

Esercizi di Analisi 2

Nicola Fusco

(Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università 'Federico II', Napoli)

1. Successioni e Serie di Funzioni

1.1 Al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) \left(\arctan\left(\frac{1}{n}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)^{\alpha}.$$

1.2 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n} - \operatorname{sen} x}{n^2 x^n} \right)^2.$$

1.3 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n} \cos x - x^n}{1 + n^2} \right)^2.$$

1.4 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{n}{x^{2n}} \operatorname{arctg} \frac{x^{2n}}{n} \right).$$

1.5 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \log \left(1 + \frac{|\operatorname{sen} x|^n}{1 + x^n} \right)$$

quando $x \geq 0$.

1.6 Determinare gli $\alpha > 0$ tali che la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^{\alpha} + n^2}$$

converga puntualmente in $[0, +\infty)$.

Verificare che per $\alpha > 2$ la serie converge uniformemente in $[0, +\infty)$.

1.7 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(x^n - n \operatorname{sen} \frac{x^n}{n} \right) \quad .$$

1.8 Calcolare:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{+\infty} \frac{n^2 x^2}{1+x^2} \arctan \frac{1}{nx^2} dx \quad .$$

1.9 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n(x^2+x-2)}} \quad .$$

1.10 Data la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \left(\frac{x^n}{n} \right) \right) \quad ,$$

mostrare che

i) f è continua in $[-1, 1]$

ii) f è di classe C^2 in $(-1, 1)$

iii) f ha un minimo assoluto in 0.

1.11 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \cos \frac{x}{\sqrt{n}} \right)$$

1.12 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\operatorname{sen} \frac{x^n}{n} - \log \left(1 + \frac{x^n}{n} \right) \right]$$

quando $x \in [-1, +\infty[$.

1.13 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n} - \operatorname{sen} x}{n^2 x^n} \right)^2 \quad .$$

1.14 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\operatorname{arctg} \left(\frac{x^n}{\sqrt[3]{n} \log^2 n} \right) - \frac{1}{\log^2 n} \operatorname{arctg} \left(\frac{x^n}{\sqrt[3]{n}} \right) \right].$$

1.15 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}$$

e calcolarne la somma.

1.16 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \cos \frac{x+1}{\sqrt{n^2+x^4}} \right).$$

1.17 Studiare la convergenza puntuale e la convergenza uniforme della successione di funzioni:

$$f_n(x) = \frac{e^{-n^\alpha|x|}}{\sqrt{n}} (1 + nx^2)$$

al variare del parametro positivo α .

1.18 Studiare la convergenza puntuale e uniforme nell'intervallo $[0, \frac{\pi}{2})$ della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\tan \frac{x}{n} - \tan \ln \left(1 + \frac{x}{n} \right) \right).$$

1.19 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\operatorname{sen} \frac{x^n}{n} + \operatorname{arctg} \frac{n}{x^n} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Detta $S(x)$ la somma della serie, calcolarne il limite per $x \rightarrow 0$ (se esiste).

1.20 Provare che la seguente serie di funzioni converge uniformemente su \mathbb{R} :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{nx \sin^4 x}{1 + n^3|x|^3}.$$

1.21 Studiare la convergenza puntuale e la convergenza uniforme della seguente serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[\log \left(x + \frac{1}{n} \right) \right]^n}{x^2 + n^2}.$$

1.22 Studiare la convergenza puntuale e uniforme della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \log \left(1 + \frac{1}{n^{2x}} \right)$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

1.23 Provare che la seguente serie di funzioni converge uniformemente su ogni intervallo limitato:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(n \arctan \frac{x}{n} - \int_0^x \frac{n^2 dt}{n^2 + \sin^2 n + t^2} \right).$$

(*Suggerimento*: si scriva l'arcotangente come un integrale)

1.24 Mostrare che, fissato $\alpha > 2$, la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{x^\alpha + n^2}$$

converge uniformemente in $[0, +\infty)$.

1.25 Provare che la seguente serie di funzioni converge uniformemente su $[1, +\infty)$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\ln x - \int_1^x \frac{n}{\sqrt{n^2 t^2 + \cos^2 t}} dt \right].$$

1.26 Discutere il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} n}{n^{2x} + x^{2n}}$$

al variare di $x \in \mathbb{R}$.

1.27 Studiare la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n + x^{2n}}.$$

2. Serie di Potenze

2.1 Calcolare l'insieme di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}$$

2.2 Calcolare, utilizzando la formula di Taylor,

$$\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$$

a meno di $1/100$.

2.3 Sia $f(x) = \operatorname{sen}(x^3) \log(1+x^2)$. Utilizzando gli sviluppi in serie notevoli calcolare $f^{(11)}(0)$.

2.4 Calcolare l'intervallo di convergenza e la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}.$$

2.5 Calcolare la somma della serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+k)}$, dove $k > 0$

2.6 Studiare la convergenza e calcolare la somma della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n+1}$$

2.7 Discutere la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+2)}$$

e calcolare la somma della serie.

