ESTATICA

La fuerza necesaria para abrir una puerta tirando de su manecilla es la centésima parte de su peso. Si la puerta pesa 10 kg y la distancia de la manecilla al eje de giro es 1 m, calcular la fuerza F' necesaria para abrir la puerta aplicándola en un punto que dista 50 cm del eje.

Solución: I.T.I. 04

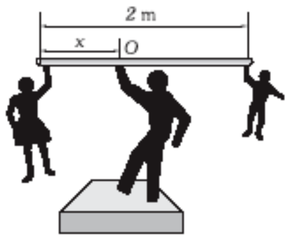
El momento de fuerzas que hay que hacer para abrir la puerta tirando de la manecilla es:

$$\tau = F d = \left(\frac{Mg}{100}\right) d$$

Para abrirla tirando de un punto intermedio entre el eje y la manecilla habrá que realizar el mismo momentode fuerzas:

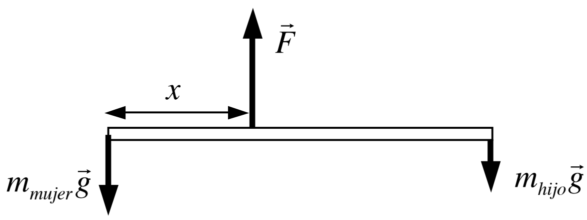
$$\tau = F d = F' d' = F' \left(\frac{d}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad F' = 2F = \boxed{\frac{Mg}{50}}$$

Un hércules de circo levanta a su mujer (70 kg) y a su hijo (30 kg) colgados en los extremos de una barra, sin peso apreciable, de longitud 2 m (ver figura). ¿Qué fuerza efectúa y por dónde tiene que sostener la barra?



Solución:

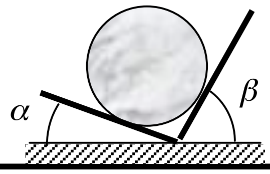
Dibujando las fuerzas sobre la barra y planteándo las condiciones de la estática:



$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad F - m_{mujer} g - m_{hijo} g = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \left(m_{mujer} + m_{hijo}\right) g = \boxed{980 \text{ N}}$$

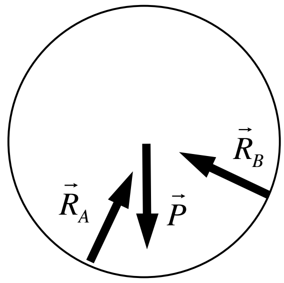
$$\sum_i \vec{\tau}_{i,O} = 0 \quad \Rightarrow \quad m_{mujer} g x - m_{hijo} g \left(L - x\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \left(\frac{m_{hijo}}{m_{mujer} + m_{hijo}}\right) L = \boxed{60 \text{ cm}}$$

Un cilindro de peso P se apoya sin rozamiento sobre dos planos inclinados ángulos α y β, según se indica en la figura. Calcular las reacciones en los apoyos.



Solución: **I.T.T. 01, 04, I.T.I. 01**

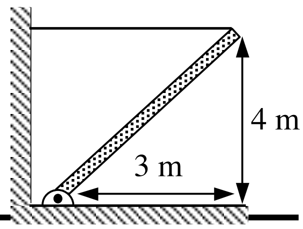
Dibujando todas las fuerzas y planteando las ecuaciones de la estática (obsérvese que las tres fuerzas son concurrentes en el centro del cilindro, por lo tanto el momento de fuerzas total es automáticamente nulo):



$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_A \operatorname{sen}\alpha - R_B \operatorname{sen}\beta = 0 \\ R_A \cos\alpha + R_B \cos\beta = P \end{cases}$$

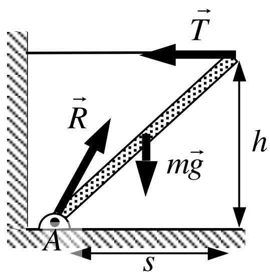
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} R_A = \boxed{\dfrac{P}{\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha / \operatorname{tg}\beta}} \\ R_B = \boxed{\dfrac{P}{\cos\beta + \operatorname{sen}\beta / \operatorname{tg}\alpha}} \end{cases}$$

Una barra uniforme de 5 m de longitud y una masa total de 150 kg se une al suelo mediante una articulación mientras se sujeta por un cable horizontal, como se muestra en la figura. a) Cuál es la tensión del cable? b) ¿Cuál es la aceleración angular de la barra en el instante en que se suelta el cable? c) ¿Cuál es la velocidad angular de la barra cuando llega a la posición horizontal?



