

STABILITÉ SOUS CONDITION CFL NON LINÉAIRE

ERWAN DERIAZ¹ AND DMITRY KOLOMENSKIY²

Abstract. We present a basic although little known numerical stability condition: for convection equations, the von Neumann stability constraint $\|u_{n+1}\|_{L^2} \leq (1 + C \Delta t) \|u_n\|_{L^2}$ drives to the stability condition $\Delta t \leq C \Delta x^\alpha$ with $\alpha = \frac{p(2q-1)}{q(2p-1)}$ where p is an integer linked to the stability domain of the time scheme and $q \geq p$ an integer linked to the upwind property of the space discretization (in the centered case we have $q = +\infty$ and $\alpha = \frac{2p}{2p-1}$).

Résumé. Nous présentons une étude de stabilité aux conclusions originales : pour les équations de convection, la contrainte $\|u_{n+1}\|_{L^2} \leq (1 + C \Delta t) \|u_n\|_{L^2}$ fait apparaître la condition de stabilité $\Delta t \leq C \Delta x^\alpha$ avec $\alpha = \frac{p(2q-1)}{q(2p-1)}$ où p est un entier lié au domaine de stabilité du schéma en temps et $q \geq p$ un autre entier lié au caractère upwind de la discrétisation en espace (dans le cas centré, $q = +\infty$). Des exemples numériques montrent la pertinence de cette étude.

INTRODUCTION

Lorsqu'on considère la solution d'une équation aux dérivées partielles (u_n) discrétisée uniformément en espace et en temps, la plupart des études de stabilité négligent le terme en $O(\Delta t)$ dans l'inégalité $\|u_{n+1}\|_{L^2} \leq (1 + O(\Delta t)) \|u_n\|_{L^2}$. Or, contrairement à une idée très répandue [8], autoriser une croissance de la solution en $O(\Delta t)$ par pas de temps affecte considérablement les conditions de stabilité. Certains schémas spectraux d'ordre deux en temps (Runge-Kutta, Adams-Bashforth...), très utilisés en mécanique des fluides se trouvent être instables sous condition CFL linéaire $\Delta t \leq C \Delta x$ alors qu'ils permettent de calculer des solutions satisfaisantes en des temps raisonnables [4]. Une étude de stabilité de von Neumann de ces schémas, avec le critère $\|u_{n+1}\|_{L^2} \leq (1 + O(\Delta t)) \|u_n\|_{L^2}$, mène à la condition de stabilité $\Delta t \leq C \Delta x^{\frac{4}{3}}$.

Il est possible de généraliser cette condition de stabilité, et de construire des schémas en temps stables sous la condition $\Delta t \leq C \Delta x^{\frac{2p}{2p-1}}$ avec p un entier. Cet entier p est lié au degré de tangence du domaine de stabilité du schéma en temps dont le bord suit l'équation $x = -K y^{2p}$, avec $K > 0$, à l'axe (Oy) . Cette condition reste valable pour tous les schémas ayant une discrétisation conservative en espace : schémas spectraux, différences finies centrées, schémas Galerkin. Seul le caractère upwind d'un schéma peut contrecarrer cette instabilité.

L'article suivra le plan suivant : nous présenterons d'abord rapidement les éléments de base que sont les équations hyperboliques, la condition CFL (Courant Friedrichs Lewy) et le principe de l'analyse de stabilité de von Neumann; puis nous ferons apparaître la condition $\Delta t \leq C \Delta x^\alpha$ avec $\alpha > 1$ que nous testerons numériquement; enfin, en conclusion, nous tenterons d'expliquer pourquoi des schémas d'ordre deux instables sous condition CFL restent très utilisés pour simuler la turbulence malgré une condition plus stricte sur le pas de temps.

¹ Laboratoire de Mécanique, Modélisation & Procédés Propres - UMR-6181 CNRS - IMT La Jetée, Technopôle de Château-Gombert, 38 rue Frédéric Joliot-Curie, 13451 Marseille Cedex 13

² CERFACS, 42, Avenue Gaspard Coriolis 31057 - Toulouse Cedex 01

1. NOTIONS ET PRINCIPES DE BASE

1.1. Les équations hyperboliques

Les conditions de stabilité présentées ci-dessous s'appliquent à beaucoup d'équations aux dérivées partielles. Car, en ce qui concerne la stabilité numérique, celles-ci se ramènent souvent en première approximation, à des équations de transport, par linéarisation ou par factorisation.