2.8 Calcolare il seguente integrale a meno di $1/100$ (può essere utile ricordare che $n! \geq 2^n$ per ogni $n \geq 2$):

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{\sqrt{x}} dx.$$

2.9 Data $f(x) = x^3 \operatorname{sen}^2 x$, calcolare $f^{(9)}(0)$.

3. Continuità e differenziabilità

3.1 Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\pi - 2 \arccos(1 - e^{-(x^2+y^4)})}{(x^2 + y^2)^\alpha} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

con $\alpha \in \mathbb{R}$, si chiede di:

- (i) trovare gli α tali che f è continua in \mathbb{R}^2 ;
- (ii) trovare gli α tali che f è differenziabile in \mathbb{R}^2 .

3.2 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy \log(|x| + |y|)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

studiarne la continuità e differenziabilità.

3.3 Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{e^x - e^{-y}} & \text{se } y \neq x \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

- (i) Studiare il segno di f ;
- (ii) Studiare la continuità e la differenziabilità di f ;
- (iii) dire se $(0, 100)$ è un punto di massimo relativo.

3.4 Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x|y|^\alpha}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

con $\alpha > 0$, si chiede di:

- (i) trovare gli α tali che f è continua in \mathbb{R}^2 ;

(ii) trovare gli α tali che f è differenziabile in \mathbb{R}^2 .

3.5 Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x}\sqrt{y}}{x^2+y} & \text{se } (x, y) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty) \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

si chiede:

- (a) studiare la continuità di f in \mathbb{R}^2 ;
- (b) studiare la differenziabilità di f in \mathbb{R}^2 .

3.6 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x^3-2y^3} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) mostrare che $f(x, y)$ è continua in $(0, 0)$ e calcolare f_x e f_y in $(0, 0)$;
- (b) f è differenziabile in $(0, 0)$?

3.7 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\ln(1 + x^3 - x^2y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) mostrare che $f(x, y)$ è continua in $(0, 0)$ e calcolare f_x e f_y in $(0, 0)$;
- (b) f è differenziabile in $(0, 0)$?

3.8 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{x^5-y^3} - 1}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

mostrare che

- (i) $f(x, y)$ è continua in $(0, 0)$;
- (ii) f è dotata di derivate parziali in ogni direzione uscente dall'origine, ma non è differenziabile nell'origine.

3.9 Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y^2}{\sqrt{x^6 + 2y^6}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

con $\alpha > 0$, si chiede di:

- (i) trovare gli α tali che f è continua in \mathbb{R}^2 ;
- (ii) trovare gli α tali che f è differenziabile in \mathbb{R}^2 .

3.10 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\log(1 + x^3 - y^5)}{x^2 - 5x^2y^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

mostrare che f

- (i) è continua nell'origine;
- (ii) è dotata di derivate parziali in ogni direzione uscente dall'origine;
- (iii) non è differenziabile nell'origine.

3.11 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{|xy|} \frac{\sin^2(x + y)}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

discutere: (a) la continuità di f in $(0, 0)$; (b) l'esistenza delle derivate parziali in $(0, 0)$; (c) la differenziabilità in $(0, 0)$.

3.12 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^8 + (x^2 - y^3)^2}{x^4 + y^6} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{per } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

discutere in $(0, 0)$: la continuità di f , l'esistenza delle derivate direzionali, la differenziabilità.

3.13 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^8 + (x^2 - y^3)^2}{x^4 + y^6} & \text{per } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{per } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

discutere in $(0, 0)$: la continuità di f , l'esistenza delle derivate direzionali, la differenziabilità.

3.14 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 x^{1/3} (x + y)}{x^2 + y^4} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

studiare:

- la continuità di f ;
- l'esistenza delle derivate direzionali;
- la differenziabilità .

3.15 Sia f la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3(x^2 + y^4)}{x^4 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- Provare che f è continua nell'origine.
- Calcolare $f_x(0, 0)$ e $f_y(0, 0)$.
- Mostrare che f non è differenziabile nell'origine.

3.16 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp\left\{\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right\}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

verificare che è continua in $(0, 0)$;
calcolare le derivate parziali nell'origine;
provare che è differenziabile nell'origine.

3.17 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} x \log y^2 & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0, \end{cases}$$

- studiare la continuità di f in \mathbb{R}^2 ;
- trovare gli insiemi di positività, negatività e gli zeri di f ;
- dire se è vera o falsa la seguente affermazione:

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = 0,$$

dove $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ sono polinomi tali che

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_1(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \gamma_2(t) = 0.$$

3.18 Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x^3 - 2y^3} - 1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases},$$

- (a) calcolare f_x e f_y in $(0, 0)$;
(b) f è continua in $(0, 0)$? è differenziabile in $(0, 0)$?

4. Massimi e Minimi

4.1 Data la funzione $f(x, y) = x^2 - x \sin^2 y$, determinarne massimo e minimo assoluti nel rettangolo $[-2, 2] \times [0, 2]$.

4.2 Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 + y^2 - y$ nel cerchio di centro $(1/2, 0)$ e raggio 1.

4.3 Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = xy e^{x^2 - y^2}$$

nel cerchio C di centro $(0, 0)$ e raggio 1.

4.4 Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) e^{xy}$$

nel triangolo T di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

4.5 Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = \frac{2 + xy}{e^{-x^2 - y^2}}$$

al variare di (x, y) nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 2.

4.6 Determinare, se esistono, massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}xy^4)}{1 + \sqrt{1 - x^2 - y^4}}.$$

4.7 Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione

$$f(x, y) = \sqrt{|x| + |y|} e^{-(x^2 + y^2)}.$$

Calcolare i massimi e minimi relativi e assoluti di f in \mathbb{R}^2 .

