, non risulteranno indipendenti dalla presenza dell'amperometro stesso.



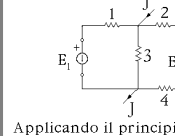
13

**Esercizi**

**Determinare la d.d.p. tra A e B**

Lezione XIII

In regime continuo non è necessario fare appello ad uno strumento speciale per la misura della potenza: un voltmetro ed un amperometro sono in linea di principio sufficienti. Come vedremo, in regime sinusoidale, occorrerà introdurre un tale dispositivo speciale che prenderà il nome di wattmetro; come è facile intuire, esso non potrà essere un semplice bipolo, dovendo presentare quattro morsetti.



12

**Esercizi**

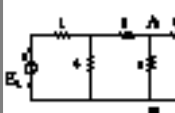
Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti, risolvere la rete disegnata in figura.

$E_1=4\ \text{V}; E_2=8\ \text{V}; J=2\ \text{A};$   
 $R_1=2\ \Omega; R_2=2\ \Omega; R_3=4\ \Omega;$   
 $R_4=2\ \Omega;$

Lezione X

**Esercizi**

Per la rete mostrata nel primo schema, determinare la matrice di incidenza e la matrice delle conduttanze di lato.



11

**Esercizi**

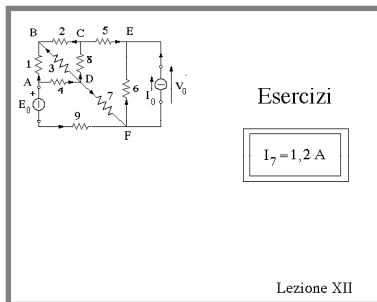
$R_1=4,5\ \Omega;$   
 $R_2=8\ \Omega;$   
 $R_3=1,5\ \Omega;$   
 $R_4=3,5\ \Omega;$   
 $R_5=200\ \Omega;$   
 $X_1=360\ \text{V};$   
 $X_2=180\ \text{V};$

Trovare d.d.p.  
 generatore  
 equivalente  
 ai morsetti  
 A, B

Lezione IX

Nel secondo problema si richiede di determinare la tensione tra i morsetti A e B del parallelo di due generatori reali idealizzati. La soluzione è banale ma ci servirà in seguito per alcuni commenti sul parallelo dei generatori.

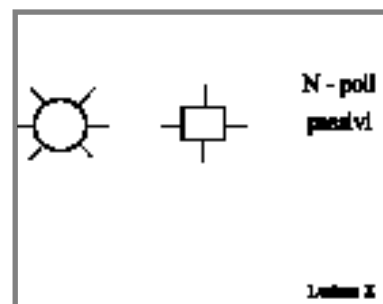
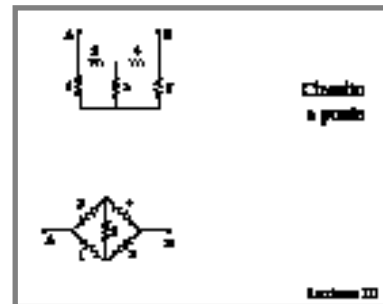
Infine per la verifica dei due problemi successivi, già proposti in precedenza, diamo i valori della corrente nel resistore  $R_3$ ,  $I_3=0,5\ \text{A}$ , e di quella nel resistore  $R_5$ ,  $I_5=1,06\ \text{A}$ , rispettivamente.



rispettivamente. Si possono ottenere gli stessi risultati affrontando le stesse reti con il metodo dei potenziali ai nodi o con quello delle correnti di maglia.

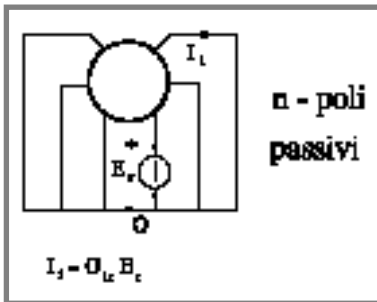
### L' n-polo

Abbiamo osservato che una qualsiasi rete, vista da due nodi, diventa, a tutti gli effetti esterni, un bipolo unico – e questo è in qualche misura ovvio – e abbiamo anche mostrato come costruire il bipolo equivalente alla rete data, sia nel caso che essa sia passiva, sia nel caso in cui sia attiva. Abbiamo anche osservato, però, che non tutte le possibili configurazioni sono risolvibili riducendo la rete attraverso successivi accoppiamenti serie o parallelo di due o più bipoli. A confermarlo abbiamo portato l'esempio della classica rete *a ponte* mostrata in figura. Si immagini, infatti, di voler determinare il bipolo equivalente alla rete vista dai morsetti A e B. Siamo subito in difficoltà perché non troviamo nella rete né rami in serie né rami in parallelo. È facile convincersi che nessuno dei 5 rami è aggregabile ad un altro per costruire un primo bipolo equivalente da cui prendere le mosse. Val la pena di notare che un tal problema non esisterebbe se si volesse il bipolo equivalente alla rete vista dai morsetti C, D. In tal caso, infatti, si ha immediatamente che si tratta del parallelo di tre bipoli: il bipolo 3, il bipolo che si ottiene dalla serie di 1 e 2 e



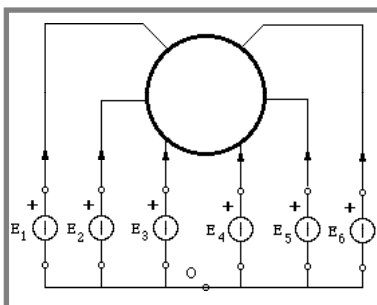
quello che si ottiene dalla serie di 4 e 5.

Ma torniamo ai nodi A e B. La nostra difficoltà è dovuta alla presenza nella rete di strutture del tipo a *triangolo* o a *poligono* come 1, 2, 3 e 3, 4, 5 o equivalentemente a *stella* come 2, 3, 4, che non sono riconducibili ad un sistema a due morsetti e cioè ad un bipolo. Siamo portati dunque a prendere in considerazione “sistemi a più poli”, cioè un complesso di bipoli collegati tra di loro e visti da n nodi; un sistema che schematizzeremo d’ora in poi alla maniera rappresentata in figura.



Si pone il problema a questo punto di estendere il concetto di “caratteristica” ad un tale sistema. Ragioniamo alla maniera seguente: supponiamo di alimentare ogni polo con n generatori ideali di tensione  $E_r$  come mostrato in figura, e supponiamo ancora che la rete sia costituita da tutti bipoli lineari. In tal caso per calcolare le n correnti nei rami dei generatori potremo usare il teorema di sovrapposizione e affermare che la corrente  $I_l$  nel ramo del generatore iesimo è la somma delle varie correnti  $I_{lr}$  che si ottengono nel ramo iesimo quando di volta in volta lasciamo operare il solo generatore nel ramo erresimo, così come mostrato in figura.

D’altra parte in ognuna delle reti così ottenute, a causa della linearità dei bipoli componenti, la corrente  $I_l$  dovrà risultare proporzionale alla tensione  $E_r$ . Chiamiamo  $G_{lr}$  tale fattore di proporzionalità, che ha appunto le dimensioni dell’inverso di una resistenza, cioè di una conduttanza. In conclusione sommando l’effetto di tutti i generatori presenti avremo:



$$\begin{aligned}
 I_l &= G_{l1}E_1 + \dots + G_{lr}E_r + \dots + G_{ln}E_n \\
 &\dots\dots\dots \\
 I_s &= G_{s1}E_1 + \dots + G_{sr}E_r + \dots + G_{sn}E_n \quad (IV.1) \\
 &\dots\dots\dots \\
 I_n &= G_{n1}E_1 + \dots + G_{nr}E_r + \dots + G_{nn}E_n
 \end{aligned}$$

In altri termini l'n-polo invece di essere individuato da un solo parametro  $G$  come un bipolo, è individuato da  $n^2$  parametri  $G_{rs}$  cioè da una matrice di ordine  $n$  di conduttanze che prende appunto il nome di *matrice delle conduttanze*. Come vedremo, in realtà, i parametri indipendenti da cui realmente dipende la matrice delle conduttanze non sono  $n^2$ , bensì in numero molto minore. Per ora osserviamo che tra le  $G_{rs}$  ve ne sono alcune che si distinguono dalle altre: quelle del tipo  $G_{rr}$  con pedici eguali, e cioè gli elementi della diagonale della matrice. Esse infatti, per costruzione, sono derivate da schemi circuitali del tipo mostrato nella quarta figura. Risulta evidente che esse sono delle "reali conduttanze equivalenti" del bipolo (questa volta è un vero bipolo) che si ottiene prendendo in considerazione un polo dell'n-polo e come altro estremo l'insieme di tutti gli altri  $n - 1$  poli collegati in corto circuito tra di loro. Natura diversa hanno invece le  $G_{rs}$  che rappresentano semplicemente il rapporto tra la corrente nel ramo  $r$  e la tensione nel ramo  $s$ , quando tutti gli altri poli, tranne l'essesimo, sono collegati in corto circuito. Si tratta certamente di grandezze che hanno le dimensioni di conduttanze, ma non sono conduttanze mostrate dalla rete a particolari coppie di morsetti. Per questa ragione si distinguono le due grandezze con nomi diversi: *conduttanze proprie* o *autoconduttanze*, le prime e *conduttanze mutue*, le seconde.

Vediamo ora di quali proprietà godono gli elementi di una matrice di conduttanze. Osserviamo in primo luogo che avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore a tutti i poli, dovrà necessariamente essere, per la passività della rete,  $G_{rr} \geq 0$ , in quanto effettive conduttanze di bipoli equivalenti. Le  $G_{rs}$  invece non sono necessariamente positive; anzi è possibile dimostrare facilmente che deve risultare:

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{1r} & G_{1n} \\ G_{rl} & G_{rr} & G_{rn} \\ G_{n1} & G_{nr} & G_{nn} \end{bmatrix}$$

$$I_1 = G_{11}E_1 + \dots + G_{1r}E_r + \dots + G_{1n}E_n$$

$$I_r = G_{r1}E_1 + \dots + G_{rr}E_r + \dots + G_{rn}E_n$$

$$I_n = G_{n1}E_1 + \dots + G_{nr}E_r + \dots + G_{nn}E_n$$

Lezione X

Conduttanze proprie

$$G_{rr} = \left. \frac{I_r}{E_r} \right|_{E_{s \neq r} = 0}$$

$$I_r = G_{r1}E_1 + \dots + G_{rr}E_r + \dots + G_{rn}E_n$$

$$I_1 = G_{11}E_1 + \dots + G_{1r}E_r + \dots + G_{1n}E_n$$

$$I_n = G_{n1}E_1 + \dots + G_{nr}E_r + \dots + G_{nn}E_n$$

Lezione X

Conduttanze mutue

$$G_{rs} = \left. \frac{I_r}{E_s} \right|_{E_{t \neq s} = 0}$$

$$I_r = G_{r1}E_1 + \dots + G_{rs}E_s + \dots + G_{rn}E_n$$

$$I_1 = G_{11}E_1 + \dots + G_{1r}E_r + \dots + G_{1n}E_n$$

$$I_n = G_{n1}E_1 + \dots + G_{nr}E_r + \dots + G_{nn}E_n$$

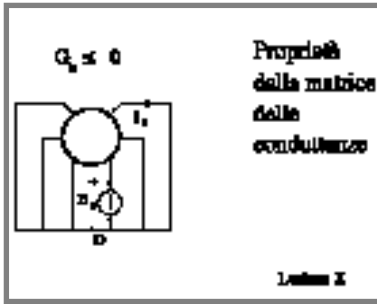
Lezione X

Proprietà della matrice delle conduttanze

$$G_{rr} \geq 0$$

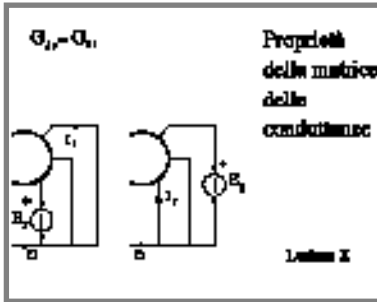
$$G_{rs} = -G_{sr}$$

Lezione X



$$G_{rs} \leq 0. \tag{IV.2}$$

Infatti perché si abbia  $G_{rs} > 0$  dovrebbe essere  $I_r > 0$  con  $E_s > 0$ ; ma in tal caso all'interno della rete, alimentata dalla sola  $E_s$  tra il nodo  $s$  ed il nodo  $O$ , comune a tutti gli altri poli, dovrebbe esistere un nodo a potenziale minore di quello di  $O$ , (solo in tal caso infatti la  $I_r > 0$  sarebbe compatibile con la supposta passività del particolare ramo dove la  $I_r$  si trova a circolare); ma ciò è impossibile per il principio di non amplificazione delle tensioni.



Ma c'è di più. Se proviamo ad applicare il teorema di reciprocità alle due reti che hanno portato all'individuazione di  $G_{rs}$  e  $G_{sr}$  troviamo immediatamente il seguente risultato:

$$G_{rs} = G_{sr}. \tag{IV.3}$$

La matrice  $G$  è necessariamente simmetrica. Questo significa che degli  $n^2$  parametri che la compongono, solo  $n^2 - (n^2 - n) / 2$  sono indipendenti.

Se infine proviamo ad applicare la LKC al nodo  $O$  troviamo che la somma delle  $I_r$  deve essere nulla. Cioè:

$$\sum_s G_{s1} E_1 + \dots + \sum_s G_{sr} E_r + \dots + \sum_s G_{sn} E_n = 0. \tag{IV.4}$$

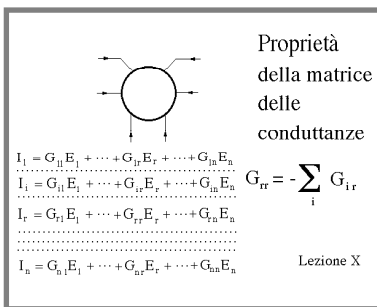
Il che, essendo le  $E_s$  qualsiasi, comporta che:

$$\sum_s G_{sr} = 0, \tag{IV.5}$$

per qualsiasi  $r$ , o anche:

$$G_{rr} = - \sum_{s \neq r} G_{sr}. \tag{IV.6}$$

Una volta note le mutue conduttanze, dunque, le autoconduttanze possono essere ottenute in base alla IV.6.



Ne deriva che altri  $n$  parametri sono dipendenti. In conclusione i parametri indipendenti nella matrice  $G$  sono:

$$n^2 - \frac{n^2 - n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (IV.7)$$

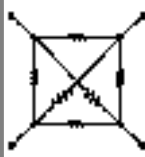

Per assegnare, dunque, una matrice di conduttanza non si possono scegliere  $n^2$  numeri qualsiasi, anzi il modo più immediato per farlo è quello di assegnare  $n(n-1)/2$  grandezze, negative naturalmente, che rappresentano le  $n(n-1)/2$  mutue conduttanze dell' $n$ -polo!

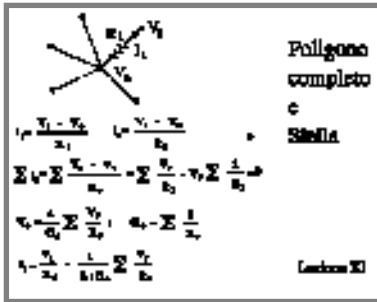
Delle infinite reti che possono dare luogo ad un  $n$ -polo se ne distinguono immediatamente due di tipo particolare: la rete a poligono completo e quella a stella. La prima si ottiene collegando ogni coppia di poli  $r$  ed  $s$  con un bipolo di resistenza  $R_{rs}$ . La rete così ottenuta prende il nome di *rete a poligono completo con  $n$  vertici*. È facile verificare che il numero di lati di una tale rete è pari ad  $n(n-1)/2$ ; le combinazioni, cioè, di  $n$  oggetti a due a due senza ripetizione. In un  $n$ -polo a poligono, completo o non, non vi sono nodi interni.

L'altro schema caratteristico è quello a stella, costituito da  $l$  lati ognuno collegato tra uno degli  $n$  poli ed un nodo interno comune, come mostrato nella stessa figura. Un  $n$ -polo a stella, dunque, ha un solo nodo interno.

Poniamoci ora il problema di stabilire in quali condizioni due  $n$ -poli – dello stesso numero di poli – possono considerarsi equivalenti. Come logica estensione dell'equivalenza dei bipoli, potremo dire che essi possono ritenersi equivalenti quando, sottoposti alla stessa ennupla di tensioni, assorbono la stessa ennupla di correnti. È evidente che ciò comporterà anche la uguaglianza delle due matrici delle conduttanze. In particolare cerchiamo le concrete condizioni di equivalenza

$G_{ii} > 0$		Elementi
$G_{ij} < 0$	$n^2$ elementi	indipendenti
$G_{ij} = G_{ji}$	$\frac{n(n-1)}{2}$ mutue	della matrice
		delle
$G_{ii} = -\sum_j G_{ij}$	$n$ relazioni	conduttanze
$n^2 - \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$		Latino X

	Poligono completo
	Stella
	Latino X



tra un n-polo a poligono ed uno a stella.  
 Consideriamo in primo luogo un n-polo a stella e cerchiamo la relazione che lega la generica corrente  $I_i$  nel ramo iesimo alla ennupla di potenziali  $V_r$  ai poli (simboli e convenzioni sono illustrati in Fig. IV.1).

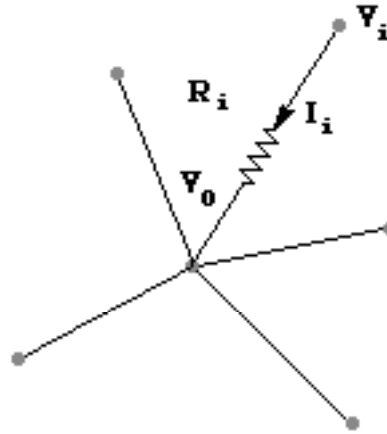


Fig.IV.1

Si avrà:

$$I_i = \frac{V_i - V_0}{R_i} \tag{IV.8}$$

Una relazione analoga si potrà scrivere per uno qualsiasi dei rami, quindi per il ramo erresimo:

$$I_r = \frac{V_r - V_0}{R_r} \tag{IV.9}$$

D'altra parte dalla LKC applicata al nodo O si ottiene:

$$\begin{aligned} \sum_r I_r &= \sum_r \frac{V_r - V_0}{R_r} = \\ &= \sum_r \frac{V_r}{R_r} - V_0 \sum_r \frac{1}{R_r} = 0 \end{aligned} \tag{IV.10}$$

E quindi:



$$V_0 = \frac{\sum_r \frac{V_r}{R_r}}{\sum_r \frac{1}{R_r}} = \frac{1}{G_0} \sum_r \frac{V_r}{R_r} \quad (IV.11)$$

dove si è posto:

$$G_0 = \sum_r \frac{1}{R_r} \quad (IV.12)$$

Ritornando ora alla espressione IV.8 della  $I_i$ , si ottiene:

$$I_i = \frac{V_i}{R_i} - \frac{1}{R_i G_0} \sum_r \frac{V_r}{R_r} \quad (IV.13)$$

o anche, estraendo dal segno di sommatoria il termine iesimo, in modo da separare la parte di  $I_i$  che dipende esclusivamente da  $V_i$  da quella che dipende da tutti gli altri valori di  $V_r$ :

$$I_i = V_i \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_i^2 G_0} \right) - \frac{1}{R_i G_0} \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r} \quad (IV.14)$$

Consideriamo ora l'altro caso: il poligono di  $n(n-1)/2$  lati come schematicamente mostrato in figura.

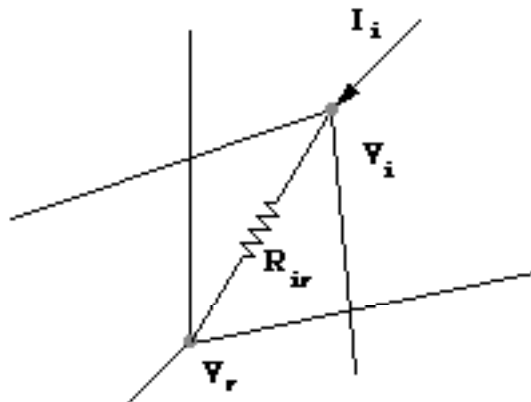


Fig.IV.2

In questo caso si avrà:

Poligono completo e Stella

$$I_i = \frac{V_i}{R_i} - \frac{1}{R_i G_0} \sum_r \frac{V_r}{R_r}$$

$$V_i = \frac{1}{G_0} \sum_r \frac{V_r}{R_r}$$

Lezione XI

Poligono completo e Stella

$$I_i = \frac{V_i}{R_i} - \frac{1}{R_i G_0} \sum_r \frac{V_r}{R_r}$$

$$V_i = \frac{1}{G_0} \sum_r \frac{V_r}{R_r}$$

$R_{i1} = 0, 2, 3, \dots, n$

Lezione XI

Poligono completo e Stella

$$I_i = \frac{V_i}{R_i} - \frac{1}{R_i G_0} \sum_r \frac{V_r}{R_r}$$

$$V_i = \frac{1}{G_0} \sum_r \frac{V_r}{R_r}$$

$R_{i1} = 0, 2, 3, \dots, n$

Lezione XI

$$I_i = \sum_{r \neq i} \frac{V_i - V_r}{R_{ri}} = V_i \sum_{r \neq i} \frac{1}{R_{ri}} - \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_{ri}} \quad (IV.15)$$

Confrontando le due espressioni, (IV.14) e (IV.15), delle  $I_i$  così determinate, si verifica immediatamente che esse sono identiche per qualsiasi ennupla di  $V_r$  se e solo se:

$$R_{ri} = R_r R_i G_0 \quad (IV.16)$$

In tal caso infatti la (IV.15) diventa:

$$\begin{aligned} I_i &= V_i \sum_{r \neq i} \frac{1}{R_r R_i G_0} - \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r R_i G_0} = \\ &= \frac{V_i}{R_i G_0} \sum_{r \neq i} \frac{1}{R_r} - \frac{1}{R_i G_0} \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r} = \\ &= \frac{V_i}{R_i G_0} \sum_r \frac{1}{R_r} - \frac{V_i}{R_i^2 G_0} - \frac{1}{R_i G_0} \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r} = \\ &= \frac{V_i}{R_i} - \frac{V_i}{R_i^2 G_0} - \frac{1}{R_i G_0} \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r} \end{aligned} \quad (IV.17)$$



L'equivalenza è dunque assicurata se risultano verificate le  $n(n-1)/2$  relazioni di cui alla IV.16:

Se dunque si ha un n-polo a stella, è sempre possibile costruire un n-polo a poligono completo le cui  $n(n-1)/2$  resistenze di lato  $R_{ri}$  siano date appunto dalle  $n(n-1)/2$  relazioni trovate, e che quindi risulta equivalente alla stella di partenza.

Il caso opposto, invece, in cui siano note le  $n(n-1)/2$  resistenze di lato in un poligono completo, e si voglia conoscere le n resistenze di lato di un eventuale poligono a stella equivalente, è risolvibile solo nel caso in cui il numero delle equazioni,  $n(n-1)/2$ , è pari al numero di incognite n, cioè solo nel caso  $n=3$ ! Per  $n>3$  il numero delle equazioni è superiore al numero delle incognite ed il problema, quindi, non ammette soluzione!

Abbiamo dunque mostrato che, mentre è sempre possibile ricondurre una stella ad un poligono, la trasformazione opposta è possibile solo nel caso  $n=3$  e cioè, come si dice, dal “triangolo alla stella a tre rami”.

Una importante osservazione è la seguente: mediante successive trasformazioni delle stelle relative ai nodi interni di un  $n$ -polo, è possibile far via via scomparire tali nodi interni. Ne consegue che un qualsiasi  $n$ -polo è riconducibile ad un  $n$ -polo a poligono. Si abbia dunque un tale  $n$ -polo a poligono (completo o non, questo non ha importanza), e si voglia calcolare gli elementi della matrice delle conduttanze. Per quanto detto in precedenza basterà calcolare le  $n(n-1)/2$  grandezze  $G_{rs}$  con  $r \neq s$ ! È facile verificare che risulta:

$$G_{rs} = - \frac{1}{R_{rs}} \tag{IV.18}$$

se  $R_{rs}$  è la resistenza tra i nodi  $r$  e  $s$  dell’ $n$ -polo!

Per calcolare  $G_{rs}$ , infatti, bisogna collegare tutti i nodi, tranne il nodo  $s$ , al morsetto  $O$  del generatore, come mostrato in figura. Ma così facendo ogni bipolo che si trovi su di un lato non collegato ad  $s$  viene ad essere cortocircuitato e quindi in esso non potrà circolare corrente. Ne consegue che la corrente  $I_r$  dovrà riversarsi tutta nell’unico ramo che partendo da  $r$  sia collegato anche ad  $s$ , il ramo con resistenza  $R_{rs}$ . Si ha quindi  $E_s = - R_{rs} I_r$  (il meno deriva dalla convenzione che, in tali condizioni, è del generatore), da cui  $G_{rs} = - 1/R_{rs}$

Il procedimento per cui, data la rete, se ne determina la matrice delle conduttanze viene detto di *analisi dell’ $n$ -polo*. Ne abbiamo mostrato una possibile soluzione che passa attraverso la sostituzione dell’ $n$ -polo di partenza con uno equivalente a poligono.

Il processo inverso, prende il nome di *sintesi dell’ $n$ -polo*: data cioè una matrice quadrata  $n$  che soddisfi alle condizioni di cui in precedenza, che giustamente ora

**Sintesi del n-polo a poligono**

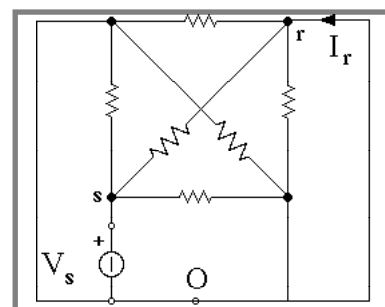
Attraverso successive eliminazioni dei nodi interni, è possibile trasformare ogni n-polo generato in un n-polo a poligono.

Lezione III

**Sintesi ed Analisi del n-polo a poligono**

$G_{rs} = - \frac{1}{R_{rs}}$

Lezione III



possono prendere il nome di *condizioni di fisica realizzabilità*, determinare un n-polo che presenti appunto quella data come matrice delle conduttanze.

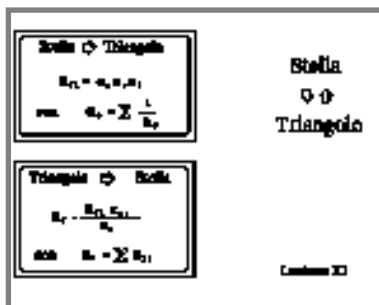
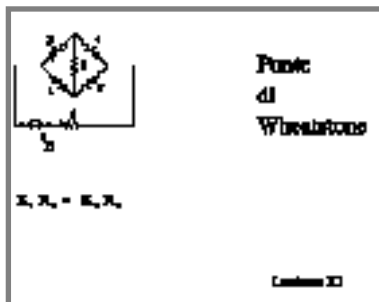
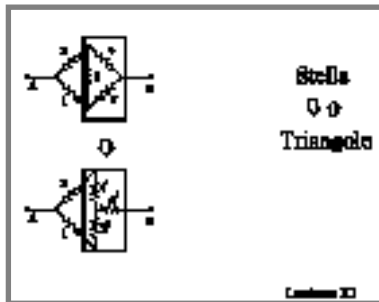
Rileggendo con una prospettiva diversa quanto sviluppato precedentemente, si può dire che almeno una soluzione al problema della sintesi l'abbiamo già data. Se infatti, sono  $G_{rs}$  i valori fuori diagonale della matrice assegnata, l'n-polo costituito da un poligono completo i cui rami abbiano resistenza  $R_{rs} = -1/G_{rs}$  ha appunto la desiderata matrice delle conduttanze!

Riprendiamo in considerazione, ora, il problema del circuito a "ponte" da cui siamo partiti per introdurre gli n-poli. È chiaro che il problema di trovare il bipolo equivalente tra A e B si risolve rapidamente se, per esempio, si trasforma il triangolo costituito dai rami 3,4 e 5. Il circuito si riduce a quello mostrato in figura e la resistenza tra A e B si calcola ora agevolmente. Come si è detto il circuito in esame viene denominato "ponte di Wheatstone" e trova una applicazione molto interessante nel campo delle misure. Senza soffermarci sull'argomento, si noti che qualora le resistenze nei rami 1,2,4,5 soddisfino la relazione:

$$R_1 R_4 = R_2 R_5, \quad (IV.19)$$

allora la corrente nel ramo 3 è identicamente nulla. Si dice in tal caso che il *ponte è in equilibrio*. Se il valore di uno dei resistori nei quattro lati del ponte non è noto, ed un altro è variabile, è possibile determinare il valore della resistenza incognita dalla relazione IV.19, una volta raggiunta la condizione di corrente nulla nel ramo 3, modificando la resistenza del resistore variabile. Naturalmente occorre che nel ramo 3 sia presente uno strumento in grado di rilevare l'annullamento della corrente.

Ritornando alla trasformazione stella-poligono, notiamo che dalle (IV.16) si ottengono facilmente le resi-



stENZE del poligono equivalente una volta siano note quelle della stella di partenza. Per il caso n=3 è facile determinare le relazioni inverse che forniscono le resistenze della stella se sono note quelle del triangolo:

$$R_i = \frac{R_{ir}R_{is}}{R_0} \tag{IV.20}$$

Dove si è posto:

$$R_0 = R_{12} + R_{23} + R_{31}$$

**Esercizi**

Nella rete in figura, che abbiamo già risolto con diversi metodi, possiamo ora provare ad utilizzare le trasformazioni poligono-stella. Applicando, infatti, il principio di sovrapposizione degli effetti, ci troviamo a dover risolvere due reti con un solo generatore; una volta quello di tensione ed un'altra quello di corrente. La determinazione della resistenza equivalente del bipolo connesso ai morsetti dei generatori nei due casi è ostacolata da strutture a ponte del tipo di quelle studiate. Utilizzando le formule della trasformazione triangolo-stella il problema trova una semplice soluzione.

Infine per la stessa rete riportiamo la matrice di incidenza e la matrice delle conduttanze di lato.

**L’N-bipolo o N-porte**

Una rete passiva con un certo numero di poli può anche essere considerata da un’altro punto di vista. Assumiamo che il numero di poli n sia pari e poniamo  $N = n/2$ . Se scegliamo N coppie di poli e conveniamo di collegare sempre tale n-polo al “resto del mondo” avendo cura che la corrente che entra in un polo di ogni singola coppia sia uguale a quella che esce dall’altro, la struttura così ottenuta godrà evidentemente di

Trasformazioni  
Stella  
Poligono

**Esercizi**

$$R_1 = R_2 = R_3 = 1 \Omega$$

$$R_4 = R_5 = R_6 = 2 \Omega$$

$$R_7 = R_8 = R_9 = 4 \Omega$$

$$E_1 = 10 V$$

$$I_1 = 3 A$$

Lezione XI

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
B	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
C	0	+1	0	0	+1	0	0	-1	0	0
D	0	0	+1	-1	0	0	+1	0	0	0
E	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	-1
F	0	0	0	0	0	+1	-1	0	0	+1

**Esercizi** Metodo di Laplace

Lezione XV

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Matrice della Conduttanza di lato.

Lezione XV

**N - bipoli**

Se un N-bipolo, per ogni coppia di morsetti associati, la corrente entrante in un morsetto è uguale a quella uscente dall'altro.

Lezione XII



volta la corrente  $I_r$  va da un nodo interno della rete ad un altro nodo anch'esso interno. Nulla ci assicura quindi che essa sia negativa (per  $E_s$  positiva)! D'altra parte il teorema di non amplificazione delle tensioni, o se si vuole quello di non amplificazione delle correnti, fornisce qualche informazione sulle  $G_{rs}$ . Dato che infatti nel circuito di figura è certamente  $|I_r| \geq |I_s|$ , tenendo conto del fatto che  $G_{rr}$  è definito positivo, si avrà:

$$G_{rr} = \left\langle \frac{|I_r|}{|E_r|} \right\rangle_{\substack{E_i=0 \\ E_r \neq 0}} \geq \left\langle \frac{|I_s|}{|E_r|} \right\rangle_{\substack{E_i=0 \\ E_r \neq 0}} = |G_{sr}| \quad (IV.23)$$

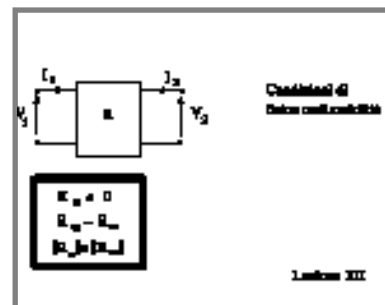
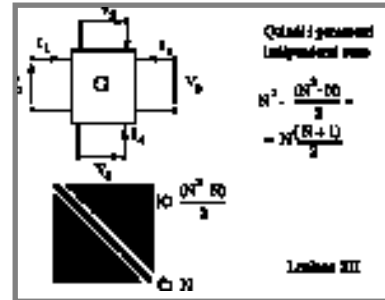
Una proprietà del tutto analoga, invece, sia nell' n-polo che nell' N-bipolo, è quella che discende dalla reciprocità. Si ha, infatti, che:

$$G_{rs} = G_{sr}, \quad (IV.24)$$

e quindi solo  $(N^2-N)/2 + N = N(N+1)/2$  elementi della matrice delle conduttanze sono linearmente indipendenti. Si osservi che tale numero non diminuisce ulteriormente come nel caso dell'n-polo, perché questa volta la legge di Kirchhoff ai nodi non fornisce ulteriori vincoli, dato che essa è identicamente soddisfatta per costruzione: da ogni porta una stessa corrente entra da un morsetto ed esce dall'altro.