On se donne une équation (E) $\partial_t u = F(u)$. Et on considère une perturbation de u par une fonction très oscillante h , $u \mapsto u_\varepsilon = u + \varepsilon h$ avec $\|h\| \ll \|\partial_x h\|$. Si (E) est hyperbolique, alors elle se linéarise en

$$\partial_t h = L(u)\partial_x h + o(\varepsilon) + o(\|\partial_x h\|). \quad (1)$$

Par ailleurs, si l'équation hyperbolique (E) implique une dérivée seconde en temps (E) $\partial_t^2 u = F(u)$, elle se met sous la forme $\partial_t X = M(X)$ avec $X = (u, \partial_t u)'$, et M se linéarise comme en (1). C'est par exemple le cas de l'équation des ondes $\partial_t^2 u = c^2 \partial_x^2 u$ avec $M(X) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 \partial_x^2 & 0 \end{pmatrix} X$.

Ainsi, une fois introduite l'analyse de stabilité de von Neumann, nous nous cantonnerons à une analyse rigoureuse de la stabilité numérique de l'équation de transport :

$$\partial_t u + a \partial_x u = 0, \quad \text{avec } u : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (t, x) \mapsto u(t, x). \quad (2)$$

1.2. Analyse de stabilité de von Neumann et condition CFL

Initialement, la condition CFL du nom des trois auteurs de l'article fondateur [1], s'énonçait de la façon suivante : “*Le domaine de calcul doit inclure le domaine d'influence physique*” et se traduisait par l'inégalité : $a \Delta t \leq \Delta x$. Ce critère était donc physique avant d'être numérique. Cependant, par glissement, la désignation CFL est maintenant passée dans le vocabulaire comme condition suffisante de stabilité liant les pas de temps Δt et d'espace Δx . Ce critère de stabilité exact pour l'équation de transport peut s'obtenir par une analyse de stabilité de von Neumann.

Le cadre de l'analyse de stabilité de von Neumann se restreint à des équations linéaires à coefficients constants sur un domaine infini ou périodique : (E) $\partial_t u = F u$. Elle consiste à isoler une fréquence d'oscillation ξ de $u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} u_\xi(t, x) d\xi$ avec $u_\xi(t, x) = \hat{u}(t, \xi) e^{i\xi x}$. Si on note alors $\sigma(\xi)$ le symbole de l'opérateur F : $\widehat{F u}(t, \xi) = \sigma(\xi) \hat{u}(t, \xi)$ ¹, l'équation (E) se ramène à une équation différentielle ordinaire : $\partial_t \hat{u} = \sigma \hat{u}$ avec $\sigma \in \mathbb{C}$. Dans le cas de l'équation de transport (2), $\sigma = -i a \xi \in i\mathbb{R}$.

Considérons maintenant une solution u de (E) sur $[0, T]$ et sa discrétisée en temps u_n prise aux instants $n \Delta t$. Un schéma de type Runge-Kutta se construit en utilisant des pas de temps intermédiaires. Par exemple on obtient un schéma de Runge-Kutta d'ordre deux en prenant :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta t F(u_n + \frac{\Delta t}{2} F u_n) = u_n + \Delta t F u_n + \frac{\Delta t^2}{2} F^2 u_n. \quad (3)$$

Si on applique la transformée de Fourier en espace à l'équation (3), on obtient :

$$\widehat{u_{n+1}} = \widehat{u_n} + \Delta t \sigma \widehat{u_n} + \frac{\Delta t^2}{2} \sigma^2 \widehat{u_n} = \left(1 + \Delta t \sigma + \frac{\Delta t^2}{2} \sigma^2 \right) \widehat{u_n} \quad (4)$$

Ainsi, en prenant $z = \Delta t \sigma \in \mathbb{C}$, on fait apparaître le facteur d'amplification : $G(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2}$.