Solución: **I.T.T. 01, 04**

a) Dibujando todas las fuerzas y planteando las ecuaciones de la estática:



$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_y - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad R_y = mg \\ R_x - T = 0 \quad \Rightarrow \quad R_x = T \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i^{\,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad mg\left(\frac{s}{2}\right) - Th = 0$$

$$\Rightarrow \quad T = mg\left(\frac{s}{2h}\right) = \boxed{\frac{3}{8} mg = 551.25 \text{ N}}$$

b) Si escogemos como sentido positivo de giro el horario, planteando la segunda ley de Newton para la rotación (la única fuerza que produce momento de fuerzas respecto a *A* es el peso):

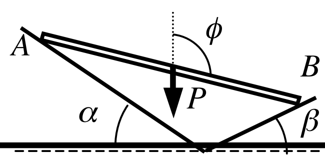
$$mg\left(\frac{s}{2}\right) = I_A\alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{2}\frac{mgs}{I_A} = \frac{1}{2}\frac{mgs}{\left(\frac{1}{3}ml^2\right)} = \boxed{\frac{3}{2}\frac{s}{l^2}g = 1.764 \text{ rad/s}^2}$$

c) La única fuerza externa que realiza trabajo durante la rotación de la barra es el peso. Como es una fuerza conservativa podemos aplicar la conservación de la energía:

$$E_{inicial} = E_{final} \quad \Rightarrow \quad mg\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{1}{2}I_A\omega^2$$

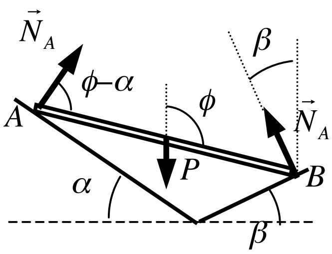
$$\Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{mgh}{I_A}} = \sqrt{\frac{mgh}{\frac{1}{3}ml^2}} = \boxed{\frac{\sqrt{3gh}}{l} = 2.17 \text{ rad/s}}$$

Los extremos de una barra pesada *AB* descansan sobre planos inclinados como indica la figura. Determinar el ángulo de inclinación de la barra ϕ respecto a la vertical. En la posición de equilibrio los apoyos son lisos.



Solución: **I.T.T. 01, 04**

Dibujando todas las fuerzas y planteando las ecuaciones de la estática:



$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_A \operatorname{sen}\alpha - N_B \operatorname{sen}\beta = 0 \\ N_A \cos\alpha + N_B \cos\beta = mg \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} N_A = \dfrac{mg}{\cos\alpha + \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}} \\ N_B = \dfrac{mg}{\cos\beta + \dfrac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}} \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i^{\,B} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A\, l \operatorname{sen}(\phi - \alpha) - mg\left(\frac{l}{2}\right) \operatorname{sen}\phi = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(\phi-\alpha)}{\operatorname{sen}\phi} = \frac{1}{2}\left(\cos\alpha + \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right) \operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}\phi\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha\cos\phi}{\operatorname{sen}\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right) \operatorname{sen}\alpha$$

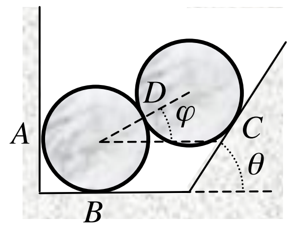
$$\Rightarrow \quad \cos\alpha\left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\phi}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right) \operatorname{sen}\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 - \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\phi}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right) \operatorname{tg}\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\operatorname{tg}\phi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1}{\operatorname{tg}\beta}\right)$$

