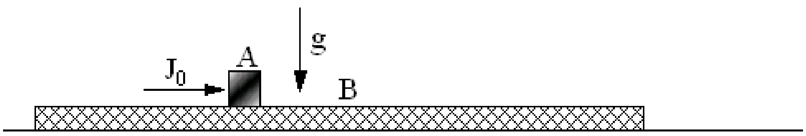
Esercizi e problemi supplementari sulla dinamica dei sistemi di punti materiali

A) Applicazione del teorema dell'impulso + conservazione quantità di moto

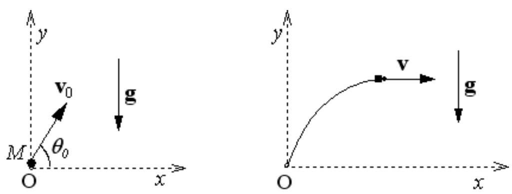
Problema n. 1: Un blocco A di massa $m = 4\ kg$ è appoggiato sopra una piastra B molto lunga di massa $M = 12\ kg$, disposta su un piano orizzontale liscio. Tra le superfici a contatto del blocco A e della piastra B il coefficiente di attrito dinamico vale $\mu_d = 0.25$. Inizialmente il blocco è in quiete rispetto alla piastra, che è a sua volta in quiete rispetto al piano orizzontale. All'istante $t = 0$ al corpo A viene applicato un impulso di intensità $J_0 = 40\ kgm/s$ in direzione orizzontale come indicato in figura. Calcolare nel sistema di riferimento Oxy solidale al piano orizzontale (sistema L):

(a) la velocità del corpo A <u>subito</u> dopo l'applicazione dell'impulso;
(b) la velocità finale del sistema A+B, quando A è di nuovo in quiete rispetto a B;
(c) il lavoro della forza d'attrito, finché non è stato raggiunto lo stato di cui al punto (b);
(d) dopo quanto tempo il corpo A e la piastra B si muovono con uguale velocità.



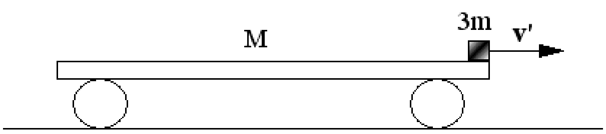
Problema n. 2: Un carro armato, posto in quiete su un piano orizzontale, spara una granata di massa M = 15 kg con una velocità di bocca v = 150 ms^{-1}ad un angolo θ = 45° sopra il piano orizzontale. Al vertice della traiettoria la granata esplode istantaneamente, rompendosi in due frammenti di massa m_1 e m_2, rispettivamente, una doppia dell'altra. Il frammento di massa maggiore m_1, che dopo l'esplosione ha velocità nulla, cade verticalmente. Trascurando qualsiasi attrito con l'aria, determinare:

a) la velocità **v** del frammento di massa minore m_2 subito dopo l'esplosione;
b) la variazione di energia meccanica del sistema dovuta all'esplosione;
c) la distanza dal punto di lancio a cui tocca il suolo il frammento di massa minore m_2;
d) l'energia cinetica <u>interna</u> dei due frammenti al momento dell'impatto con il suolo.

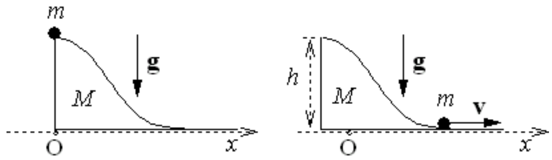


Problema n. 3: Un carrello ferroviario di massa M = 600 kg è fermo su un binario orizzontale e rettilineo che presenta attrito trascurabile. Sopra il carrello si trovano 3 scimmie, ognuna di massa m = 50 kg. Calcolare il modulo V della velocità finale del carrello nei due casi seguenti:

a) le 3 scimmie saltano a terra <u>contemporaneamente</u> e dalla stessa parte del carrello, tutte con velocità di modulo v' = 5 ms^{-1} e di direzione parallela al binario;
b) le 3 scimmie saltano a terra dallo stesso lato del carrello, <u>una dopo l'altra</u>, ognuna con velocità relativa al carrello, di direzione parallela al binario, e di modulo v' = 5 ms^{-1}.