Rigoureusement, la condition de stabilité de von Neumann s'écrit $|G(z)| \leq 1 + C \Delta t$, $C > 0$ étant une constante donnée. Cette constante quantifie l'amplification d'erreur que l'on peut se permettre. Supposons u_n

¹La transformée de Fourier d'une fonction $u \in L^1(\mathbb{R})$ est notée $\hat{u}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x) e^{-ix\xi} dx$. On rappelle que $u \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{u}$ est une isométrie de $L^2(\mathbb{R})$.

solution de (E) perturbée par ε_n , alors par linéarité, ε_n vérifie, après $\frac{T}{\Delta t}$ itérations du schéma en temps :

$$\|\varepsilon_{\frac{T}{\Delta t}}\|_{L^2} \leq (1 + C \Delta t)^{\frac{T}{\Delta t}} \|\varepsilon_0\|_{L^2} \leq e^{CT} \|\varepsilon_0\|_{L^2}. \quad (5)$$

C'est-à-dire qu'après un temps T , cette erreur est au plus multipliée par e^{CT} .

Le domaine de stabilité classique d'un schéma, donné par l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |G(z)| \leq 1\}$, ne fait pas intervenir le pas de temps Δt et correspond à tous les symboles $\sigma \in \mathbb{C}$ d'opérateurs F pour lesquels $\|u_{n+1}\|_{L^2} \leq \|u_n\|_{L^2}$. Par exemple, pour le schéma de Runge-Kutta d'ordre 2 (3), $|G(i\zeta)|^2 = 1 + \frac{\zeta^4}{4} > 1$ pour $\zeta \in \mathbb{R}^*$, donc l'opérateur de convection, de symbole $i\zeta$, ne fait pas partie du domaine de stabilité de (3).

2. MISE EN ÉVIDENCE DE LA CONDITION $\Delta t \leq C \Delta x^\alpha$ AVEC $\alpha > 1$

2.1. Stabilité sous $\|u_{n+1}\|_{L^2} \leq (1 + C\Delta t) \|u_n\|_{L^2}$

Le schéma de Runge-Kutta 2 (3) avec le facteur d'amplification $|G(i\Delta t a \xi)|^2 = 1 + \frac{\Delta t^4 a^4 \xi^4}{4}$ est instable selon le critère usuel $|G| \leq 1$. Maintenant, regardons de plus près ce qui se passe pour $|G| \leq 1 + C\Delta t$. Tout d'abord, ξ décrit l'ensemble des fréquences présentes dans la simulation, donc en spectral i.e. avec $u(x) = \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} c_k \exp(\frac{2i\pi k x}{N})$ et $N = \frac{1}{\Delta x}$, on a $\xi \in [-\frac{\pi}{\Delta x}, \frac{\pi}{\Delta x}]$. Ainsi

$$|G(\Delta t i a \xi)|^2 \leq 1 + \frac{\Delta t^4 a^4 \pi^4}{4\Delta x^4}. \quad (6)$$

Cela implique $|G|^2 \leq 1 + 2C\Delta t$ pour $\frac{\Delta t^4 a^4 \pi^4}{4\Delta x^4} \leq 2C\Delta t$, d'où la condition de stabilité exacte :

$$\Delta t \leq 2C^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\Delta x}{\pi a} \right)^{\frac{4}{3}}. \quad (7)$$

On peut généraliser ce critère à d'autres schémas : étant donné un schéma numérique ayant comme facteur d'amplification :

$$G(z) = \sum_{\ell=0}^s \beta_\ell z^\ell, \quad (8)$$

on obtient, pour $z = i\zeta$, $\zeta \in \mathbb{R}$, i.e. l'équation de transport,

$$|G(z)|^2 = \sum_{\ell=0}^s S_\ell \zeta^{2\ell} \quad (9)$$

avec, en posant $\beta_j = 0$ si $j > s$, pour $0 \leq \ell \leq s$,

$$S_\ell = \sum_{j=0}^{2\ell} (-1)^{\ell+j} \beta_j \beta_{2\ell-j}. \quad (10)$$

Pour des raisons de consistance $\beta_0 = \beta_1 = 1$, et donc $S_0 = 1$. Si, par ailleurs $S_1 = \dots = S_{p-1} = 0$ et $S_p > 0$, alors $|G(z)|^2 = 1 + S_p \zeta^{2p} + o(\zeta^{2p})$ et la condition de stabilité de von Neumann $|G(z)| \leq 1 + C\Delta t$ est assurée par :

$$\Delta t \leq \left(\frac{2C}{S_p} \right)^{\frac{1}{2p-1}} \left(\frac{\Delta x}{\pi a} \right)^{\frac{2p}{2p-1}}. \quad (11)$$

D'où les exposants $\alpha = 2, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \dots$ pour $p = 1, 2, 3, \dots$ dans $\Delta t \leq C' \Delta x^\alpha$.