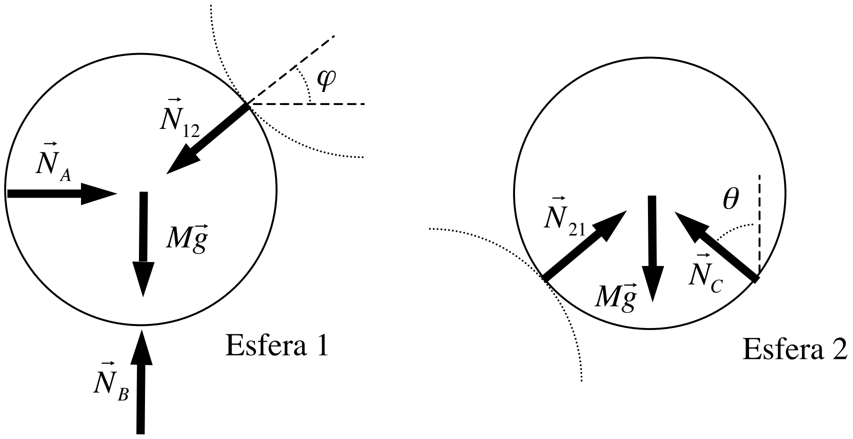
$$\Rightarrow \quad \boxed{\operatorname{tg}\phi = 2\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}\right) =}$$

Dos esferas de radio R y masa M quedan en equilibrio en la posición indicada. Calcular las fuerzas ejercidas por el suelo sobre las esferas en los puntos de contacto A, B, C, así como la que se ejercen entre si ambas esferas. Datos: $\varphi = 30^\circ$, $\theta = 60^\circ$.



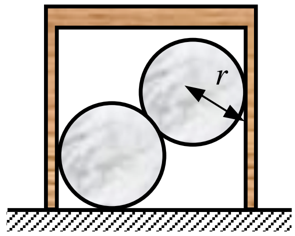
Solución: **I.T.I. 93, 03**

Dibujando todas las fuerzas, planteando las ecuaciones de la estática para las esferas (obsérvese que las fuerzas que actúan sobre cada esfera son concurrentes en el centro, por lo tanto el momento de fuerzas total sobre cada una de ellas es automáticamente nulo) y teniendo en cuenta que $N_{12} = N_{21}$:



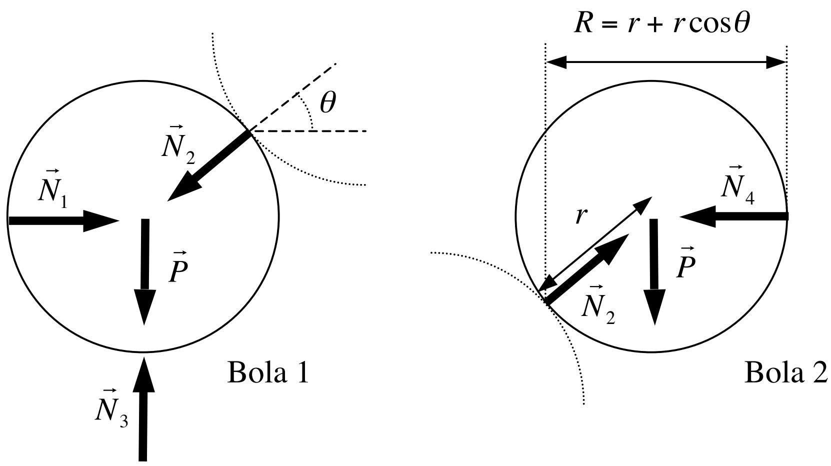
$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} N_A - N_{12}\cos\varphi = 0 \\ N_B - N_{12}\,\mathrm{sen}\,\varphi - Mg = 0 \\ N_{12}\cos\varphi - N_C\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \\ N_{12}\,\mathrm{sen}\,\varphi + N_C\cos\theta - Mg = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \boxed{\begin{array}{l} N_A = \left[\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi}{\cos(\theta-\varphi)}\right]Mg = \dfrac{\sqrt{3}}{2}Mg \\ N_B = \left[1 + \dfrac{\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi}{\cos(\theta-\varphi)}\right]Mg = \dfrac{3}{2}Mg \\ N_C = \left[\dfrac{\cos\varphi}{\cos(\theta-\varphi)}\right]Mg = Mg \\ N_{12} = \left[\dfrac{\mathrm{sen}\,\theta}{\cos(\theta-\varphi)}\right]Mg = Mg \end{array}} \right.$$