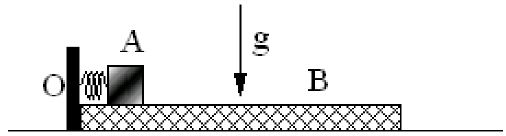


Problema n. 4: Un blocchetto di massa m = 0.5 kg viene lasciato libero di muoversi nel piano verticale Oxy, partendo da fermo alla sommità di un cuneo di massa M = 3 kg avente una superficie liscia e profilo curvilineo, il quale è appoggiato a sua volta su una superficie orizzontale priva di attrito, come schematizzato in figura. Quando il blocchetto abbandona il cuneo la sua velocità rispetto al piano orizzontale è $\mathbf{v} = 4.0\ \mathrm{ms}^{-1}\ \mathbf{i}$. Determinare:
(a) la velocità **V** del cuneo dopo che il blocchetto ha raggiunto in piano orizzontale;
(b) l'altezza h del cuneo in cui si trova inizialmente il blocchetto;
(c) l'energia cinetica interna del sistema blocchetto + cuneo dopo che il blocchetto ha abbandonato il cuneo.



Problema n. 5: Un blocco A di massa m = 1 kg è posto sopra una piattaforma B di massa M = 5 kg, appoggiata a sua volta su un piano orizzontale perfettamente liscio. Il blocco è vincolato ad un punto O solidale sulla piastra tramite un filo che comprime completamente una molla di lunghezza a riposo l_0 = 0.2 m e costante elastica k = 225 N/m. Il sistema blocco più piattaforma è inizialmente in quiete All'istante t = 0 il filo si rompe e la molla si espande mettendo in moto il blocco lungo la piattaforma. L'attrito tra il blocco e la piattaforma è trascurabile. Assumendo che l'azione esercitata dalla molla sul blocco cessi quando essa ha raggiunto la lunghezza di riposo l_0, calcolare:

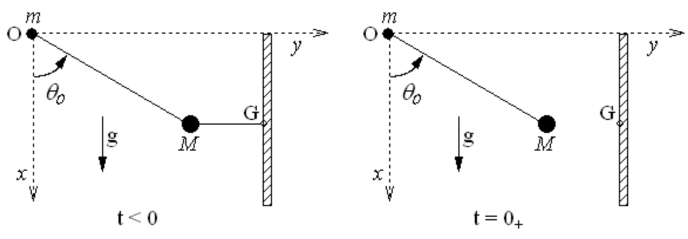
a) l'energia meccanica totale iniziale del sistema blocco + piattaforma;
b) la velocità assoluta dei due corpi subito dopo il distacco del blocco dalla molla;
c) la velocità del centro di massa del sistema finché il blocco non cade dalla piattaforma;
d) l'energia cinetica interna del sistema finché il blocco non cade dalla piattaforma.



B) Applicazioni delle leggi cardinali e dei teoremi validi per i sistemi di particelle.

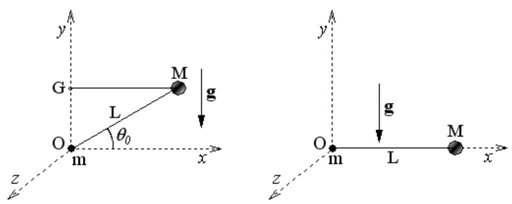
Problema n. 1: Un manubrio costituito da due masse m = 1.5 kg e M = 3 kg collegata da un'asta rigida, di massa trascurabile e di lunghezza L = 0.9 m, ha l'estremità a cui è fissata la massa m, ancorata ad un asse orizzontale fisso passante per il O, attorno a cui il manubrio può ruotare senza incontrare attrito alcuno, mentre l'altra massa M del manubrio è tirata lateralmente da una fune disposta orizzontalmente e fissata al punto G di una parete verticale. In configurazione di equilibrio, il manubrio forma un angolo θ_0 = 60° con la direzione verticale. Calcolare:
(a) la tensione **T** della fune;
(b) il modulo e la direzione della forza esercitata sul manubrio dalla cerniera O.