Le facteur d'amplification G est intimement lié au graphe de stabilité du schéma numérique (voir Fig. 2 pour des exemples de tracés), comme le montre le résultat suivant :

Théorème 1. *Si, près de zéro, le bord du domaine de stabilité $z \in \mathbb{C}$ est tangent à gauche à l'axe de (Oy) :*

$$z = i(\theta + o(\theta)) + T_{2r}\theta^{2r} + o(\theta^{2r}), \quad \text{avec } r \in \mathbb{Z}_+^* \text{ et } T_{2r} < 0, \quad \text{pour } \theta \rightarrow 0, \quad (12)$$

alors un schéma centré en espace résolvant l'équation de transport doit vérifier la condition de stabilité :

$$\Delta t \leq \left(\frac{C}{-T_{2r}} \right)^{\frac{1}{2r-1}} \left(\frac{\Delta x}{\pi a} \right)^{\frac{2r}{2r-1}}. \quad (13)$$

Ce théorème est démontré dans le cas spectral dans [3]. Comme augmenter l'ordre d'un schéma accroît le degré de tangence de son domaine de stabilité à l'axe (Oy) (la réciproque se révélant fausse), on a :

Théorème 2. *Un schéma d'ordre $2r$ (ou $2r+1$) est stable pour l'équation de transport, au pire sous la condition :*

$$\Delta t \leq C' \Delta x^{\frac{2r+2}{2r+1}}. \quad (14)$$

Pour la preuve de ce théorème, on pourra se rapporter à la référence [3].

2.2. Exemples pris dans la littérature

Ce résultat s'applique à de nombreux schémas en temps utilisés en simulation numérique. Associés à des discrétisations spectrales ou centrées en espace, leur stabilité au sens de von Neumann s'écrit :

- Pour Euler explicite, $\Delta t \leq 2C \left(\frac{\Delta x}{\pi a} \right)^2$,
- Pour Runge-Kutta 2, $\Delta t \leq 2C^{1/3} \left(\frac{\Delta x}{\pi a} \right)^{4/3}$,
- Pour le schéma d'extrapolation d'ordre 2, très utilisé en mécanique des fluides pour trouver des états stationnaires

$$\frac{3u_{n+1} - 4u_n + u_{n-1}}{2\Delta t} = 2F(u_n) - F(u_{n-1}), \quad (15)$$

le bord du domaine vérifie $z = -\frac{1-4e^{i\theta}+3e^{2i\theta}}{2-4e^{i\theta}} = i\theta - \frac{3}{4}\theta^4 + o(i\theta) + o(\theta^4)$, d'où d'après le théorème 1

$$\Delta t \leq \left(\frac{4}{3} \right)^{1/3} C^{1/3} \left(\frac{\Delta x}{\pi a} \right)^{4/3} \quad (16)$$

- Le schéma d'Adams-Bashforth d'ordre 2 s'écrit $u_{n+1} = u_n + \frac{3}{2}\Delta t F(u_n) - \frac{1}{2}\Delta t F(u_{n-1})$, et le bord de son domaine de stabilité vérifie $z = \frac{e^{i\theta}-1}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-i\theta}} = i\theta - \frac{1}{4}\theta^4 + o(i\theta) + o(\theta^4)$. D'où la condition

$$\Delta t \leq 2^{2/3} C^{1/3} \left(\frac{\Delta x}{\pi a} \right)^{4/3}. \quad (17)$$

- Le schéma nommé Butcher's Lobatto 4 [5] vérifie $G(z) = \frac{1+3z/4+z^2/4+z^3/24}{1-z/4}$ et

$$\Delta t \leq 1152^{1/5} C^{1/5} \left(\frac{\Delta x}{\pi a} \right)^{6/5}, \quad 1152^{1/5} \sim 4.095.$$