Dos esferas iguales de radio *r* y peso *P* se apoyan mutuamente entre sí y apoyan contra las paredes de un cilindro abierto por su parte inferior, de radio externo *R*, que se apoya sobre un plano horizontal. Hallar el peso mínimo *Q* que ha de tener el cilindro para no ser volcado por el peso de las esferas. Se supone que la pared del cilindro es delgada.



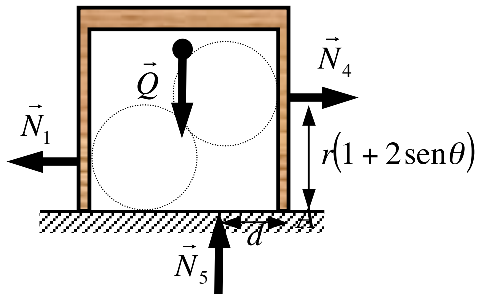
Solución: I.T.T. 01, I.T.I. 01

Dibujando todas las fuerzas y planteando las ecuaciones de la estática para las esferas (obsérvese que las fuerzas que actúan sobre cada esfera son concurrentes en el centro, por lo tanto el momento de fuerzas total sobre cada una de ellas es automáticamente nulo):



$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} N_1 - N_2\cos\theta = 0 \\ N_3 - N_2 \,\mathrm{sen}\,\theta - P = 0 \\ N_2\cos\theta - N_4 = 0 \\ N_2\,\mathrm{sen}\,\theta - P = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} N_1 = N_4 = \dfrac{P}{\mathrm{tg}\theta} \\ N_2 = \dfrac{P}{\mathrm{sen}\theta} \\ N_3 = 2P \end{array} \right.$$

En el siguiente diagrama se muestran las fuerzas que actúan sobre el cilindro. La reacción del plano horizontal sobre el cilindro está repartida en forma de fuerzas microscópicas por toda la periferia circular de la parte inferior. Todo este conjunto de fuerzas microscópicas es equivalente (en cuanto a la fuerza total que producen y en cuanto al momento de fuerzas total que producen) a una única fuerza $\vec{N}_5$ situada en el plano de la figura y a una distancia *d* del punto *A*. Si las esferas no estuviesen dicha fuerza se encontraría justamente debajo del C.M. del cilindro y tendríamos que $d = R$. En el caso límite en el que el cilindro estuviese a punto de vascular hacia la derecha la distancia d sería nula y $\vec{N}_5$ estaría aplicada justo en el punto A. Aplicando las leyes de la estática podríamos encontrar el valor de dicha reacción $\vec{N}_5$ y la distancia d:



$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad N_5 = Q$$

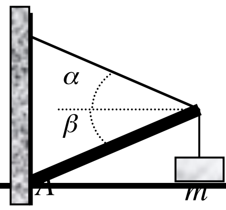
$$\sum_i \vec{\tau}_i^{\,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_4\, r(1+2\operatorname{sen}\theta) + N_5 d - QR - N_1 r = 0$$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{QR + N_1 r - N_4 r(1+2\operatorname{sen}\theta)}{N_5} = R - 2\left(\frac{P}{Q}\right) r\cos\theta = R - 2\left(\frac{P}{Q}\right)(R-r)$$

Como para que el cilindro no vuelque dicha distancia debe ser positiva:

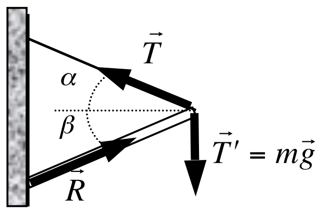
$$R - 2\left(\frac{P}{Q}\right)(R-r) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q \geq Q_{mínimo} = 2P\left(1 - \frac{r}{R}\right)}$$