Supponendo che all'istante t = 0 la fune improvvisamente si spezzi, determinare con riferimento al moto successivo del manubrio nel piano verticale:
(c) la velocità angolare di rotazione del manubrio attorno all'asse orizzontale passante per il punto O quando il sistema raggiunge la configurazione verticale;
(d) l'energia cinetica <u>interna</u> del manubrio quando si trova nella configurazione verticale;
(e) la reazione $\mathbf{R}_O$ sviluppata dalla cerniera in O quando il manubrio raggiunge tale configurazione.



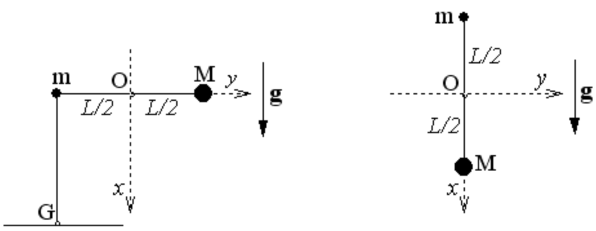
Problema n. 2: Due corpi puntiformi, di massa m = 2 kg e M = 4 kg rispettivamente, sono fissati alle estremità di un'asta sottile, rigida di lunghezza L = 1.2 m e di massa trascurabile, formando un manubrio asimmetrico. Il corpo di massa m è incernierato al punto O di un asse orizzontale fisso, così che il manubrio possa ruotare senza incontrare attrito alcuno nel piano verticale passante per il punto O. Inizialmente il manubrio viene mantenuto in equilibrio in configurazione tale che l'asta formi un angolo $\theta_0 = \pi/6$ rad con l'asse orizzontale tramite una fune ideale, di massa trascurabile, disposta orizzontalmente, che collega la massa M ad un gancio fisso G posto nel piano verticale al di sopra del punto O. All'istante t = 0 la fune si spezza e il manubrio si mette in rotazione nel piano verticale. Determinare nel sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxyz:

a) le componenti cartesiane della reazione iniziale $\mathbf{R}_G$ sviluppata dal gancio fisso G;
b) le componenti cartesiane della reazione iniziale $\mathbf{R}_O$ sviluppata dalla cerniera in O;
c) il modulo della velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ del manubrio nell'istante in cui esso raggiunge la configurazione orizzontale, i.e. $\omega(\theta=0 \text{ rad})$;
d) l'energia cinetica interna del manubrio in tale istante;
e) la reazione **R'** sviluppata dall'asse di rotazione passante per O quando il manubrio si trova in tale configurazione
f) la tensione **T'** dell'asta quando il manubrio raggiunge la configurazione di cui al punto c).



Problema n. 3: Un manubrio asimmetrico è costituito da due corpi puntiformi di massa $m = 2\ kg$ e $M = 6\ kg$, rispettivamente, fissati alle estremità di un'asta rigida, sottile, di massa trascurabile e di lunghezza $L = 0.8\ m$. Il manubrio è imperniato su un asse orizzontale fisso passante per il punto medio O dell'asta attorno a cui il sistema può ruotare, senza attrito alcuno, nel piano verticale xy. Inizialmente il manubrio viene mantenuto in quiete, in configurazione orizzontale ad un'altezza dal suolo maggiore di $L/2$, tramite una fune ideale disposta verticalmente, che collega il corpo puntiforme di massa m con un gancio G, posto al suolo. All'istante $t = 0$ la fune si spezza e il manubrio si mette in rotazione nel piano verticale attorno all'asse passante per il punto O. Calcolare nel sistema di riferimento Oxyz, con il piano xy coincidente con il piano verticale:

a) le coordinate cartesiane del centro di massa del manubrio prima della rottura della fune;
b) la tensione iniziale **T** della fune;
c) la reazione iniziale $\mathbf{R}_O$ sviluppata dal perno in O;
d) il modulo dell'accelerazione angolare del manubrio <u>subito dopo</u> (i.e. $t = 0_+$) la rottura della fune;
e) la velocità angolare di rotazione del sistema quando, dopo aver compiuto una rotazione di $\pi/2$ rad, raggiunge la configurazione verticale;
f) l'energia cinetica interna E_k^{INT} del sistema in questa configurazione;
g) la reazione $\mathbf{R}_O$' sviluppata dal perno in O quando il manubrio raggiunge la configurazione di cui al punto e).