Le condizioni (IV.23), (IV.24), e quella che impone che le  $G_{rr}$  siano tutte positive, sono le condizioni di *fisica realizzabilità* per l'N-bipolo

Si può descrivere l'N-bipolo attraverso una matrice delle resistenze invece che di conduttanze. Basta risolvere il sistema di equazioni (IV.21) rispetto alle  $E_s$ , ottenendo:



$$\begin{aligned}
 E_1 &= R_{11}I_1 + \dots + R_{1r}I_r + \dots + R_{1N}I_N; \\
 &\dots\dots\dots \\
 E_s &= R_{s1}I_1 + \dots + R_{sr}I_r + \dots + R_{sN}I_N; \quad (IV.25) \\
 &\dots\dots\dots \\
 E_N &= R_{N1}I_1 + \dots + R_{Nr}I_r + \dots + R_{NN}I_N.
 \end{aligned}$$

dove si avrà, evidentemente:

$$R_{rs} = \frac{A_{rs}}{\det(\mathbf{G})},$$

e  $\det(\mathbf{G})$  è il determinante della matrice delle conduttanze ed  $A_{sr}$  è il minore aggiunto del termine di posto  $s,r$ . In altri termini la matrice delle  $G$  è la inversa della matrice delle  $R$ . Vale la pena sottolineare che, di conseguenza,  $R_{sr} \neq 1/G_{sr}$ .

Il caso  $N = 2$  è particolarmente interessante tanto da meritare un nome speciale: *doppio bipolo*. I parametri indipendenti saranno tre:  $R_{11}$ ,  $R_{22}$  ed  $R_{12}=R_{21}$  nella matrice delle resistenze, e  $G_{11}$ ,  $G_{22}$  ed  $G_{12}=G_{21}$  in quella delle conduttanze. Nei due casi avremo le equazioni:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= R_{11} I_1 + R_{12} I_2, \\
 V_2 &= R_{21} I_1 + R_{22} I_2,
 \end{aligned} \quad (IV.26)$$

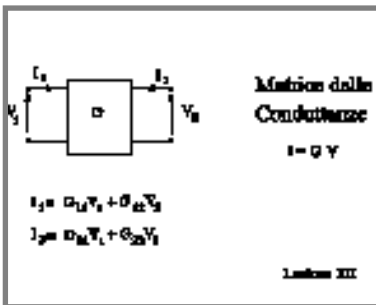
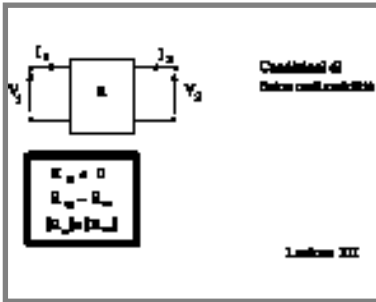
per la matrice  $\mathbf{R}$ , e:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= G_{11} V_1 + G_{12} V_2, \\
 I_2 &= G_{21} V_1 + G_{22} V_2,
 \end{aligned} \quad (IV.27)$$

per la matrice  $\mathbf{G}$ . Utilizzando il formalismo matriciale le (IV.26) ed (IV.27) prendono la forma :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} &= \mathbf{R} \mathbf{I}, \\
 \mathbf{I} &= \mathbf{G} \mathbf{V},
 \end{aligned} \quad (IV.28)$$

dove  $\mathbf{V}$  ed  $\mathbf{I}$  sono rispettivamente i vettori colonna (o riga) delle tensioni e delle correnti ed  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{G}$  le matrici





dei parametri R e G.

È evidente che per “sintetizzare” un doppio bipolo si avrà bisogno di almeno tre bipoli resistori; infatti tre sono i parametri indipendenti che determinano la matrice delle R o delle G di un doppio-bipolo. D'altra parte tre bipoli resistori possono essere collegati in due fondamentali modi diversi: a *stella* (o a T, in questo caso) o a *triangolo* (o anche a *p græco*, Π, per la caratteristica forma dello schema elettrico).

È facile ricavare i parametri R e G nei due casi del doppio bipolo a T ed a Π. Nel primo caso si ha che:

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_a + R_b ; \\ R_{22} &= R_c + R_b ; \\ R_{12} &= R_b ; \end{aligned} \tag{IV.29}$$

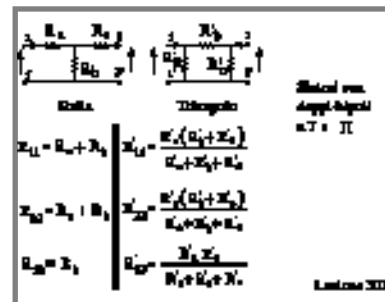
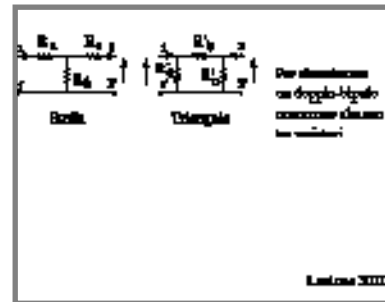
e:

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{1}{R_a + \frac{R_b R_c}{R_b + R_c}} ; \\ G_{22} &= \frac{1}{R_c + \frac{R_b R_a}{R_b + R_a}} ; \\ G_{12} &= - \frac{R_b}{R_a(R_b + R_c) + R_b R_c} . \end{aligned} \tag{IV.30}$$

Mentre nel secondo caso si ha:

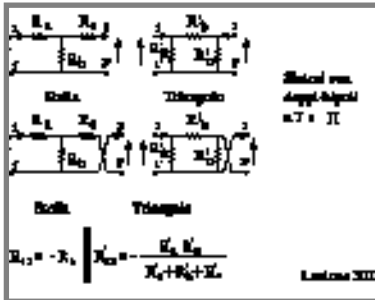
$$\begin{aligned} R'_{11} &= \frac{R'_a(R'_b + R'_c)}{R'_a + R'_b + R'_c} ; \\ R'_{22} &= \frac{R'_c(R'_b + R'_a)}{R'_a + R'_b + R'_c} ; \\ R'_{12} &= \frac{R'_a R'_c}{R'_a + R'_b + R'_c} ; \end{aligned} \tag{IV.31}$$

e:



$$\begin{aligned} G'_{11} &= \frac{R'_a + R'_b}{R'_a R'_b}; \\ G'_{22} &= \frac{R'_c + R'_b}{R'_c R'_b}; \\ G'_{12} &= -\frac{1}{R'_b}. \end{aligned} \quad (\text{IV.32})$$

Le relazioni scritte quindi consentono in ogni caso di determinare le resistenze  $R_a$ ,  $R_b$  e  $R_c$ ,  $R'_a$ ,  $R'_b$  e  $R'_c$  del doppio bipolo a T o a  $\Pi$  che realizza una qualsiasi matrice delle R o delle G che soddisfino le condizioni di fisica realizzabilità. Se ne conclude che un qualsiasi insieme di parametri R o G può essere sintetizzato da un doppio bipolo a T o a  $\Pi$ , e quindi anche che un qualsiasi doppio bipolo può essere ricondotto ad un doppio bipolo a T o a  $\Pi$ .



In verità gli schemi utilizzati consentono di risolvere solo metà dei problemi possibili. Abbiamo osservato infatti che la  $R_{12}$  e la  $G_{12}$  possono essere sia positive che negative. Le relazioni trovate, invece, consentirebbero di “sintetizzare” solo matrici delle R con  $R_m \geq 0$  e delle G con  $G_m < 0$ . Il problema si risolve brillantemente aggiungendo le due possibilità ulteriori, illustrate nelle immagini a lato, con i morsetti secondari invertiti.

Per la stella si avrà infatti:

$$\begin{aligned} R_{12} &= -R_b, \\ G_{12} &= \frac{R_b}{R_a(R_b + R_c) + R_b R_c}. \end{aligned} \quad (\text{IV.33})$$

Mentre per il triangolo si avrà:

$$\begin{aligned} R'_{12} &= -\frac{R'_a R'_c}{R'_a + R'_b + R'_c}; \\ G'_{12} &= \frac{1}{R'_b}. \end{aligned} \quad (\text{IV.34})$$

Supponiamo, ora, di chiudere la porta secondaria su di un carico R, come mostrato, e poniamoci il problema di

determinare il valore della resistenza vista dalla porta primaria. Le equazioni sono:

$$\begin{aligned} V_1 &= R_{11} I_1 + R_m I_2, \\ V_2 &= R_m I_1 + R_{22} I_2, \\ V_2 &= -R I_2. \end{aligned} \tag{IV.35}$$

Ricavando  $I_2$  dalla seconda, in cui  $V_2$  è stato eliminato in base alla terza, si ottiene:

$$I_2 = -\frac{R_m I_1}{R + R_{22}},$$

e sostituendo nella prima si ha:

$$R_e = \frac{V_1}{I_1} = R_{11} - \frac{R_m^2}{R + R_{22}}. \tag{IV.36}$$

Come si vede, utilizzando un doppio bipolo come tramite, è possibile variare a piacimento la resistenza equivalente vista, per esempio, da un generatore collegato a monte. Questo uso del doppio bipolo come mezzo per variare caratteristiche di un carico ed *adattarle* a quelle del generatore è molto comune. L'adattamento non si ottiene però senza pagare uno scotto: la potenza che viene necessariamente dissipata nel doppio bipolo adattatore. Proviamo a calcolarla: essa è evidentemente pari a  $V_1 I_1 + V_2 I_2$ . Utilizzando i parametri R per esprimere le tensioni in funzione delle correnti, si ottiene:

$$P = R_{11} I_1^2 + 2 R_m I_1 I_2 + R_{22} I_2^2. \tag{IV.37}$$

Una espressione più significativa della potenza assorbita si ottiene ricavando  $I_1$  dalla prima delle (IV.26) e sostituendola nella (IV.27), tenendo conto della (IV.25). Dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$P = \frac{V_1^2}{R_{11}} + \frac{I_2^2}{G_{22}}. \tag{IV.38}$$

Il doppio-bipolo come adattatore di carica.

$$\begin{aligned} V_1 &= R_{11} I_1 + R_m I_2 \\ V_2 &= R_m I_1 + R_{22} I_2 \\ V_2 &= -R I_2 \end{aligned}$$

$$\frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2} = R_{11} - \frac{R_m^2}{R_{22} + R}$$

Laminare XIII

Potenza assorbita dal doppio-bipolo

$$\begin{aligned} V_1 &= R_{11} I_1 + R_m I_2 \\ V_2 &= R_m I_1 + R_{22} I_2 \\ P &= V_1 I_1 + V_2 I_2 \\ P &= R_{11} I_1^2 + 2 R_m I_1 I_2 + R_{22} I_2^2 \end{aligned}$$

$$P = \frac{V_1^2}{R_{11}} + \frac{I_2^2}{G_{22}}$$

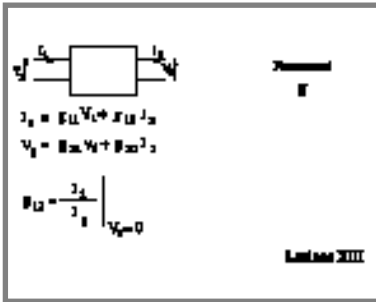
Laminare XIII

Potenza assorbita

$$\begin{aligned} V_1 &= R_{11} I_1 + R_m I_2 \\ I_2 &= R_m I_1 + R_{22} I_2 \\ R_{22} &= \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \end{aligned}$$

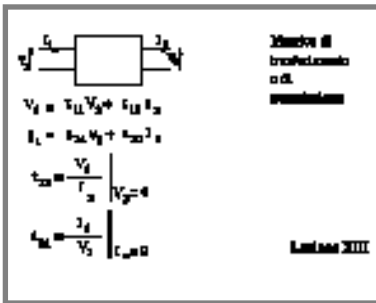
Laminare XIII

Nella (IV.38) la potenza assorbita è espressa come somma della potenza assorbita dalla porta primaria quando la secondaria è a vuoto e la potenza assorbita dalla porta secondaria con la primaria in corto circuito. Facciamo ora un brevissimo cenno ad altre possibili rappresentazioni dell’N-bipolo ed, in particolare, del doppio bipolo. Invece di esprimere le tensioni alle porte in funzione delle correnti, o viceversa, è possibile esprimere, per esempio, la  $V_1$  e la  $I_2$  in funzione della  $V_2$  e della  $I_1$ . Si ottiene:



$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2, \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 . \end{aligned} \tag{IV.39}$$

I parametri  $h$  così definiti prendono il nome di *parametri ibridi*; si noti, infatti, che essi non hanno tutti le stesse dimensioni. Mentre  $h_{11}$  ha le dimensioni di una resistenza ed  $h_{22}$  ha quelle di una conduttanza,  $h_{12}$  ed  $h_{21}$  hanno le dimensioni di numeri puri. Per definizione sarà infatti:



$$h_{12} = \left[ \frac{V_1}{V_2} \right]_{I_1=0} ; h_{21} = \left[ \frac{I_2}{I_1} \right]_{V_2=0} .$$

Si noti infine che per i parametri  $h$  la reciprocità è espressa dalla relazione  $h_{21} = - h_{12}$ .

La rappresentazione ibrida analoga, in cui  $V_2$  e  $I_1$  sono espressi in funzione di  $V_1$  ed  $I_2$ , viene detta dei *parametri g* e di essa diamo solo la definizione:

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11} V_1 + g_{12} I_2, \\ V_2 &= g_{21} V_1 + g_{22} I_2 . \end{aligned} \tag{IV.40}$$

Un cenno infine alla descrizione del doppio bipolo con la cosiddetta *matrice di trasmissione* che mette in relazione le grandezze ad una porta con quelle all’altra:

$$\begin{aligned} V_1 &= t_{11} V_2 + t_{12} I_2, \\ I_1 &= t_{21} V_2 + t_{22} I_2 . \end{aligned} \tag{IV.41}$$

Si noti la scelta della convenzione del generatore alla porta secondaria; il motivo di tale scelta sarà immediatamente chiaro.

Le rappresentazione con la matrice di trasmissione sottolinea il fatto che il doppio bipolo può essere visto come un sistema di trasferimento ingresso-uscita (o segnale-risposta o causa-effetto). Questo modo di concepire le cose sarà molto utile quando tratteremo il doppio bipolo in regime dinamico qualsiasi. Utilizzando la matrice di trasmissione **T** è possibile esprimere in modo molto sintetico la caratteristica di due doppi bipoli in cascata, o in serie; si ha infatti:

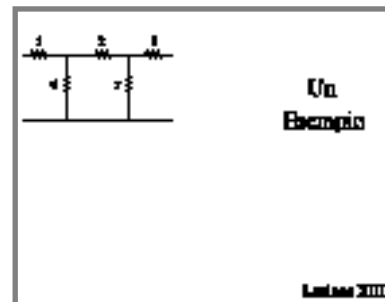
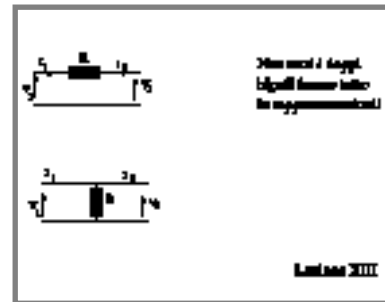
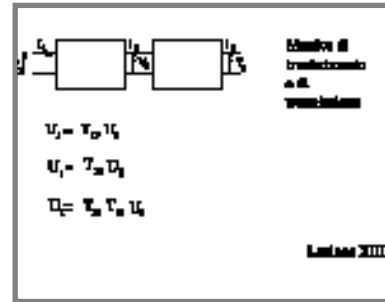
$$\mathbf{U}' = \mathbf{T}' \mathbf{U} \quad \text{ed} \quad \mathbf{U}'' = \mathbf{T}'' \mathbf{U}' .$$

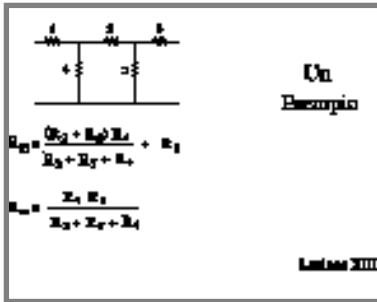
Evidentemente i vettori **U**, **U'** ed **U''** sono i vettori di ingresso e di uscita, nei diversi casi, distinti dagli apici. Combinando le due relazione si ottiene:

$$\mathbf{U}'' = \mathbf{T}'\mathbf{T}'' \mathbf{U} ,$$

e la matrice equivalente è il prodotto delle due matrici di trasmissione dei doppi bipoli in cascata.

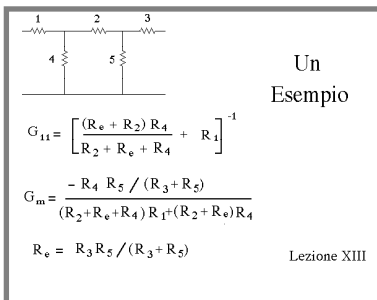
Val la pena di osservare che non tutti i doppi bipoli permettono tutte le diverse rappresentazioni possibili. Lo strano doppio bipolo mostrato nel primo schema della seconda immagine a lato ha una rappresentazione mediante i parametri **G**, mentre non consente una rappresentazione con i parametri **R**. Per il secondo schema accade l'inverso: mentre il doppio bipolo ha una matrice **R**, non ha invece una matrice **G**. Per rendersi conto del perché ciò accada basta provare a calcolare i relativi parametri secondo le classiche definizioni. Su questo argomento ritorneremo nel seguito.





A titolo di esempio proviamo a calcolare le matrici  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{G}$  per il doppio bipolo riportato a lato. Per determinare la  $R_{11}$  bisogna determinare il rapporto tra tensione e corrente primaria quando la porta secondaria è aperta; in tali condizioni i resistori  $R_2$  e  $R_5$  sono in serie e la loro serie è in parallelo con  $R_4$ . A questo parallelo va aggiunto in serie il resistore  $R_1$ . Il calcolo di  $R_{22}$  è del tutto simile. Per calcolare  $R_{12}$  bisogna invece assumere, per esempio, la porta primaria aperta e calcolare il rapporto tra la tensione primaria e la corrente secondaria. Ma in tali condizioni la corrente  $I_2$  si ripartisce evidentemente nei due rami in parallelo costituiti dal resistore  $R_5$  e dalla serie di  $R_2$  e  $R_4$ . Quest'ultima corrente, circolando nel resistore  $R_4$  darà luogo alla caduta di tensione che poi si rileva anche ai morsetti primari. Nel resistore  $R_1$ , infatti, non circola alcuna corrente.

Infine i parametri  $\mathbf{G}$ . Per calcolare  $G_{11}$  occorre cortocircuitare la porta secondaria. In tali condizioni la resistenza vista alla porta primaria - la conduttanza  $G_{11}$  sarà proprio l'inverso di tale resistenza - è data dalla serie del parallelo tra  $R_3$  e  $R_5$  con il resistore  $R_2$ ; il bipolo equivalente così determinato è a sua volta in parallelo con  $R_4$  ed infine in serie con  $R_1$ . Il calcolo di  $G_m$  può condursi alla maniera seguente. In primo luogo bisogna cortocircuitare una delle due porte; si osservi che se si sceglie di cortocircuitare la porta secondaria - il che equivale a scegliere di calcolare  $G_{21}$  piuttosto che  $G_{12}$  - lo schema elettrico che ne deriva è lo stesso utilizzato per calcolare  $G_{11}$ . In queste condizioni, dunque  $G_{11} V_1$  è la corrente che entra alla porta primaria. È agevole a questo punto ripartire tale corrente nei diversi rami in parallelo fino a trovare il contributo circolante in  $R_3$ . Il rapporto tra questa corrente e la tensione  $V_1$  è la conduttanza cercata. Attenti al segno di  $G_m$ !



**Esercizi**

Per la rete proposta in precedenza e mostrata nella immagine a lato, diamo, per una verifica dei risultati, il valore della corrente nel resistore  $R_7$ ,  $I_7 = 1,2$  A. Correnti e tensioni negli altri rami della rete si deducono facilmente dalla conoscenza di questa grandezza. Per il secondo esercizio la formula di Milmann fornisce immediatamente la soluzione:

$$V_{AB} = \frac{E_1/R_1 + E_2/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} \quad (IV.43)$$

Si noti il ruolo giocato dalle due resistenze in serie ai generatori ideali di tensione: sono loro che rendono possibile un collegamento che altrimenti, come abbiamo visto, non sarebbe possibile. Se infatti  $R_1$  ed  $R_2$  vanno a zero, la formula perde di significato. Le cadute di tensione sulle due resistenze, dovute alla corrente circolante nella maglia, rendono eguali, e quindi compatibili, le due tensioni ai morsetti A e B. Si osservi che nel circuito in esame vi è dissipazione di potenza anche quando i morsetti A e B non sono chiusi su di un carico; il *generatore equivalente*, dunque, dissipa anche *quando è a vuoto*. Tenendo conto di alcune osservazioni fatte in precedenza questo non può stupire.

Infine qualche problema sui doppi bipoli. Nel primo caso si richiede di calcolare le matrici  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{G}$ , ibride e di trasmissione, per il doppio bipolo mostrato.

Nel successivo due problema vengono proposte due matrici 2x2 e si chiede di stabilire quale di esse può essere la matrice  $\mathbf{R}$  per un doppio bipolo. Una volta determinata la matrice fisicamente realizzabile, si chiede di sintetizzarla con un circuito, per esempio a T.

**Esercizi**

$I_7 = 1,2 \text{ A}$

Lectura III

**Esercizi**

**Determinare la d.d.p. tra A e B**

Lectura III

**Esercizi**

$R_1 = 4,5 \Omega$ $R_2 = 10 \Omega$ $R_3 = 15 \Omega$ $R_4 = 55 \Omega$ $R_5 = 200 \Omega$ $R_6 = 30 \Omega$	Matrice della $\mathbf{R}$ e della $\mathbf{G}$ Determinare i parametri ibridi relativi ai morsetti a-b e c-d e viceversa.
--	--

Lectura III

Dalle seguenti matrici  $\mathbf{R}$  di un doppio bipolo, quale non soddisfa le condizioni di fisica realizzabilità e perché?

**Esercizi**

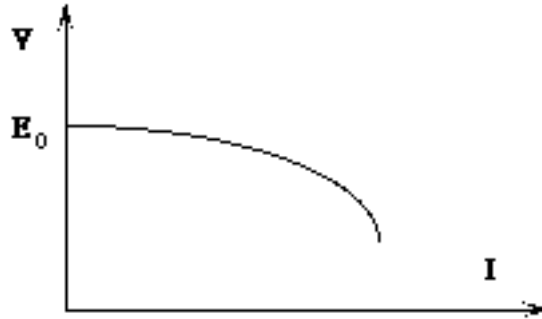
4	2	2	-3
2	3	-3	4

Lectura III

## I generatori dipendenti o pilotati e gli amplificatori operazionali

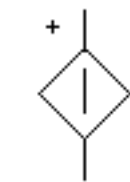
Abbiamo più volte ricordato che i generatori fin ora introdotti, di tensione e di corrente, vengono detti ideali per il fatto che essi forniscono ai loro morsetti una tensione o una corrente che non risente in alcun modo del "carico" a cui essi vengono connessi. Per questo motivo essi vengono anche detti *generatori indipendenti*. Abbiamo anche sottolineato che in un generatore

"reale" è impossibile che ciò accada. In un generatore di tensione reale la d.d.p. ai morsetti dipenderà dalla corrente erogata secondo una legge  $V=V(I)$

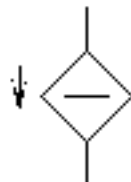


del tipo di quella mostrata qualitativamente in figura. Potremmo affermare, da questo punto di vista, che il generatore reale è un *generatore dipendente*. Questa osservazione fornisce lo spunto per l'introduzione di una nuova classe di generatori nei quali la tensione ai morsetti, se si tratta di generatori di tensione, per esempio, è sì dipendente, ma non dalla corrente che essi stessi erogano, bensì da un'altra corrente circolante in altro ramo della rete. Chiameremo tali generatori *generatori pilotati* ed useremo per essi i simboli

mostrati, a seconda che si tratti di generatori di tensione o di corrente. In effetti non è necessario che la tensione di un generatore sia pilotata da una corrente: la grandezza che "pilota", secondo una ben determinata legge, può anche essere un'altra tensione che insiste su di un altro ramo della rete. In conclusione siamo portati a definire quattro diversi tipi di generatori pilotati:



Generatore di tensione



Generatore di corrente

Generatore di tensione pilotato in corrente (GTPC)  $V_r=V_r(I_s)$



Generatore di corrente pilotato in tensione (GCPT)	$I_r = I_r(V_s)$
Generatore di corrente pilotato in corrente (GCPC)	$I_r = I_r(I_s)$
Generatore di tensione pilotato in tensione (GTPT)	$V_r = V_r(V_s)$

Naturalmente se le relazioni che caratterizzano tali dipendenze sono di tipo lineare si parlerà di generatori lineari e si avrà:

Generatore di tensione pilotato in corrente (GTPC)	$V_r = R_m I_s$
Generatore di corrente pilotato in tensione (GCPT)	$I_r = G_m V_s$
Generatore di corrente pilotato in corrente (GCPC)	$I_r = \alpha I_s$
Generatore di tensione pilotato in tensione (GTPT)	$V_r = \mu V_s$

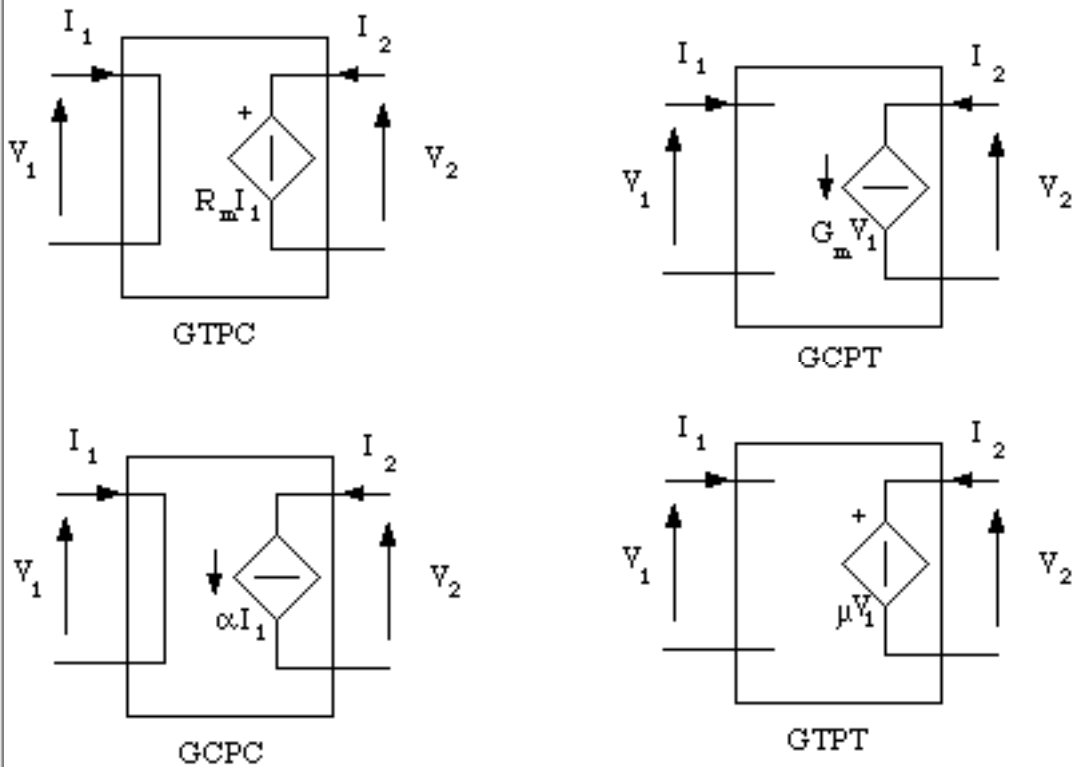


Fig. IV.3

dove  $R_m$  è detta transresistenza,  $G_m$  transconduttanza,  $\alpha$  rapporto di trasferimento di corrente, e  $\mu$  rapporto di trasferimento di tensione.

Abbiamo tardato fino a questo punto ad introdurre i generatori pilotati perché, a ben guardare, essi non sono dei semplici bipoli bensì dei doppi bipoli: per essere definiti essi hanno bisogno di un'altra coppia di morsetti che sia interessata dalla grandezza "pilotante", secondo gli schemi di seguito riportati, per il caso lineare.

È interessante domandarsi quali rappresentazioni, fra le diverse introdotte per i doppi bipoli, i singoli generatori pilotati ammettono. Per esempio il GTPC ammette solo una rappresentazione mediante una matrice delle resistenze:

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ R_m & 0 \end{vmatrix} \mathbf{I}.$$

Si noti che la condizione  $R_{12} = R_{21}$  non è verificata: si tratta infatti di doppi bipoli che contengono dei generatori, e quindi possono essere non reciproci. I generatori pilotati sono estremamente utili per costruire circuiti equivalenti di dispositivi più complessi, come, per esempio, i *transistori*. Anzi si può affermare che l'esigenza di introdurre tali doppi bipoli nasce proprio dal bisogno di rappresentare opportunamente il comportamento dei transistori nei loro diversi modi di funzionamento.

Non rientrando tali dispositivi tra gli argomenti del nostro corso, avremo poche opportunità di utilizzare i generatori pilotati; ciò nonostante ci è sembrato utile introdurli per inserirli nel quadro generale che stiamo costruendo. Oltre tutto, i generatori pilotati non sono soltanto degli elementi ideali; è possibile, utilizzando dei dispositivi che prendono il nome di *amplificatori operazionali*, realizzare delle concrete ottime approssimazioni di tali generatori.

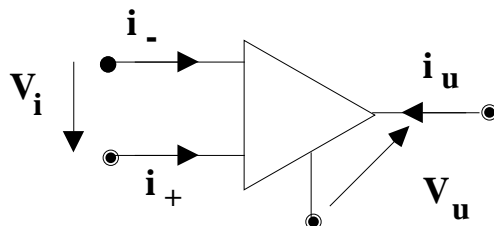


Fig.IV.4

Anche degli amplificatori operazionali si può introdurre un modello idealizzato che è rappresentato in Fig.IV.4.

La caratteristica di questo dispositivo è descritta dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} i_- = I_- \\ i_+ = I_+ \\ v_u = f(v_i) \end{cases} \quad v_u = \begin{cases} E_{\text{sat}} & v_i \geq \epsilon \\ \frac{E_{\text{sat}}}{\epsilon} v_i = A v_i & -\epsilon < v_i < \epsilon \\ -E_{\text{sat}} & v_i \leq -\epsilon \end{cases} \quad (\text{IV.42})$$

Nel piano  $(v_i, v_u)$  la rappresentazione grafica di tale caratteristica è mostrata in Fig.IV.5.

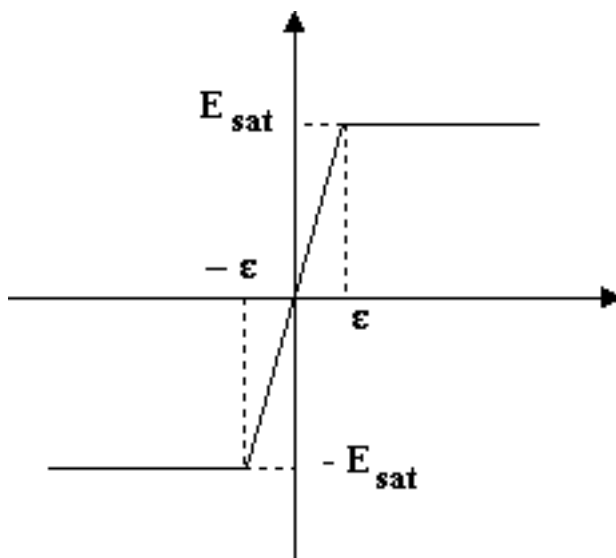


Fig.IV.5

Le costanti  $I_-$  e  $I_+$  sono generalmente molto piccole (da pochi decimi di mA a pochi decimi di nA, - tanto che in una idealizzazione ancora più spinta possono essere assunte nulle) ed il parametro  $A$ , generalmente molto grande (i valori tipici vanno da 100.000 a 200.000, tanto che nella stessa logica precedente può essere assunto infinitamente grande) prende il nome di *guadagno di tensione in anello aperto*.