Demostrar que cuando el peso del puntal de la figura es despreciable, la reacción que aparece en A sigue la dirección del puntal. ¿Qué ángulo formara dicha reacción con la horizontal si el puntal tiene una masa de 200 kg?. Calcular la tensión de la cuerda y la reacción en A en ambos casos. Datos: $\alpha = \beta = 30^{\circ}$, $m = 1000$ kg



Solución: **I.T.I. 01, 04**

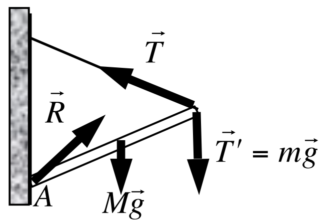
Si el peso del puntal es despreciable las únicas fuerzas que actúan sobre él son la reacción en A, la tensión de la cuerda unida a la pared y la tensión de la cuerda unida al bloque m equivalente al peso de éste. Tenemos un sistema de tres fuerzas. Una de las condiciones que debe de cumplir dicho sistema es que dichas fuerzas sean concurrentes en un punto para que su momento de fuerzas total sea nulo. El diagrama de fuerzas será por lo tanto el que se muestra en la figura, en el que las tres fuerzas son concurrentes en el extremo del puntal y la reacción tendrá por lo tanto que estar forzosamente orientada a lo largo de éste. Imponiendo que la fuerza total sea nula:



$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} R\cos\beta - T\cos\alpha = 0 \\ \\ R\operatorname{sen}\beta + T\operatorname{sen}\alpha - mg = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} T = \dfrac{mg}{\cos\alpha(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)} \\ \\ R = \dfrac{mg}{\cos\beta(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta)} \end{array} \right.$$

Teniendo en cuenta los datos dados en el enunciado: $\boxed{T = R = 9800 \text{ N}}$

En el caso de que el puntal tenga masa, dibujando el nuevo diagrama de fuerzas e imponiendo las condiciones de la estática:



$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_x - T\cos\alpha = 0 \\ R_y + T\,\mathrm{sen}\alpha - (m+M)g = 0 \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i^{\,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad T\,\mathrm{sen}(\alpha+\beta)L - Mg\left(\frac{L}{2}\right)\cos\beta - T'L\cos\beta = 0$$

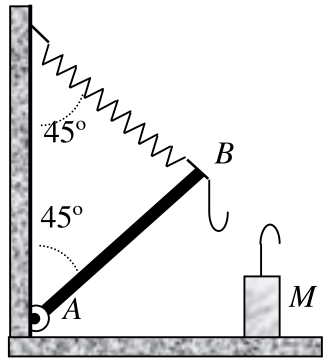
Si llamamos φ al ángulo que forma la reacción en A con la horizontal, la solución de dicho sistema de ecuaciones es:

$$T' = mg = 9800\ \mathrm{N}$$

$$T = \left(m + \frac{M}{2}\right) g \left[\frac{\cos\beta}{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}\right] = 10780\ \mathrm{N}$$

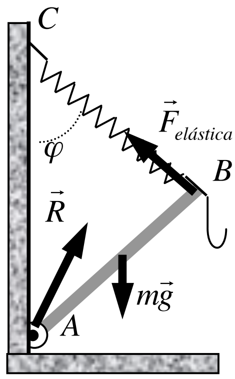
$$\left.\begin{array}{l} R_x = \left(m + \frac{M}{2}\right) g \left[\frac{\cos\alpha\cos\beta}{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}\right] = 9336\ \mathrm{N} \\ R_y = (m+M)g - \left(m + \frac{M}{2}\right) g \left[\frac{\mathrm{sen}\alpha\cos\beta}{\mathrm{sen}(\alpha+\beta)}\right] = 6370\ \mathrm{N} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} R = 11302\ \mathrm{N} \\ \varphi = 34.31^{\circ} \end{cases}$$

En el sistema de la figura la barra homogénea *AB* tiene una longitud de 100 cm y una masa de 5 kg. Si la cte. elástica del resorte es k = 400 N/m calcular la longitud natural del muelle. Calcular el valor de la masa *M* que colgada en el punto *B* haga que se alcance de nuevo el equilibrio cuando el ángulo en el punto *A* sea de 60º.