4.8 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{1 - xy^2}{1 + x^2},$$

determinare i massimi e minimi relativi ed assoluti di f in

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}.$$

4.9 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{10 + x^2 y^2}{e^{\sqrt{x^2 + y^2}}}$$

dire se ammette massimo o minimo assoluto in tutto il piano e in caso affermativo determinarlo.

4.10 Determinare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^2 + y$ nella corona circolare di centro l'origine e raggi 1 e 2.

4.11 Determinare minimo e massimo assoluto nel quadrato $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ della funzione

$$f(x, y) = (\sin x - \cos y)(\sin x + \cos y)^2 .$$

4.12 Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = x^3 y e^{-\sqrt{x^2 - y^2}}$$

nel settore circolare $C = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 3, |y| \leq x, x^2 + y^2 \leq 9\}$.

4.13 Si trovino estremi relativi e assoluti della funzione

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2} (x^4 - y^4)$$

nel cerchio di centro l'origine e raggio 2.

4.14 Determinare il massimo ed il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = (x - y)^2 (x + y)$$

nell'insieme $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x + y \geq 0\}$.

4.15 Determinare massimo e minimo assoluto della funzione

$$x^2 z e^{y^2 + z^2}$$

nella palla di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1.

4.16 Trovare (se esistono) il massimo e il minimo assoluti nel piano della funzione

$$f(x, y) = \frac{2 - x^2 y^2}{\exp\left(4\sqrt{x^2 + y^2}\right)}.$$

4.17 Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = e^{xy} \sqrt{x^2 + y^2}$$

nel cerchio di centro l'origine e raggio 2.

4.18 Determinare il massimo e il minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = e^{-x^2 y^2} \sqrt{x^2 + y^2}$$

nel cerchio di centro l'origine e raggio 2.

4.19 Determinare massimi e minimi assoluti della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{e^{-x} x^2 y}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

nel quadrato $[0, 1] \times [0, 1]$.

4.20 Trovare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\exp\left\{\frac{x^2}{4} - \frac{1}{2\sqrt{x^2 + y^2}}\right\}}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

nel cerchio (chiuso) di centro l'origine e raggio 1.

4.21 Calcolare minimo e massimo assoluto della funzione

$$f(x, y) = (2x - 3)e^{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

nel cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1.

(Fac.: mostrare che l'origine è un estremo relativo per f)

4.22 Trovare estremi relativi ed assoluti nel piano della funzione

$$f(x, y) = 5 + (x + \sin y)^3 (x - \sin y).$$

4.23 Determinare massimo e minimo assoluti della funzione $f(x, y) = x^4 - y^4 + x^2y^2$ al variare di (x, y) nel cerchio chiuso di centro l'origine e raggio 1.

4.24 Data la funzione

$$f(x, y) = \frac{100 + x^2y^2}{e\sqrt{x^2+y^2}},$$

calcolarne gli eventuali massimi e minimi in tutto \mathbb{R}^2 .

4.25 Trovare, se esistono, massimi e minimi, relativi e assoluti, della funzione

$$f(x, y) = \arcsin \left(\max \left\{ -1, e^{x^2+2y^2-2(x+2y)+1} - 2 \right\} \right)$$

nel suo insieme di definizione.

5. Derivazione sotto il segno di integrale

5.1 Studiare la monotonia della funzione

$$F(x) = \int_0^{x^2} e^{x^2t^2} dt.$$

6. Equazioni Differenziali

6.1 Determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' + y = \frac{\cos x}{(1 + \sin^2 x)}.$$

6.2 Al variare del parametro reale β , determinare l'integrale generale dell'equazione

$$y'' - 2\beta y' + \beta^2 y = e^{-2x},$$

e individuare tutte le soluzioni tali che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$

6.3 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' - y = \frac{2y^2}{x^2 + y^2} \\ y(1) = 1 . \end{cases}$$

6.4 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = \frac{1}{2}(y - x)^2 \\ y(0) = 3 \quad y'(0) = 4 . \end{cases}$$

6.5 Mostrare che le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' = (x + y')^2 \\ y(0) = \alpha, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

hanno tutte un minimo relativo in 0. E' possibile dimostrare cio' senza risolvere esplicitamente l'equazione?

6.6 Integrare l'equazione

$$(y \ln x - 2)y = xy'$$

e discutere la sommabilità in $(0, +\infty)$ delle soluzioni.

6.7 Integrare l'equazione

$$3y^2y' - y^3 - x - 1 = 0$$

e determinare l'unica curva integrale che tocca l'asse delle x in un sol punto.

6.8 Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' - y = \frac{xy^2}{x^2 + y^2} \\ y(1) = 1 . \end{cases}$$

6.9 Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} (1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0 \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 1 \end{cases}$$

6.10 Trovare tutte le soluzioni dell'equazione

$$y'' = \frac{e^{y'} + e^{-y'}}{1 + x^2} .$$

Dedurre direttamente dall'equazione che le soluzioni $y(x)$ tali che $y'(0) = 0$ hanno in 0 minimo assoluto.