Il dispositivo reale di cui quello fin qui descritto è una idealizzazione in effetti non ha quattro morsetti ma almeno cinque, in quanto esso ha bisogno di essere alimentato in modo opportuno per funzionare correttamente, secondo lo schema riportato in Fig. IV.6.

Il componente circuitale di cui alla Fig.IV.4 è quindi l'idealizzazione di quanto contenuto nel riquadro di Fig.IV.6. Esso è pertanto un elemento attivo per

la presenza dei generatori.

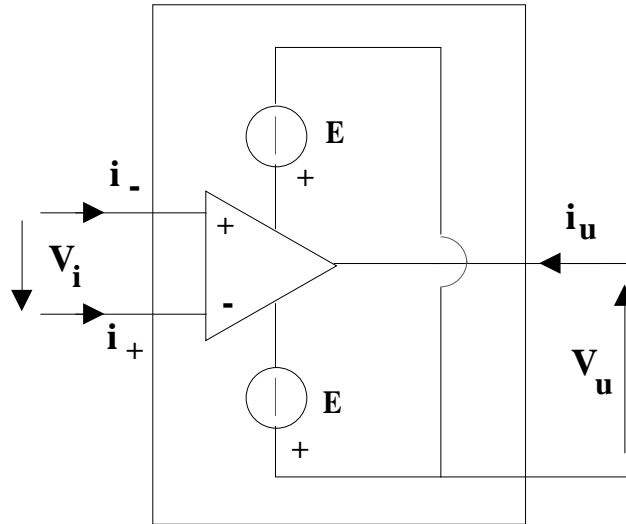


Fig.IV.6

Se si accetta l'idealizzazione spinta di cui in precedenza ( $I_- = I_+ = 0$  e  $A = \infty$ ), le relazioni di cui alle (IV.42) diventano:

$$\begin{cases} i_- = 0 \\ i_+ = 0 \\ v_u = E_{\text{sat}} \operatorname{sgn}(v_i) & \text{per } v_i \neq 0 \\ -E_{\text{sat}} < v_u < E_{\text{sat}} & \text{per } v_i = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.43})$$

Nella regione di linearità ( $v_i = 0$ ) quindi, l'amplificatore operazionale avrebbe le seguenti leggi caratteristiche:

$$\begin{cases} i_- = 0 \\ i_+ = 0 \\ v_i = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_u = \text{qualsiasi valore} \\ i_u = \text{qualsiasi valore} \end{cases} \quad (\text{IV.44})$$

Queste considerazioni giustificano l'introduzione di due nuovi bipoli ideali che prendono il nome di *nullatore* e *noratore* rispettivamente, i cui simboli sono riportati in Fig.IV.7.

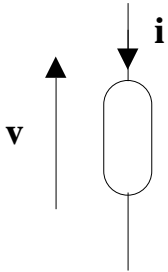


Fig.IV.7

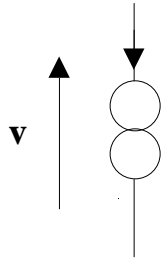


Fig.IV.8

Il nullatore ha  $v=0$  ed  $i = 0$  per ogni condizione di funzionamento: in altri termini la sua caratteristica nel piano  $(i,v)$  si riduce ad un punto e precisamente l'origine degli assi. Mentre il noratore non è descritto da nessuna relazione, nel senso che sia  $i$  che  $v$  ai suoi morsetti sono qualsiasi: Nel piano  $(i,v)$  la sua caratteristica viene a coincidere con l'intero piano.

Utilizzando questi due nuovi bipoli un amplificatore operazionale ideale, nella sua regione di linearità, può essere rappresentato secondo lo schema di Fig.IV.9.

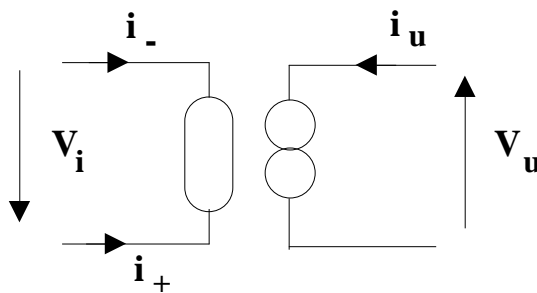


Fig.IV.9

Utilizzando i componenti ideali introdotti, come già detto, è possibile costruire schemi equivalenti di altri componenti. A titolo di esempio si considerino i due schemi riportati nelle figure IV.10, IV.11 e IV.12. Il primo rappresenta un generatore ideale di tensione ed il secondo, un doppio bipolo lineare resistivo ma non reciproco. Infatti, nel primo la corrente primaria è sempre nulla per definizione e quindi non c'è caduta di tensione sulla resistenza in serie al generatore ideale; di conseguenza la tensione secondaria è indipendente dalla cor-

rente erogata.

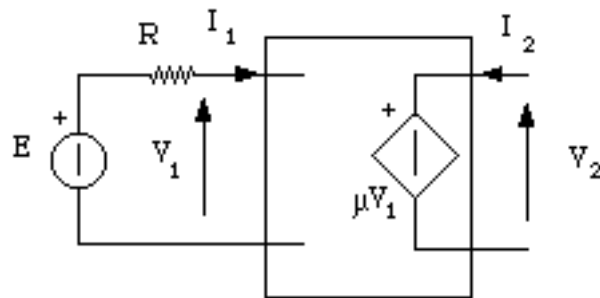


Fig.IV.10

Nel secondo caso le relazioni tra tensioni e correnti sono quelle che si avrebbero in un doppio bipolo resistivo; si noti che anche in questo caso puo' non essere verificata la condizione  $R_{12}=R_{21}$  e quindi il doppio bipolo puo' non essere reciproco.

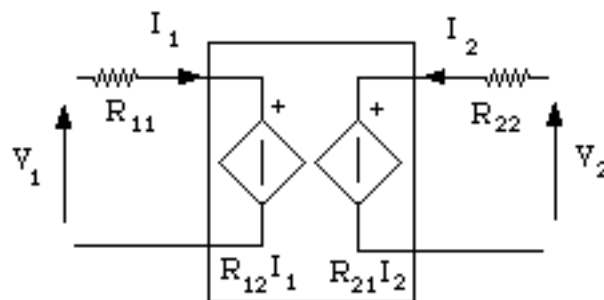


Fig.IV.11

Per il circuito di Fig.IV.12, invece, l'equazione alla maglia della porta di ingresso dell'amplificatore operazionale ci fornisce la relazione:

$$v_1 + R i_2 + v_i = 0, \quad (\text{IV.44})$$

che, tenendo conto della caratteristica dell'amplificatore operazionale, diventa:

$$i_2 = -\frac{1}{R} (v_1 + v_i) = -\frac{1}{R} \left( v_1 + \frac{v_u}{A} \right) = -\frac{1}{R} v_1, \quad (\text{IV.45})$$

che per  $A$  che tende all'infinito descrive la caratteristica di un generatore ideale di corrente pilotato in tensione di transconduttanza  $G_m = -1/R$ .

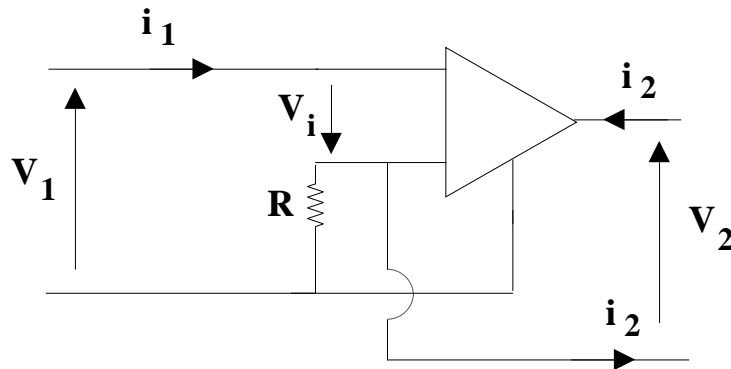


Fig.IV.12

**Esercizi**

$R_1 = 4,5 \Omega$   
 $R_2 = 10 \Omega$   
 $R_3 = 15 \Omega$   
 $R_4 = 55 \Omega$   
 $R_5 = 20 \Omega$   
 $R_6 = 30 \Omega$

Esercizio della R.  
 in classe O.  
 Incontro del.  
 per il corso di R.  
 di R. e di R.  
 di R. e di R.

Lezione XIV

**Esercizi**

Per verifica riportiamo i valori dei parametri  $R_m$ ,  $G_m$ ,  $h_{12}$ ,  $g_{12}$  e  $t_{12}$  per il doppio bipolo proposto in precedenza.

$$R_m = \frac{R_3 R_4}{R_0}, \quad G_m = - \frac{G_{11} R_5 R_4}{R_0 (R_3 + R_5)}$$

$$h_{12} = \frac{R_5 R_4}{(R_2 + R_4 + R_6) (R_3 + R_5) + (R_3 R_5)}$$

$$g_{12} = - \frac{R_5}{(R_1 + R_4) (R_2 + R_5 + R_6) + R_1 R_4} + \frac{R_4}{R_1 + R_4}$$

$$t_{12} = - \left[ R_1 + \frac{R_4 (R_2 + R_e + R_6)}{R_0} \right] \frac{(R_2 + R_e + R_6) (R_3 + R_5)}{R_5 R_4}$$

dove:

$$R_e = \frac{R_5 R_3}{(R_3 + R_5)}; \quad R_0 = R_2 + R_4 + R_e + R_6.$$

**Esercizi**

$R_e = \frac{R_5 R_3}{R_3 + R_5}$   
 $G_m = - \frac{G_{11} R_5 R_4}{(R_2 + R_e + R_4 + R_6) (R_3 + R_5)}$   
 $R_m = \frac{R_5 R_4}{R_2 + R_5 + R_6 + R_4}$

Lezione XV

**Esercizi**

$h_{12} = \frac{R_4 R_5}{R_3 R_5 + (R_3 + R_5) (R_2 + R_4 + R_6)}$   
 $g_{12} = - \frac{R_5}{R_2 + R_5 + R_6 + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4}} + \frac{R_4}{R_1 + R_4}$   
 $t_{12} = - \frac{R_1 + \frac{R_4 (R_2 + R_e + R_6)}{R_2 + R_5 + R_6 + R_4}}{\frac{R_5 R_4}{(R_2 + R_e + R_6) (R_3 + R_5)}}$

Lezione XV

Per quanto riguarda il secondo problema è evidente che la seconda matrice non soddisfa la condizione  $|R_{rr}| \geq |R_{rs}|$ , analoga alla IV.23 per i parametri G. Volendo sintetizzare con un doppio bipolo a T la prima matrice, si ha:

$$R_a = 2 \Omega; R_b = 2 \Omega; R_c = 1 \Omega.$$

Se avessimo tentato di sintetizzare anche la seconda matrice avremmo ottenuto:

$$R_a = -1 \Omega; R_b = 3 \Omega; R_c = 1 \Omega;$$

il che, evidentemente, non è fisicamente realizzabile con resistori tradizionali. Naturalmente sarebbe possibile sintetizzare anche la seconda matrice se si accettasse di utilizzare generatori pilotati.

**Esercizi**

Dalle seguenti matrici R di un doppio bipolo, quale non soddisfa le condizioni di fisica realizzabilità e perché?

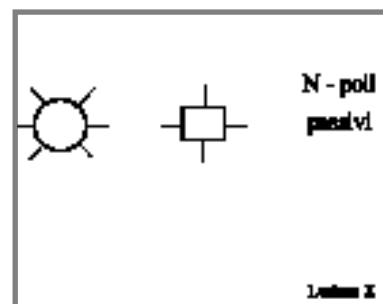
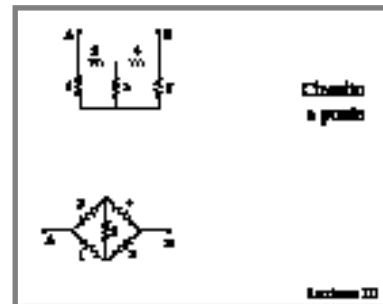
$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$      $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

Lezione XIV



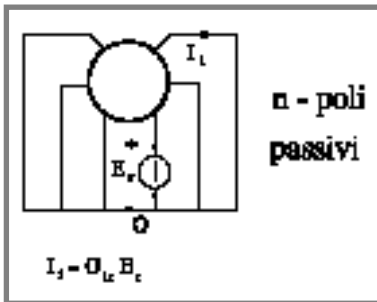
### L' n-polo

Abbiamo osservato che una qualsiasi rete, vista da due nodi, diventa, a tutti gli effetti esterni, un bipolo unico – e questo è in qualche misura ovvio – e abbiamo anche mostrato come costruire il bipolo equivalente alla rete data, sia nel caso che essa sia passiva, sia nel caso in cui sia attiva. Abbiamo anche osservato, però, che non tutte le possibili configurazioni sono risolvibili riducendo la rete attraverso successivi accoppiamenti serie o parallelo di due o più bipoli. A confermarlo abbiamo portato l'esempio della classica rete *a ponte* mostrata in figura. Si immagini, infatti, di voler determinare il bipolo equivalente alla rete vista dai morsetti A e B. Siamo subito in difficoltà perché non troviamo nella rete né rami in serie né rami in parallelo. È facile convincersi che nessuno dei 5 rami è aggregabile ad un altro per costruire un primo bipolo equivalente da cui prendere le mosse. Val la pena di notare che un tal problema non esisterebbe se si volesse il bipolo equivalente alla rete vista dai morsetti C, D. In tal caso, infatti, si ha immediatamente che si tratta del parallelo di tre bipoli: il bipolo 3, il bipolo che si ottiene dalla serie di 1 e 2 e



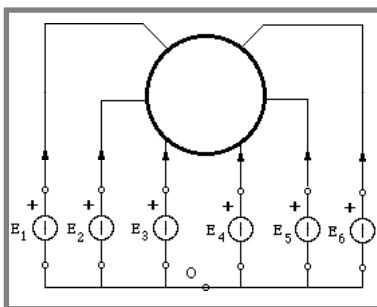
quello che si ottiene dalla serie di 4 e 5.

Ma torniamo ai nodi A e B. La nostra difficoltà è dovuta alla presenza nella rete di strutture del tipo a *triangolo* o a *poligono* come 1, 2, 3 e 3, 4, 5 o equivalentemente a *stella* come 2, 3, 4, che non sono riconducibili ad un sistema a due morsetti e cioè ad un bipolo. Siamo portati dunque a prendere in considerazione “sistemi a più poli”, cioè un complesso di bipoli collegati tra di loro e visti da n nodi; un sistema che schematizzeremo d’ora in poi alla maniera rappresentata in figura.



Si pone il problema a questo punto di estendere il concetto di “caratteristica” ad un tale sistema. Ragioniamo alla maniera seguente: supponiamo di alimentare ogni polo con n generatori ideali di tensione  $E_r$  come mostrato in figura, e supponiamo ancora che la rete sia costituita da tutti bipoli lineari. In tal caso per calcolare le n correnti nei rami dei generatori potremo usare il teorema di sovrapposizione e affermare che la corrente  $I_l$  nel ramo del generatore iesimo è la somma delle varie correnti  $I_{lr}$  che si ottengono nel ramo iesimo quando di volta in volta lasciamo operare il solo generatore nel ramo erresimo, così come mostrato in figura.

D’altra parte in ognuna delle reti così ottenute, a causa della linearità dei bipoli componenti, la corrente  $I_l$  dovrà risultare proporzionale alla tensione  $E_r$ . Chiamiamo  $G_{lr}$  tale fattore di proporzionalità, che ha appunto le dimensioni dell’inverso di una resistenza, cioè di una conduttanza. In conclusione sommando l’effetto di tutti i generatori presenti avremo:



$$\begin{aligned}
 I_l &= G_{l1}E_1 + \dots + G_{lr}E_r + \dots + G_{ln}E_n \\
 &\dots\dots\dots \\
 I_s &= G_{s1}E_1 + \dots + G_{sr}E_r + \dots + G_{sn}E_n \quad (IV.1) \\
 &\dots\dots\dots \\
 I_n &= G_{n1}E_1 + \dots + G_{nr}E_r + \dots + G_{nn}E_n
 \end{aligned}$$

In altri termini l'n-polo invece di essere individuato da un solo parametro  $G$  come un bipolo, è individuato da  $n^2$  parametri  $G_{rs}$  cioè da una matrice di ordine  $n$  di conduttanze che prende appunto il nome di *matrice delle conduttanze*. Come vedremo, in realtà, i parametri indipendenti da cui realmente dipende la matrice delle conduttanze non sono  $n^2$ , bensì in numero molto minore. Per ora osserviamo che tra le  $G_{rs}$  ve ne sono alcune che si distinguono dalle altre: quelle del tipo  $G_{rr}$  con pedici eguali, e cioè gli elementi della diagonale della matrice. Esse infatti, per costruzione, sono derivate da schemi circuitali del tipo mostrato nella quarta figura. Risulta evidente che esse sono delle "reali conduttanze equivalenti" del bipolo (questa volta è un vero bipolo) che si ottiene prendendo in considerazione un polo dell'n-polo e come altro estremo l'insieme di tutti gli altri  $n - 1$  poli collegati in corto circuito tra di loro.

Natura diversa hanno invece le  $G_{rs}$  che rappresentano semplicemente il rapporto tra la corrente nel ramo  $r$  e la tensione nel ramo  $s$ , quando tutti gli altri poli, tranne l'essesimo, sono collegati in corto circuito. Si tratta certamente di grandezze che hanno le dimensioni di conduttanze, ma non sono conduttanze mostrate dalla rete a particolari coppie di morsetti. Per questa ragione si distinguono le due grandezze con nomi diversi: *conduttanze proprie* o *autoconduttanze*, le prime e *conduttanze mutue*, le seconde.

Vediamo ora di quali proprietà godono gli elementi di una matrice di conduttanze. Osserviamo in primo luogo che avendo fatto la convenzione dell'utilizzatore a tutti i poli, dovrà necessariamente essere, per la passività della rete,  $G_{rr} \geq 0$ , in quanto effettive conduttanze di bipoli equivalenti. Le  $G_{rs}$  invece non sono necessariamente positive; anzi è possibile dimostrare facilmente che deve risultare:

$$G = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1n} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & G_{nr} & \dots & G_{nn} \end{bmatrix}$$

$$I_1 = G_{11}E_1 + \dots + G_{1r}E_r + \dots + G_{1n}E_n$$

$$I_2 = G_{21}E_1 + \dots + G_{2r}E_r + \dots + G_{2n}E_n$$

$$I_r = G_{r1}E_1 + \dots + G_{rr}E_r + \dots + G_{rn}E_n$$

$$\vdots$$

$$I_n = G_{n1}E_1 + \dots + G_{nr}E_r + \dots + G_{nn}E_n$$

Lezione X

Conduttanze proprie

$$G_{rr} = \left. \frac{I_r}{E_r} \right|_{E_{s \neq r} = 0}$$

$$I_1 = G_{11}E_1 + \dots + G_{1r}E_r + \dots + G_{1n}E_n$$

$$I_2 = G_{21}E_1 + \dots + G_{2r}E_r + \dots + G_{2n}E_n$$

$$I_r = G_{r1}E_1 + \dots + G_{rr}E_r + \dots + G_{rn}E_n$$

$$\vdots$$

$$I_n = G_{n1}E_1 + \dots + G_{nr}E_r + \dots + G_{nn}E_n$$

Lezione X

Conduttanze mutue

$$G_{rs} = \left. \frac{I_r}{E_s} \right|_{E_{t \neq r,s} = 0}$$

$$I_1 = G_{11}E_1 + \dots + G_{1r}E_r + \dots + G_{1n}E_n$$

$$I_2 = G_{21}E_1 + \dots + G_{2r}E_r + \dots + G_{2n}E_n$$

$$I_r = G_{r1}E_1 + \dots + G_{rr}E_r + \dots + G_{rn}E_n$$

$$\vdots$$

$$I_n = G_{n1}E_1 + \dots + G_{nr}E_r + \dots + G_{nn}E_n$$

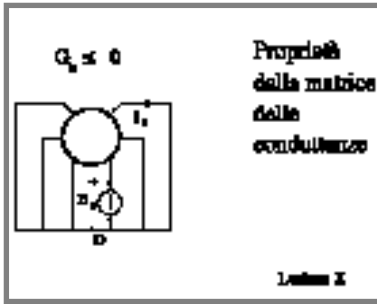
Lezione X

Proprietà della matrice delle conduttanze

$$G_{rr} \geq 0$$

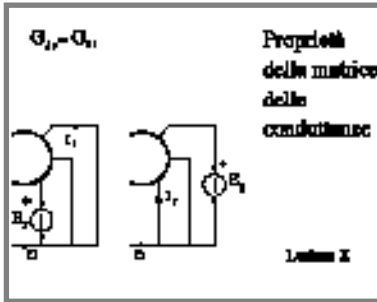
$$G_{rs} = -G_{sr}$$

Lezione X



$$G_{rs} \leq 0. \tag{IV.2}$$

Infatti perché si abbia  $G_{rs} > 0$  dovrebbe essere  $I_r > 0$  con  $E_s > 0$ ; ma in tal caso all'interno della rete, alimentata dalla sola  $E_s$  tra il nodo  $s$  ed il nodo  $O$ , comune a tutti gli altri poli, dovrebbe esistere un nodo a potenziale minore di quello di  $O$ , (solo in tal caso infatti la  $I_r > 0$  sarebbe compatibile con la supposta passività del particolare ramo dove la  $I_r$  si trova a circolare); ma ciò è impossibile per il principio di non amplificazione delle tensioni.



Ma c'è di più. Se proviamo ad applicare il teorema di reciprocità alle due reti che hanno portato all'individuazione di  $G_{rs}$  e  $G_{sr}$  troviamo immediatamente il seguente risultato:

$$G_{rs} = G_{sr}. \tag{IV.3}$$

La matrice  $G$  è necessariamente simmetrica. Questo significa che degli  $n^2$  parametri che la compongono, solo  $n^2 - (n^2 - n) / 2$  sono indipendenti.

Se infine proviamo ad applicare la LKC al nodo  $O$  troviamo che la somma delle  $I_r$  deve essere nulla. Cioè:

$$\sum_s G_{s1} E_1 + \dots + \sum_s G_{sr} E_r + \dots + \sum_s G_{sn} E_n = 0. \tag{IV.4}$$

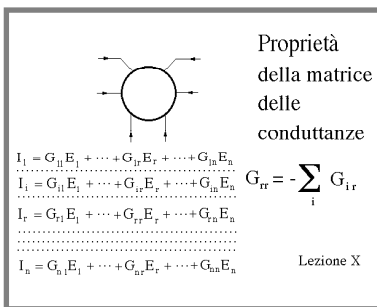
Il che, essendo le  $E_s$  qualsiasi, comporta che:

$$\sum_s G_{sr} = 0, \tag{IV.5}$$

per qualsiasi  $r$ , o anche:

$$G_{rr} = - \sum_{s \neq r} G_{sr}. \tag{IV.6}$$

Una volta note le mutue conduttanze, dunque, le autoconduttanze possono essere ottenute in base alla IV.6.



Ne deriva che altri  $n$  parametri sono dipendenti. In conclusione i parametri indipendenti nella matrice  $G$  sono:

$$n^2 - \frac{n^2 - n}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (IV.7)$$

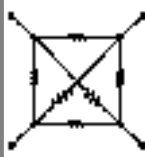

Per assegnare, dunque, una matrice di conduttanza non si possono scegliere  $n^2$  numeri qualsiasi, anzi il modo più immediato per farlo è quello di assegnare  $n(n-1)/2$  grandezze, negative naturalmente, che rappresentano le  $n(n-1)/2$  mutue conduttanze dell' $n$ -polo!

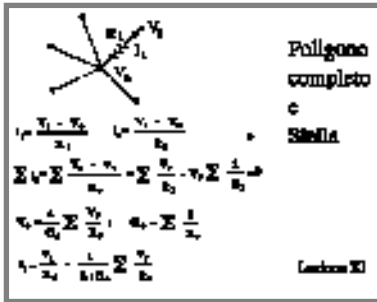
Delle infinite reti che possono dare luogo ad un  $n$ -polo se ne distinguono immediatamente due di tipo particolare: la rete a poligono completo e quella a stella. La prima si ottiene collegando ogni coppia di poli  $r$  ed  $s$  con un bipolo di resistenza  $R_{rs}$ . La rete così ottenuta prende il nome di *rete a poligono completo con  $n$  vertici*. È facile verificare che il numero di lati di una tale rete è pari ad  $n(n-1)/2$ ; le combinazioni, cioè, di  $n$  oggetti a due a due senza ripetizione. In un  $n$ -polo a poligono, completo o non, non vi sono nodi interni.

L'altro schema caratteristico è quello a stella, costituito da  $l$  lati ognuno collegato tra uno degli  $n$  poli ed un nodo interno comune, come mostrato nella stessa figura. Un  $n$ -polo a stella, dunque, ha un solo nodo interno.

Poniamoci ora il problema di stabilire in quali condizioni due  $n$ -poli – dello stesso numero di poli – possono considerarsi equivalenti. Come logica estensione dell'equivalenza dei bipoli, potremo dire che essi possono ritenersi equivalenti quando, sottoposti alla stessa ennupla di tensioni, assorbono la stessa ennupla di correnti. È evidente che ciò comporterà anche la uguaglianza delle due matrici delle conduttanze. In particolare cerchiamo le concrete condizioni di equivalenza

$G_{ii} > 0$		Elementi
$G_{ij} < 0$	$n^2$ elementi	indipendenti
$G_{ij} = G_{ji}$	$\frac{n(n-1)}{2}$ mutue	della matrice
		delle
$G_{ii} = -\sum_j G_{ij}$	$n$ relazioni	conduttanze
$n^2 - \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-1)}{2}$		Latino I

	Poligono completo
	Stella
	Latino II



tra un n-polo a poligono ed uno a stella.  
 Consideriamo in primo luogo un n-polo a stella e cerchiamo la relazione che lega la generica corrente  $I_i$  nel ramo iesimo alla ennupla di potenziali  $V_r$  ai poli (simboli e convenzioni sono illustrati in Fig. IV.1).

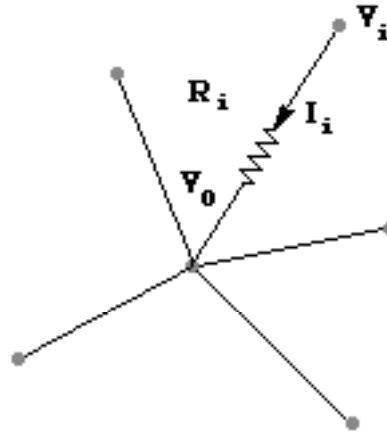


Fig.IV.1

Si avrà:

$$I_i = \frac{V_i - V_0}{R_i} \tag{IV.8}$$

Una relazione analoga si potrà scrivere per uno qualsiasi dei rami, quindi per il ramo erresimo:

$$I_r = \frac{V_r - V_0}{R_r} \tag{IV.9}$$

D'altra parte dalla LKC applicata al nodo O si ottiene:

$$\begin{aligned}
 \sum_r I_r &= \sum_r \frac{V_r - V_0}{R_r} = \\
 &= \sum_r \frac{V_r}{R_r} - V_0 \sum_r \frac{1}{R_r} = 0.
 \end{aligned}
 \tag{IV.10}$$

E quindi:

$$V_0 = \frac{\sum_r \frac{V_r}{R_r}}{\sum_r \frac{1}{R_r}} = \frac{1}{G_0} \sum_r \frac{V_r}{R_r} \quad (IV.11)$$

dove si è posto:

$$G_0 = \sum_r \frac{1}{R_r} \quad (IV.12)$$

Ritornando ora alla espressione IV.8 della  $I_i$ , si ottiene:

$$I_i = \frac{V_i}{R_i} - \frac{1}{R_i G_0} \sum_r \frac{V_r}{R_r} \quad (IV.13)$$

o anche, estraendo dal segno di sommatoria il termine iesimo, in modo da separare la parte di  $I_i$  che dipende esclusivamente da  $V_i$  da quella che dipende da tutti gli altri valori di  $V_r$ :

$$I_i = V_i \left( \frac{1}{R_i} - \frac{1}{R_i^2 G_0} \right) - \frac{1}{R_i G_0} \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r} \quad (IV.14)$$

Consideriamo ora l'altro caso: il poligono di  $n(n-1)/2$  lati come schematicamente mostrato in figura.

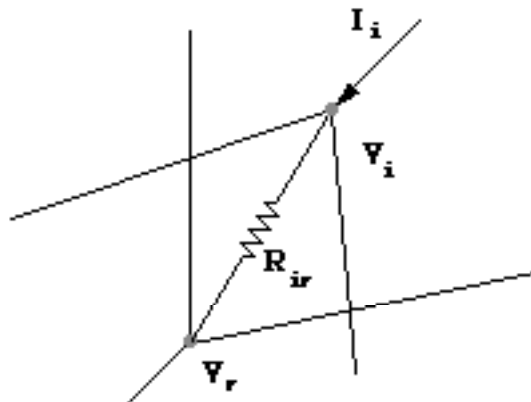


Fig.IV.2

In questo caso si avrà:

Poligono completo e Stella

$$I_i = \frac{V_i}{R_i} - \frac{1}{R_i G_0} \sum_r \frac{V_r}{R_r}$$

$$V_i = \frac{\sum_r \frac{V_r}{R_r}}{\sum_r \frac{1}{R_r}}$$

$R_{i1} = 1, 2, 3, 4$

Lecione XI

Poligono completo e Stella

$$I_i = \frac{V_i}{R_i} - \frac{1}{R_i G_0} \sum_r \frac{V_r}{R_r}$$

$$V_i = \frac{\sum_r \frac{V_r}{R_r}}{\sum_r \frac{1}{R_r}}$$

$R_{i1} = 1, 2, 3, 4$

Lecione XI

Poligono completo e Stella

$$I_i = \frac{V_i}{R_i} - \frac{1}{R_i G_0} \sum_r \frac{V_r}{R_r}$$

$$V_i = \frac{\sum_r \frac{V_r}{R_r}}{\sum_r \frac{1}{R_r}}$$

$R_{i1} = 1, 2, 3, 4$

Lecione XI

$$I_i = \sum_{r \neq i} \frac{V_i - V_r}{R_{ri}} = V_i \sum_{r \neq i} \frac{1}{R_{ri}} - \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_{ri}} \quad (IV.15)$$

Confrontando le due espressioni, (IV.14) e (IV.15), delle  $I_i$  così determinate, si verifica immediatamente che esse sono identiche per qualsiasi ennupla di  $V_r$  se e solo se:

$$R_{ri} = R_r R_i G_0 \quad (IV.16)$$

In tal caso infatti la (IV.15) diventa:

$$\begin{aligned} I_i &= V_i \sum_{r \neq i} \frac{1}{R_r R_i G_0} - \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r R_i G_0} = \\ &= \frac{V_i}{R_i G_0} \sum_{r \neq i} \frac{1}{R_r} - \frac{1}{R_i G_0} \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r} = \\ &= \frac{V_i}{R_i G_0} \sum_r \frac{1}{R_r} - \frac{V_i}{R_i^2 G_0} - \frac{1}{R_i G_0} \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r} = \\ &= \frac{V_i}{R_i} - \frac{V_i}{R_i^2 G_0} - \frac{1}{R_i G_0} \sum_{r \neq i} \frac{V_r}{R_r} \end{aligned} \quad (IV.17)$$



L'equivalenza è dunque assicurata se risultano verificate le  $n(n-1)/2$  relazioni di cui alla IV.16:

Se dunque si ha un n-polo a stella, è sempre possibile costruire un n-polo a poligono completo le cui  $n(n-1)/2$  resistenze di lato  $R_{ri}$  siano date appunto dalle  $n(n-1)/2$  relazioni trovate, e che quindi risulta equivalente alla stella di partenza.

Il caso opposto, invece, in cui siano note le  $n(n-1)/2$  resistenze di lato in un poligono completo, e si voglia conoscere le  $n$  resistenze di lato di un eventuale poligono a stella equivalente, è risolvibile solo nel caso in cui il numero delle equazioni,  $n(n-1)/2$ , è pari al numero di incognite  $n$ , cioè solo nel caso  $n=3$ ! Per  $n>3$  il numero delle equazioni è superiore al numero delle incognite ed il problema, quindi, non ammette soluzione!



Abbiamo dunque mostrato che, mentre è sempre possibile ricondurre una stella ad un poligono, la trasformazione opposta è possibile solo nel caso  $n=3$  e cioè, come si dice, dal “triangolo alla stella a tre rami”.