Solución: **I.T.I. 01, 04**

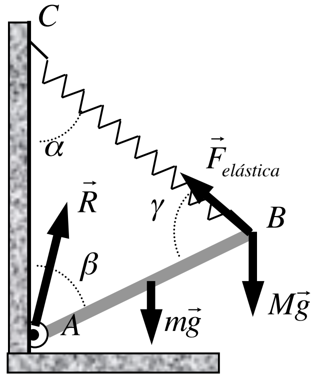
En la situación de equilibrio indicada en la figura al tener un triángulo rectángulo isósceles la longitud l del muelle será la misma que la longitud L de la barra, $l = L = 100\,\text{cm}$, y la distancia entre *A* y el enganche del muelle a la pared será $\overline{AC} = \sqrt{2}\,L = 141.4\,\text{cm}$. Si imponemos que el momento de fuerzas total respecto de *A* sea nulo podemos calcular la longitud natural del muelle:



$$F_{elástica} L - mg\left(\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad k\,\Delta l = \frac{1}{2} mg\operatorname{sen}\varphi$$

$$\Rightarrow \quad \Delta l = \frac{mg}{2k}\operatorname{sen}\varphi = 4.33\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad l_0 = l - \Delta l = 95.67\,\text{cm}$$

Si ahora colgamos del extremo la masa *M* el nuevo diagrama de fuerzas será el representado en la figura. Con los datos del enunciado vamos a calcular los demás ángulos.



El ángulo α lo podemos poner en función de β, que es conocido, razonando sobre el triángulo:

$$\left.\begin{array}{l} l\operatorname{sen}\alpha = L\operatorname{sen}\beta \\ l\cos\alpha = \sqrt{2}\,L - L\cos\beta \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\sqrt{2} - \cos\beta} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 43.45^\circ$$

Aplicando el teorema de los senos para los ángulos α y γ:

$$\frac{\operatorname{sen}\gamma}{\overline{AC}} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{L} \quad \Rightarrow \quad \operatorname{sen}\gamma = \overline{AC}\,\frac{\operatorname{sen}\alpha}{L} = \sqrt{2}\operatorname{sen}\alpha \quad \Rightarrow \quad \gamma = 76.55^\circ$$

Aplicando el teorema de los senos para los ángulos α y β podemos calcular la nueva longitud del muelle y su alargamiento:

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{l} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{L} \quad \Rightarrow \quad l = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\operatorname{sen}\alpha} L = 125.93\,\text{cm} \quad \Rightarrow \quad \Delta l = l - l_0 = 30.26\,\text{cm}$$

Replanteamos el equilibrio volviendo a calcular momentos respecto de A:

$$F_{elástica} L \operatorname{sen}\gamma - mg\left(\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}\beta - MgL\operatorname{sen}\beta = 0$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{F_{elástica}\operatorname{sen}\gamma}{g\operatorname{sen}\beta} - \frac{1}{2}m = \frac{k\Delta l \operatorname{sen}\gamma}{g\operatorname{sen}\beta} - \frac{1}{2}m = \boxed{11.37\text{ kg}}$$

Una puerta homogénea que pesa 60 kg está sujeta por dos goznes que están separados 1.80 m. Cada gozne soporta la mitad del peso de la puerta. La distancia de los goznes a la parte superior e inferior de la puerta es la misma. La anchura de la puerta es de 1.20 m. Calcular las fuerzas que actúan sobre cada gozne y el ángulo que forman con la horizontal.

Solución: I.T.I. 01

Sobre la puerta se van a ejercer sólo tres fuerzas, las de los goznes y su peso, que para que no produzcan ningún momento neto deben de ser concurrentes en algún punto.