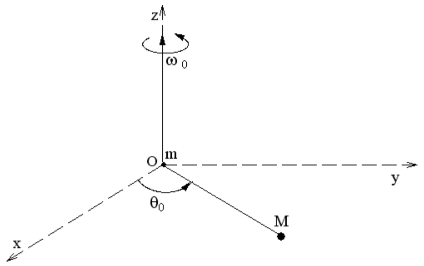


Problema n. 4: Due corpi puntiformi, rispettivamente di massa $m = 1\ kg$ e $M = 5\ kg$, sono vincolati agli estremi di un'asta rigida sottile di massa trascurabile e di lunghezza $L = 1.2\ m$. Il sistema è posto sul piano orizzontale liscio xy e ruota in questo piano con velocità angolare $\omega_0 = 10\ rad/s$ in senso anti-orario attorno ad un asse verticale z, fisso e passante per la posizione O del corpo puntiforme di massa m. Assumendo che all'istante $t = 0$ l'asta formi un angolo $\theta_0 = \pi/3\ rad$ con l'asse di riferimento x, calcolare nel sistema di riferimento Oxy:

a) il lavoro che è stato speso per portare il sistema dallo stato di quiete allo stato di moto indicato più sopra;
b) il modulo della reazione del vincolo in O durante il moto di rotazione del sistema;
c) le coordinate cartesiane del vettore posizione $\mathbf{r}_{CM}$ del suo centro di massa nell'istante t=0;
d) le componenti cartesiane della legge oraria del moto del centro di massa per t>0;

Supponendo che dopo una rotazione del manubrio di un angolo pari a 5π/3 rad attorno all'asse z il vincolo agente sul corpo di massa m venga istantaneamente rimosso e che il sistema continui il suo moto nel piano orizzontale non più soggetto a tale vincolo, calcolare con riferimento al moto successivo:

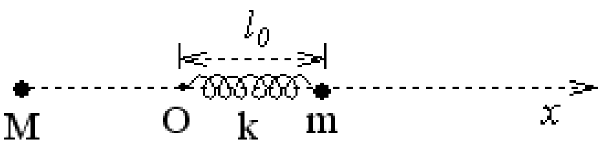
e) la legge oraria del moto del centro di massa del sistema;
f) l'energia cinetica interna del sistema;
g) il momento angolare del sistema rispetto al punto O;
h) il momento angolare intrinseco del sistema.



C) Applicazioni delle leggi che governano il moto relativo di due corpi puntiformi.

Problema n. 1: Un punto materiale di massa M = 2 kg si muove di moto rettilineo uniforme su un piano orizzontale liscio, lungo un asse che scegliamo come asse x, con velocità $v_0 = 5\ ms^{-1}$. Sullo stesso asse giace in quiete un secondo corpo puntiforme di massa m = 0.5 kg che è attaccata all'estremità di una molla di costante elastica k = 57.6 N/m e di lunghezza a riposo l_0= 80 cm e di massa trascurabile, disposta lungo l'asse x. Al tempo t = 0 la particelle di massa M urta l'estremità libera della molla rimanendovi agganciata. Determinare nel sistema di riferimento Ox :

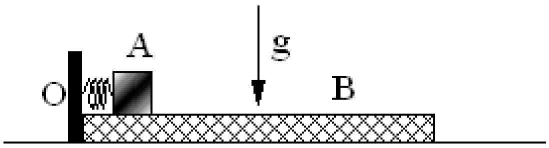
a) la posizione del centro di massa del sistema all'istante t = 0;
b) la legge oraria $x_{CM}(t)$ del centro di massa del sistema per t>0;
c) la distanza minima tra le due particelle durante il moto del sistema per t > 0;
d) la frequenza di oscillazione del sistema;
e) l'equazione del moto relativo del sistema;
f) le leggi orarie del moto dei due punti materiali nel sistema di riferimento del Laboratorio (Sistema L).