Una importante osservazione è la seguente: mediante successive trasformazioni delle stelle relative ai nodi interni di un  $n$ -polo, è possibile far via via scomparire tali nodi interni. Ne consegue che un qualsiasi  $n$ -polo è riconducibile ad un  $n$ -polo a poligono. Si abbia dunque un tale  $n$ -polo a poligono (completo o non, questo non ha importanza), e si voglia calcolare gli elementi della matrice delle conduttanze. Per quanto detto in precedenza basterà calcolare le  $n(n-1)/2$  grandezze  $G_{rs}$  con  $r \neq s$ ! È facile verificare che risulta:

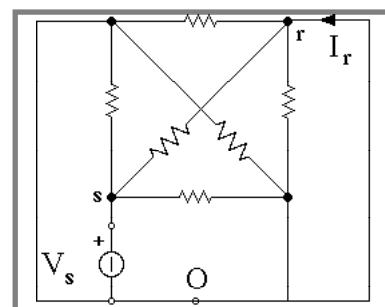
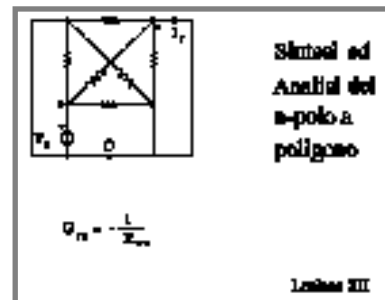
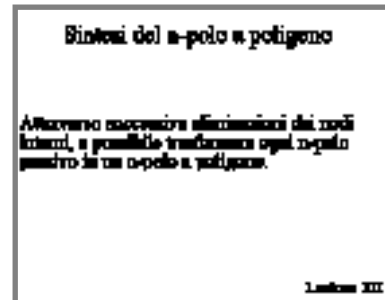
$$G_{rs} = - \frac{1}{R_{rs}} \tag{IV.18}$$

se  $R_{rs}$  è la resistenza tra i nodi  $r$  e  $s$  dell’ $n$ -polo!

Per calcolare  $G_{rs}$ , infatti, bisogna collegare tutti i nodi, tranne il nodo  $s$ , al morsetto  $O$  del generatore, come mostrato in figura. Ma così facendo ogni bipolo che si trovi su di un lato non collegato ad  $s$  viene ad essere cortocircuitato e quindi in esso non potrà circolare corrente. Ne consegue che la corrente  $I_r$  dovrà riversarsi tutta nell’unico ramo che partendo da  $r$  sia collegato anche ad  $s$ , il ramo con resistenza  $R_{rs}$ . Si ha quindi  $E_s = - R_{rs} I_r$  (il meno deriva dalla convenzione che, in tali condizioni, è del generatore), da cui  $G_{rs} = - 1/R_{rs}$

Il procedimento per cui, data la rete, se ne determina la matrice delle conduttanze viene detto di *analisi dell’ $n$ -polo*. Ne abbiamo mostrato una possibile soluzione che passa attraverso la sostituzione dell’ $n$ -polo di partenza con uno equivalente a poligono.

Il processo inverso, prende il nome di *sintesi dell’ $n$ -polo*: data cioè una matrice quadrata  $n$  che soddisfi alle condizioni di cui in precedenza, che giustamente ora



possono prendere il nome di *condizioni di fisica realizzabilità*, determinare un n-polo che presenti appunto quella data come matrice delle conduttanze.

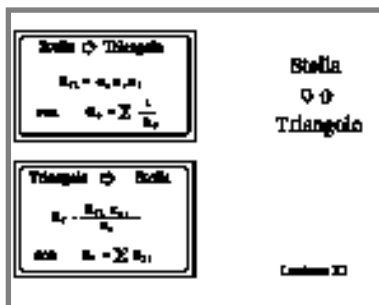
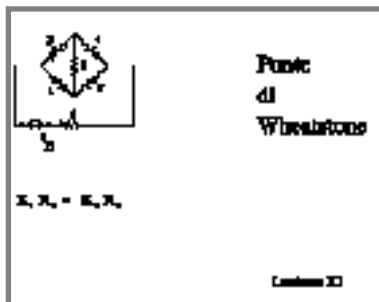
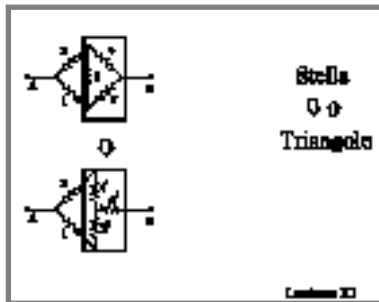
Rileggendo con una prospettiva diversa quanto sviluppato precedentemente, si può dire che almeno una soluzione al problema della sintesi l'abbiamo già data. Se infatti, sono  $G_{rs}$  i valori fuori diagonale della matrice assegnata, l'n-polo costituito da un poligono completo i cui rami abbiano resistenza  $R_{rs} = -1/G_{rs}$  ha appunto la desiderata matrice delle conduttanze!

Riprendiamo in considerazione, ora, il problema del circuito a "ponte" da cui siamo partiti per introdurre gli n-poli. È chiaro che il problema di trovare il bipolo equivalente tra A e B si risolve rapidamente se, per esempio, si trasforma il triangolo costituito dai rami 3,4 e 5. Il circuito si riduce a quello mostrato in figura e la resistenza tra A e B si calcola ora agevolmente. Come si è detto il circuito in esame viene denominato "ponte di Wheatstone" e trova una applicazione molto interessante nel campo delle misure. Senza soffermarci sull'argomento, si noti che qualora le resistenze nei rami 1,2,4,5 soddisfino la relazione:

$$R_1 R_4 = R_2 R_5, \tag{IV.19}$$

allora la corrente nel ramo 3 è identicamente nulla. Si dice in tal caso che il *ponte è in equilibrio*. Se il valore di uno dei resistori nei quattro lati del ponte non è noto, ed un altro è variabile, è possibile determinare il valore della resistenza incognita dalla relazione IV.19, una volta raggiunta la condizione di corrente nulla nel ramo 3, modificando la resistenza del resistore variabile. Naturalmente occorre che nel ramo 3 sia presente uno strumento in grado di rilevare l'annullamento della corrente.

Ritornando alla trasformazione stella-poligono, notiamo che dalle (IV.16) si ottengono facilmente le resi-



stenze del poligono equivalente una volta siano note quelle della stella di partenza. Per il caso  $n=3$  è facile determinare le relazioni inverse che forniscono le resistenze della stella se sono note quelle del triangolo:

$$R_i = \frac{R_{ir}R_{is}}{R_0} \quad (IV.20)$$

Dove si è posto:

$$R_0 = R_{12} + R_{23} + R_{31}$$

**Esercizi**

Nella rete in figura, che abbiamo già risolto con diversi metodi, possiamo ora provare ad utilizzare le trasformazioni poligono-stella. Applicando, infatti, il principio di sovrapposizione degli effetti, ci troviamo a dover risolvere due reti con un solo generatore; una volta quello di tensione ed un'altra quello di corrente. La determinazione della resistenza equivalente del bipolo connesso ai morsetti dei generatori nei due casi è ostacolata da strutture a ponte del tipo di quelle studiate. Utilizzando le formule della trasformazione triangolo-stella il problema trova una semplice soluzione. Infine per la stessa rete riportiamo la matrice di incidenza e la matrice delle conduttanze di lato.

**L’N-bipolo o N-porte**

Una rete passiva con un certo numero di poli può anche essere considerata da un’altro punto di vista. Assumiamo che il numero di poli  $n$  sia pari e poniamo  $N = n/2$ . Se scegliamo  $N$  coppie di poli e conveniamo di collegare sempre tale  $n$ -polo al “resto del mondo” avendo cura che la corrente che entra in un polo di ogni singola coppia sia uguale a quella che esce dall’altro, la struttura così ottenuta godrà evidentemente di

Trasformazioni  
Stella  
Poligono

**Esercizi**

$$\begin{aligned} R_1 = R_2 = R_3 &= 1 \Omega \\ R_4 = R_5 = R_6 &= 2 \Omega \\ R_7 = R_8 = R_9 &= 4 \Omega \\ Z_0 &= 10 \Omega \\ I_0 &= 3 A \end{aligned}$$

Lezione XI

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
A	+1	0	0	+1	0	0	0	0	0	0
B	-1	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0
C	0	+1	0	0	+1	0	0	-1	0	0
D	0	0	+1	-1	0	0	+1	0	0	0
E	0	0	0	0	-1	-1	0	0	0	-1
F	0	0	0	0	0	0	+1	-1	0	0

**Esercizi** Metodo di Laplace

Lezione XV

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Matrice della Conduttanza di lato.

Lezione XV

**N - bipoli**

Se un N-bipolo, per ogni coppia di morsetti associati, la corrente entrante in un morsetto è uguale a quella uscente dall'altro.

Lezione XII



volta la corrente  $I_r$  va da un nodo interno della rete ad un altro nodo anch'esso interno. Nulla ci assicura quindi che essa sia negativa (per  $E_s$  positiva)! D'altra parte il teorema di non amplificazione delle tensioni, o se si vuole quello di non amplificazione delle correnti, fornisce qualche informazione sulle  $G_{rs}$ . Dato che infatti nel circuito di figura è certamente  $|I_r| \geq |I_s|$ , tenendo conto del fatto che  $G_{rr}$  è definito positivo, si avrà:

$$G_{rr} = \left\langle \frac{|I_r|}{|E_r|} \right\rangle_{\substack{E_i=0 \\ E_r \neq 0}} \geq \left\langle \frac{|I_s|}{|E_r|} \right\rangle_{\substack{E_i=0 \\ E_r \neq 0}} = |G_{sr}| \quad (IV.23)$$

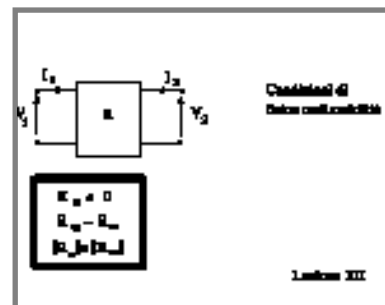
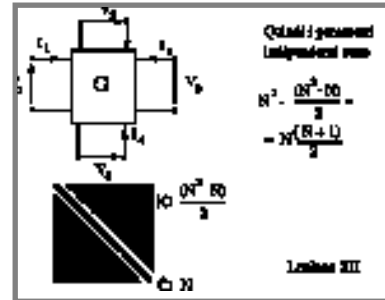
Una proprietà del tutto analoga, invece, sia nell' n-polo che nell' N-bipolo, è quella che discende dalla reciprocità. Si ha, infatti, che:

$$G_{rs} = G_{sr}, \quad (IV.24)$$

e quindi solo  $(N^2-N)/2 + N = N(N+1)/2$  elementi della matrice delle conduttanze sono linearmente indipendenti. Si osservi che tale numero non diminuisce ulteriormente come nel caso dell'n-polo, perché questa volta la legge di Kirchhoff ai nodi non fornisce ulteriori vincoli, dato che essa è identicamente soddisfatta per costruzione: da ogni porta una stessa corrente entra da un morsetto ed esce dall'altro.

Le condizioni (IV.23), (IV.24), e quella che impone che le  $G_{rr}$  siano tutte positive, sono le condizioni di *fisica realizzabilità* per l'N-bipolo

Si può descrivere l'N-bipolo attraverso una matrice delle resistenze invece che di conduttanze. Basta risolvere il sistema di equazioni (IV.21) rispetto alle  $E_s$ , ottenendo:



$$\begin{aligned}
 E_1 &= R_{11}I_1 + \dots + R_{1r}I_r + \dots + R_{1N}I_N; \\
 &\dots\dots\dots \\
 E_s &= R_{s1}I_1 + \dots + R_{sr}I_r + \dots + R_{sN}I_N; \quad (IV.25) \\
 &\dots\dots\dots \\
 E_N &= R_{N1}I_1 + \dots + R_{Nr}I_r + \dots + R_{NN}I_N.
 \end{aligned}$$

dove si avrà, evidentemente:

$$R_{rs} = \frac{A_{rs}}{\det(\mathbf{G})},$$

e  $\det(\mathbf{G})$  è il determinante della matrice delle conduttanze ed  $A_{sr}$  è il minore aggiunto del termine di posto  $s,r$ . In altri termini la matrice delle  $G$  è la inversa della matrice delle  $R$ . Vale la pena sottolineare che, di conseguenza,  $R_{sr} \neq 1/G_{sr}$ .

Il caso  $N = 2$  è particolarmente interessante tanto da meritare un nome speciale: *doppio bipolo*. I parametri indipendenti saranno tre:  $R_{11}$ ,  $R_{22}$  ed  $R_{12}=R_{21}$  nella matrice delle resistenze, e  $G_{11}$ ,  $G_{22}$  ed  $G_{12}=G_{21}$  in quella delle conduttanze. Nei due casi avremo le equazioni:

$$\begin{aligned}
 V_1 &= R_{11} I_1 + R_{12} I_2, \\
 V_2 &= R_{21} I_1 + R_{22} I_2,
 \end{aligned} \quad (IV.26)$$

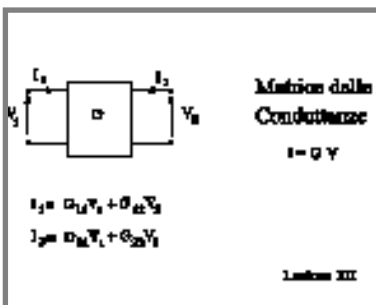
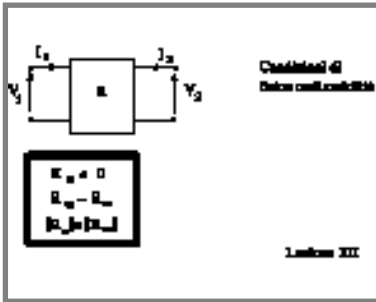
per la matrice  $\mathbf{R}$ , e:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= G_{11} V_1 + G_{12} V_2, \\
 I_2 &= G_{21} V_1 + G_{22} V_2,
 \end{aligned} \quad (IV.27)$$

per la matrice  $\mathbf{G}$ . Utilizzando il formalismo matriciale le (IV.26) ed (IV.27) prendono la forma :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V} &= \mathbf{R} \mathbf{I}, \\
 \mathbf{I} &= \mathbf{G} \mathbf{V},
 \end{aligned} \quad (IV.28)$$

dove  $\mathbf{V}$  ed  $\mathbf{I}$  sono rispettivamente i vettori colonna (o riga) delle tensioni e delle correnti ed  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{G}$  le matrici



dei parametri R e G.

È evidente che per “sintetizzare” un doppio bipolo si avrà bisogno di almeno tre bipoli resistori; infatti tre sono i parametri indipendenti che determinano la matrice delle R o delle G di un doppio-bipolo. D'altra parte tre bipoli resistori possono essere collegati in due fondamentali modi diversi: a *stella* (o a T, in questo caso) o a *triangolo* (o anche a *p greco*, Π, per la caratteristica forma dello schema elettrico).

È facile ricavare i parametri R e G nei due casi del doppio bipolo a T ed a Π. Nel primo caso si ha che:

$$\begin{aligned} R_{11} &= R_a + R_b ; \\ R_{22} &= R_c + R_b ; \\ R_{12} &= R_b ; \end{aligned} \tag{IV.29}$$

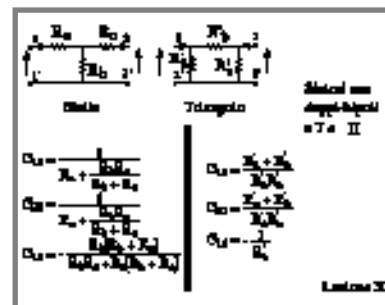
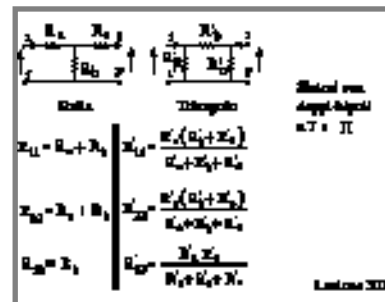
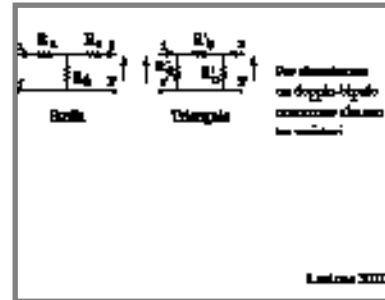
e:

$$\begin{aligned} G_{11} &= \frac{1}{R_a + \frac{R_b R_c}{R_b + R_c}} ; \\ G_{22} &= \frac{1}{R_c + \frac{R_b R_a}{R_b + R_a}} ; \\ G_{12} &= - \frac{R_b}{R_a(R_b + R_c) + R_b R_c} . \end{aligned} \tag{IV.30}$$

Mentre nel secondo caso si ha:

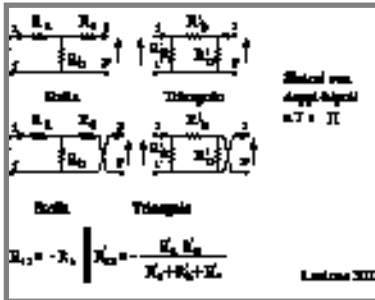
$$\begin{aligned} R'_{11} &= \frac{R'_a(R'_b + R'_c)}{R'_a + R'_b + R'_c} ; \\ R'_{22} &= \frac{R'_c(R'_b + R'_a)}{R'_a + R'_b + R'_c} ; \\ R'_{12} &= \frac{R'_a R'_c}{R'_a + R'_b + R'_c} ; \end{aligned} \tag{IV.31}$$

e:



$$\begin{aligned}
 G'_{11} &= \frac{R'_a + R'_b}{R'_a R'_b}; \\
 G'_{22} &= \frac{R'_c + R'_b}{R'_c R'_b}; \\
 G'_{12} &= -\frac{1}{R'_b}.
 \end{aligned}
 \quad (IV.32)$$

Le relazioni scritte quindi consentono in ogni caso di determinare le resistenze  $R_a$ ,  $R_b$  e  $R_c$ ,  $R'_a$ ,  $R'_b$  e  $R'_c$  del doppio bipolo a T o a  $\Pi$  che realizza una qualsiasi matrice delle R o delle G che soddisfino le condizioni di fisica realizzabilità. Se ne conclude che un qualsiasi insieme di parametri R o G può essere sintetizzato da un doppio bipolo a T o a  $\Pi$ , e quindi anche che un qualsiasi doppio bipolo può essere ricondotto ad un doppio bipolo a T o a  $\Pi$ .



In verità gli schemi utilizzati consentono di risolvere solo metà dei problemi possibili. Abbiamo osservato infatti che la  $R_{12}$  e la  $G_{12}$  possono essere sia positive che negative. Le relazioni trovate, invece, consentirebbero di “sintetizzare” solo matrici delle R con  $R_m \geq 0$  e delle G con  $G_m < 0$ . Il problema si risolve brillantemente aggiungendo le due possibilità ulteriori, illustrate nelle immagini a lato, con i morsetti secondari invertiti.

Per la stella si avrà infatti:

$$\begin{aligned}
 R_{12} &= -R_b, \\
 G_{12} &= \frac{R_b}{R_a(R_b + R_c) + R_b R_c}.
 \end{aligned}
 \quad (IV.33)$$

Mentre per il triangolo si avrà:

$$\begin{aligned}
 R'_{12} &= -\frac{R'_a R'_c}{R'_a + R'_b + R'_c}; \\
 G'_{12} &= \frac{1}{R'_b}.
 \end{aligned}
 \quad (IV.34)$$

Supponiamo, ora, di chiudere la porta secondaria su di un carico R, come mostrato, e poniamoci il problema di



determinare il valore della resistenza vista dalla porta primaria. Le equazioni sono:

$$\begin{aligned} V_1 &= R_{11} I_1 + R_m I_2, \\ V_2 &= R_m I_1 + R_{22} I_2, \\ V_2 &= -R I_2. \end{aligned} \tag{IV.35}$$

Ricavando  $I_2$  dalla seconda, in cui  $V_2$  è stato eliminato in base alla terza, si ottiene:

$$I_2 = -\frac{R_m I_1}{R + R_{22}},$$

e sostituendo nella prima si ha:

$$R_e = \frac{V_1}{I_1} = R_{11} - \frac{R_m^2}{R + R_{22}}. \tag{IV.36}$$

Come si vede, utilizzando un doppio bipolo come tramite, è possibile variare a piacimento la resistenza equivalente vista, per esempio, da un generatore collegato a monte. Questo uso del doppio bipolo come mezzo per variare caratteristiche di un carico ed *adattarle* a quelle del generatore è molto comune. L'adattamento non si ottiene però senza pagare uno scotto: la potenza che viene necessariamente dissipata nel doppio bipolo adattatore. Proviamo a calcolarla: essa è evidentemente pari a  $V_1 I_1 + V_2 I_2$ . Utilizzando i parametri R per esprimere le tensioni in funzione delle correnti, si ottiene:

$$P = R_{11} I_1^2 + 2 R_m I_1 I_2 + R_{22} I_2^2. \tag{IV.37}$$

Una espressione più significativa della potenza assorbita si ottiene ricavando  $I_1$  dalla prima delle (IV.26) e sostituendola nella (IV.27), tenendo conto della (IV.25). Dopo alcuni passaggi si ottiene:

$$P = \frac{V_1^2}{R_{11}} + \frac{I_2^2}{G_{22}}. \tag{IV.38}$$

Il doppio-bipolo come adattatore di carica.

$$\begin{aligned} V_1 &= R_{11} I_1 + R_m I_2 \\ V_2 &= R_m I_1 + R_{22} I_2 \\ V_2 &= -R I_2 \end{aligned}$$

$$\frac{V_1}{I_1} \Big|_{I_2} = R_{11} - \frac{R_m^2}{R_{22} + R}$$

Laminare XIII

Potenza assorbita dal doppio-bipolo

$$\begin{aligned} V_1 &= R_{11} I_1 + R_m I_2 \\ V_2 &= R_m I_1 + R_{22} I_2 \\ P &= V_1 I_1 + V_2 I_2 \\ P &= R_{11} I_1^2 + 2 R_m I_1 I_2 + R_{22} I_2^2 \end{aligned}$$

$$P = \frac{V_1^2}{R_{11}} + \frac{I_2^2}{G_{22}}$$

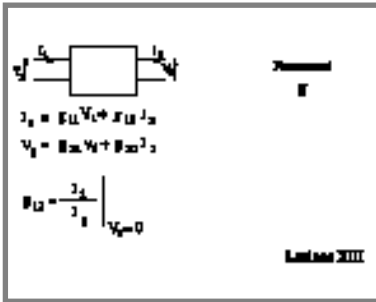
Laminare XIII

Potenza assorbita

$$\begin{aligned} V_1 &= R_{11} I_1 + R_m I_2 \\ I_2 &= R_m I_1 + R_{22} I_2 \\ R_{22} &= \frac{V_2}{I_2} \Big|_{I_1=0} \end{aligned}$$

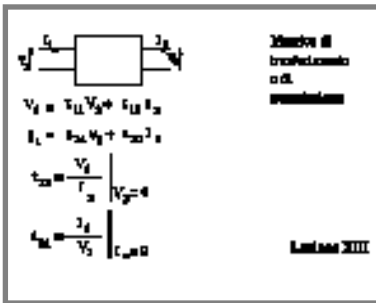
Laminare XIII

Nella (IV.38) la potenza assorbita è espressa come somma della potenza assorbita dalla porta primaria quando la secondaria è a vuoto e la potenza assorbita dalla porta secondaria con la primaria in corto circuito. Facciamo ora un brevissimo cenno ad altre possibili rappresentazioni dell’N-bipolo ed, in particolare, del doppio bipolo. Invece di esprimere le tensioni alle porte in funzione delle correnti, o viceversa, è possibile esprimere, per esempio, la  $V_1$  e la  $I_2$  in funzione della  $V_2$  e della  $I_1$ . Si ottiene:



$$\begin{aligned} V_1 &= h_{11} I_1 + h_{12} V_2, \\ I_2 &= h_{21} I_1 + h_{22} V_2 . \end{aligned} \tag{IV.39}$$

I parametri  $h$  così definiti prendono il nome di *parametri ibridi*; si noti, infatti, che essi non hanno tutte le stesse dimensioni. Mentre  $h_{11}$  ha le dimensioni di una resistenza ed  $h_{22}$  ha quelle di una conduttanza,  $h_{12}$  ed  $h_{21}$  hanno le dimensioni di numeri puri. Per definizione sarà infatti:



$$h_{12} = \left[ \frac{V_1}{V_2} \right]_{I_1=0} ; h_{21} = \left[ \frac{I_2}{I_1} \right]_{V_2=0} .$$

Si noti infine che per i parametri  $h$  la reciprocità è espressa dalla relazione  $h_{21} = - h_{12}$ .

La rappresentazione ibrida analoga, in cui  $V_2$  e  $I_1$  sono espressi in funzione di  $V_1$  ed  $I_2$ , viene detta dei *parametri g* e di essa diamo solo la definizione:

$$\begin{aligned} I_1 &= g_{11} V_1 + g_{12} I_2, \\ V_2 &= g_{21} V_1 + g_{22} I_2 . \end{aligned} \tag{IV.40}$$

Un cenno infine alla descrizione del doppio bipolo con la cosiddetta *matrice di trasmissione* che mette in relazione le grandezze ad una porta con quelle all’altra:

$$\begin{aligned} V_1 &= t_{11} V_2 + t_{12} I_2, \\ I_1 &= t_{21} V_2 + t_{22} I_2 . \end{aligned} \tag{IV.41}$$

Si noti la scelta della convenzione del generatore alla porta secondaria; il motivo di tale scelta sarà immediatamente chiaro.

Le rappresentazione con la matrice di trasmissione sottolinea il fatto che il doppio bipolo può essere visto come un sistema di trasferimento ingresso-uscita (o segnale-risposta o causa-effetto). Questo modo di concepire le cose sarà molto utile quando tratteremo il doppio bipolo in regime dinamico qualsiasi. Utilizzando la matrice di trasmissione **T** è possibile esprimere in modo molto sintetico la caratteristica di due doppi bipoli in cascata, o in serie; si ha infatti:

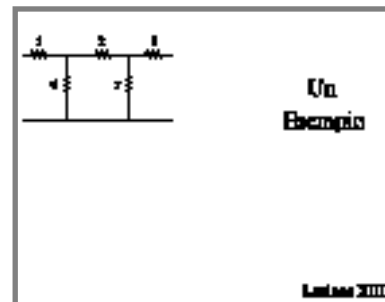
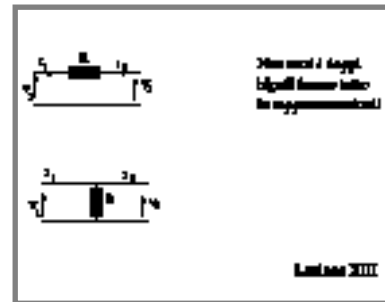
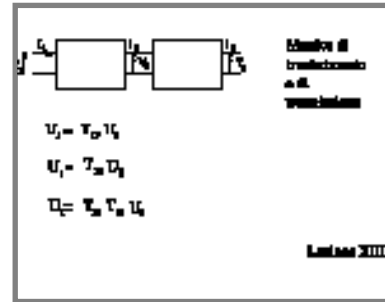
$$\mathbf{U}' = \mathbf{T}' \mathbf{U} \quad \text{ed} \quad \mathbf{U}'' = \mathbf{T}'' \mathbf{U}' .$$

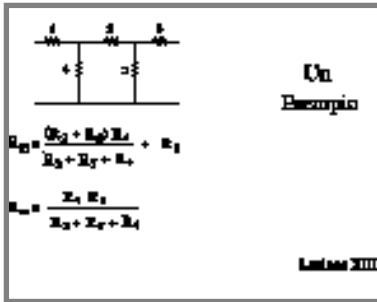
Evidentemente i vettori **U**, **U'** ed **U''** sono i vettori di ingresso e di uscita, nei diversi casi, distinti dagli apici. Combinando le due relazione si ottiene:

$$\mathbf{U}'' = \mathbf{T}'\mathbf{T}'' \mathbf{U} ,$$

e la matrice equivalente è il prodotto delle due matrici di trasmissione dei doppi bipoli in cascata.

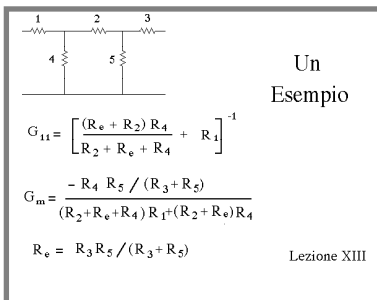
Val la pena di osservare che non tutti i doppi bipoli permettono tutte le diverse rappresentazioni possibili. Lo strano doppio bipolo mostrato nel primo schema della seconda immagine a lato ha una rappresentazione mediante i parametri **G**, mentre non consente una rappresentazione con i parametri **R**. Per il secondo schema accade l'inverso: mentre il doppio bipolo ha una matrice **R**, non ha invece una matrice **G**. Per rendersi conto del perché ciò accada basta provare a calcolare i relativi parametri secondo le classiche definizioni. Su questo argomento ritorneremo nel seguito.





A titolo di esempio proviamo a calcolare le matrici  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{G}$  per il doppio bipolo riportato a lato. Per determinare la  $R_{11}$  bisogna determinare il rapporto tra tensione e corrente primaria quando la porta secondaria è aperta; in tali condizioni i resistori  $R_2$  e  $R_3$  sono in serie e la loro serie è in parallelo con  $R_4$ . A questo parallelo va aggiunto in serie il resistore  $R_1$ . Il calcolo di  $R_{22}$  è del tutto simile. Per calcolare  $R_{12}$  bisogna invece assumere, per esempio, la porta primaria aperta e calcolare il rapporto tra la tensione primaria e la corrente secondaria. Ma in tali condizioni la corrente  $I_2$  si ripartisce evidentemente nei due rami in parallelo costituiti dal resistore  $R_5$  e dalla serie di  $R_2$  e  $R_4$ . Quest'ultima corrente, circolando nel resistore  $R_4$  darà luogo alla caduta di tensione che poi si rileva anche ai morsetti primari. Nel resistore  $R_1$ , infatti, non circola alcuna corrente.

Infine i parametri  $\mathbf{G}$ . Per calcolare  $G_{11}$  occorre cortocircuitare la porta secondaria. In tali condizioni la resistenza vista alla porta primaria - la conduttanza  $G_{11}$  sarà proprio l'inverso di tale resistenza - è data dalla serie del parallelo tra  $R_3$  e  $R_5$  con il resistore  $R_2$ ; il bipolo equivalente così determinato è a sua volta in parallelo con  $R_4$  ed infine in serie con  $R_1$ . Il calcolo di  $G_m$  può condursi alla maniera seguente. In primo luogo bisogna cortocircuitare una delle due porte; si osservi che se si sceglie di cortocircuitare la porta secondaria - il che equivale a scegliere di calcolare  $G_{21}$  piuttosto che  $G_{12}$  - lo schema elettrico che ne deriva è lo stesso utilizzato per calcolare  $G_{11}$ . In queste condizioni, dunque  $G_{11} V_1$  è la corrente che entra alla porta primaria. È agevole a questo punto ripartire tale corrente nei diversi rami in parallelo fino a trovare il contributo circolante in  $R_3$ . Il rapporto tra questa corrente e la tensione  $V_1$  è la conduttanza cercata. Attenti al segno di  $G_m$ !



**Esercizi**

Per la rete proposta in precedenza e mostrata nella immagine a lato, diamo, per una verifica dei risultati, il valore della corrente nel resistore  $R_7$ ,  $I_7 = 1,2$  A. Correnti e tensioni negli altri rami della rete si deducono facilmente dalla conoscenza di questa grandezza. Per il secondo esercizio la formula di Milmann fornisce immediatamente la soluzione:

$$V_{AB} = \frac{E_1/R_1 + E_2/R_2}{1/R_1 + 1/R_2} \quad (IV.43)$$

Si noti il ruolo giocato dalle due resistenze in serie ai generatori ideali di tensione: sono loro che rendono possibile un collegamento che altrimenti, come abbiamo visto, non sarebbe possibile. Se infatti  $R_1$  ed  $R_2$  vanno a zero, la formula perde di significato. Le cadute di tensione sulle due resistenze, dovute alla corrente circolante nella maglia, rendono eguali, e quindi compatibili, le due tensioni ai morsetti A e B. Si osservi che nel circuito in esame vi è dissipazione di potenza anche quando i morsetti A e B non sono chiusi su di un carico; il *generatore equivalente*, dunque, dissipa anche *quando è a vuoto*. Tenendo conto di alcune osservazioni fatte in precedenza questo non può stupire.

Infine qualche problema sui doppi bipoli. Nel primo caso si richiede di calcolare le matrici  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{G}$ , ibride e di trasmissione, per il doppio bipolo mostrato.