6.11 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} = \frac{1}{y^2} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

6.12 Determinare tutte le funzioni $y(x)$ tali che

$$\begin{cases} y(1 - \log y)y'' + (1 + \log y)y'^2 = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

6.13 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y + y^2 \operatorname{sen}^2 x = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

6.14 Determinare le soluzioni del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy'' - 2x^3(y')^2 - y' = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

(Fac. Senza risolvere esplicitamente l'equazione provare che tutte le sue soluzioni sono funzioni pari)

6.15 Determinare le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 3y' + 2y = \frac{1}{1 + e^{-x}}.$$

6.16 Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y'y'' + (1 + y'^2)^2 = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}.$$

6.17 Dare una formula risolutiva per l'equazione

$$y'' + y = \frac{1}{1 + x^2}$$

e mostrare che esiste una soluzione $y(x)$ tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0 \quad .$$

6.18 Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y = \frac{1}{\sin 2x + 1} \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

e verificare che ha un minimo relativo in 0.

6.19 Integrare l'equazione

$$(y \ln x - 2)y = xy'$$

e discutere la sommabilità in $(0, +\infty)$ delle soluzioni.

6.20 Dire per quali valori del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' + x \log x (\log x + 1)y^2 - y = 0 \\ y(1) = \alpha \end{cases}$$

è definita per ogni $x > 0$ ed è sommabile in $(0, +\infty)$.

6.21 Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y = -\frac{y''}{\sqrt{(y')^2 + (y'')^2}} \\ y(0) = 0 \quad y'(0) = -1 \end{cases}$$

6.22 La soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' - y = \frac{y^2 - x^2}{y} \\ y(1) = 0, \end{cases}$$

è una curva chiusa γ . Detta D la regione del semipiano $x > 0$ racchiusa da γ , calcolare il baricentro di D .

6.23 Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -\frac{2x}{1+x^2}y + (1+x^2)^{1-\alpha}y^{1-\alpha}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

determinare i valori di $\alpha > 0$ per i quali la soluzione ammette limite finito per $x \rightarrow +\infty$.

6.24 Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^3 y'' = e^y (y - 2) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \sqrt{2e} \end{cases}$$

e si calcoli il limite, per $x \rightarrow +\infty$, della soluzione.

6.25 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'' + y'^2 = \cos^2 y - \cos y \operatorname{sen} y \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = -1. \end{cases}$$

6.26 Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} 2y^{3/2} y'' = (1 + (y')^2)^{3/2} \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = -1. \end{cases}$$

6.27 Determinare le funzioni $y(x) : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ tali che l'area della superficie ottenuta ruotando il grafico di y in $[0, x]$ di un angolo di 2π intorno all'asse delle x sia pari a πx .

6.28 Risolvere il seguente problema ai limiti

$$\begin{cases} x^2 y'' - 2y = x^4 e^{-x} - 4x^3 e^{-x} \\ y(1) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0 \end{cases}$$

6.29 Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, pari, sommabile, verificante

$$\int_0^{+\infty} f(x) \cos x \, dx = 0.$$

6.30 Mostrare che l'equazione differenziale

$$y''(x) + y(x) = f(x)$$

ammette un'unica soluzione infinitesima per $x \rightarrow \pm\infty$.

6.31 Disegnare l'andamento delle soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = (y + x)e^y \sin y \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcolare, se esistono, i limiti di tali soluzioni a $\pm\infty$.

Suggerimento: si trovino subito le soluzioni costanti.

6.32 Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' - 2y' + y = e^x \left(3 + \frac{\log^2 x}{x} \right).$$

6.33 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{y^2} \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases}$$

6.34 Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} yy'' + (y')^2 + y(y')^3 = 0 \\ y(0) = e \\ y'(0) = \frac{1}{e} \end{cases}$$

Mostrare che la soluzione, che è definita per ogni $x > 0$, è una funzione crescente e concava, e che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{\sqrt{x}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x^\alpha} = +\infty \quad \forall \alpha < \frac{1}{2}.$$

6.35 Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''y' = 2 \operatorname{sen} 2x \\ y(\pi) = 0 \\ y'(\pi) = 0. \end{cases}$$

6.36 Determinare la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} xy' - y = \frac{x^2 + y^2}{y} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

6.37 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \frac{4x^3 + 4x^2y - xy^2 + y^3}{x(y^2 + 4x^2)} \\ y(2) = -2. \end{cases}$$

6.38 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} xy'' + y'(1 + \sqrt{xy'}) = 0 \\ y(e) = 0 \\ y'(e) = \frac{4}{e}. \end{cases}$$

6.39 Risolvere il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y^3y'' = e^y(y - 2) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \sqrt{2e}. \end{cases}$$

6.40 Risolvere il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' = \frac{2+x}{x^3} \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

7. Curve e Forme Differenziali

7.1 Calcolare

$$\int_{+\partial D} xy \, dx - y \, dy,$$

dove D è il dominio del piano delimitato dalla parabola $y = x^2$, dal semiasse delle y positive e dalla retta $y = 1$, contenuto nel I quadrante.

7.2 Dopo aver riconosciuto che la regione di piano racchiusa dalla curva di equazione $(x^2 + y^2)^2 = xy$ è simmetrica rispetto all'origine, calcolarne l'area.

7.3 Sia γ l'arco della curva di equazione implicita $(x^2 + y^2)^2 - x^2y = 0$ contenuto nel primo quadrante. Calcolare l'area della porzione di piano racchiusa da γ .