- Le schéma de Runge-Kutta d'ordre 5 tiré de [2] a comme facteur d'amplification $G(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} + \frac{z^5}{120} + \frac{z^6}{1280}$, ce qui mène à la condition de stabilité :

$$\Delta t \leq \left(\frac{11520}{7}\right)^{1/5} C^{1/5} \left(\frac{\Delta x}{\pi a}\right)^{6/5}, \quad \left(\frac{11520}{7}\right)^{1/5} \sim 4.398. \quad (18)$$

- Le schéma de Butcher's Lobatto 6 [5] satisfait $G(z) = \frac{1+2z/3+z^2/5+z^3/30+z^4/360}{1-z/3+z^2/30}$, et a comme condition de stabilité :

$$\Delta t \leq 259200^{1/7} C^{1/7} \left(\frac{\Delta x}{\pi a}\right)^{8/7}, \quad 259200^{1/7} \sim 5.934. \quad (19)$$

- Pour Dormand & Prince d'ordre 8 [6], avec $G(z) = \sum_{j=0}^8 \frac{z^j}{j!} + 0.27521279901 \cdot 10^{-5} * z^9 + 0.24231996586959 \cdot 10^{-6} * z^{10} + 0.24389718205443 \cdot 10^{-7} * z^{11} - 0.2034615289686 \cdot 10^{-9} * z^{12}$ on obtient

$$\Delta t \leq 6.861876 C^{1/9} \left(\frac{\Delta x}{\pi a}\right)^{10/9}. \quad (20)$$

2.3. Effets de la discrétisation spatiale

Ces résultats s'appliquent en fait à de très nombreuses discrétisations. Seul le fait d'utiliser une discrétisation spatiale de type upwind permet d'y contrevenir. Mais même à ce moment-là, une analyse de stabilité de von Neumann du même type que ci-dessus nous permet de tirer des conclusions originales.

Considérons la discrétisation en espace par différences finies : $\partial_x u \sim \frac{1}{\Delta x} \sum_k \alpha_k u^k$ avec $\sigma(\xi) = \sum_k \alpha_k e^{i k \xi} \notin i \mathbb{R}$. Afin que cette discrétisation soit admissible, il faut que son spectre soit localisé sur la partie gauche du plan complexe. Près de l'origine, ce spectre est tangent à l'axe (Oy) et vérifie de façon approchée $x = -K y^{2q}$, avec $K > 0$ et q un entier. On rappelle que l'entier p , lié au domaine de stabilité du schéma en temps, est donné par (12).

Une analyse de stabilité de von Neumann $|G| \leq 1 + C \Delta t$ nous permet alors de trouver à nouveau des conditions de stabilité du type $\Delta t \leq C \Delta x^\alpha$, avec cette fois-ci :

- $\alpha = 1$ si $q \leq p$ (stable sous condition CFL linéaire),
- $\alpha = \frac{p(2q-1)}{(2p-1)q} \in]1, 2]$ si $q > p$.

On remarque que pour $q = +\infty$ (schéma aux différences finies centré) on retrouve le cas spectral: $\alpha = \frac{2p}{2p-1}$.

3. TESTS NUMÉRIQUES

Une manière simple de produire des schémas numériques ayant des facteurs d'amplification donnés est de considérer les schémas suivants :

$$u_{n+1} = u_n + \alpha_1 \Delta t F(u_n + \alpha_2 \Delta t F(u_n + \alpha_3 \Delta t F(u_n + \dots))).$$

Alors les β_ℓ de (8) et les α_ℓ sont liés par la relation $\beta_m = \prod_{\ell=1}^m \alpha_\ell$. Ainsi on construit des schémas numériques (d'ordre deux maximum) ayant les facteurs d'amplification voulus, et dont les graphes de stabilité présentent différentes tangences à l'axe (Oy) comme le montre la Fig. 2 à gauche. On se rapportera à la référence [3] pour le calcul des coefficients correspondants.

On teste leur stabilité avec l'équation de Burgers $\partial_t u + u \partial_x u = 0$ avec $x \in \mathbb{T}(-1, 1)$, $t \in [0, 1]$, $u_0(x) = 10 - 0.1 \sin(\pi x)$ i.e. dans des conditions proches du transport pur, avec une discrétisation spectral-Fourier en espace. On prend comme critère de divergence : $\|u_N(\cdot, t)\|_{TV} > K \|u_0(\cdot)\|_{TV}$ avec $K = 1.1$.