Nel successivo due problema vengono proposte due matrici 2x2 e si chiede di stabilire quale di esse può essere la matrice  $\mathbf{R}$  per un doppio bipolo. Una volta determinata la matrice fisicamente realizzabile, si chiede di sintetizzarla con un circuito, per esempio a T.

**Esercizi**

$I_7 = 1,2 \text{ A}$

Lectura III

**Esercizi**

**Determinare la d.d.p. tra A e B**

Lectura III

**Esercizi**

$R_1 = 4,5 \Omega$ $R_2 = 10 \Omega$ $R_3 = 15 \Omega$ $R_4 = 55 \Omega$ $R_5 = 200 \Omega$ $R_6 = 30 \Omega$	Matrice della $\mathbf{R}$ e della $\mathbf{G}$ Determinare i parametri ibridi relativi ai morsetti A e B e la trasmissione
--	--

Lectura III

Dalle seguenti matrici  $\mathbf{R}$  di un doppio bipolo, quale non soddisfa le condizioni di fisica realizzabilità e perché?

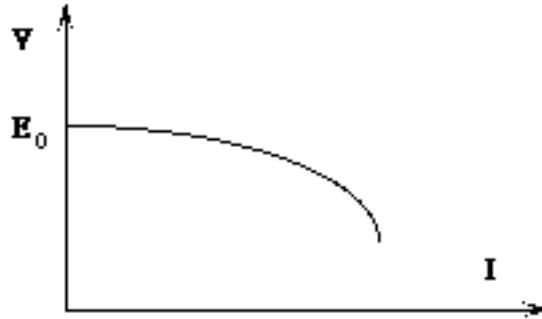
**Esercizi**

4	2	2	-3
2	3	-3	4

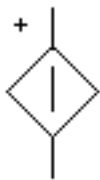
Lectura III

## I generatori dipendenti o pilotati e gli amplificatori operazionali

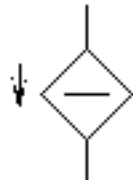
Abbiamo più volte ricordato che i generatori fin ora introdotti, di tensione e di corrente, vengono detti ideali per il fatto che essi forniscono ai loro morsetti una tensione o una corrente che non risente in alcun modo del “carico” a cui essi vengono connessi. Per questo motivo essi vengono anche detti *generatori indipendenti*. Abbiamo anche sottolineato che in un generatore “reale” è impossibile che ciò accada. In un generatore di tensione reale la d.d.p. ai morsetti dipenderà dalla corrente erogata secondo una legge  $V=V(I)$



del tipo di quella mostrata qualitativamente in figura. Potremmo affermare, da questo punto di vista, che il generatore reale è un *generatore dipendente*. Questa osservazione fornisce lo spunto per l'introduzione di una nuova classe di generatori nei quali la tensione ai morsetti, se si tratta di generatori di tensione, per esempio, è sì dipendente, ma non dalla corrente che essi stessi erogano, bensì da un'altra corrente circolante in altro ramo della rete. Chiameremo tali generatori *generatori pilotati* ed useremo per essi i simboli mostrati, a seconda che si tratti di generatori di tensione o di corrente. In effetti non è necessario che la tensione di un generatore sia pilotata da una corrente: la grandezza che “pilota”, secondo una ben determinata legge, può anche essere un'altra tensione che insiste su di un altro ramo della rete. In conclusione siamo portati a definire quattro diversi tipi di generatori pilotati:



Generatore di tensione



Generatore di corrente

Generatore di tensione pilotato in corrente (GTPC)  $V_r = V_r(I_s)$

Generatore di corrente pilotato in tensione (GCPT)	$I_r = I_r(V_s)$
Generatore di corrente pilotato in corrente (GCPC)	$I_r = I_r(I_s)$
Generatore di tensione pilotato in tensione (GTPT)	$V_r = V_r(V_s)$

Naturalmente se le relazioni che caratterizzano tali dipendenze sono di tipo lineare si parlerà di generatori lineari e si avrà:

Generatore di tensione pilotato in corrente (GTPC)	$V_r = R_m I_s$
Generatore di corrente pilotato in tensione (GCPT)	$I_r = G_m V_s$
Generatore di corrente pilotato in corrente (GCPC)	$I_r = \alpha I_s$
Generatore di tensione pilotato in tensione (GTPT)	$V_r = \mu V_s$

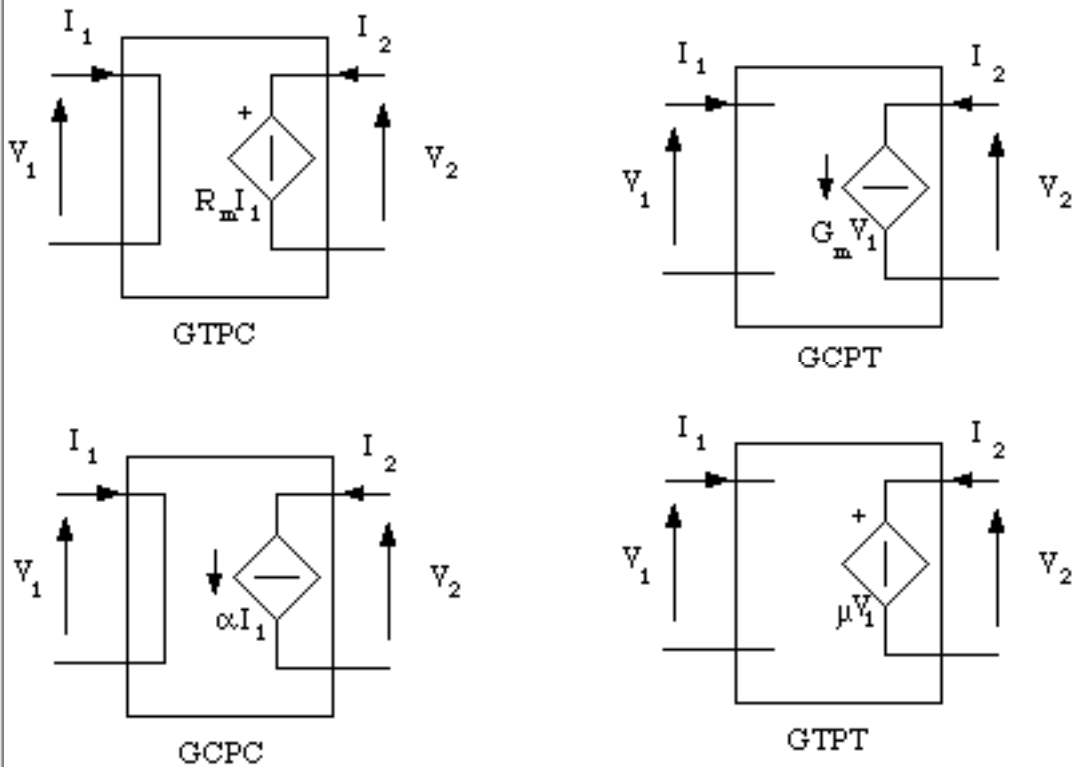


Fig. IV.3

dove  $R_m$  è detta transresistenza,  $G_m$  transconduttanza,  $\alpha$  rapporto di trasferimento di corrente, e  $\mu$  rapporto di trasferimento di tensione.

Abbiamo tardato fino a questo punto ad introdurre i generatori pilotati perché, a ben guardare, essi non sono dei semplici bipoli bensì dei doppi bipoli: per essere definiti essi hanno bisogno di un'altra coppia di morsetti che sia interessata dalla grandezza "pilotante", secondo gli schemi di seguito riportati, per il caso lineare.

È interessante domandarsi quali rappresentazioni, fra le diverse introdotte per i doppi bipoli, i singoli generatori pilotati ammettono. Per esempio il GTPC ammette solo una rappresentazione mediante una matrice delle resistenze:

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ R_m & 0 \end{vmatrix} \mathbf{I}.$$

Si noti che la condizione  $R_{12} = R_{21}$  non è verificata: si tratta infatti di doppi bipoli che contengono dei generatori, e quindi possono essere non reciproci. I generatori pilotati sono estremamente utili per costruire circuiti equivalenti di dispositivi più complessi, come, per esempio, i *transistori*. Anzi si può affermare che l'esigenza di introdurre tali doppi bipoli nasce proprio dal bisogno di rappresentare opportunamente il comportamento dei transistori nei loro diversi modi di funzionamento.

Non rientrando tali dispositivi tra gli argomenti del nostro corso, avremo poche opportunità di utilizzare i generatori pilotati; ciò nonostante ci è sembrato utile introdurli per inserirli nel quadro generale che stiamo costruendo. Oltre tutto, i generatori pilotati non sono soltanto degli elementi ideali; è possibile, utilizzando dei dispositivi che prendono il nome di *amplificatori operazionali*, realizzare delle concrete ottime approssimazioni di tali generatori.

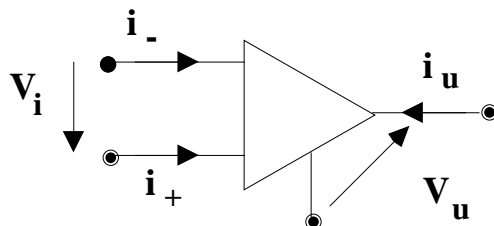


Fig.IV.4

Anche degli amplificatori operazionali si può introdurre un modello idealizzato che è rappresentato in Fig.IV.4.



La caratteristica di questo dispositivo è descritta dalle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} i_- = I_- \\ i_+ = I_+ \\ v_u = f(v_i) \end{cases} \quad v_u = \begin{cases} E_{\text{sat}} & v_i \geq \epsilon \\ \frac{E_{\text{sat}}}{\epsilon} v_i = A v_i & -\epsilon < v_i < \epsilon \\ -E_{\text{sat}} & v_i \leq -\epsilon \end{cases} \quad (\text{IV.42})$$

Nel piano  $(v_i, v_u)$  la rappresentazione grafica di tale caratteristica è mostrata in Fig.IV.5.

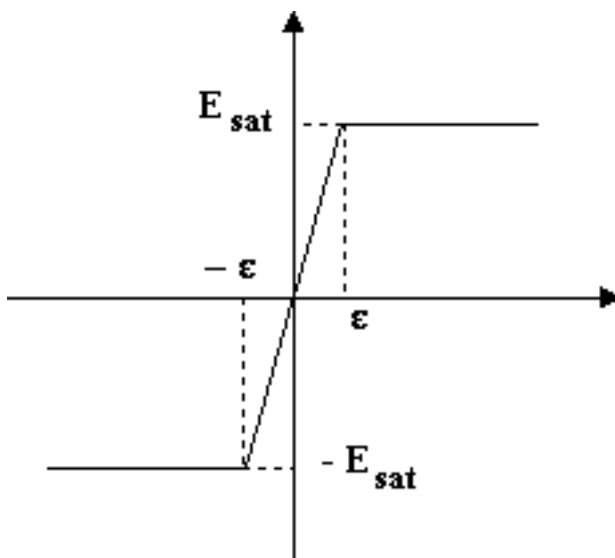


Fig.IV.5

Le costanti  $I_-$  e  $I_+$  sono generalmente molto piccole (da pochi decimi di mA a pochi decimi di nA, - tanto che in una idealizzazione ancora più spinta possono essere assunte nulle) ed il parametro  $A$ , generalmente molto grande (i valori tipici vanno da 100.000 a 200.000, tanto che nella stessa logica precedente può essere assunto infinitamente grande) prende il nome di *guadagno di tensione in anello aperto*.

Il dispositivo reale di cui quello fin qui descritto è una idealizzazione in effetti non ha quattro morsetti ma almeno cinque, in quanto esso ha bisogno di essere alimentato in modo opportuno per funzionare correttamente, secondo lo schema riportato in Fig. IV.6.

Il componente circuitale di cui alla Fig.IV.4 è quindi l'idealizzazione di quanto contenuto nel riquadro di Fig.IV.6. Esso è pertanto un elemento attivo per

la presenza dei generatori.

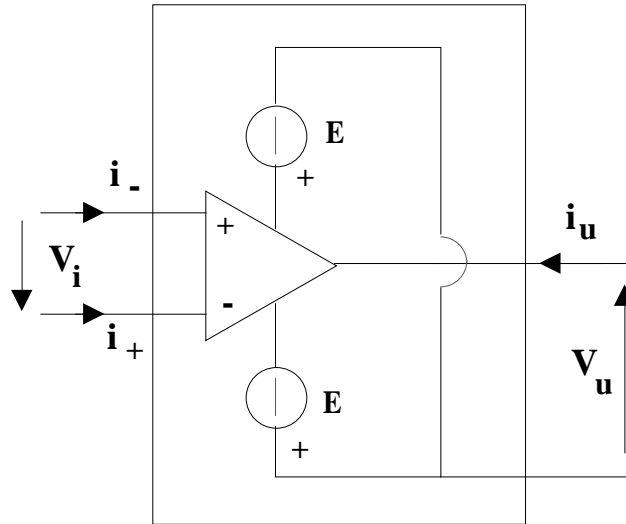


Fig.IV.6

Se si accetta l'idealizzazione spinta di cui in precedenza ( $I_- = I_+ = 0$  e  $A = \infty$ ), le relazioni di cui alle (IV.42) diventano:

$$\begin{cases} i_- = 0 \\ i_+ = 0 \\ v_u = E_{\text{sat}} \operatorname{sgn}(v_i) & \text{per } v_i \neq 0 \\ -E_{\text{sat}} < v_u < E_{\text{sat}} & \text{per } v_i = 0 \end{cases} \quad (\text{IV.43})$$

Nella regione di linearità ( $v_i = 0$ ) quindi, l'amplificatore operazionale avrebbe le seguenti leggi caratteristiche:

$$\begin{cases} i_- = 0 \\ i_+ = 0 \\ v_i = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_u = \text{qualsiasi valore} \\ i_u = \text{qualsiasi valore} \end{cases} \quad (\text{IV.44})$$

Queste considerazioni giustificano l'introduzione di due nuovi bipoli ideali che prendono il nome di *nullatore* e *noratore* rispettivamente, i cui simboli sono riportati in Fig.IV.7.

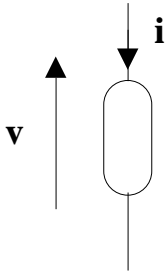


Fig.IV.7

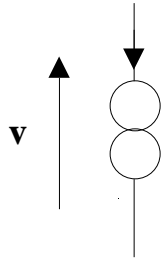


Fig.IV.8

Il nullatore ha  $v=0$  ed  $i = 0$  per ogni condizione di funzionamento: in altri termini la sua caratteristica nel piano  $(i,v)$  si riduce ad un punto e precisamente l'origine degli assi. Mentre il noratore non è descritto da nessuna relazione, nel senso che sia  $i$  che  $v$  ai suoi morsetti sono qualsiasi: Nel piano  $(i,v)$  la sua caratteristica viene a coincidere con l'intero piano.

Utilizzando questi due nuovi bipoli un amplificatore operazionale ideale, nella sua regione di linearità, può essere rappresentato secondo lo schema di Fig.IV.9.

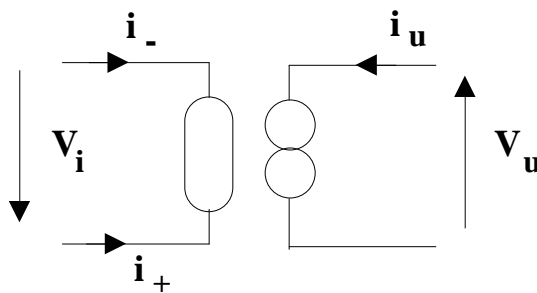


Fig.IV.9

Utilizzando i componenti ideali introdotti, come già detto, è possibile costruire schemi equivalenti di altri componenti. A titolo di esempio si considerino i due schemi riportati nelle figure IV.10, IV.11 e IV.12. Il primo rappresenta un generatore ideale di tensione ed il secondo, un doppio bipolo lineare resistivo ma non reciproco. Infatti, nel primo la corrente primaria è sempre nulla per definizione e quindi non c'è caduta di tensione sulla resistenza in serie al generatore ideale; di conseguenza la tensione secondaria è indipendente dalla cor-

rente erogata.

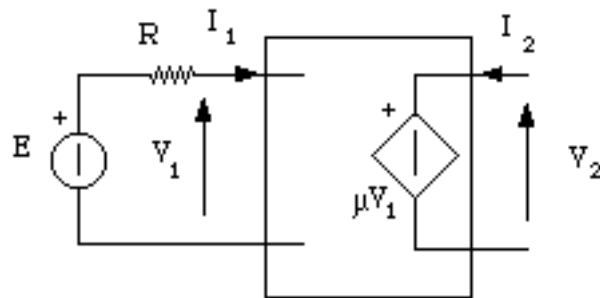


Fig.IV.10

Nel secondo caso le relazioni tra tensioni e correnti sono quelle che si avrebbero in un doppio bipolo resistivo; si noti che anche in questo caso può non essere verificata la condizione  $R_{12}=R_{21}$  e quindi il doppio bipolo può non essere reciproco.

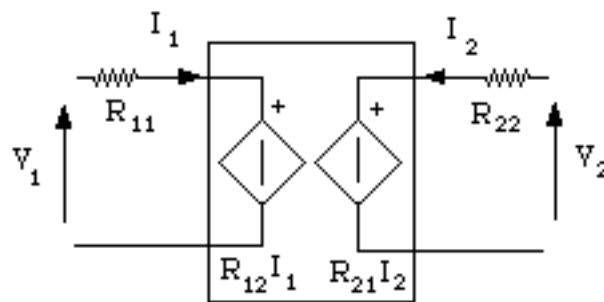


Fig.IV.11

Per il circuito di Fig.IV.12, invece, l'equazione alla maglia della porta di ingresso dell'amplificatore operazionale ci fornisce la relazione:

$$v_1 + R i_2 + v_i = 0, \quad (\text{IV.44})$$

che, tenendo conto della caratteristica dell'amplificatore operazionale, diventa:

$$i_2 = -\frac{1}{R} (v_1 + v_i) = -\frac{1}{R} \left( v_1 + \frac{v_u}{A} \right) = -\frac{1}{R} v_1, \quad (\text{IV.45})$$

che per  $A$  che tende all'infinito descrive la caratteristica di un generatore ideale di corrente pilotato in tensione di transconduttanza  $G_m = -1/R$ .

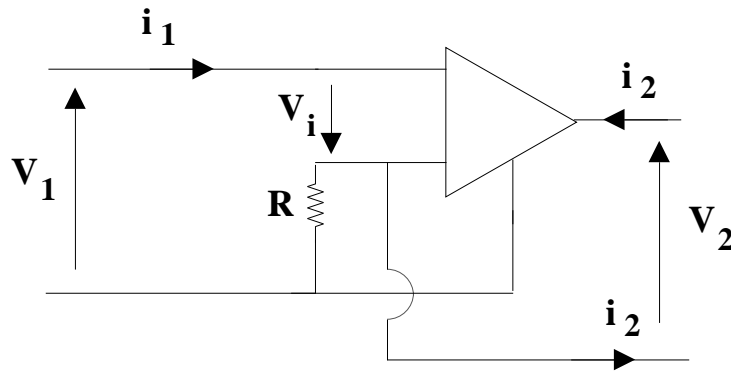


Fig.IV.12

**Esercizi**

$R_1 = 4,5 \Omega$   
 $R_2 = 10 \Omega$   
 $R_3 = 15 \Omega$   
 $R_4 = 55 \Omega$   
 $R_5 = 20 \Omega$   
 $R_6 = 30 \Omega$

Esercizio della R.  
 in classe II.  
 Matrici adm.  
 parametrizzate da G11  
 Algoritmi di calcolo  
 Matrici di  
 trasmissione.

Lezione XIV

**Esercizi**

Per verifica riportiamo i valori dei parametri  $R_m$ ,  $G_m$ ,  $h_{12}$ ,  $g_{12}$  e  $t_{12}$  per il doppio bipolo proposto in precedenza.

$$R_m = \frac{R_3 R_4}{R_0}, \quad G_m = - \frac{G_{11} R_5 R_4}{R_0 (R_3 + R_5)}$$

$$h_{12} = \frac{R_5 R_4}{(R_2 + R_4 + R_6) (R_3 + R_5) + (R_3 R_5)}$$

$$g_{12} = - \frac{R_5}{(R_1 + R_4) (R_2 + R_5 + R_6) + R_1 R_4} + \frac{R_4}{R_1 + R_4}$$

$$t_{12} = - \left[ R_1 + \frac{R_4 (R_2 + R_e + R_6)}{R_0} \right] \frac{(R_2 + R_e + R_6) (R_3 + R_5)}{R_5 R_4}$$

dove:

$$R_e = \frac{R_5 R_3}{(R_3 + R_5)}; \quad R_0 = R_2 + R_4 + R_e + R_6.$$

**Esercizi**

$R_e = \frac{R_5 R_3}{R_3 + R_5}$   
 $G_m = - \frac{G_{11} R_5 R_4}{(R_2 + R_e + R_4 + R_6) (R_3 + R_5)}$   
 $R_m = \frac{R_5 R_4}{R_2 + R_5 + R_6 + R_4}$

Lezione XV

**Esercizi**

$h_{12} = \frac{R_4 R_5}{R_3 R_5 + (R_3 + R_5) (R_2 + R_4 + R_6)}$   
 $g_{12} = - \frac{R_5}{R_2 + R_5 + R_6 + \frac{R_1 R_4}{R_1 + R_4}} + \frac{R_4}{R_1 + R_4}$   
 $t_{12} = - \frac{R_1 + \frac{R_4 (R_2 + R_e + R_6)}{R_2 + R_5 + R_6 + R_4}}{\frac{R_5 R_4}{(R_2 + R_e + R_6) (R_3 + R_5)}}$

Lezione XV

Per quanto riguarda il secondo problema è evidente che la seconda matrice non soddisfa la condizione  $|R_{rr}| \geq |R_{rs}|$ , analoga alla IV.23 per i parametri G. Volendo sintetizzare con un doppio bipolo a T la prima matrice, si ha:

$$R_a = 2 \Omega; R_b = 2 \Omega; R_c = 1 \Omega.$$

Se avessimo tentato di sintetizzare anche la seconda matrice avremmo ottenuto:

$$R_a = -1 \Omega; R_b = 3 \Omega; R_c = 1 \Omega;$$

il che, evidentemente, non è fisicamente realizzabile con resistori tradizionali. Naturalmente sarebbe possibile sintetizzare anche la seconda matrice se si accettasse di utilizzare generatori pilotati.

**Esercizi**

Dalle seguenti matrici R di un doppio bipolo, quale non soddisfa le condizioni di fisica realizzabilità e perché?

$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$      $\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

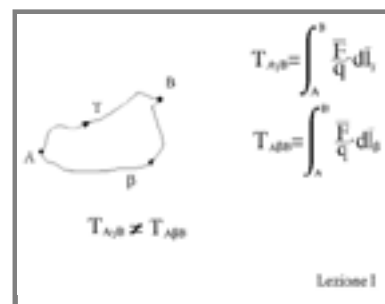
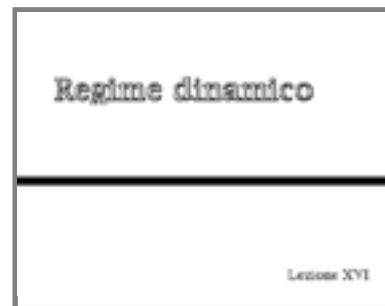
Lezione XIV

**I bipoli in regime dinamico: bipoli passivi**

Nell'esposizione della teoria dei circuiti, che abbiamo fin qui presentato, il tempo è entrato in maniera veramente marginale. Dovendo trattare di correnti, quindi di moto di cariche, non si può certo dire che il tempo non sia stato per nulla preso in considerazione; ma l'aver limitato tutto al caso di correnti stazionarie ha fatto sì che il tempo non sia entrato direttamente in gioco.

In questo capitolo cercheremo di estendere la gran parte dei concetti che abbiamo sviluppato per il regime stazionario al caso in cui le grandezze in gioco non sono più costanti nel tempo.

La prima domanda da porsi è se sia possibile anche in regime non stazionario parlare di bipoli. A rigore la risposta è negativa. Infatti in un regime non stazionario non è più possibile parlare di differenza di potenziale, né è lecito assumere che la corrente entrante in un morsetto di un resistore sia eguale a quella uscente dall'altro: due affermazioni che, come sappiamo, sono alla base della definizione di bipolo. Quando il campo elettrico (e magnetico) varia nel tempo, il suo integrale di linea tra due punti dipende dalla linea che si percorre



per andare da un punto all'altro; così come la quantità di carica elettrica che entra in una superficie chiusa non è necessariamente eguale, istante per istante, alla quantità di carica che ne esce. Ciò comporta, naturalmente, che la quantità di carica contenuta nella superficie stessa si modifichi nel tempo: cresca in un determinato intervallo di tempo per poi diminuire in un intervallo successivo.

Per fortuna questi fenomeni sono tanto più rilevanti quanto più grande è la rapidità di variazione nel tempo delle grandezze elettriche. Così accade che, se le variazioni sono sufficientemente lente, l'errore che si commette nel trascurare tali fenomeni è sufficientemente piccolo. È questo un enunciato puramente qualitativo che può lasciare largamente insoddisfatti. Si rimanda coloro che fossero interessati ad una trattazione più approfondita del problema alla seconda appendice integrativa. Si consiglia però di affrontare tale appendice soltanto dopo aver completato la lettura del presente capitolo.

Anche in regime dinamico, dunque, parleremo di differenza di potenziale ai morsetti di un resistore e di un unico valore, in ogni istante, della corrente che lo attraversa; il legame tra queste due grandezze sarà fornito dalla caratteristica del bipolo che scriveremo (convenzione dell'utilizzatore):

$$v(t) = R i(t), \quad (V.1)$$

dove l'uso delle lettere minuscole  $v$  ed  $i$  serve appunto a ricordare, per convenzione, che si tratta di grandezze variabili nel tempo.

In regime dinamico il bipolo resistore non è l'unico bipolo lineare e passivo che possiamo introdurre; si può pensare, per esempio, ad una relazione di proporzionalità non più tra corrente e tensione, bensì tra corrente e derivata della tensione o tra tensione e derivata



della corrente. Essendo l'operatore derivata un operatore lineare, tali caratteristiche saranno anche esse lineari. Siamo così portati ad introdurre due nuove tipi di bipoli. Il *condensatore*, in cui tensione e corrente sono legate dalla relazione:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}, \quad (V.2)$$

e l'*induttore* in cui la relazione caratteristica è descritta da:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}. \quad (V.3)$$

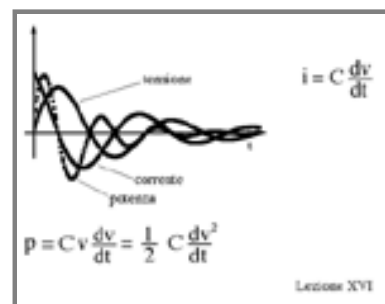
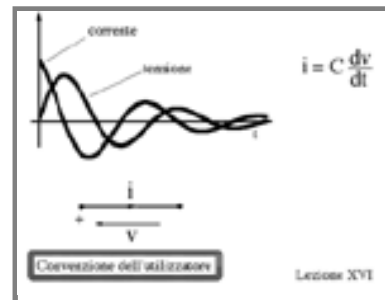
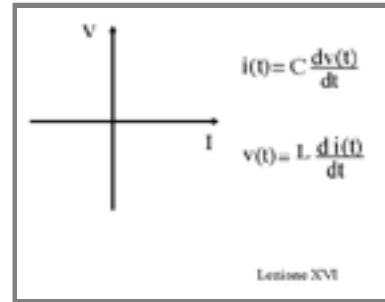
Le relative costanti di proporzionalità prendono il nome, rispettivamente, di *capacità* del condensatore e di *induttanza*, o *coefficiente di autoinduzione*, dell'induttore. Nel Sistema Internazionale la capacità si misura in *farad* e l'induttanza in *henry* e sono entrambe definite positive, se si assume una convenzione dell'utilizzatore sul bipolo.

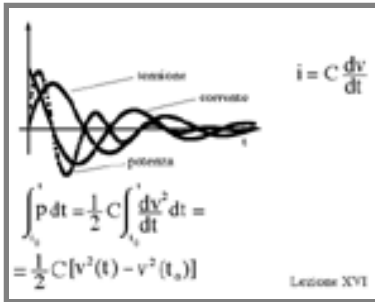
Si osservi che le caratteristiche dei due nuovi bipoli lineari introdotti non possono essere descritte, come accadeva per il resistore, in un piano (i,v). È questo soltanto il riflesso di differenze ben più significative che vogliamo ora cercare di porre in evidenza.

Nella immagine a lato sono rappresentati gli andamenti di tensione e corrente in un condensatore per un caso particolare: si noti che, essendo la corrente proporzionale alla derivata della tensione, essa è nulla dove la tensione ha un massimo o un minimo. D'altra parte v, per definizione, è il lavoro svolto per portare una carica unitaria attraverso il salto di potenziale pari appunto a v. Per "i" cariche al secondo la potenza, istante per istante, sarà:

$$p = v(t) i(t) = C v \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} C \frac{dv^2}{dt}. \quad (V.4)$$

Avendo assunto una convenzione dell'utilizzatore, tale



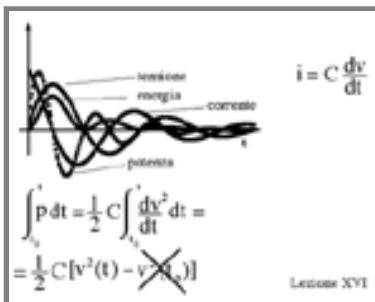


potenza è una *potenza assorbita* dal bipolo. Nella successiva immagine è riportato anche l'andamento nel tempo di tale potenza; come si vede essa è, per alcuni intervalli di tempo, negativa. Ma una potenza assorbita negativa corrisponde ad una *potenza generata* positiva; questo vuol dire che il condensatore in alcuni intervalli di tempo è in grado di fornire potenza ai suoi morsetti piuttosto che assorbirla. Il comportamento è dunque radicalmente differente da quello del bipolo resistore che invece è solo in grado di assorbire potenza. Per approfondire ancora l'argomento proviamo a calcolare l'energia fornita al bipolo in un intervallo di tempo ( $t_0, t_0+T$ ). Si avrà:

$$w(t) = \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) i(t) dt = \frac{1}{2} C \int_{t_0}^{t_0+T} \frac{dv^2}{dt} dt =$$

(V.5)

$$= \frac{1}{2} C \int_{v^2(t_0)}^{v^2(t_0+T)} dv^2 = \frac{1}{2} C [v^2(t_0+T) - v^2(t_0)].$$



Se per esempio scegliamo  $t_0$  nell'istante in cui  $v=0$ , possiamo affermare che l'energia assorbita fino all'istante  $t$ , dipende soltanto dal valore della tensione ai capi del condensatore allo stesso istante  $t$  ed è, per la precisione, pari a  $Cv^2/2$ .

Una conseguenza immediata di tale affermazione è che, se il condensatore fino all'istante iniziale  $t_0$  ha assorbito una energia nulla ( $v=0$ ), l'energia che verrà assorbita in un successivo intervallo ( $t_0, t$ ) sarà sempre positiva ( $Cv^2/2$ ). In altri termini un condensatore è in grado di fornire energia ai suoi morsetti, durante un certo intervallo, di tempo soltanto se tale energia è stata assorbita in un intervallo precedente. Si dice che l'energia è stata

in precedenza immagazzinata dal condensatore e per questo motivo essa può successivamente essere restituita; nel seguito faremo una dettagliata verifica di tale affermazione in un caso particolarmente emblematico, e troveremo che l'energia che un condensatore può fornire durante la sua scarica è esattamente eguale a quella che ha immagazzinato durante la sua carica. Per ora limitiamoci a questa osservazione e notiamo che, non essendo il condensatore in grado di produrre energia elettrica, ma soltanto di immagazzinarla, esso va considerato a tutti gli effetti un bipolo passivo; il suo comportamento, però, ci consiglia di modificare la definizione fin qui usata di passività di un bipolo. Diremo che un bipolo è passivo se l'energia da esso assorbita - convenzione dell'utilizzatore, quindi - dall'origine dei tempi  $(-\infty)$  fino ad un qualsiasi istante  $t$  è non negativa:

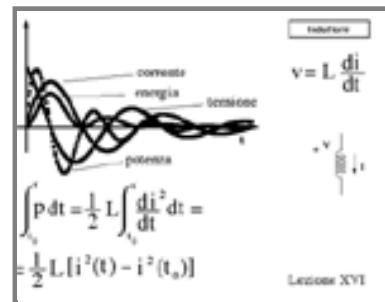
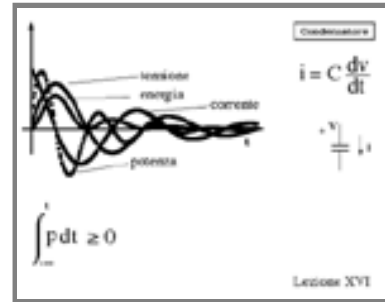
$$\int_{-\infty}^t p \, dt \geq 0. \tag{V.6}$$

Ragionamenti analoghi per l'induttore ci portano a concludere che anche in questo caso c'è una energia immagazzinata, ma questa volta dipendente dalla corrente, e data dalla seguente espressione:

$$w = \frac{1}{2} L i^2. \tag{V.7}$$

Il fatto che sia l'induttore che il condensatore abbiano in generale una energia immagazzinata, ha come conseguenza che essi sono bipoli che, in un certo senso, posseggono una "memoria". In ogni istante il valore di energia da essi posseduto dipende dalla loro storia passata e condiziona la loro storia futura. È dunque una memoria a tutti gli effetti e vedremo quanto ciò condiziona il loro comportamento dinamico.