7.4 Calcolare la lunghezza della curva di equazione polare $\varrho = \cos^2 \vartheta$, $-\pi/2 \leq \vartheta \leq \pi/2$.

7.5 Data la forma differenziale

$$\omega = 2x(y-1)e^{x^2+y} dx + \left[ye^{x^2+y} + \frac{x}{x^2+y^2} \right] dy,$$

calcolare $\int_{\gamma} \omega$, dove γ è l'ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, percorsa in senso antiorario.

7.6 Sia $\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, (x^2 + y^2)^2 - xy = 0\}$. Si calcoli l'area della superficie ottenuta ruotando γ di un giro completo intorno all'asse x .

7.7 Determinare una funzione $b(x, y)$ tale che la forma differenziale

$$\omega = \log \sqrt{1 - (x^2 + y^2)} dx + b(x, y) dy$$

risulti esatta nel suo insieme di definizione. Calcolare poi $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è una curva, contenuta nell'insieme di definizione di ω , che connette i punti $(0, 0)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

7.8 Data la forma differenziale

$$\omega = \left[\frac{x^2}{1 - x^2 - y^2} - \frac{1}{2} \log(1 - x^2 - y^2) \right] dx + \frac{xy}{1 - x^2 - y^2} dy,$$

si verifichi che la forma è esatta. Calcolare poi $\int_{\gamma} \omega$ dove γ è una curva, contenuta nell'insieme di definizione di ω , che connette i punti $(0, 0)$ e $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

7.9 Calcolare il baricentro della curva γ di equazione $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, $t \in [0, \pi/2]$.

7.10 Calcolare la primitiva di

$$\frac{xz}{(1+x^2)^2} dx - \frac{yz}{(1+y^2)^2} dy + \frac{x^2 - y^2}{2(1+x^2+y^2+x^2y^2)} dz,$$

che vale 1 in $(1, 1, 1)$.

7.11 Data la forma differenziale

$$\frac{z^2}{x(x^2+z^2)} dx + \frac{dy}{y} - \frac{z}{x^2+z^2} dz,$$

mostrare che è esatta e calcolarne la primitiva che vale 0 in $(1, -1, 1)$

7.12 Dire per quali funzioni $Y(x, y)$ di classe C^1 in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ la forma differenziale

$$\frac{x}{x^2 + y^2} dx + Y(x, y) dy$$

risulta esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

1) La forma differenziale

$$\frac{y^2 + z^2 - yz + 1}{y^2 + z^2 + 1} dx + \frac{xz(y^2 - z^2 - 1)}{(y^2 + z^2 + 1)^2} dy + \frac{xy(z^2 - y^2 - 1)}{(y^2 + z^2 + 1)^2} dz$$

è esatta. Determinarne la primitiva che vale zero in $(1, 1, 1)$.

7.13 Calcolare l'integrale della forma differenziale

$$\omega = \left(\frac{x}{1 + x^2 + y^2} + xy \right) dx + \frac{y}{1 + x^2 + y^2} dy$$

lungo la curva

$$y = x^2 \log x, \quad x \in (0, 1).$$

Suggerimento: si 'spezzi' la forma differenziale in modo opportuno.

7.14 Sia $E = F \setminus (E_1 \cup E_2)$, dove F è il semicerchio

$$x^2 + y^2 \leq 1, \quad y \geq 0,$$

E_1 è il cerchio di raggio 1 e centro $(1, 0)$, e E_2 è il cerchio di raggio 1 e centro $(-1, 0)$. Si calcoli il baricentro del bordo di E .

7.15 Calcolare

$$\int_{+\partial D} xy dx - y dy,$$

dove D è il dominio del piano delimitato dalla parabola $y = x^2$, dal semiasse delle y positive e dalla retta $y = 1$, contenuto nel primo quadrante.

7.16 Calcolare

$$\int_{\gamma} x dx - y dy,$$

dove γ è la spirale di equazione polare $\rho = e^{-\vartheta}$, $\vartheta \geq 0$, orientata in senso antiorario.

7.17 Calcolare il baricentro della cardiode di equazione polare $\rho = 1 + \cos \vartheta$, $\vartheta \in [0, 2, \pi]$.

7.18 Sia γ la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = e^{-(t-1)^2} \\ y(t) = \frac{1}{t^2 - t + 1} \end{cases} \quad t \in [0, 2].$$

Disegnare γ e calcolare

$$\int_{\gamma} \sin^2 x \log(xy) dx + \left(\frac{x - \sin x \cos x}{2y} \right) dy.$$

8. Integrali Doppi

8.1 Dato $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$ si ponga

$$D_{\alpha} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq \alpha\}, \quad I_{\alpha} = \iint_{D_{\alpha}} \frac{y}{(x^2 + y^2)^{\frac{\alpha}{2}}} dx dy.$$

Calcolare il valore di I_{α} e il limite $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I_{\alpha}$.