Une expérience numérique plus complexe avec l'équation de Navier-Stokes dans le cas d'une petite viscosité ν , utilisant une discrétisation en espace pseudo-spectral, un schéma de Runge-Kutta 2 en temps (impliquant

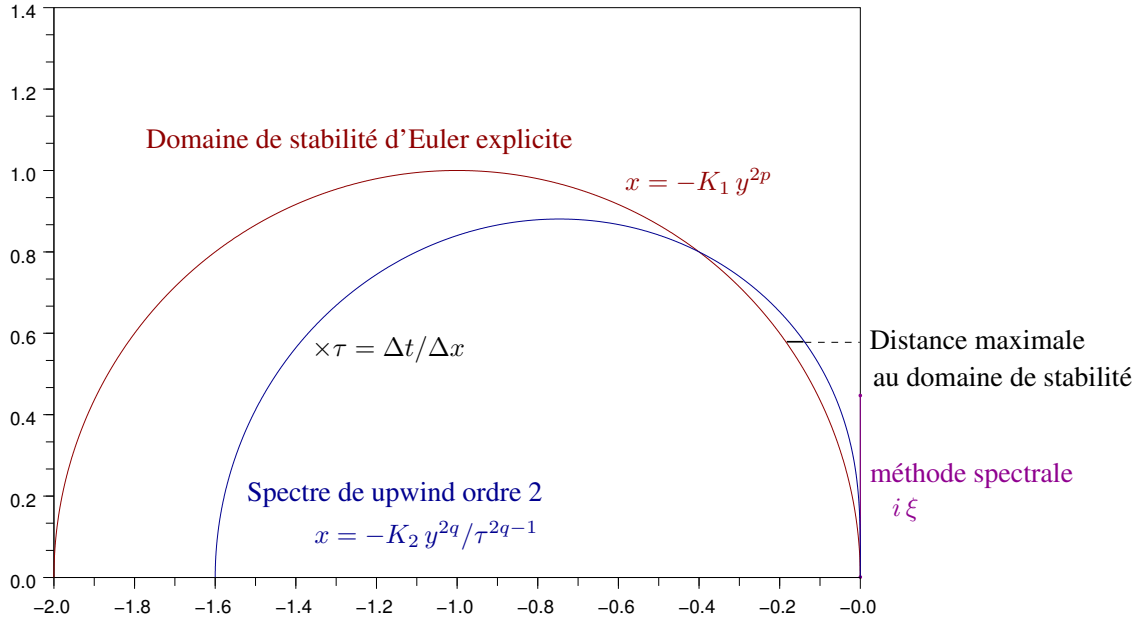


FIGURE 1. Spectre d'un schéma en espace upwind d'ordre 2 ($q = 2$) et domaine de stabilité du schéma d'Euler explicite en temps ($p = 1$). Afin d'assurer la stabilité numérique, le spectre ne doit pas trop s'éloigner du domaine de stabilité.