Pur se con le loro specificità, i bipoli induttore e condensatore, se inseriti in una rete insieme ad altri bipoli,



Assumiamo che, in ogni istante, i principi di Kirchhoff siano ancora validi!

Lezione XVI

devono anche loro sottostare alle leggi di Kirchhoff: la LKC e la LKT, istante per istante. La conseguenza immediata di questa constatazione è che tutte le proprietà delle reti che abbiamo potuto dimostrare valide in regime stazionario basandoci sulle sole leggi di Kirchhoff, restano valide, istante per istante, anche in regime dinamico. Proviamo a ricordarle.

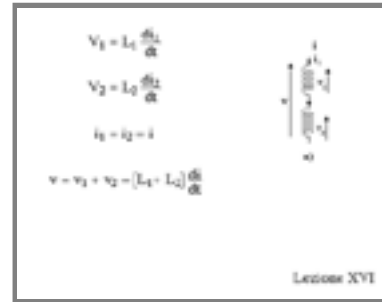
In primo luogo si possono scrivere per una rete in regime dinamico  $n-1$  equazioni ai nodi ed  $l-(n-1)$  equazioni alle maglie, oppure  $n-1$  equazioni nelle incognite potenziali ai nodi, o ancora  $l-(n-1)$  equazioni nelle incognite correnti di maglia. Le equazioni conterranno in alcuni termini delle derivate temporali, e quindi saranno equazioni differenziali ordinarie: ci porremo tra breve il problema della loro soluzione.

E ancora: si potrà considerare valido il teorema di Tellegen istante per istante! Dal teorema di Tellegen si potrà derivare un teorema di reciprocità anch'esso valido istante per istante. Si intuisce anche che tutti i teoremi di equivalenza tra bipoli sarebbero facilmente estendibili se sapessimo come trattare in maniera adeguata le caratteristiche dinamiche dell'induttore e del condensatore

Non è invece più valido il teorema di non amplificazione delle tensioni e quindi delle correnti. Il motivo è facilmente intuibile: come si è visto, in regime dinamico esistono bipoli in grado di immagazzinare e poi restituire energia; partendo da questa considerazione si può provare ad individuare, nella dimostrazione che abbiamo dato di tali teoremi, quale è l'ipotesi che viene meno quando le grandezze variano nel tempo.

Possiamo dunque costruire una rete di bipoli non più solo resistivi, e scrivere per tale rete delle relazioni tra tensioni e correnti dettate dalle leggi di Kirchhoff. Resta da vedere come da queste equazioni si giunge alla

determinazione delle grandezze elettriche, tensione e corrente, nel loro andamento temporale. Tratteremo questo aspetto partendo da casi particolari estremamente semplici fino a giungere ai casi più complessi. Cominciamo con osservare che non pone alcun problema una rete costituita o da soli induttori o da soli condensatori. È infatti molto facile ricavare regole di equivalenza per i quattro casi indicati negli schemi riportati nelle immagini a lato. Si ha infatti per la serie di due induttori:



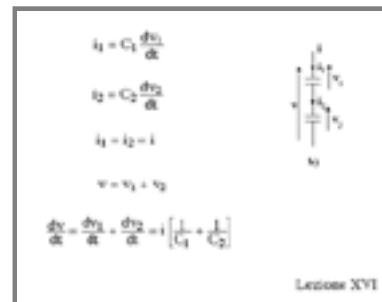
$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}, \quad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}, \quad v = v_1 + v_2, \quad i = i_1 = i_2,$$

$$v = v_1 + v_2 = L_1 \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt} = (L_1 + L_2) \frac{di}{dt};$$

e quindi due induttori in serie sono equivalenti ad un unico induttore la cui induttanza sia pari alla somma delle loro induttanze:

$$L = L_1 + L_2; \tag{V.8}$$

Per i condensatori in serie si ha invece:



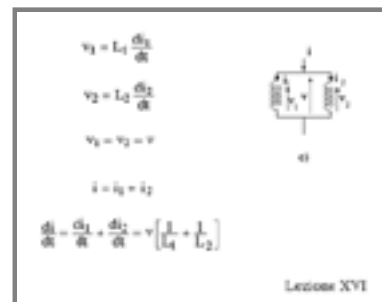
$$i_1 = C_1 \frac{dv_1}{dt}, \quad i_2 = C_2 \frac{dv_2}{dt}, \quad v = v_1 + v_2, \quad i = i_1 = i_2,$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_1}{dt} + \frac{dv_2}{dt} = \frac{i_1}{C_1} + \frac{i_2}{C_2} = i \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right);$$

e quindi la capacità equivalente di due condensatori in serie si ottiene dalla:

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \tag{V.9}$$

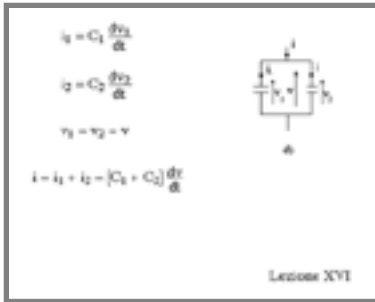
Analogamente per gli induttori in parallelo si ha:



$$v_1 = L_1 \frac{di_1}{dt}, \quad v_2 = L_2 \frac{di_2}{dt}, \quad v = v_1 = v_2, \quad i = i_1 + i_2,$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} = \frac{v_1}{L_1} + \frac{v_2}{L_2} = v \left( \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} \right);$$

e quindi la loro induttanza equivalente è:



$$L = \frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} \quad (\text{V.10})$$

Ed infine, per il caso dei due condensatori in parallelo si ottiene:

$$i_1 = C_1 \frac{dv_1}{dt}, \quad i_2 = C_2 \frac{dv_2}{dt}, \quad v = v_1 = v_2, \quad i = i_1 + i_2,$$

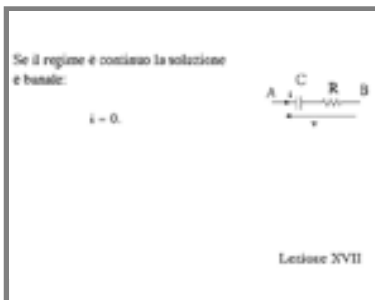
$$i = i_1 + i_2 = C_1 \frac{dv_1}{dt} + C_2 \frac{dv_2}{dt} = (C_1 + C_2) \frac{dv}{dt};$$

e quindi:

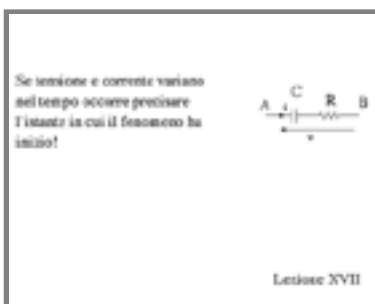
$$C = C_1 + C_2 \quad (\text{V.11})$$

### I circuiti RC ed RL

Se nella rete sono presenti anche resistori, le cose si complicano. Consideriamo il caso della serie di un condensatore e di un resistore. Se fossimo in regime stazionario, per la presenza del condensatore che non consente il passaggio di una corrente stazionaria, la soluzione sarebbe banale:  $i=0$ . Se invece le grandezze variano nel tempo, diventa necessario precisare quando il fenomeno ha inizio.



Come abbiamo visto, infatti, i nuovi bipoli introdotti sono in grado di immagazzinare energia; è evidente, quindi, che il comportamento dell'intero circuito sarà necessariamente condizionato dal livello di energia posseduto all'istante iniziale. In un caso concreto l'*istante iniziale* è chiaramente definito dalla procedura che si mette in opera per collegare il bipolo. Per esempio, dopo aver collegato il morsetto B, collego il morsetto A nell'istante ecc. ecc. Com'è noto, per effettuare concretamente tali collegamenti si utilizzano dispositivi che chiamiamo *interruttori*. Conviene a questo punto introdurre una opportuna idealizzazione di tali disposi-



tivi e, precisamente, un bipolo che abbia la caratteristica di essere del tutto simile ad un circuito aperto prima di un determinato istante  $t_0$ , che viene detto *istante di chiusura dell'interruttore*, e viceversa si comporti come un bipolo corto circuito per tutti gli istanti  $t \geq t_0$ . Ovviamente, dove è possibile, conviene porre  $t_0 = 0$ , coincidente con l'arbitraria origine dei tempi!

Il bipolo così definito è un *interruttore in chiusura*; in maniera del tutto analoga si potrà definire un *interruttore in apertura*.

Completiamo, dunque, il circuito precedentemente preso in considerazione inserendo appunto un bipolo *interruttore ideale* - è questo il nome che gli riserveremo anche se spesso il termine ideale verrà sottinteso. I relativi simboli sono quelli mostrati nelle figure, dove le frecce indicano chiaramente se si tratta di interruttore in chiusura o in apertura.

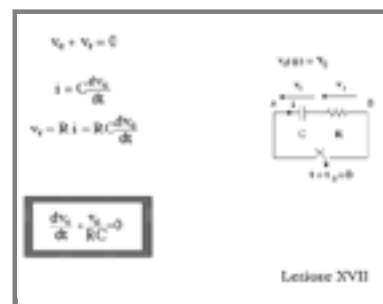
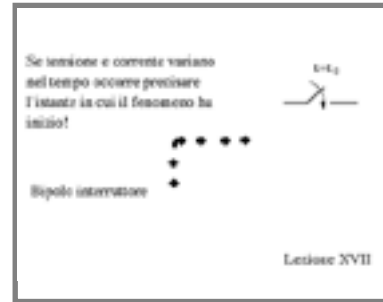
Notiamo che nella rete - molto semplice in verità - non esistono generatori. Questo non vuol dire che la corrente in essa sia necessariamente nulla, perché, come abbiamo visto, in generale c'è dell'energia immagazzinata nel condensatore C all'istante iniziale. Fissiamo il livello di tale energia assegnando il valore  $V_0$  che la tensione sul condensatore ha all'istante  $t=0$ . È questo il solo parametro che occorre dare in quanto tutta la storia passata del condensatore è racchiusa nella sua energia immagazzinata all'istante considerato; energia che dipende in maniera univoca dal valore della tensione ai suoi capi:  $w=Cv^2/2$ .

Scriviamo ora l'equazione che esprime la LKT all'unica maglia presente:

$$v_R + v_C = 0, \tag{V.12}$$

cioè:

$$R i + v_C = 0, \tag{V.13}$$



dove:

$$i = C \frac{dv_C}{dt}, \quad (\text{V.14})$$

e quindi:

$$RC \frac{dv_C}{dt} + v_C = 0. \quad (\text{V.15})$$

In modo naturale siamo pervenuti ad una equazione in cui compare come incognita la tensione  $v_C$  sul condensatore. Se ne può ricavare una equivalente in cui l'incognita sia la corrente  $i$ ; basta derivare una volta la (V.13) e tenere conto della (V.14). Si ottiene:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} = 0. \quad (\text{V.16})$$

Le equazioni (V.15) e (V.16) sono equivalenti, anche se, come vedremo subito, l'equazione (V.15) è nella forma più conveniente, in presenza di un condensatore.

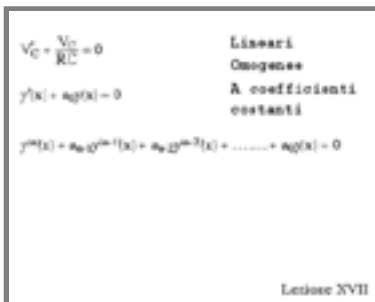
L'equazione (V.15) è una equazione differenziale ordinaria, omogenea, lineare, del primo ordine, a coefficienti costanti nella incognita  $v_C(t)$ . È una equazione differenziale, perché l'incognita compare con le sue derivate; ordinaria, perché tali derivate sono appunto ordinarie e non parziali; omogenea, perché non vi compare un termine indipendente dalla incognita a secondo membro; del primo ordine, perché questo è il massimo ordine di derivazione presente; a coefficienti costanti, infine, perché i coefficienti dei vari termini non sono funzioni del tempo.

Il caso più generale è quello di una equazione di ordine  $n$  del tipo:

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0, \quad (\text{V.17})$$

dove abbiamo scelto di indicare con la lettera  $x$  la variabile indipendente e con la  $y$  la funzione incognita.

Un classico capitolo dell'Analisi Matematica ci fornisce





una metodologia del tutto generale per la sua soluzione; proviamo a ricordare, sinteticamente, le basi su cui tale metodologia si fonda.

Cominciamo con l'equazione di primo ordine:

$$\frac{dy}{dx} + a_0y = 0, \tag{V.18}$$

e osserviamo che se  $y_1(x)$  è una soluzione dell'equazione, allora anche  $y_2(x)=ky_1(x)$ , dove  $k$  è una costante arbitraria, è soluzione della stessa equazione: una semplice conseguenza della linearità che è facile verificare sostituendo la nuova soluzione nell'equazione. Questo vuol dire che non esiste una unica soluzione, bensì una famiglia di soluzioni che differiscono per una costante moltiplicativa. Vedremo subito che tale famiglia comprende anche tutte le soluzioni possibili.

Possiamo immaginare di rappresentare tutte le soluzioni dell'equazione (V.18) nel piano (x,y) ottenendo così una famiglia di curve. È facile rendersi conto che tali curve non possono intersecarsi; infatti, se due curve avessero un punto in comune, in quel punto esse dovrebbero avere in comune anche la derivata prima, come si deduce immediatamente dalla (V.18) in cui il valore della funzione in un punto è messo in relazione univoca con quello della sua derivata nello stesso punto. Derivando poi l'equazione (V.18) si vede immediatamente che un tale ragionamento è estendibile alle derivate di ordine superiore: se è nota la derivata prima in un punto è nota anche la derivata seconda nello stesso punto. Si noti che tutto ciò è possibile in quanto il coefficiente  $a_0$  è costante!

In definitiva si conclude che se due soluzioni avessero un punto in comune, nella rappresentazione nel piano (x,y), esse dovrebbero avere anche tutte le derivate in comune in quel punto, e quindi dovrebbero essere

<p>Equazione del primo ordine</p> $y'(x) + a_0y(x) = 0$ $y_1'(x) + a_0y_1(x) = 0$ $k y_1'(x) + a_0k y_1(x) = 0$ $y'(x) = k y_1'(x)$	<p>Se <math>y_1(x)</math> è una soluzione, allora anche <math>k y_1(x)</math> è una soluzione</p>
---	---

Lezione XVII

Nel piano x,y possiamo rappresentare le soluzioni.

$$k y'(x_0) = y_0$$

$$y'(x) = -a_0 y(x)$$

$$y''(x) = -a_0 y'(x)$$

$$y'''(x) = -a_0 y''(x)$$

$$y^{(4)}(x) = -a_0 y^{(3)}(x)$$

Lezione XVII

$$y'(x) = -a_0 y(x)$$

$$y''(x) = -a_0 y'(x)$$

la particolare, se è  $y_0$  il valore noto in  $x_0$ , si ottiene:

$$y'(x_0) = -a_0 y_0$$

$$y''(x_0) = -a_0^2 y_0$$

$$y'''(x_0) = -a_0^3 y_0$$

$$y^{(4)}(x_0) = -a_0^4 y_0$$

Lezione XVII

$$y(x) = y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-a_0)^n (x-x_0)^n}{n!} = y_0 e^{-a_0(x-x_0)}$$

$$y'(x_0) = -a_0 y_0$$

$$y''(x_0) = +a_0^2 y_0$$

$$y'''(x_0) = -a_0^3 y_0$$

$$y^{(4)}(x_0) = +a_0^4 y_0$$

Lezione XVII

coincidenti.

Le osservazioni fatte portano a due ulteriori conclusioni. In primo luogo, per individuare una sola soluzione all'interno della famiglia di soluzioni, basta fissare il valore che essa assume in un punto, diciamo  $x_0$ . In secondo luogo, poiché se è noto il valore in  $x_0$  sono noti i valori di tutte le derivate nello stesso punto, è possibile esprimere la soluzione cercata sotto forma di uno sviluppo in serie di potenze di punto iniziale  $x_0$ :

$$y(x) = \sum_0^{\infty} \frac{y^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (V.19)$$

Nella V.19, per snellire le formule, si è usato il simbolo  $y^{(n)}(x)$  per indicare la derivata ennesima della funzione  $y(x)$ . D'altra parte, dall'equazione V.18 si ha:

$$\begin{aligned} y^{(1)}(x_0) &= -a_0 y(x_0), \\ y^{(2)}(x_0) &= -a_0 y^{(1)}(x_0) = a_0^2 y(x_0), \end{aligned} \quad (V.20)$$

e, in generale:

$$y^{(n)}(x_0) = (-a_0)^n y(x_0). \quad (V.21)$$

In conclusione si ottiene:

$$y(x) = y(x_0) \sum_0^{\infty} \frac{(-a_0)^n}{n!} (x - x_0)^n. \quad (V.22)$$

Un osservatore attento avrà riconosciuto che lo sviluppo di cui alla (V.22) è quello dell'esponenziale  $y(x_0) e^{-a_0(x-x_0)}$ .

Abbiamo dunque determinato la soluzione dell'equazione (V.18), attraverso un suo sviluppo in serie; proviamo a ritrovare lo stesso risultato guardando le cose da un altro punto di vista. Il nuovo punto di vista ci sarà molto utile quando vorremo generalizzare il procedimento al caso di equazioni di ordine superiore. Supponiamo che qualcuno ci abbia suggerito che la soluzione debba essere del tipo  $ke^{c\alpha}$ , senza però darci

$$y'(x) + a_0 y(x) = 0$$

$$y(x) = e^{c\alpha}$$

$$e^{c\alpha} (c + a_0) = 0 \Rightarrow c = -a_0$$

$$y(x) = k_1 e^{-a_0 x}$$

Lezione XVII

il valore di  $\alpha$ . L'ipotesi non è poi tanto strana: la forma della V.18 ci dice che la sua soluzione deve essere tale da avere una derivata che coincida, a meno di una costante moltiplicativa, con la soluzione stessa; è immediato pensare alla funzione esponenziale!

Volendo determinare  $\alpha$  basta sostituire la soluzione ipotizzata nell'equazione ed ottenere:

$$ke^{\alpha x}(\alpha + a_0) = 0, \tag{V.23}$$

cioè  $\alpha = -a_0$ .

Per determinare il valore di k basterà fissare il valore della funzione in un punto.

L'equazione  $\alpha + a_0 = 0$ , prende il nome di *equazione caratteristica* della equazione di partenza.

Proviamo ad applicare questa tecnica all'equazione (V.15) del nostro circuito. In primo luogo l'equazione caratteristica:

$$\alpha + \frac{1}{RC} = 0, \tag{V.24}$$

la cui soluzione è  $\alpha = -1/RC$ . L'integrale generale sarà:

$$v_C(t) = k e^{-t/RC}. \tag{V.25}$$

La soluzione dipende da una costante arbitraria; il che è naturale perché non abbiamo ancora imposto la condizione che il condensatore all'istante iniziale abbia la tensione  $V_0$ . Imponendo tale condizione si ottiene:

$$v_C(t = 0) = k = V_0,$$

e quindi la soluzione è:

$$v_C(t) = V_0 e^{-t/RC}. \tag{V.26}$$

La *costante di tempo*  $T = RC$ , che caratterizza il decadimento della tensione sul condensatore, ha una interessante interpretazione geometrica. Se si considera infatti la tangente alla curva che rappresenta l'andamento di tale tensione nel punto  $t = 0$ , e la si prolunga fino ad intersecare l'asse dei tempi, si verifica facilmente che

$\alpha + \frac{1}{RC} = 0$   
 $\alpha = -\frac{1}{RC}$   
 $V_C(t) = k e^{-t/RC}$   
 $\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{RC} = 0$

$V(0) = V_0$   
 $V_C(t) = k e^{-t/RC}$   
 $V_C(0) = k = V_0$   
 $t = t_0 = 0$

Lectioe XVII

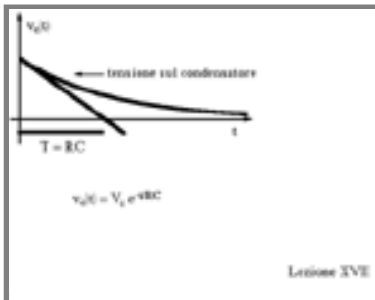
$V_C(t) = k e^{-t/RC}$   
 $V_C(0) = k = V_0$   
 $V_C(t) = k e^{-t/RC}$   
 $\frac{dV_C}{dt} + \frac{V_C}{RC} = 0$

$V(0) = V_0$   
 $V_C(t) = k e^{-t/RC}$   
 $V_C(0) = k = V_0$   
 $t = t_0 = 0$

Lectioe XVII

tale intersezione individua un intervallo di tempo pari a  $T$ . Si noti che, a causa dell'andamento esponenziale, il valore finale è raggiunto, a rigore, solo dopo un tempo infinito. In pratica, però, dopo un tempo pari ad alcune volte la costante di tempo, il valore della tensione è già molto vicino a quello finale; per  $t = 3T$ , per esempio, si ha che:

$$v_c(3T) = V_0 e^{-3} = 0,05V_0.$$



Ricordando che  $i = C dv_c/dt$  si ha anche:

$$i(t) = - \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}. \quad (V.27)$$

Se avessimo provato a risolvere la (V.16) invece della (V.15) avremmo ottenuto, con un procedimento del tutto simile:

$$i(t) = k' e^{-t/RC}. \quad (V.28)$$

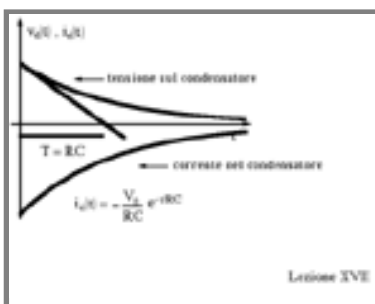
Per individuare completamente la soluzione, abbiamo bisogno di determinare la nuova costante  $k'$ . In analogia a quanto fatto in precedenza  $k'$  potrebbe essere determinata conoscendo il valore della corrente iniziale  $i(0)$ . Ma apparentemente tale valore non ci è noto! Confrontando la (V.27) e la (V.28) possiamo dedurre che deve essere  $i(0) = k' = -V_0/R$ . Infatti alla stessa conclusione si arriva se si considera che la LKT, applicata all'unica maglia della rete, deve essere verificata in qualsiasi istante, e quindi anche all'istante  $t=0$ , cioè:

$$v_C(t=0) + v_R(t=0) = 0,$$

e quindi:

$$v_C(t=0) = V_0 = -v_R(t=0) = -R i(t=0),$$

da cui si deduce, appunto, il valore anticipato di  $i(t=0)$ . Questo procedimento può essere generalizzato: ogni volta che occorre conoscere il valore iniziale di una grandezza che non sia esplicitamente noto, basta appli-



care le LK all'istante 0 e ricavare dai valori esplicitamente noti quelli noti solo in maniera implicita.

Siamo ora in grado di effettuare la verifica che avevamo promesso. La (V.27) ci dice che la rete è sede di una corrente che, partendo dal valore  $-V_0/R$ , va a 0 con legge esponenziale. Dato che la corrente  $i$  attraversa una resistenza  $R$ , essa produrrà una dissipazione di energia che possiamo calcolare:

$$\int_0^{\infty} Ri^2 dt = \int_0^{\infty} R \left[ \frac{V_0}{R} \right]^2 e^{-2t/RC} dt =$$

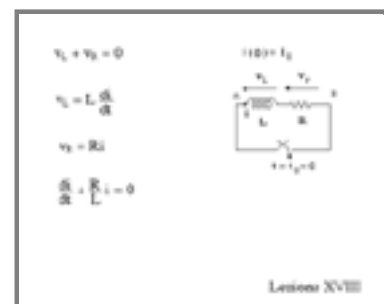
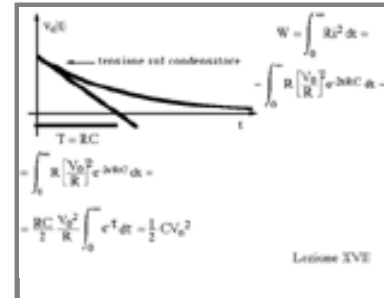
$$= \frac{RC}{2} \frac{V_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-\tau} d\tau = \frac{1}{2} CV_0^2.$$

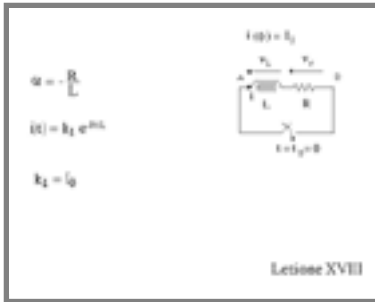
Cioè l'energia dissipata nel resistore da  $t=0$ , inizio del fenomeno, a  $t=\infty$ , è pari a  $CV_0^2/2$ , a conferma del fatto che tale energia era effettivamente immagazzinata nel condensatore all'istante  $t=0$ . Ricapitolando, ed introducendo per l'occasione un linguaggio più idoneo, possiamo dire che all'atto della chiusura di un interruttore in un circuito costituito dalla serie di un resistore e di un condensatore inizialmente carico alla tensione  $V_0$ , si stabilisce una corrente che decade esponenzialmente con una *costante di tempo*  $T=RC$ . Il fenomeno è *transitorio* nel senso che per  $t$  che tende ad  $\infty$  la corrente va a zero. Anche la tensione  $V$  sul condensatore va a zero con la stessa legge, riducendo di pari passo anche l'energia immagazzinata nel condensatore! La terminologia introdotta verrà nel seguito applicata a casi sempre più generali.

Esaminiamo ora un caso simile al precedente in cui al posto del condensatore sia presente un induttore  $L$ ; la storia è la stessa, cambiano solo i protagonisti.

Ci limiteremo ad elencare un certo numero di passaggi che dovrebbero essere di per sè chiari!

In primo luogo l'equazione all'unica maglia presente:





$$v_R + v_L = 0 \quad (\text{V.29})$$

con  $v_L = L di/dt$  ed  $v_R = Ri$  si ha:

$$Ri + L \frac{di}{dt} = 0, \quad (\text{V.30})$$

e quindi:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = 0. \quad (\text{V.31})$$

In conclusione si ha che:

$$i = k e^{-Rt/L}.$$

Se  $i(0) = I_0$ , se cioè l'induttore aveva una energia magnetica  $W_m = L I_0^2/2$  immagazzinata all'istante  $t=0$ , o anche, mutuando il linguaggio introdotto per il condensatore, se l'induttore era inizialmente *carico alla corrente*  $I_0$ , si ha:

$$i = I_0 e^{-Rt/L}. \quad (\text{V.32})$$

In termini di  $v_L$ , tensione sull'induttore, si ha:

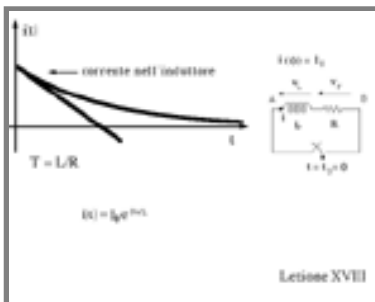
$$v_L = L \frac{di}{dt} = -RI_0 e^{-Rt/L},$$

che poteva anche essere ricavata risolvendo l'equazione che si ottiene derivando una volta la (V.30):

$$\frac{R}{L} v_L + \frac{dv_L}{dt} = 0.$$

Anche in questo caso la condizione iniziale sulla  $v_L$  si può ottenere dalla scrittura della LKT all'istante  $t=0$ .

Prima di passare a casi più complessi, in cui nella rete siano presenti sia bipoli induttori che condensatori, è opportuno sottolineare che tali bipoli non sono soltanto delle pure astrazioni ma hanno, come era facile immaginare, delle concrete realizzazioni. Un sistema a due morsetti come quello mostrato nella pagina successiva, per esempio, ha una caratteristica che, in un largo campo dei parametri, può essere assimilata a quella di un bipolo condensatore. Il sistema è costitui-



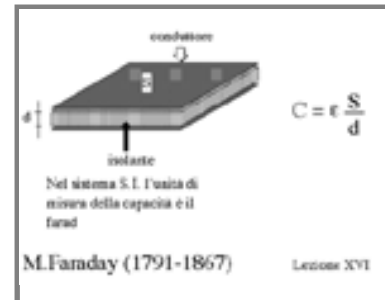
to da due piastre piane (di area  $S$ ), realizzate in un materiale buon conduttore, separate da uno strato di materiale isolante di spessore  $d$ . La corrente viene portata alle due piastre attraverso due conduttori, che supporremo molto sottili, che giocano il ruolo dei morsetti del bipolo. La costante di proporzionalità tra corrente e derivata della tensione, che abbiamo chiamato capacità del condensatore, in questo caso specifico, è data da:

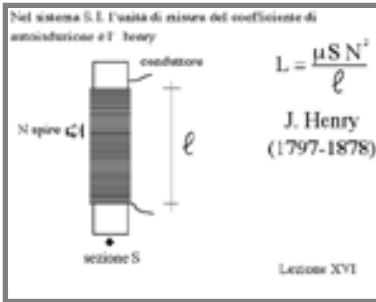
$$C = \epsilon \frac{S}{d},$$

dove  $\epsilon$  è la così detta costante dielettrica caratteristica del mezzo interposto tra le piastre, che prendono anche il nome di *armature* del condensatore. Naturalmente per giustificare queste affermazioni, e per comprenderne anche i limiti di validità, bisognerebbe valicare quei confini che fin dall'inizio ci siamo proposti. Ci limitiamo ad osservare che se teniamo conto della definizione di intensità della corrente elettrica - quantità di carica trasportata nell'unità di tempo -, ed integriamo la caratteristica del condensatore, di cui alla (V.2), a partire da un istante in cui il condensatore è scarico ( $v=0$ ), otteniamo:

$$Q = \int_0^t i \, dt = C \int_0^t \frac{dv_C}{dt} \, dt = C V.$$

Poiché nelle nostre ipotesi il mezzo interposto è un isolante perfetto, la carica portata dalla corrente entrante nel morsetto superiore, per esempio, non può che fermarsi sulla corrispondente armatura del condensatore; un ragionamento analogo porta a concludere che sull'altra armatura si dovrà ritrovare una carica eguale in modulo ma di segno opposto. La capacità  $C$  è dunque anche il rapporto tra carica depositata sulle armature del condensatore e differenza di potenziale tra le armature stesse. Ricordiamo infine che nel Sistema



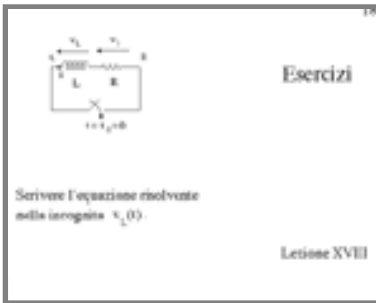


Internazionale la capacità si misura in *farad*.  
 In maniera del tutto analoga un sistema costituito da N spire di un filo conduttore avvolte su di un supporto cilindrico, in modo tale che l'avvolgimento nel suo complesso abbia lunghezza *l* e sezione S, presenta ai suoi morsetti, entro buoni limiti di approssimazione, una caratteristica del tipo illustrato nella (V.3). L'induttanza, o coefficiente di autoinduzione, in questo caso è data da:

$$L = \frac{\mu S N^2}{l},$$

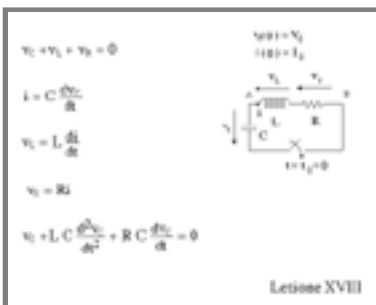
dove  $\mu$  è la così detta *permeabilità magnetica* del materiale di cui è costituito il supporto. L'induttanza, nel Sistema Internazionale, si misura in *henry*. Anche qui non possiamo spingerci oltre nell'analisi, ma rimandiamo alla appendice A2 per un approfondimento.