8.2 Sia γ la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = t \sin t. \end{cases} \quad t \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \right]$$

si chiede:

- (a) mostrare che γ è una curva regolare e semplice;
- (b) detta D la regione di piano delimitata da γ e dall'asse delle y , calcolare

$$\iint_D x^2 dx dy.$$

8.3 Sia D la regione di piano limitata, delimitata dalle rette di equazione $y = x$, $y = x - 2$, $y = -x - 1$, $y = -x + 1$. Calcolare

$$\iint_D e^{3(y+x)} dx dy.$$

8.4 Calcolare

$$\int \int_T \frac{x}{y} dx dy$$

dove T è il dominio del piano racchiuso dalle parabole $y = x^2$ e $x = y^2$.

8.5 Sia S la semisfera $S = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, z \geq 0\}$. A quale altezza h si deve far passare un piano parallelo al piano xy in modo che tagli S in due parti di ugual volume? e di uguale superficie laterale?

8.6 Sia D il dominio del piano racchiuso dalla curva di equazione

$$\begin{cases} x = t - t^2 \\ y = t - t^3 \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1$$

Calcolare

$$\iint_D \frac{1}{2+x} dx dy.$$

8.7 Si calcoli il volume del solido delimitato dalle superfici di equazione $z = x^2 + y^2$ e $z = \sqrt{3 - 2(x^2 + y^2)}$.

8.8 Sia T la regione di spazio compresa fra il cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e il paraboloido $z = k - x^2 - y^2$.

T ha approssimativamente la forma di un cono gelato.

Detti V il volume di T e V_C il volume contenuto nella 'cialda' del suddetto gelato T , calcolare il limite del rapporto

$$\frac{V_C}{V}$$

al tendere di $k \rightarrow 0^+$ e di $k \rightarrow +\infty$.

8.9 Data la curva

$$\gamma = \begin{cases} x = 1 - \sin t \\ z = -\log \cos t \end{cases} \quad t \in [0, \frac{\pi}{2}[$$

calcolare il volume della regione illimitata di spazio che si ottiene ruotando la curva intorno all'asse z .

Mostrare inoltre che la superficie che delimita questa regione ha area finita.

8.10 Calcolare il volume del solido racchiuso dal cilindro di equazione $x^2 + y^2 - 2y = 0$ e delimitato dalla superficie di equazione $z = xy$ e dai semispazi $z \geq 0$, $x \geq 0$ e $y \leq 1$.

8.11 Sia D il dominio contenuto nel secondo quadrante del piano e compreso fra le curve di equazione $4x^2 + y^2 + 8x = 0$ e $x^2 + y^2 + 2x = 0$. Calcolare

$$\iint_D \frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy \quad .$$

8.12 Sia A la porzione di piano contenuta nel primo ottante e racchiusa fra le curve di equazione $x - y = 0$ e $x^3 + y^3 - xy = 0$.

Calcolare il volume del cilindroide di base A delimitato dal grafico della funzione $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$.

8.13 Calcolare il volume del solido definito dalle relazioni:

$$0 \leq x \leq 1 + 3(y^2 + z^2) \quad , \quad 16(y^2 + z^2) \leq x^2 \quad .$$

8.14 Siano $0 < a \leq 1$ e D_a il dominio del piano delimitato dall'asse y , dalla retta $y = a$ e dalla circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1. Sia poi T_a il solido ottenuto ruotando D_a intorno all'asse y .

(i) Si determini una formula che esprima il volume di T_a per mezzo di un integrale unidimensionale.

(ii) Si calcoli il volume di T_1 .

(iii) Si calcoli il

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\text{vol}(T_a)}{a^5}.$$

Sugg.: per lo svolgimento di quest'ultimo punto non è necessario calcolare esplicitamente il volume di T_a .

8.15 Data la curva γ di equazioni parametriche

$$\gamma(t) = ((1 - \sin t) \cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi],$$

si verifichi che γ è una curva regolare a tratti, semplice e chiusa, simmetrica rispetto all'asse delle y . Detto D il dominio del piano racchiuso da tale curva, si determini il baricentro di D .

8.16 Sia T la regione del piano delimitata dalla retta $y = 1$, dalla circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 1 e dalla circonferenza di centro $(1, 0)$ e raggio 1. Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando T di un giro completo intorno alla retta $y = 1$.

8.17 Calcolare l'integrale

$$\iint_D \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy,$$

dove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2 \leq x^2 + y^2 \leq 12, \quad y \geq x^2\}.$$

8.18 Sia D il dominio limitato del piano contenuto nel primo quadrante e delimitato dalle rette $y = x$, $y = \sqrt{3}x$ e dalla curva $3x^2y^2 - x^2 - y^2 = 0$. Calcolare

$$\iint_D \frac{x}{y} dx dy.$$

8.19 Si immagini di far cadere una sfera di raggio 1 all'interno di un cono circolare retto (vuoto), di raggio di base 2, e altezza $2\sqrt{2}$, con il vertice rivolto verso il basso. Si calcoli il volume di ciascuna delle due parti del cono che rimangono rispettivamente al di sotto e al di sopra della sfera.

8.20 Calcolare

$$\iint_D xy dx dy,$$

dove $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0, x^2 + y^2 > 1, x^2 + y^2 - 2x < 0\}$.

8.21 Siano C_1 il cerchio di centro $(0, 0)$ e raggio 1 e C_2 il cerchio di centro $(1, 0)$ e raggio 1. Calcolare il volume del solido ottenuto ruotando $C_2 \setminus C_1$ di un giro completo intorno all'asse y .

8.22 Siano $f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$ e $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq f(x)\}$.