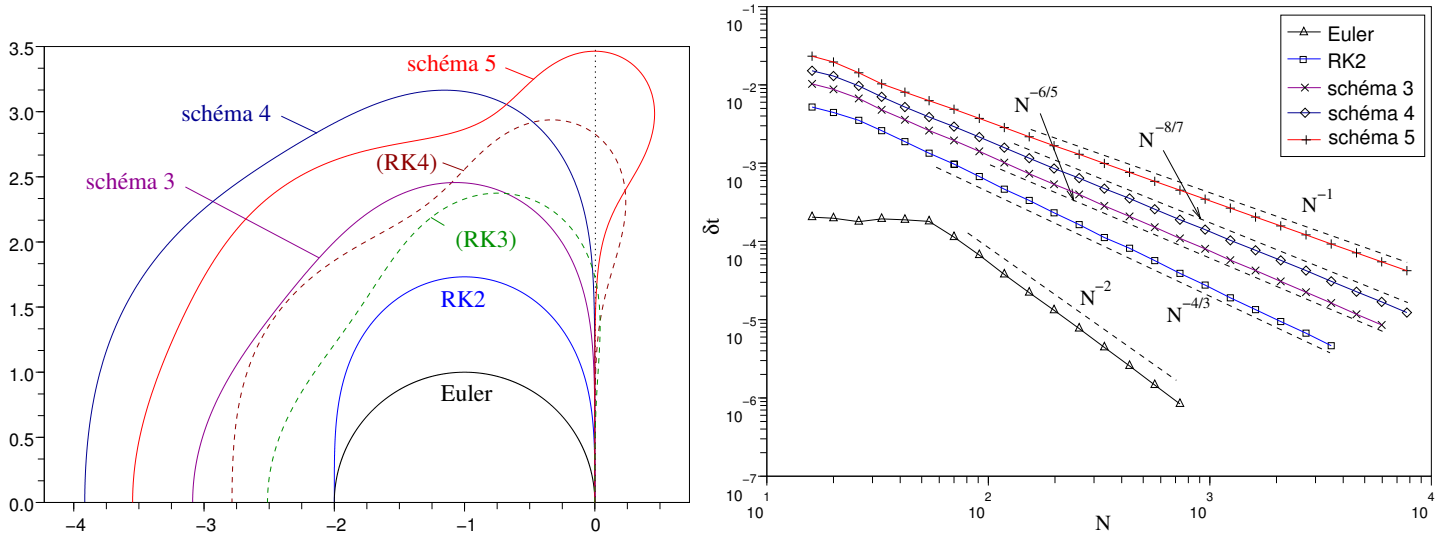


FIGURE 2. À gauche, les domaines de stabilité pour différents schémas en temps : certains classiques, les $RK\ell$ avec $1 \leq \ell \leq 4$ et d'autres créés pour les besoins de cette étude. À droite les pas de temps maximaux correspondant à ces schémas, obtenus expérimentalement en fonction du nombre de points $N = 2/\Delta x$.

une stabilité en $\Delta t \leq C\Delta x^{4/3}$) et une méthode de pénalisation pour les bords du domaine (avec le paramètre η), corrobore cette étude de stabilité, voir Fig. 3.

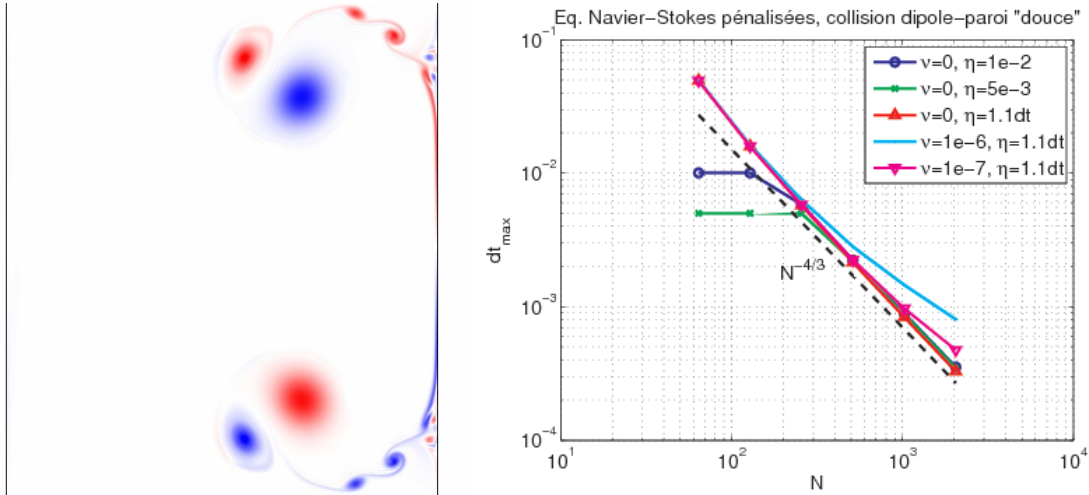


FIGURE 3. À gauche, une expérience numérique de mécanique des fluides : l'interaction dipôle/paroi. À droite le pas de temps maximum en fonction de $N = 2/\Delta x$ déterminant le nombre de points de grille N^2 .