Problema n. 2: Un blocco A di massa m = 1 kg è posto sopra una piattaforma B di massa M = 5 kg, appoggiata a sua volta su un piano orizzontale perfettamente liscio. Il blocco è vincolato ad un punto O solidale sulla piastra tramite un filo che comprime completamente una molla di lunghezza a riposo l_0 = 0.2 m e costante elastica k = 225 N/m. Il sistema blocco più piattaforma è inizialmente in quiete All'istante t = 0 il filo si rompe e la molla si espande mettendo in moto il blocco lungo la piattaforma. L'attrito tra il blocco e la piattaforma è trascurabile. Assumendo che l'azione esercitata dalla molla sul blocco cessi quando essa ha raggiunto la lunghezza di riposo l_0, calcolare:

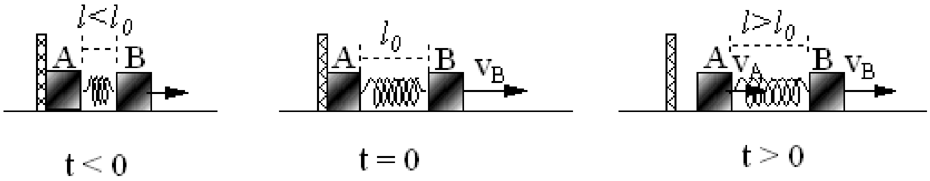
a) l'energia meccanica totale iniziale del sistema blocco + piattaforma;
b) la velocità assoluta dei due corpi subito dopo il distacco del blocco dalla molla;

c) la velocità del centro di massa del sistema finché il blocco non cade dalla piattaforma;
d) l'energia cinetica interna del sistema finché il blocco A non cade dalla piattaforma B.



Problema n. 3: Due blocchi A e B, assimilabili a corpi puntiformi, entrambi di massa $m = 5\ kg$ sono appoggiati su un piano orizzontale perfettamente liscio, essendo fissati alle estremità opposte di una molla avente lunghezza a riposo $l_0 = 0.4\ m$ e costante elastica $k = 225\ Nm^{-1}$. Inizialmente il sistema è in quiete con il blocco A in contatto con una parete verticale fissa e la molla è compressa tramite un filo teso, coassiale con l'asse di simmetria principale della molla, che mantieni i due corpi A e B a una distanza tra di essi = $l_0/2$. Ad un certo istante il filo si rompe e la molla si espande mettendo in moto il corpo B lungo piano orizzontale. Assumendo che il contatto tra la parete verticale e il blocco A venga meno nell'istante in cui la molla ha raggiunto la sua lunghezza di riposo l_0 e che questo accada all'istante $t = 0$ calcolare:

a) la tensione iniziale del filo;
b) l'energia meccanica totale iniziale del sistema dei due blocchi;
c) la velocità assoluta dei due corpi all'istante $t = 0$;
d) l'energia cinetica interna del sistema dei due corpi all'istante $t = 0$;
e) la legge oraria del centro di massa del sistema per $t > 0$;
f) l'equazione del moto relativo del sistema;
g) la legge oraria del moto relativo dei due blocchi;
h) le leggi orarie del moto dei due blocchi nel sistema di riferimento solidale al piano orizzontale.



Problema n. 4: Due manicotti, assimilabili a corpi puntiformi *1* e *2*, entrambi di massa $m = 0.5$ kg sono vincolati a muoversi lungo una guida orizzontale liscia essendo collegati da una molla di costante elastica $k = 24\ Nm^{-1}$ e di lunghezza a riposo $l_0 = 0.6\ m$, coassiale con la guida. Inizialmente i due manicotti sono in quiete a distanza relativa pari alla lunghezza di riposo l_0 della molla, con il manicotto *1* posto nel punto O. All'istante $t = 0$ viene applicata al manicotto *2* una forza di intensità $F_0 = 19.6\ N$ parallela alla guida rettilinea e diretta verso destra. Determinare per $t > 0$ nel sistema di riferimento cartesiano *Ox*:

a) il diagramma delle forze agenti sui due manicotti;
b) l'equazione del moto del centro di massa del sistema;
c) le legge oraria $x_{CM}(t)$ del centro di massa del sistema rispetto al punto O solidale alla guida;
d) l'equazione del moto di ciascun manicotto;
e) l'equazione del moto relativo dei due manicotti;
f) la distanza relativa tra i due manicotti in funzione del tempo;
g) la legge orarie del moto di ciascuno dei due manicotti nel sistema di riferimento del centro di massa;
h) la legge orarie del moto di ciascuno di essi nel sistema di riferimento solidale alla guida.