- (i) (5 punti) Calcolare il volume del solido che si ottiene ruotando R di un giro completo intorno all'asse x ;
- (ii) (6 punti) Calcolare il volume del solido che si ottiene ruotando R di un giro completo intorno all'asse y .

8.23 Sia E l'insieme

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, \arctan(x^2 + y^2) \leq z \leq \frac{\pi}{4} \right\};$$

disegnare E e calcolarne il volume.

8.24 Sia D il dominio contenuto nella striscia $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [0, \frac{\pi}{2}], y \geq 0\}$, delimitato dalle curve di equazione $y = \sin x$, $y = 2 \sin x$, $y = \frac{1}{2} \cos x$, $y = \frac{3}{2} \cos x$. Calcolare

$$\iint_D \frac{\sin^3 x \cos x}{y^3} dx dy.$$

9. Integrali di Superficie

9.1 Sia V il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 definito da

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, z \geq \sqrt{x^2 + y^2} \right\},$$

e sia S la frontiera di V . Calcolare il flusso uscente attraverso S del campo vettoriale

$$F(x, y, z) = (x^2 z, 3yz^2, 5 \log z).$$

9.2 Posto $T = \{x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2y, z \geq 0\}$, calcolare il flusso del campo $\underline{v} = (0, yz, x)$ attraverso la frontiera di T orientata verso l'esterno.

9.3 Posto $T = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, (x-1)^2 + z^2 \leq y^2, y \geq 0\}$, calcolare il flusso del campo $\underline{v} = (y, y^2, 0)$ attraverso la frontiera di T orientata verso l'interno.

9.4 Sia γ la curva di equazione $(x^2 + y^2)^2 = xy^2$ racchiusa nel primo quadrante e D il dominio limitato avente γ come frontiera. Considerato il cilindro retto $C = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 2\}$, calcolare il flusso uscente dalla frontiera del cilindro del campo $\underline{v} = \sqrt{x^2 + y^2}(\underline{i} + \underline{j})$.

9.5 Sia

$$S = \begin{cases} x = u - v \\ y = u \\ z = u^2 + v^2 \end{cases} \quad (u, v) \in B = \{u^2 + v^2 \leq 1\}$$

Si osservi che il bordo di S , Γ è contenuto nel piano $z = 1$. Detta γ la proiezione di Γ sul piano (x, y) e D il dominio racchiuso da γ , mostrare che S è il grafico di un'opportuna funzione $f(x, y) : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Usare questo risultato per calcolare il volume della regione di spazio T definita da

$$T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, f(x, y) \leq z \leq 1\} \quad .$$

9.6 Sia C il solido racchiuso dalle superfici di equazione $z = y^2 - x$ e $z = x^2 + 2(y-1)^2$. Calcolare il flusso uscente dalla frontiera di C del campo $v = (xy, z, y)$.

9.7 Siano γ la curva del piano (x, z) di equazione $\varrho = \sin \vartheta \cos \vartheta$, $0 \leq \vartheta \leq \pi/2$, e D il dominio limitato di cui γ è la frontiera. Detto T il dominio ottenuto ruotando D di un giro completo intorno all'asse z , calcolare

$$\int_{\partial T} (F, N) d\sigma,$$

dove $F = \left(\frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2}, \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)$ e N è la normale a ∂T orientata verso l'esterno di T .

9.8 Data la curva γ del piano xy di equazioni parametriche

$$(\gamma) \quad \gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t) \quad t \in [0, \pi],$$

sia Σ la superficie ottenuta facendo ruotare γ intorno all'asse delle x . Si trovi l'area di Σ e inoltre si calcoli l'integrale superficiale

$$\int_{\Sigma} (x^2 + y^2) d\sigma.$$

9.9 Sia S la superficie di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = u + v \\ y = u - v \\ z = u^3 \end{cases}$$

con $(u, v) \in D = \{(u, v) : u^2 + v^2 \leq 1, u^2 + v^2 - 2u \geq 0\}$. Calcolare il flusso attraverso la superficie S (orientata in modo che la normale punti verso l'alto) del seguente campo vettoriale:

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{x^2 + y^2}, \frac{1}{x^2 + y^2}, 0 \right).$$

9.10 Data la curva chiusa γ di equazione implicita

$$(x^2 + y^2)^2 = xy^2$$

contenuta nel primo quadrante del piano xy , sia S la superficie cilindrica

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \gamma, 0 \leq z \leq 1\}.$$

9.11 Dato il campo vettoriale $\mathbf{v} = (\sqrt{x^2 + y^2}, 0, z)$, calcolare

$$\int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} d\sigma,$$

dove \mathbf{n} è il versore normale a S , orientato verso l'esterno del cilindro.

Suggerimento: si usino coordinate polari nel piano per parametrizzare la curva γ .