CONCLUSION

Ainsi, on comprend bien d'où provient la condition de stabilité $\Delta t \leq \Delta x^\alpha$ avec $\alpha > 1$ qui se rencontre parfois dans les simulations numériques où domine la convection [9]. Et une simple analyse de stabilité de von Neumann permet d'en rendre compte, à condition de considérer un accroissement de l'erreur en $C\Delta t$ à chaque pas de temps.

Reste à savoir pourquoi des schémas a priori défavorables continuent à être utilisés pour faire des simulations de turbulence. Outre le fait qu'un exposant $\frac{4}{3}$ passe plus inaperçu qu'un exposant 2, un élément de réponse se trouve dans l'amortissement des petites échelles induit par les schémas stables sous condition CFL.

En effet, considérons le facteur d'amplification $|G(i \Delta t a \xi)|^2 = 1 + S_p a^{2p} (\xi \Delta t)^{2p} + o((\xi \Delta t)^{2p})$ avec $S_p < 0$. Il correspond à une évolution spectrale $|\hat{u}(T, \xi)|^2 \approx e^{S_p \xi^{2p} a^{2p} \Delta t^{2p-1} T} |\hat{u}_0(\xi)|^2$. Ainsi, si on souhaite conserver toutes les échelles, c'est-à-dire $e^{S_p \xi^{2p} a^{2p} \Delta t^{2p-1} T} \geq K$ avec $0 < K < 1$ proche de 1, $\forall \xi \in [0, \frac{1}{\Delta x}]$, on obtient la condition suivante :

$$\Delta t \leq \left(\frac{\log K}{S_{2p} T} \right)^{\frac{1}{2p-1}} \left(\frac{\Delta x}{\pi a} \right)^{\frac{2p}{2p-1}}. \quad (21)$$

c'est-à-dire le même type de conditions que pour les schémas instables sous condition CFL linéaire.

Par exemple, le schéma de Runge-Kutta 3 a comme facteur d'amplification $G(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6}$, donc $p = 2$ et $S_2 = -\frac{1}{12} < 0$. Ce schéma est stable sous condition CFL linéaire. Mais, pour conserver toutes les échelles, le pas de temps doit vérifier la condition $\Delta t \leq 12^{1/3} C^{1/3} \left(\frac{\Delta x}{\pi a} \right)^{4/3}$, avec la constante $C = -\frac{2 \log K}{T}$. Cette condition, similaire à la condition de stabilité pour Runge-Kutta 2 peut passer totalement inaperçue alors que l'utilisation de la condition CFL linéaire est susceptible de fausser la cascade turbulente.

REFERENCES

- [1] R. COURANT, K. FRIEDRICHS, H. LEWY, *On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics*, IBM Journal, March 1967, translation from a paper originally appeared in *Mathematische Annalen* **100** 32–74, 1928.
- [2] M. CROUZEIX, A. L. MIGNOT, *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, 1992.
- [3] E. DERIAZ, *Stability conditions for the numerical solution of convection-dominated problems with skew-symmetric discretizations*, à paraître dans *SIAM J. Numer. Anal.*, 2012.

- [4] E. DERIAZ AND V. PERRIER, *Direct Numerical Simulation of turbulence using divergence-free wavelets*, SIAM Multiscale Modeling and Simulation **7**(3) 1101–1129, 2008.
- [5] E. HAIRER, S. P. NØRSETT, G. WANNER, *Solving Ordinary Differential Equations I. Nonstiff Problems*. Springer Series in Comput. Mathematics, Vol. 8, Springer-Verlag 1987, Second revised edition 1993.
- [6] E. HAIRER, G. WANNER, *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*. Springer Series in Comput. Mathematics, Vol. 14, Springer-Verlag 1991, Second revised edition 1996.
- [7] R.W.C.P. VERSTAPPEN, A.E.P. VELDMAN, *Symmetry-preserving discretization of turbulent flow*, J. Comp. Phys. **187** (2003) 343–368.
- [8] P. WESSELING, *Von Neumann stability conditions for the convection-diffusion equation*, IMA Journal of Numerical Analysis **16**:583–598, 1996.
- [9] Q. ZHANG AND C.-W. SHU, *Error Estimates to Smooth Solutions of Runge–Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Scalar Conservation Laws*, SIAM J. Numer. Anal. **42**(2): 641–666, 2004.