**Esercizi**



Per cominciare a sviluppare un certa pratica anche con le reti contenenti i nuovi bipoli, proviamo a scrivere l'equazione risolvente della rete con resistore ed induttore in serie, scegliendo, però, questa volta come incognita la tensione sull'induttore e non la corrente nello stesso; determiniamo anche l'opportuna condizione iniziale.

**Il circuito RLC serie**



A questo punto possiamo provare a mettere insieme i due nuovi bipoli in un circuito RLC serie come a lato mostrato.

L'equazione all'unica maglia presente fornisce:

$$v_R + v_C + v_L = 0. \tag{V.33}$$



Cioè:

$$R i + v_C + L \frac{di}{dt} = 0, \tag{V.34}$$

dove  $i = C dv_C/dt$ .

Per eliminare  $v_C$  dalle due equazioni precedenti si può derivare la prima. Si ottiene:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{dv_C}{dt} + L \frac{d^2i}{dt^2} = 0, \tag{V.35}$$

e tenendo conto della caratteristica del condensatore:

$$R \frac{di}{dt} + \frac{i}{C} + L \frac{d^2i}{dt^2} = 0.$$

Riordinando, infine, si ha:

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0. \tag{V.36}$$

Se invece, nella (V.34), si sostituisce alla corrente  $i$  la sua espressione in funzione della tensione sul condensatore si ottiene l'equivalente equazione in cui compare come incognita la tensione  $v_C$  invece della corrente  $i$ :

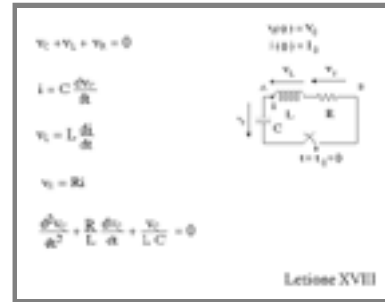
$$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0. \tag{V.37}$$

La (V.36) e la (V.37) sono equazioni differenziali ordinarie, lineari, omogenee, di secondo ordine a coefficienti costanti. Ragionamenti del tutto analoghi a quelli esposti per il caso dell'equazione di primo ordine ci porterebbero a costruire una soluzione sotto forma di sviluppo in serie di potenze. Più semplicemente possiamo generalizzare il metodo dell'equazione caratteristica. Per una equazione di secondo ordine:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = 0, \tag{V.38}$$

supponendo che la soluzione sia di tipo esponenziale,  $e^{\alpha x}$ , e sostituendo tale espressione nell'equazione, si ottiene una equazione caratteristica nella forma:

$$\alpha^2 + a_1 \alpha + a_0 = 0. \tag{V.39}$$



Equazione del secondo ordine

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad y(x) = k_1 e^{\alpha_1 x} + k_2 e^{\alpha_2 x}$$

$$y''(x) = -a_1 y'(x) - a_0 y(x)$$

$$y''(x) = -a_1 y'(x) - a_0 y(x)$$

Lezione XVIII

Esistono dunque due valori di  $\alpha$  che rendono l'esponenziale  $e^{\alpha x}$  soluzione della nostra equazione, e tali valori sono le radici dell'equazione caratteristica (V.39). Per la linearità dell'equazione, e fatta eccezione per il caso in cui le radici della (V.39) sono coincidenti - caso che esamineremo più avanti -, possiamo affermare che una famiglia di soluzioni dell'equazione V.38 è data da:

$$y = k_1 e^{\alpha_1 x} + k_2 e^{\alpha_2 x}, \quad (\text{V.40})$$

dove  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  sono le radici della (V.39) e  $k_1$  e  $k_2$  due costanti arbitrarie; per convincersene basta sostituire tale espressione nell'equazione e verificare che essa è soddisfatta per qualsiasi valore delle costanti. D'altra parte, come per il caso dell'equazione di primo ordine, la struttura stessa dell'equazione (V.38) ci dice che, se sono noti in un punto il valore della funzione incognita e quello della sua derivata prima, sono noti anche i valori assunti nello stesso punto da tutte le derivate, di ogni ordine, della funzione stessa; il valore della derivata seconda è, infatti, direttamente valutabile dall'equazione, mentre quello delle derivate di ordine superiore si ottiene facilmente derivando di volta in volta l'equazione stessa. Ma la conoscenza delle derivate di ogni ordine in un punto implica, salvo condizioni molto particolari che in questo contesto possiamo escludere, la conoscenza della funzione. D'altra parte la famiglia di soluzioni descritta dalla (V.40), dipendendo da due costanti arbitrarie, è in grado di fornirci una soluzione che si adatti, appunto, a valori assegnati della funzione e della sua derivata in un punto: basta determinare gli opportuni valori delle costanti. Di conseguenza tale famiglia di soluzioni costituisce anche la totalità delle soluzioni della (V.38), e ne rappresenta quindi l'*integrale generale*.

Resta ora da esaminare i vari casi che la natura dell'equazione caratteristica può presentare.

Equazione del secondo ordine

$$y''(x) + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = 0 \quad y(x) = k_1 e^{\alpha_1 x} + k_2 e^{\alpha_2 x}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

$$\alpha_1^2 - 4a_0 = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = -\frac{a_1}{2}$$

$$\frac{e^{\alpha_1 x} - e^{\alpha_2 x}}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

Lezione XVIII

Le soluzioni dell'equazione (V.40) sono:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \quad (V.41)$$

A seconda del valore del discriminante,  $\Delta = (a_1)^2 - 4a_0$ , le radici possono essere reali e distinte, reali e coincidenti ed immaginarie coniugate; quest'ultima affermazione è legata al fatto, che nel nostro caso, i coefficienti della (V.40) sono, per ipotesi, reali. Qualche problema può sorgere nel caso di radici coincidenti in quanto apparentemente la tecnica utilizzata non sembra portarci alla conoscenza di due soluzioni distinte, necessarie per costruire l'integrale generale della (V.38). Faremo vedere, invece, che anche nel caso di radici coincidenti è possibile costruire un'altra soluzione dell'equazione in esame utilizzando un semplice ed intuitivo processo al limite.

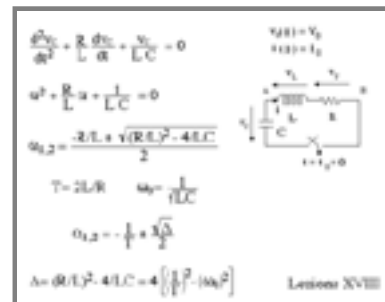
Partiamo dal caso in cui le radici siano distinte e poniamo, per comodità,  $\alpha_1 = \alpha$  ed  $\alpha_2 = \alpha + \Delta\alpha$ . Osserviamo che, in virtù della linearità dell'equazione, una qualsiasi combinazione lineare di soluzioni è ancora una soluzione; tale sarà dunque anche la particolare combinazione lineare descritta dalla espressione seguente:

$$y(x) = \frac{e^{(\alpha+\Delta\alpha)x} - e^{\alpha x}}{\Delta\alpha} \quad (V.41)$$

Facendo tendere  $\Delta\alpha$  a zero, e quindi  $\alpha_2$  ad  $\alpha_1$ , per ritrovare la condizione di radici coincidenti, si vede chiaramente che tale nuova soluzione tende alla derivata di  $e^{\alpha x}$  rispetto ad  $\alpha$ ; la (V.41), infatti, altro non è che il rapporto incrementale della funzione  $e^{\alpha x}$  interpretata come funzione di  $\alpha$  e non di  $x$ :

$$y(x) = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{(\alpha+\Delta\alpha)x} - e^{\alpha x}}{\Delta\alpha} = \frac{de^{\alpha x}}{d\alpha} = x e^{\alpha x} \quad (V.42)$$

Abbiamo in pratica dimostrato che, nel caso di radici



$\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = 0$   
 $\omega_0^2 T^2 + 1 = 0$   
 $\alpha_1 = -\frac{1}{T_1} ; \alpha_2 = -\frac{1}{T_2}$   
 $T_1 = \frac{T}{1 - \sqrt{1 - \omega_0^2 T^2}}$   
 $T_2 = \frac{T}{1 + \sqrt{1 - \omega_0^2 T^2}}$   
 Lezioni XVIII

reali e coincidenti, due soluzioni distinte sono:

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \quad \text{ed} \quad y_2(x) = x e^{\alpha x}. \quad (V.43)$$

Torniamo ora all'equazione del circuito RLC che ha originato questa digressione; l'equazione caratteristica è:

$$\alpha^2 + \frac{R}{L} \alpha + \frac{1}{LC} = 0. \quad (V.44)$$

con radici:

$$\alpha_{1,2} = \frac{-\frac{R}{L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{4}{LC}}}{2}, \quad (V.45)$$

che naturalmente sono reali e distinte, reali e coincidenti o immaginarie coniugate a seconda che  $\Delta = (R/L)^2 - 4/LC$  è maggiore di zero, nullo o negativo, rispettivamente. Conviene porre:

$$T = \frac{2L}{R} \quad \text{ed} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

si ha allora:

$$\Delta = \frac{4}{T^2} (1 - \omega_0^2 T^2),$$

e quindi le diverse condizioni su  $\Delta$  possono scriversi in termini di  $\omega_0 T$ .

Analizziamo i diversi casi uno per uno:

- 1)  $\omega_0 T < 1$ ; caso aperiodico.

$v_C(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t}$   
 $v_C(0) = k_1 + k_2 = V_0$   
 $\frac{dv_C}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{k_1}{T_1} - \frac{k_2}{T_2} = -\frac{V_0}{T}$   
 $k_1 = \frac{V_0 T_1}{T_1 - T_2} - \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \frac{V_0}{T}$   
 $k_2 = -\frac{V_0 T_2}{T_1 - T_2} - \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \frac{V_0}{T}$   
 Lezioni XVIII

In questo caso le radici  $\alpha_1$  ed  $\alpha_2$  dell'equazione caratteristica sono reali e distinte:

$$\alpha_1 = -\frac{1}{T_1} \quad \text{ed} \quad \alpha_2 = -\frac{1}{T_2},$$

con

$$T_1 = \frac{T}{1 - \sqrt{1 - (\omega_0 T)^2}} ; \quad T_2 = \frac{T}{1 + \sqrt{1 - (\omega_0 T)^2}}.$$

La soluzione sarà, dunque, del tipo:

$v_C(t) = k_1 e^{\alpha_1 t} + k_2 e^{\alpha_2 t}$   
 $\omega_0^2 T^2 + 1 = 0$   
 Lezioni XVIII

$$v_c(t) = k_1 e^{-t/T_1} + k_2 e^{-t/T_2}, \quad (V.46)$$

dove, evidentemente,  $k_1$  e  $k_2$  sono da determinarsi utilizzando le condizioni iniziali. Infatti, essendo presenti nel circuito due elementi *a memoria*, per determinarne univocamente l'evoluzione occorrerà conoscere il loro livello energetico all'istante iniziale; in altri termini occorrerà conoscere il valore della tensione sul condensatore, diciamo  $V_0$ , e quello della corrente nell'induttore, diciamo  $I_0$ , all'istante iniziale. La prima condizione ci fornisce facilmente:

$$v_c(0) = k_1 + k_2 = V_0. \quad (V.47)$$

Come abbiamo visto, per determinare una unica soluzione dalla famiglia di soluzioni descritta dalla (V.46), è necessario conoscere anche il valore della sua derivata nell'istante iniziale, mentre apparentemente la seconda condizione ci fornisce solo il valore della corrente nello stesso istante. È facile però, da quest'ultimo, determinare il valore cercato. Dalla caratteristica del condensatore si ha infatti:

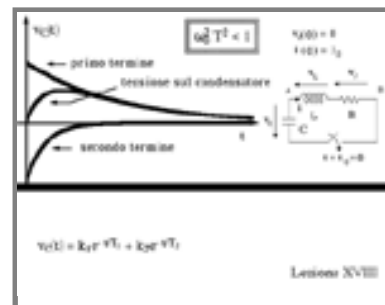
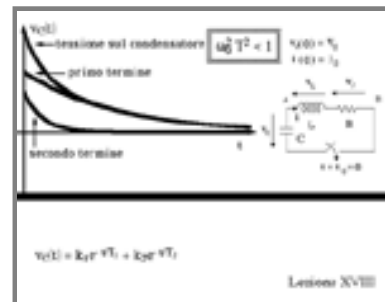
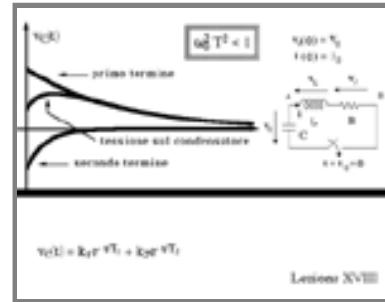
$$i(0) = C \left[ \frac{dv_c}{dt} \right]_{t=0} = -\frac{k_1}{T_1} - \frac{k_2}{T_2} = I_0. \quad (V.48)$$

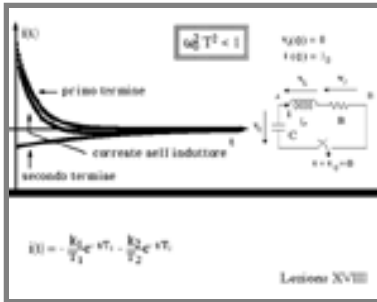
A questo punto, dalla V.47 e dalla V.48, le costanti  $k_1$  e  $k_2$  possono essere calcolate:

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{V_0 T_1}{T_1 - T_2} + \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \frac{I_0}{C}, \\ k_2 &= -\frac{V_0 T_2}{T_1 - T_2} - \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \frac{I_0}{C}. \end{aligned} \quad (V.49)$$

Nelle immagini a lato sono rappresentati alcuni andamenti tipici per il caso in questione; essi corrispondono a valori diversi delle costanti  $R$ ,  $L$  e  $C$ , e quindi a valori diversi delle due costanti di tempo  $T_1$  e  $T_2$ , ed a valori diversi delle condizioni iniziali.

Risolvendo l'equazione (V.36) invece della (V.37) si sarebbe potuto ottenere l'andamento della corrente  $i$ .

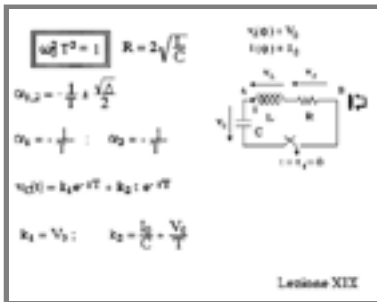




Naturalmente, avendo l'equazione gli stessi coefficienti, l'equazione caratteristica coincide con la precedente. È questo un fatto generale: in un circuito lineare tutte le grandezze evolvono con le stesse costanti di tempo. Variano, naturalmente, le espressioni delle costanti  $k_1$  e  $k_2$ .

La corrente  $i$  può anche essere ottenuta direttamente dalla espressione della tensione  $v_c$  sfruttando la caratteristica del condensatore. Si ottiene:

$$i(t) = C \frac{dv_c}{dt} = C \left\{ -\frac{k_1}{T_1} e^{-t/T_1} - \frac{k_2}{T_2} e^{-t/T_2} \right\}. \quad (V.50)$$



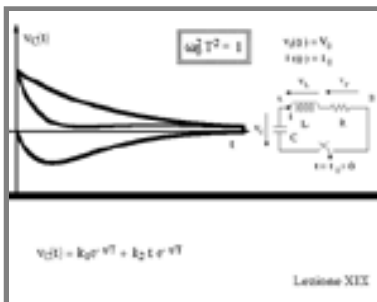
2)  $\omega_0 T = 1$ ; caso critico.

In tal caso  $R = 2\sqrt{L/C}$  e le radici sono reali e coincidenti. Un tale valore di  $R$  prende il nome di resistenza critica, per gli assegnati valori di  $L$  e  $C$ , in quanto separa due regimi che, come vedremo, sono sostanzialmente differenti. L'integrale generale, per quanto detto in precedenza, è:

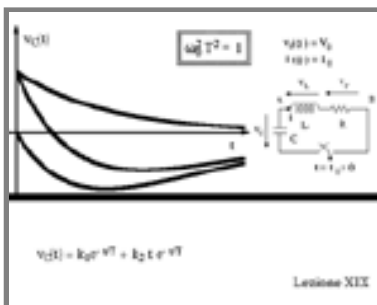
$$v_c(t) = k_1 e^{-t/T} + k_2 t e^{-t/T}. \quad (V)$$

In modo simile al precedente si ricavano le seguenti espressioni:

$$k_1 = V_0 \quad ; \quad k_2 = \frac{I_0}{C} + \frac{V_0}{T}. \quad (V)$$



Nelle immagini a lato sono rappresentati alcuni casi tipici per diversi valori dei parametri.



Naturalmente anche in questo caso l'andamento della corrente può essere ottenuto o risolvendo l'equazione (V.36) e imponendo le condizioni iniziali - che daranno luogo ad altre espressioni per le costanti - oppure direttamente derivando la tensione sul condensatore, come è mostrato nella prima immagine della pagina seguente.

3)  $\omega_0 T > 1$ ; caso oscillatorio.

In questo caso, essendo il discriminante dell'equazione caratteristica negativo, le soluzioni di tale equazione sono complesse. Esse sono anche coniugate in quanto i coefficienti dell'equazione sono reali. Avremo dunque:

$$\alpha_1 = \alpha_R + j\beta \quad \text{ed} \quad \alpha_2 = \alpha_R - j\beta.$$

La soluzione generale è, dunque, una combinazione lineare con due costanti arbitrarie delle funzioni:

$$y_1 = e^{(\alpha_R + j\beta)t} \quad \text{ed} \quad y_2 = e^{(\alpha_R - j\beta)t}.$$

D'altra parte, invece di tali funzioni è possibile prendere in considerazione le funzioni:

$$\begin{aligned} \frac{y_1 + y_2}{2} &= e^{\alpha_R} \frac{e^{j\beta t} + e^{-j\beta t}}{2} = e^{\alpha_R} \cos \beta t; \\ \frac{y_1 - y_2}{2j} &= e^{\alpha_R} \frac{e^{j\beta t} - e^{-j\beta t}}{2j} = e^{\alpha_R} \sin \beta t. \end{aligned} \quad (V.53)$$

Esse infatti, essendo combinazioni lineari di soluzioni, sono ancora soluzioni della nostra equazione. Si ottiene quindi:

$$v_c(t) = e^{\alpha_R} (k_1 \cos \beta t + k_2 \sin \beta t); \quad (V.55)$$

che può anche scriversi:

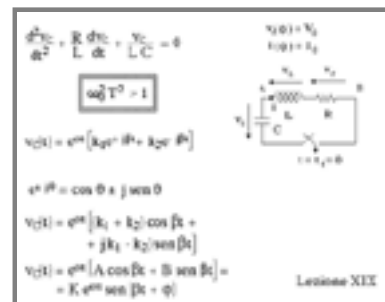
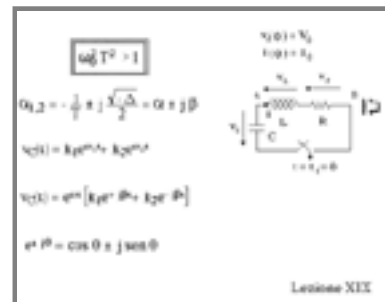
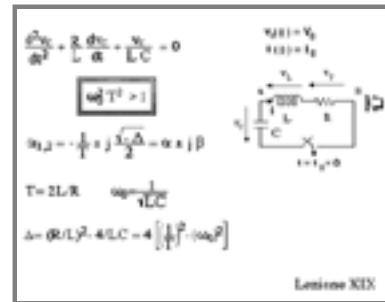
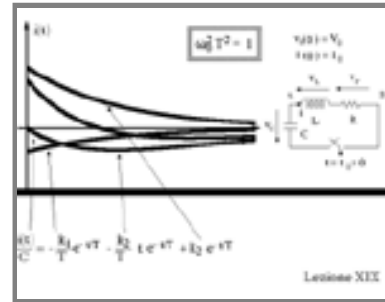
$$v_c(t) = K e^{\alpha_R} \sin(\beta t + \varphi); \quad (V.56)$$

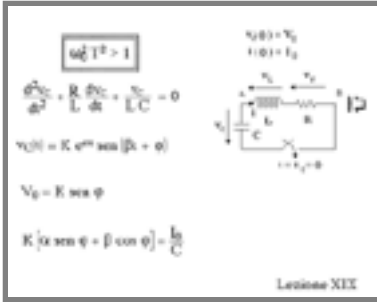
dove le costanti K e  $\varphi$  giocano lo stesso ruolo che in precedenza giocavano le costanti  $k_1$  e  $k_2$ .

In termini delle grandezze definite in precedenza, risulta:

$$\alpha_R = -\frac{1}{T} \quad ; \quad \beta = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{\omega_0^2 T^2}}; \quad (V)$$

Con qualche passaggio si ricavano facilmente anche le costanti K e  $\varphi$ . Si ha infatti, per le condizioni iniziali:





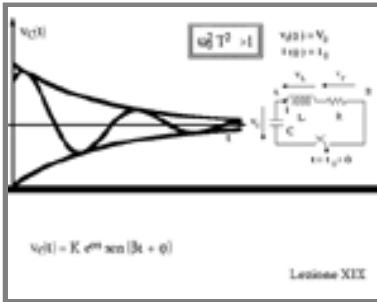
$$v_c(0) = V_0 = K \cos \varphi, \tag{V.58}$$

$$i(0) = I_0 = C K [\alpha_R \sin \varphi + \beta \cos \varphi],$$

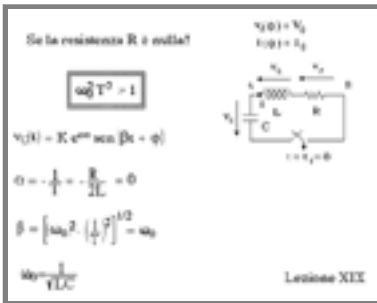
e quindi:

$$\varphi = \arctg \left( \frac{\beta C V_0}{I_0 - \alpha_R C V_0} \right); \tag{V.59}$$

$$K = \frac{V_0}{\cos \arctg \left( \frac{\beta C V_0}{I_0 - \alpha_R C V_0} \right)}.$$



Nella immagine a lato è mostrato un tipico andamento di tale soluzione: si tratta di una oscillazione smorzata secondo la costante di tempo \$T\$. Nella figura, per evidenziare l'andamento smorzato, sono tracciati anche gli andamenti dei due esponenziali \$Ke^{-t/T}\$ e \$-Ke^{-t/T}\$. La presenza di oscillazioni rende particolarmente evidente la differenza tra i due regimi: quello in cui la resistenza è maggiore di quella critica, caratterizzato da andamenti esponenziali decrescenti, e quello in cui la resistenza è inferiore a quella critica, in cui tensioni e correnti nel circuito possono oscillare. Ciò spiega anche il nome *resistenza critica* dato a quel particolare valore di \$R\$ che separa i due regimi.



Nella ipotesi \$R=0\$ il fattore di smorzamento è nullo e la soluzione ha quindi la forma di una oscillazione permanente della tensione e della corrente:

$$v_c(t) = K \cos(\omega_0 t + \varphi), \tag{V.60}$$

$$i(t) = C \omega_0 K \sin(\omega_0 t + \varphi).$$

Si noti che corrente e tensione non raggiungono i rispettivi massimi contemporaneamente: esse sono sfasate tra di loro di un angolo di \$\pi/2\$. In particolare il massimo della corrente viene assunto prima di quello della tensione; si dice in tal caso che la corrente *anticipa*



pa di  $\pi/2$  la tensione. Se avessimo calcolato e tracciato anche la tensione sull'induttore - che è proporzionale alla derivata della corrente - avremmo trovato che la corrente *ritarda* di  $\pi/2$  rispetto alla tensione sull'induttore. Di questo argomento parleremo più diffusamente in seguito.

Per comprendere da cosa abbia origine un tale fenomeno oscillatorio permanente, proviamo a calcolare le energie  $W_L$  ed  $W_C$ , immagazzinate in ogni istante rispettivamente nell'induttore e nel condensatore. Si ha:

$$W_C(t) = \frac{1}{2} C v_c^2(t) = \frac{1}{2} C [K \text{ sen}(\omega_0 t + \varphi)]^2, \tag{V.61}$$

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} L [C \omega_0 K \text{ cos}(\omega_0 t + \varphi)]^2.$$

Tenendo conto dell'espressione di  $\omega_0$ , l'energia immagazzinata nell'induttore può anche essere scritta:

$$W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} C [K \text{ cos}(\omega_0 t + \varphi)]^2.$$

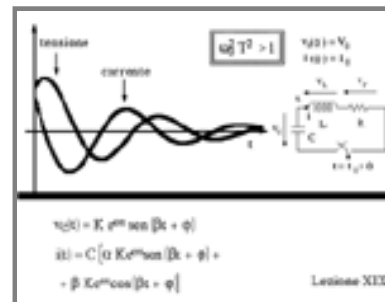
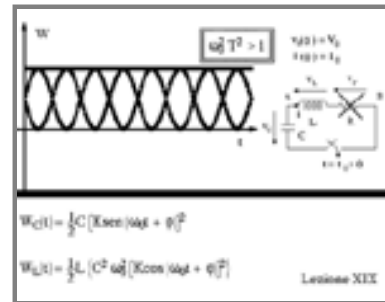
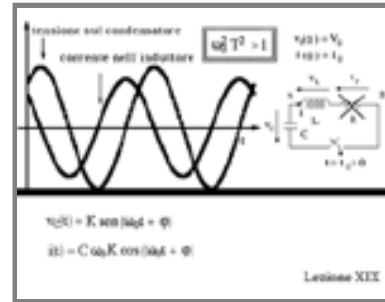
A questo punto, per la ben nota proprietà delle funzioni seno e coseno, la somma, istante per istante, della energia immagazzinata nel condensatore e di quella immagazzinata nell'induttore risulta essere pari ad una costante:

$$W_C(t) + W_L(t) = \frac{1}{2} CK^2. \tag{V.62}$$

Come ben si vede dal grafico riportato in figura, quando l'energia  $W_L$  cresce la  $W_C$  decresce in modo che la loro somma resti sempre costante. Se si tiene conto, poi, della espressione di  $K$  fornita dalle (V.58) nel caso in cui  $\alpha_R = 0$  (e cioè  $R=0$ ):

$$\begin{aligned} v_c(0) &= V_0 = K \text{ sen } \varphi, \\ i(0) &= I_0 = C K \omega_0 \text{ cos } \varphi, \end{aligned} \tag{V.63}$$

si trova facilmente:

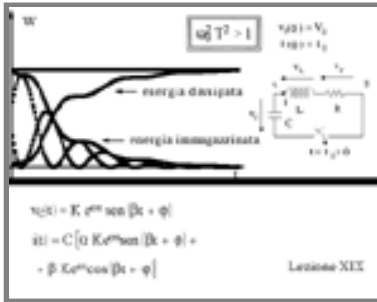


$$K^2 = \frac{I_0^2}{C^2 \omega_0^2} + V_0^2 = \frac{L}{C} I_0^2 + V_0^2 \quad (V.64)$$

Dalla (V.62) si ricava quindi:

$$W_C(t) + W_L(t) = \frac{1}{2} C V_0^2 + \frac{1}{2} L I_0^2; \quad (V.65)$$

e cioè la somma delle due energie è sempre pari all'energia inizialmente immagazzinata nel condensatore e nell'induttore all'istante  $t = 0$ . Se ne conclude che l'oscillazione permanente è proprio dovuta allo scambio di energia senza perdite, per la mancanza di una qualsiasi forma di dissipazione, tra condensatore ed induttore.



Nel caso in cui sia presente una causa dissipativa, una resistenza  $R$ , l'energia totale non può mantenersi costante. È interessante verificare, con una semplice integrazione, come è mostrato graficamente nella immagine a lato, che la quantità di cui gradualmente, istante per istante, diminuisce l'energia totale presente nel circuito è proprio pari all'energia che viene dissipata nel resistore; quest'ultima si calcola facilmente integrando la potenza istantanea dissipata, pari ad  $R i^2$ .



**Esercizi**

Scrivere l'equazione risolvibile nella incognita  $i(t)$

Lezione XIX

### Esercizi

Si provi a ricavare le espressioni delle costanti di integrazione per la soluzione dell'equazione (V.36), nei tre casi, smorzato, critico e subcritico, quando le condizioni iniziali siano  $I_0$  e  $V_0$ . Si verifichi la congruità con i risultati già trovati.

**I bipoli in regime dinamico: bipoli attivi.**

I circuiti in regime dinamico che abbiamo fino ad ora studiato contenevano esclusivamente bipoli passivi. La dinamica che tali circuiti mostrano è dovuta alla presenza di una certa energia inizialmente immagazzinata nei componenti con memoria.

Vogliamo ora introdurre, anche in regime dinamico, i bipoli attivi, cominciando da un generatore di tensione costante  $E_0$ , che inseriamo nel circuito RC serie già studiato nel paragrafo precedente.

Applicando la LKT alla unica maglia presente si ottiene:

$$R i + v_c = E_0,$$

che, facendo uso della caratteristica del condensatore, diventa:

$$R C \frac{dv_c}{dt} + v_c = E_0.$$

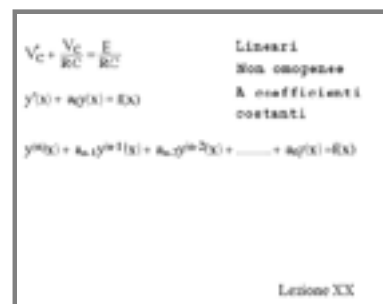
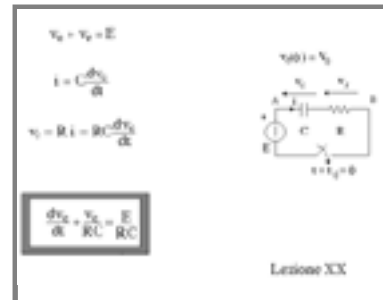
Infine, riordinando:

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{R C} = \frac{E_0}{R C}. \tag{V.66}$$

L'equazione (V.66) è ancora una equazione differenziale, ordinaria, a coefficienti costanti, ma a differenza delle precedenti, non è più omogenea per la presenza di un termine assegnato, o *noto*, a secondo membro. Ci viene in aiuto a questo punto, ancora una volta, la teoria delle equazioni differenziali ordinarie a coefficienti costanti che ci assicura che l'integrale generale dell'equazione può porsi nella forma:

$$v_c(t) = v_{c0}(t) + v_{cp}(t), \tag{V.67}$$

dove  $v_{c0}(t)$  è la soluzione, già trovata, dell'equazione che si ottiene annullando il termine noto - l'equazione *omogenea associata* a quella data - e  $v_{cp}(t)$  è una solu-



$\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(x) = f(x)$ $y(x) : y(x)$ $y(x) : y(x)$ $\sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(x) - y(x) = 0$ $y_0(x) = y(x) - y(x)$	L'integrale generale si ottiene sommando all'integrale generale della omogenea una soluzione particolare della completa! $y(x) = y_0(x) + y(x)$
--	---

Lezione XX

zione particolare dell'equazione di partenza o equazione completa. È facile convincersi della veridicità di questa affermazione se si osserva che la (V.67) è certamente soluzione della nostra equazione, per definizione. Inoltre essa dipende dal giusto numero di costanti arbitrarie - nel nostro caso una sola perché l'equazione è del primo ordine - richiesto per poter descrivere tutte le soluzioni dell'equazione e, quindi, l'integrale generale; le costanti infatti sono contenute nell'integrale generale della omogenea associata  $v_{c0}(t)$ :

$$v_{c0}(t) = k_1 e^{-t/RC} \tag{V.68}$$

$\frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{RC} = \frac{E}{RC}$ $v_c(t) = k_1 e^{-t/RC} + E$ $k_1 = V_0 - E$ $v_c = E(1 - e^{-t/RC}) + V_0 e^{-t/RC}$ $v_c = (V_0 - E)e^{-t/RC} + E$	
--	--

Lezione XX

La  $v_{c0}$  è dunque già nota; bisogna determinare una soluzione particolare  $v_{cp}(t)$ . La scelta più semplice è evidentemente quella di supporre che  $v_{cp}(t)$  in realtà non dipenda dal tempo e sia una costante; in tal caso, annullando la derivata, l'equazione (V.66) diventa:

$$\frac{v_{cp}}{RC} = \frac{E_0}{RC},$$

e quindi  $v_{cp}(t) = E_0$ . L'integrale generale è, dunque:

$$v_c(t) = k_1 e^{-t/RC} + E_0 \tag{V.69}$$

A questo punto bisogna imporre la condizione iniziale  $v_c(0) = V_0$ , ottenendo così il valore di  $k_1 = V_0 - E_0$ .