9.12 Sia T il toro ottenuto ruotando il cerchio del piano xz di centro $(2, 0)$ e raggio 1 di un giro completo intorno all'asse z . Calcolare il flusso uscente dalla frontiera di T del campo vettoriale $f(x, y, z)$ di componenti

$$(x\sqrt{x^2 + y^2}, y\sqrt{x^2 + y^2}, 0).$$

(Si ricorda che tale flusso è definito da $\int_{\partial T} f \cdot \nu \, d\sigma$, dove ν è il versore normale esterno alla frontiera di T)

9.13 Disegnare la parte di superficie $z = \sin x$, denotata con S , che ha per proiezione ortogonale sul piano xy il rettangolo di vertici $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(\frac{\pi}{2}, 0)$, $(\frac{\pi}{2}, 1)$ e sia ν la normale a S che punta verso il basso. Calcolare il flusso di

$$F(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sin x + 1}, 2\pi, \frac{y}{x^2 + y^2 + 1} \right)$$

attraverso S nella direzione ν .

10. Integrali Tripli

10.1 Sia C il solido ottenuto intersecando la sfera di centro l'origine e raggio 1 con il cilindro circolare retto $x^2 + y^2 - x = 0$. Calcolare il baricentro di C .

10.2 Sia $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x^2 + y^2 - 2y \leq 0\}$. Calcolare

$$\iiint_T \frac{|x|y}{\sqrt{x}} \, dx \, dy \, dz .$$

10.3 Si calcoli

$$\iiint_E z \, dx \, dy \, dz ,$$

dove

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq x^2 + y^2, y \geq x^2 + z^2\} .$$

10.4 Dati la palla P , l'ellissoide E e il semipiano S di equazioni rispettivamente

$$(P) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad (E) : 16x^2 + 16y^2 + z^2 \leq 4, \quad (S) : z \geq 0,$$

si calcoli il baricentro del solido $D = (P \cup E) \cap S$.

11. Funzioni Implicite

11.1 Mostrare che in un intorno del punto $(0, 0, 1)$ la superficie $z^4 + xz^3 - y^2 - 1 = 0$ è il grafico di una funzione del tipo $z = \varphi(x, y)$ e calcolarne il piano tangente nel punto $(0, 0, 1)$.

11.2 Verificare che l'equazione $x^2 + y^2 - ze^z = 0$ definisce implicitamente in un intorno di $(0, 0)$ una funzione $z = g(x, y)$ tale che $g(0, 0) = 0$. Mostrare poi che g ha un minimo assoluto in $(0, 0)$. Spiegare il procedimento seguito.

11.3 Mostrare che in un intorno di $(0, 0)$ la curva definita implicitamente dall'equazione

$$x^2 - 3y + e^{xy} = 1$$

è il grafico di una funzione g della variabile x e che g ha un minimo relativo in 0 .

11.4 Verificare che l'equazione $xye^{-x^2y} + e = 0$ definisce implicitamente in un intorno di 1 una funzione $f(x)$ tale che $f(1) = -1$. Calcolare $f'(1)$.

11.5 Verificare che l'equazione

$$f(x, y, z) = \log \sqrt{1 + x^2 + y^2} - (z - 1)e^z = 0$$

definisce implicitamente $z = f(x, y)$ in un intorno di $(0, 0, 1)$ e che la funzione così definita ha minimo assoluto in $(0, 0)$.

11.6 Mostrare che in un intorno di $(0, 0)$ la curva definita implicitamente da

$$e^{xy} - x^2 + 2y = 1$$

è il grafico di una funzione della variabile x e che tale funzione ha un estremo relativo per $x = 0$.

12. Massimi e Minimi Vincolati

12.1 Calcolare la quota massima raggiunta dai punti della superficie

$$y^3 + xy^2 - y^4 - x^2 - z^2 + 1 = 0.$$

12.2 Trovare la minima distanza fra la retta $x = -3$ e la parabola $x^2 + 2xy + y^2 + 4y = 0$. (Sugg. Minimizzare la distanza al quadrato)

12.3 Determinare il minimo assoluto della funzione $f(x, y, z) = x^2 + (y - 1)^2 + z^2$ sul paraboloido di equazione $z = x^2 + y^2 + 1/4$.

Applicare poi il risultato ottenuto per determinare la distanza minima del punto $(0, 1, 0)$ dai punti del paraboloido.

12.4 Data la curva

$$\gamma = \begin{cases} x^2 + y^2 + 4z^2 - 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

determinarne il punto di γ di massima quota.

12.5 Sia γ la curva ottenuta intersecando il paraboloido $z = x^2 + y^2$ con il piano $z = 1 - x - y$. Calcolare la (minima) distanza dell'origine dai punti di γ . (Sugg.: conviene minimizzare la distanza al quadrato).

12.6 Dati i tre punti $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$ e $C(0, 0, 1)$ in \mathbb{R}^3 , si determinino i punti P , tra quelli aventi distanza 1 dall'origine, che rendono massima o minima la quantità

$$2\overline{AP}^2 + 2\overline{BP}^2 - \overline{CP}^2.$$

12.7 Siano γ e r rispettivamente l'ellisse e la retta di equazioni

$$(\gamma): x^2 + 4y^2 - 4 = 0, \quad (r): x - y + 1 = 0.$$

Determinare, usando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, il triangolo di area massima avente due vertici nell'intersezione di r con γ e il terzo vertice su γ . A tale scopo si ricordi che l'area del triangolo T avente per vertici i punti $A = (a_1, a_2)$, $B = (b_1, b_2)$ e $C = (c_1, c_2)$ è data da

$$\text{Area}(T) = \frac{1}{2} |\det((a_1, a_2, 1) (b_1, b_2, 1) (c_1, c_2, 1))|,$$