In conclusione la soluzione cercata è:

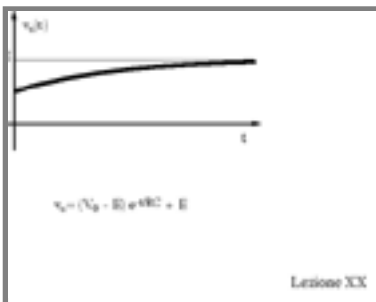
$$v_c(t) = (V_0 - E_0) e^{-t/RC} + E_0, \tag{V.70}$$

o anche:

$$v_c(t) = E_0 (1 - e^{-t/RC}) + V_0 e^{-t/RC} \tag{V.71}$$

Le due forme (V.70) e (V.71) della soluzione, pur essendo del tutto equivalenti, denotano, come vedremo meglio in seguito, un diverso punto di vista.

Supponiamo per un momento che sia  $V_0 = 0$ ; in tal caso la (V.71) afferma che la tensione, partendo dal valore  $v_c(0) = 0$  raggiunge gradualmente, con legge esponen-



ziale di costante di tempo  $T=RC$ , un valore pari ad  $E_0$ . Tale valore è in realtà assunto solo dopo un tempo infinito. D'altra parte data la notevole rapidità di decadimento dell'esponenziale, già dopo un intervallo di tempo pari a qualche costante di tempo, il valore di  $v_c(t)$  è molto prossimo al suo valore finale. Per  $t=3T=3RC$ , per esempio, si ha:

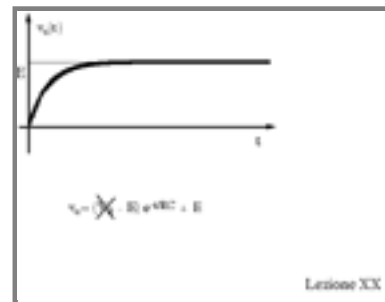
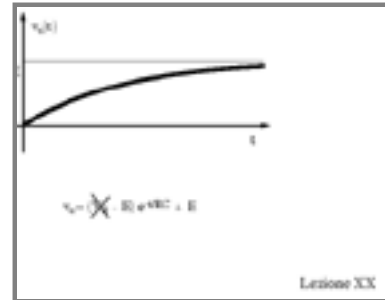
$$v_c(3T) \approx E_0 \left(1 - \frac{1}{20}\right) \approx 0.95 E_0.$$

È il fenomeno della carica del condensatore!

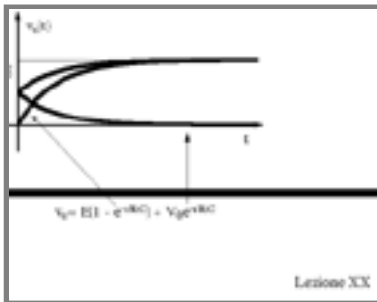
Uno sguardo alla (V.71) ci dice anche che, se il condensatore è inizialmente carico, alla evoluzione precedentemente descritta si sovrappone un fenomeno di scarica, sempre con legge esponenziale, che porta all'annullamento della carica inizialmente presente sul condensatore; il valore finale, o di regime, che si raggiunge, è sempre lo stesso, ma l'evoluzione può cambiare anche notevolmente. Si pensi, per esempio, al caso particolare  $V_0 = E_0$ ; la (V.71) afferma che non si ha nessuna dinamica; il valore di  $v_c$  è già pari a  $E_0$  e a tale valore rimane fermo. A conferma della particolarità di tale "dinamica" si calcoli la corrente  $i$ :

$$i(t) = C \frac{dv_c}{dt} = \frac{E_0 - V_0}{R} e^{-t/RC}. \quad (V.72)$$

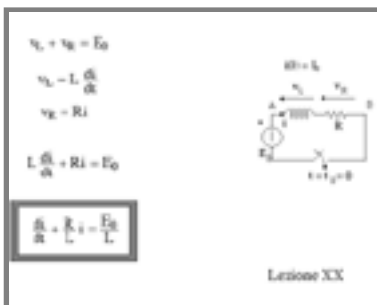
Per  $V_0 = E_0$ ,  $i(t) = 0$ . Non c'è alcuna corrente nel circuito! Questi risultati ci inducono ad una descrizione del fenomeno che, anche se poco formale, ha il pregio di farne comprendere la sua reale natura. Il generatore "vuole imporre" la sua tensione  $E_0$  sul condensatore; quest'ultimo, d'altra parte, ha la sua  $V_0$  "da rispettare". Ne consegue un conflitto tra le due esigenze. Il condensatore, però, è destinato a soccombere in quanto ha a sua disposizione soltanto una energia limitata ( $C V_0^2/2$ ), mentre il generatore ideale  $E_0$  può mettere in gioco quanta energia desidera. L'unico caso in cui



ovviamente il conflitto non si crea è quello in cui c'è convergenza tra la "volontà" del generatore e le "esigenze storiche" del condensatore, e cioè quando  $E_0=V_0$ . Questa modo di vedere le cose ci consente di introdurre un linguaggio specialistico adeguato ed efficace. La soluzione  $v_{co}(t)$  viene detta *evoluzione libera* del circuito, a partire naturalmente da determinate condizioni iniziali imposte dalla storia precedente. È, per così dire, la tendenza naturale del circuito, che dipende dalla sua natura, appunto, - i parametri R e C ed il modo in cui sono collegati - e dalla sua storia, congelata nell'energia inizialmente presente in esso, e quindi in  $V_0$ .



Il generatore  $E_0$  viene invece detto *forzamento* e rappresenta un fattore che dall'esterno cerca di imporre determinate condizioni di funzionamento a regime. In questo senso, mentre la  $v_{co}$  viene detta *risposta in evoluzione libera*, la  $v_c$  della (V.71) prende anche il nome di *risposta in evoluzione forzata* o più semplicemente *risposta forzata*. A questo punto dovrebbe essere chiara la differenza di punto di vista implicita nelle due formulazioni (V.70) e (V.71): mentre nella seconda sono evidenziate la risposta in evoluzione libera e quella che dipende dalla presenza del forzamento, nella prima è messa in evidenza la soluzione di regime  $E_0$  - quella che verrà comunque raggiunta, anche se dopo un tempo infinitamente lungo - e quella parte della soluzione che, invece, tende ad annullarsi. A quest'ultima parte potremmo dare il nome di termine *transitorio*, anche se tale nome è spesso usato per indicare genericamente tutto il fenomeno, descritto dalle V.70 e V.71, nel suo complesso.



Il circuito RL serie alimentato con un generatore ideale di tensione costante si risolve agevolmente con ragionamenti analoghi. L'equazione alla maglia è:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{E_0}{L}, \tag{V.73}$$

e la soluzione:

$$\frac{E_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}) + I_0 e^{-Rt/L}. \tag{V.74}$$

La corrente, dunque, tende al suo valore di regime  $E/R$  che è indipendente da  $L$ . Come il condensatore è equivalente ad un bipolo a vuoto in corrente continua, perché non consente il passaggio di una corrente che non sia variabile, così l'induttore si comporta come un bipolo corto circuito, nelle stesse condizioni. Un facile calcolo mostrerebbe che, nel caso del circuito in evoluzione libera, l'energia totale dissipata nel resistore è proprio pari a quella inizialmente immagazzinata nell'induttore.

Passiamo ora ad esaminare il caso del circuito RLC serie in presenza di un forzamento costante.

L'equazione nella incognita  $v_c$  è:

$$\frac{d^2 v_c}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c}{dt} + \frac{v_c}{LC} = \frac{E_0}{LC}. \tag{V.75}$$

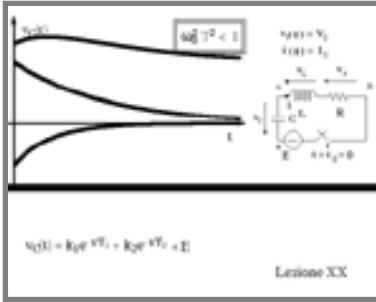
Anche in questo caso essendo l'integrale generale della omogenea associata già noto, occorrerà determinare soltanto la soluzione particolare. Essendo il forzamento costante, è possibile utilizzare la stessa tecnica usata per l'equazione del primo ordine: si assume che la soluzione particolare sia una costante e si ricava immediatamente che  $v_{cp} = E_0$ . Si noti che in questo modo si è automaticamente scelto come soluzione particolare quella di regime; infatti, essendo il forzamento costante, il regime verrà raggiunto quando tensioni e correnti nel circuito non varieranno più nel tempo. Utilizzeremo questa tecnica in seguito anche quando il forzamento non è più costante nel tempo; naturalmente la soluzione di regime non potrà essere costante ma dovrà ricalcare l'andamento del forzamento.

$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i + \frac{1}{LC} i = \frac{E}{LC}$   
 $q^2 + \frac{R}{L} q + \frac{1}{LC} = 0$   
 $\Delta = \left(\frac{R}{L}\right)^2 - 4 \frac{1}{LC}$   
 $T = 2LR \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$   
 $\omega_{1,2} = -\frac{1}{T} \pm \frac{j\sqrt{\Delta}}{2}$   
 $\Delta = (RL)^2 - 4LC = 4 \left[ \left(\frac{1}{2} \right)^2 - (\omega_0)^2 \right]$

Lezione XX

$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i + \frac{1}{LC} i = \frac{E}{LC} \cos(\omega t)$   
 Integrale generale:  
 $\omega^2 T^2 < 1$   
 $i_c(t) = k_1 e^{j\omega t} + k_2 e^{-j\omega t} + E$   
 $\omega^2 T^2 = 1$   
 $i_c(t) = k_1 e^{j\omega t} + k_2 t e^{-j\omega t} + E$   
 $\omega^2 T^2 > 1$   
 $i_c(t) = K e^{j\omega t} \sin(\omega t - \varphi) + E$

Lezione XX



Come nel caso dell'evoluzione libera avremo i tre casi possibili:

1)  $\omega_0 T < 1$ ; caso aperiodico, o smorzato, o sopracritico:

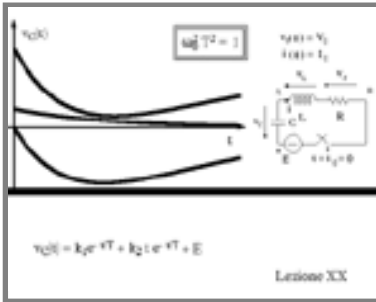
$$v_c(t) = k_1 e^{-t/T_1} + k_2 e^{-t/T_2} + E_0. \quad (V.76)$$

2)  $\omega_0 T = 1$ ; caso critico:

$$v_c(t) = k_1 e^{-t/T} + k_2 t e^{-t/T} + E_0. \quad (V.77)$$

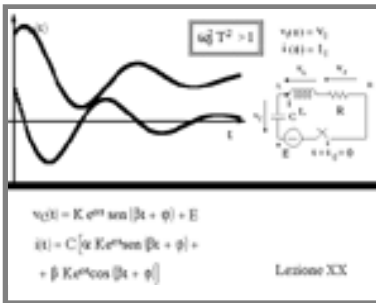
3)  $\omega_0 T > 1$ ; caso oscillatorio, o subcritico:

$$v_c(t) = K e^{\alpha R} \text{sen}(\beta t + \varphi) + E_0. \quad (V.78)$$

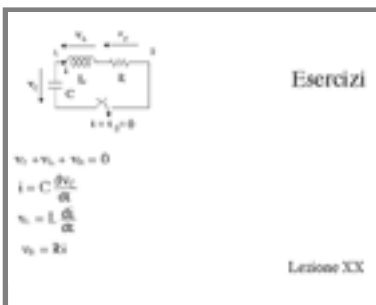


Evidentemente, le costanti  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $K$  e  $\varphi$  sono da determinarsi utilizzando le condizioni iniziali.

Nelle immagini a lato della pagina precedente sono riportati andamenti tipici per i tre casi. Si noti come la tensione ai morsetti del condensatore può, in alcuni istanti, essere maggiore della tensione dell'unico generatore presente; nulla di strano, dato che il teorema di non amplificazione delle tensioni limita la sua validità al regime stazionario.



**Esercizi**



L'equazione nella incognita  $i$  per il circuito RLC serie si ottiene facilmente se si deriva una volta l'equazione alla maglia:

$$v_c(t) + v_R(t) + v_L(t) = 0. \quad (V.79)$$

Si ottiene:

$$\frac{dv_c}{dt} + \frac{dv_R}{dt} + \frac{dv_L}{dt} = 0.$$

Utilizzando poi le caratteristiche dei bipolo si ha:



$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = 0. \quad (V.80)$$

La soluzione sarà del tipo - supponiamo di essere nel caso aperiodico:

$$i(t) = k_1 e^{-t/T_1} + k_2 e^{-t/T_2} .$$

Sviluppiamo in dettaglio anche il calcolo delle costanti di integrazione. Una condizione iniziale è posta direttamente sulla corrente, per cui si ottiene facilmente:

$$i(0) = k_1 + k_2 = I_0 .$$

L'altra condizione è invece posta sulla tensione ai morsetti del condensatore, mentre occorrerebbe conoscere il valore della derivata della corrente all'istante iniziale. Per risolvere il problema si procede nel modo descritto: si particularizza l'equazione (V.79), che esprime la validità delle leggi di Kirchhoff, all'istante  $t=0$ :

$$v_c(0) + R i(0) + L \left[ \frac{di}{dt} \right]_{t=0} = 0. \quad (V.81)$$

Nella equazione (V.81) l'unico termine incognito è quello contenente la derivata della corrente valutata all'istante iniziale. Si ottiene dunque:

$$\left[ \frac{di}{dt} \right]_{t=0} = - \frac{V_0 + R I_0}{L} .$$

Derivando poi l'espressione della soluzione trovata per la  $i(t)$ , si ottiene facilmente la seconda equazione che consente la determinazione delle costanti di integrazione:

$$\left[ \frac{di}{dt} \right]_{t=0} = - \frac{k_1}{T_1} - \frac{k_2}{T_2} = - \frac{V_0 + R I_0}{L} .$$

Come ulteriore esercizio, si provi a calcolare l'espressione delle costanti di integrazione, nei tre regimi possibili, per il circuito RLC serie con forzamento in tensione costante, sia nel caso che l'incognita sia la tensione  $v_c$  sia in quello in cui l'incognita sia la corrente  $i$ .

### Generatori ideali non costanti

Fino a questo punto abbiamo preso in considerazione esclusivamente generatori di tensione e di corrente costanti. Essendo ora il nostro modello in grado di descrivere anche regimi dinamici, possiamo prendere in considerazione anche generatori di tensione e di corrente variabili nel tempo. Si tratterà sempre di generatori ideali nel senso che si assume che l'andamento nel tempo della grandezza erogata - nel seguito parleremo di *forma d'onda* della tensione o della corrente - non dipenda in alcun modo dalle condizioni in cui il generatore lavora. In altri termini la forma d'onda della tensione di un generatore ideale di tensione non dipende dal carico a cui tale generatore è collegato, e analogamente per il generatore di corrente. In fondo era proprio questo l'aspetto ideale anche nei generatori in regime continuo!

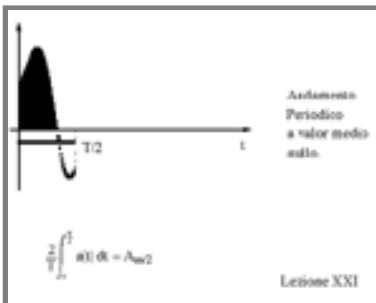
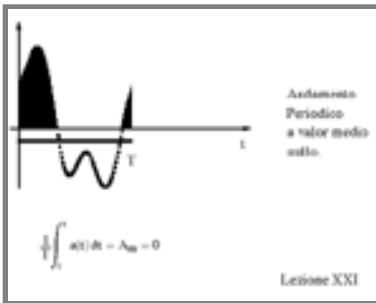
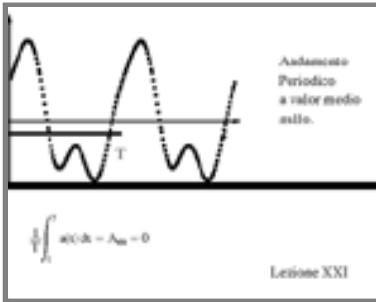
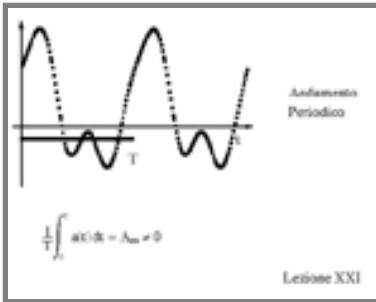
In un primo momento limiteremo la nostra attenzione ai generatori in grado di fornire forme d'onda periodiche, ed in particolare sinusoidali. I motivi per questa scelta sono diversi e proveremo ad illustrarne alcuni brevemente più avanti. Per ora ricordiamo qualche definizione che ci sarà necessaria nel seguito.

Una variazione temporale che si ripeta identicamente dopo un certo intervallo di tempo  $T$  viene detta *periodica*; l'intervallo  $T$  viene detto *periodo* della grandezza periodica.

Nel periodo  $T$  la funzione periodica  $a(t)$  assumerà un massimo che indicheremo con il simbolo  $A_M$ .

Definiremo ancora, per  $a(t)$ , il *valore medio in un periodo*:

$$A_m = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt. \tag{V.82}$$



In generale il valor medio di una funzione periodica non è nullo: l'area sottesa dalla funzione nella sua parte positiva non è eguale alla corrispondente area della sua parte negativa. La condizione di valor medio nullo individua una particolare classe di funzioni periodiche per le quali potrà essere utile definire il valor medio in mezzo semiperiodo:

$$A_{m/2} = \frac{2}{T} \int_0^{T/2} a(t) dt. \quad (V.83)$$

Più interessante è in questi casi il valore efficace definito come la radice quadrata del valore quadratico medio:

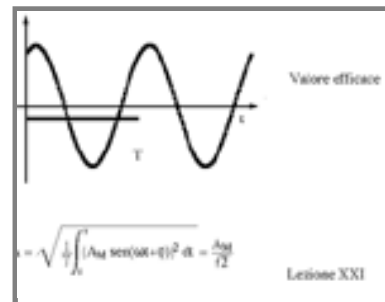
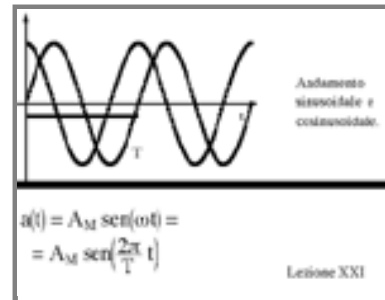
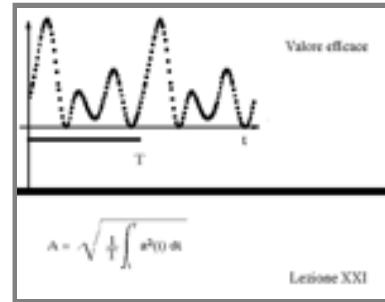
$$A = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T a^2(t) dt}. \quad (V.84)$$

Particolari funzioni periodiche a valor medio nullo sono le ben note funzioni sinusoidali e cosinusoidali:

$$a(t) = A_M \sin(\omega t + \varphi) = A_M \cos(\omega t + \varphi - \pi/2).$$

È facile verificare che il valore efficace di una grandezza sinusoidale è pari al suo valor massimo diviso la radice di 2 e che il suo valor medio in un semiperiodo è pari al valor massimo moltiplicato per  $2/\pi$ . L'argomento della funzione sinusoidale viene detto *fase istantanea* della funzione stessa mentre  $\varphi$  prende il nome di *fase iniziale*.

Per le funzione periodiche si può dimostrare una importante proprietà che prende il nome di sviluppo in serie di Fourier. Tale proprietà consente di porre una qualsiasi funzione periodica  $a(t)$  come somma di infiniti termini del tipo  $A_n \sin(n\omega t)$  ed  $B_n \cos(n\omega t)$ , con  $n$  intero ed  $\omega = 2\pi/T =$  *frequenza angolare*, o spesso, per brevità, solo *frequenza*. In realtà si preferisce conservare al termine *frequenza* il significato di inverso del



**Serie di Fourier** Perché i regimi sinusoidali?

J. B. Fourier  
(1768 - 1830)

Lezione XXI

periodo per cui  $f=1/T=\omega/2\pi$ ; da cui il nome di frequenza angolare per  $\omega$ .

Se si pone infatti, per una generica funzione periodica  $a(t)$ :

$$a(t) = A_0 + \sum_1^{\infty} (A_n \sin n\omega t + B_n \cos n\omega t), \quad (\text{V.85})$$

si prova facilmente che:

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt. \quad (\text{V.86})$$

Il coefficiente  $A_0$  è, dunque, il valore medio della grandezza periodica. Analogamente si dimostra che:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{2}{T} \int_0^T a(t) \sin n\omega t dt \\ B_n &= \frac{2}{T} \int_0^T a(t) \cos n\omega t dt. \end{aligned} \quad (\text{V.87})$$

$a(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \cos(n\omega t) + B_n \sin(n\omega t)]$	Perché i regimi sinusoidali?
$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T a(t) dt$	
$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T a(t) \cos(n\omega t) dt$	
$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T a(t) \sin(n\omega t) dt$	
Lezione XXI	

Nella dimostrazione basta far uso delle seguenti proprietà delle funzioni seno e coseno (con  $n \neq m$ ):

$$\begin{aligned} \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t dt &= \int_0^T \sin n\omega t \cos m\omega t dt = \\ &= \int_0^T \sin n\omega t \sin m\omega t dt = \int_0^T \cos n\omega t \cos m\omega t dt = 0; \\ \frac{1}{T} \int_0^T (\sin n\omega t)^2 dt &= \frac{1}{T} \int_0^T (\cos n\omega t)^2 dt = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

In altri termini si fa uso del fatto che le funzioni sinusoidali hanno valor medio nullo, valore quadratico medio pari ad  $1/2$ , e sono, come si dice, ortogonali tra di loro, intendendo con questo il fatto che il valor

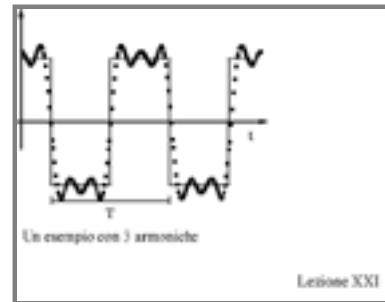
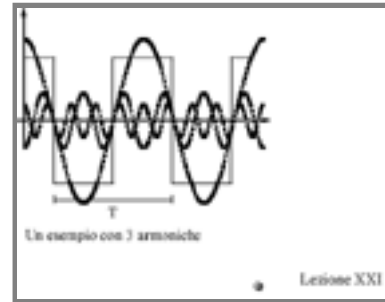
medio del prodotto di due funzioni sinusoidali di frequenza,  $m\omega/2\pi$  ed  $n\omega/2\pi$ , con  $m \neq n$ , è nullo.

Nell'immagine a lato sono rappresentate le prime tre componenti - che prendono il nome di *armoniche* della funzione sviluppata - di una funzione ad andamento "rettangolare"; nella seconda immagine le tre armoniche sono sommate e confrontate con la funzione originaria. Come si vede, anche se lo sviluppo di Fourier prevede un numero di armoniche infinito, spesso, utilizzando solo poche armoniche si ottiene una approssimazione soddisfacente della funzione sviluppata.

Le funzioni sinusoidali godono, dunque, della notevole proprietà di poter rappresentare un grandissimo numero di funzioni diverse; non sono le sole in realtà, ma certamente le più comunemente usate.

Infatti se siamo in regime lineare, se cioè è valido il principio di sovrapposizione degli effetti, una volta noto il comportamento di un sistema quando in esso tutte le grandezze variano con legge sinusoidale, è possibile ricavare il comportamento del sistema, utilizzando appunto la sovrapposizione degli effetti, in condizioni di variabilità temporale diverse.

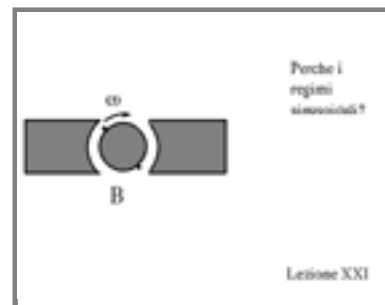
È questo uno dei motivi che, come avevamo anticipato, ci spinge a focalizzare la nostra attenzione sui generatori ideali di tipo sinusoidale. Un altro motivo, altrettanto importante, è, potremmo dire, di carattere essenzialmente pratico. Infatti sarebbe facile far vedere, utilizzando la legge di Faraday-Neumann, che il modo più naturale, in linea di principio, per costruire un generatore di f.e.m. è quello di far ruotare una spira conduttrice in un campo magnetico. Se il campo è uniforme, e la velocità angolare di rotazione della spira è costante, la forza elettromotrice che ne scaturisce è di forma d'onda sinusoidale. Naturalmente, le cose sono molto più complesse di quanto una descrizione così sintetica possa far immaginare; ma, al fondo, è questo uno dei



Legge di Faraday - Neumann Perché i regimi sinusoidali?

E. F. von Neumann (1798 - 1895)

Lezione XXI



principali motivi per cui la produzione, e poi la trasmissione e la distribuzione, della energia elettrica si realizza in *regime sinusoidale*. È ragionevole, quindi, anche per questo motivo, dedicare a tali regimi un'attenzione particolare.

Limitiamoci, dunque, a queste considerazioni di principio e interessiamoci invece di come l'introduzione dei generatori variabili nel tempo, modifica il modello delle reti elettriche. Ancora una volta, chi desiderasse un approfondimento dell'argomento può leggere l'appendice A3.

Consideriamo, per esempio, il circuito RL serie che abbiamo già preso in considerazione, e supponiamo che esso sia alimentato da un generatore di tensione sinusoidale  $e(t) = E_M \text{sen}(\omega t + \alpha)$  - si noti il simbolo per il generatore ideale di tensione sinusoidale. È necessario assumere una fase iniziale  $\alpha \neq 0$  in quanto l'origine dei tempi è già stata fissata quando si è assunto che l'interruttore viene chiuso a  $t=0$ .

Scriviamo l'equazione che esprime la LKT all'unica maglia presente. Si ha:

$$v_L + v_R = e(t) \tag{V.88}$$

Tenendo conto delle caratteristiche dei bipoli presenti si ottiene:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{e(t)}{L} = \frac{1}{L} E_M \text{sen}(\omega t + \alpha) \tag{V.89}$$

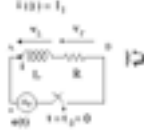
La soluzione dell'omogenea associata sarà ancora del tipo  $k_1 e^{-R/L t}$ , ma non possiamo più supporre che la soluzione particolare sia costante, in quanto il forzamento non è costante. Possiamo, però, utilizzare lo stesso modo di ragionare che ci ha portato a trovare la soluzione particolare quando il generatore di tensione era costante. In fondo nel caso del forzamento costante abbiamo cercato una soluzione particolare che avesse le stesse caratteristiche del forzamento, e cioè

$$v_L + v_R = e(t)$$

$$v_L = L \frac{di}{dt}$$

$$v_R = Ri$$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{e(t)}{L}$$

$$e(t) = E_M \text{sen}(\omega t + \alpha)$$



Lezione XXI

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{e(t)}{L}$$

$$e(t) = E_M \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$i(t) = i_R(t) + i_H(t)$$

$$i_H(t) = k e^{-R/L t}$$

$$i_P(t) = I_M \text{sen}(\omega t + \alpha - \varphi)$$


Lezione XXI

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{1}{L} E_M \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$i_P(t) = I_M \text{sen}(\omega t + \alpha - \varphi)$$

$$\text{se } I_M \cos(\omega t + \alpha - \varphi) = \frac{R}{L} I_M \text{sen}(\omega t + \alpha - \varphi) =$$

$$= \frac{1}{L} E_M \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

Lezione XXI

costante. Nel caso del forzamento sinusoidale possiamo cercare una soluzione particolare che sia dello stesso tipo, cioè sinusoidale.

Posto dunque  $i(t) = I_M \text{sen}(\omega t - \varphi)$ , si ha:

$$\frac{di}{dt} = \omega I_M \text{sen}(\omega t - \varphi + \pi/2),$$

e quindi, sostituendo nella (V.89):

$$I_M \left[ \omega \text{sen}(\omega t - \varphi + \pi/2) + \frac{R}{L} \text{sen}(\omega t - \varphi) \right] = \frac{1}{L} E_M \text{sen}(\omega t + \alpha). \quad (V.90)$$

Ricordando ora che se:

$$A_M \text{sen}(\omega t + \alpha) + B_M \text{sen}(\omega t + \beta) = C_M \text{sen}(\omega t + \gamma),$$

si ha:

$$C_M^2 = A_M^2 + B_M^2 + 2A_M B_M \cos(\alpha - \beta),$$

e:

$$\gamma = \arctg \left( \frac{A_M \text{sen} \alpha + B_M \text{sen} \beta}{A_M \text{cos} \alpha + B_M \text{cos} \beta} \right),$$

si ottiene in definitiva:

$$I_M = \frac{E_M}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}, \quad (V.91)$$

e:

$$\varphi = \arctg \left( \frac{\omega L}{R} \right). \quad (V.92)$$

Come si vede, anche per un caso così elementare, i calcoli possono essere laboriosi. Fortunatamente c'è come evitarli. Prima di esaminare questo aspetto concludiamo il discorso sulla soluzione completa dell'equazione (V.89). Essa è del tipo:

$$i(t) = k e^{-Rt/L} + I_M \text{sen}(\omega t - \varphi). \quad (V.93)$$

A questo punto si determina il valore della costante di integrazione imponendo la condizione iniziale:

$$\omega I_M \text{cos}(\omega t + \alpha - \varphi) + \frac{R}{L} I_M \text{sen}(\omega t + \alpha - \varphi) =$$

$$I_M \left[ \text{sen} \beta \text{cos}(\omega t + \alpha - \varphi) + \text{cos} \beta \text{sen}(\omega t + \alpha - \varphi) \right]$$

$$\text{cos} \beta = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$$

$$\text{sen} \beta = \frac{\omega L}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$$

$$\beta = \arctan \left( \frac{\omega L}{R} \right)$$

Lezione XXI

$$I_M \left[ \text{sen} \beta \text{cos}(\omega t + \alpha - \varphi) + \text{cos} \beta \text{sen}(\omega t + \alpha - \varphi) \right] =$$

$$\frac{1}{L} E_M \text{sen}(\omega t + \alpha)$$

$$I_M = \frac{E_M}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$$

$$\beta - \varphi = \arctan \left( \frac{\omega L}{R} \right)$$

Lezione XXI

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{e(t)}{L}$$

$$i(t) = k e^{-Rt/L} + i_p(t)$$

$$i_p(t) = I_M \text{sen}(\omega t + \alpha - \varphi)$$

$$I_M = \frac{E_M}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$$

$$\beta - \varphi = \arctan \left( \frac{\omega L}{R} \right)$$

Lezione XXI

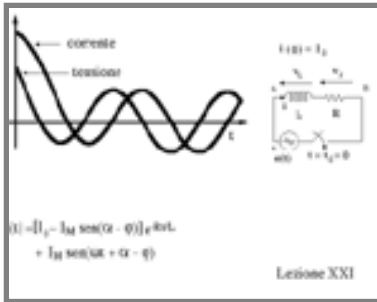
$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{e(t)}{L}$$

$$i(t) = k e^{-Rt/L} + i_p(t)$$

$$i_p(t) = I_M \text{sen}(\omega t + \alpha - \varphi)$$

$$k = I_M \text{sen}(\alpha - \varphi) = I_M$$

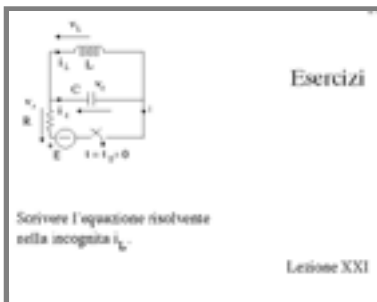
Lezione XXI



$$i(0) = k - I_M \sin(\varphi) = I_0. \quad (V.94)$$

La soluzione (V.93) è ancora una volta somma di un termine che tende a zero ed un termine che, invece, si ripete periodicamente senza mai scomparire: la soluzione a regime permanente. A questo punto ci appare logico interpretare anche il regime stazionario, da cui abbiamo preso le mosse, come un regime permanente in cui i generatori, stazionari appunto, abbiano preso il sopravvento, e si sia persa traccia di un termine transitorio ormai estintosi nel tempo.

Resta il fatto che il calcolo della soluzione permanente in regime sinusoidale è più complicato sul piano operativo. Nel seguito mostreremo come sia possibile costruire una metodologia che ci consenta di trattare il regime sinusoidale alla stessa maniera in cui abbiamo trattato il regime continuo. Sarà così possibile estendere le proprietà ed i teoremi delle reti già studiati anche al nuovo regime.



**Esercizi**

Per il circuito nell'immagine a lato si scriva l'equazione risolvente nella corrente  $i_L$ . Occorrerà scrivere le equazioni che esprimono la validità delle leggi di Kirchhoff alla rete e, quindi, con qualche elaborazione, giungere ad una unica equazione nella incognita  $i_L$ .