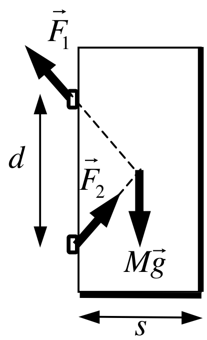
Si cada gozne soporta la mitad del peso de la puerta tenemos que las componentes verticales de las fuerzas en cada uno de ellos son iguales a la mitad del peso de la puerta:

$$\left.\begin{array}{r} F_{1,y} + F_{2,y} - Mg = 0 \\ F_{1,y} = F_{2,y} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad F_{1,y} = F_{2,y} = \frac{1}{2}Mg$$

Por otro lado para las componentes horizontales tenemos que también serán iguales en magnitud pero de signo contrario:

$$F_{1,x} + F_{2,x} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{1,x} = -F_{2,x}$$

Se puede apreciar en la figura que en estas condiciones las dos fuerzas tienen el mismo módulo y que concurren junto con el peso de la puerta en el C.M. de ésta.

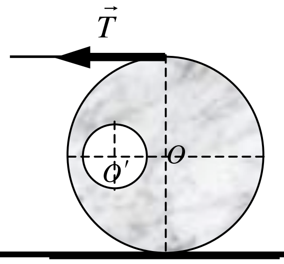


Si llamamos φ al ángulo que dichas fuerzas forman con la horizontal tenemos que:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{d/2}{s/2} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = 56.31^{\text{o}}}$$

$$F_1\,\mathrm{sen}\varphi = F_2\,\mathrm{sen}\varphi = \frac{1}{2}Mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_1 = F_2 = 353.3\ \mathrm{N}}$$

El cilindro uniforme de radio a de la figura pesaba en un principio 80 N. Después de taladrársele un agujero cilíndrico de eje paralelo al anterior su peso es de 75 N. Suponiendo que el cilindro no desliza sobre la mesa ¿Cuál debe ser la tensión de la cuerda que le impida moverse en la situación representada?. Determinar el coeficiente de rozamiento mínimo para que no deslice. $\overline{OO'} = \frac{2}{3}a$.



Solución: **I.T.I. 01, 03**

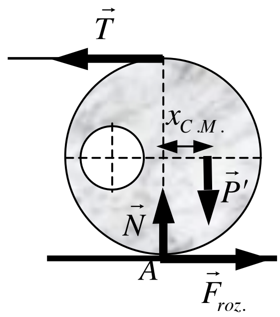
Llamemos P y P' al peso del cilindro antes y después de hacerle el agujero. Llamemos r al radio del agujero, H a la altura del cilindro y ρ a su densidad. Con los datos que nos dan en el enunciado podemos calcular r:

$$P' = \left[\left(\pi a^2 - \pi r^2\right)H\rho\right]g = \pi a^2 H\rho g\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = P\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad r = a\sqrt{1 - \frac{P'}{P}} = \frac{a}{4}$$

Si ponemos el origen de coordenadas en O podemos calcular donde se encuentra el C.M. del cilindro agujereado (por simetría la coordenada $y_{C.M.}$ será nula):

$$x_{C.M.} = \frac{0 - (P - P')\left(-\frac{2}{3}a\right)}{P'} = \frac{2}{45}a$$



Aplicando las condiciones de la estática:

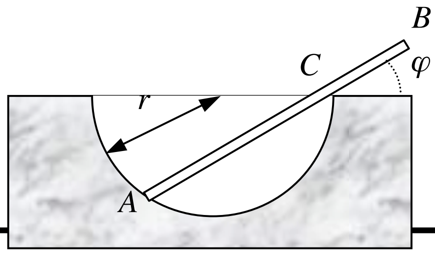
$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} F_{roz.} - T = 0 \quad \Rightarrow \quad T = F_{roz.} \\ N - P' = 0 \quad \Rightarrow \quad N = P' \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{\tau}_i^{\,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad T(2a) - P'\,x_{C.M.} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \left(\frac{x_{C.M.}}{2a}\right)P' = \boxed{\frac{5}{3}\ \mathrm{N}}$$

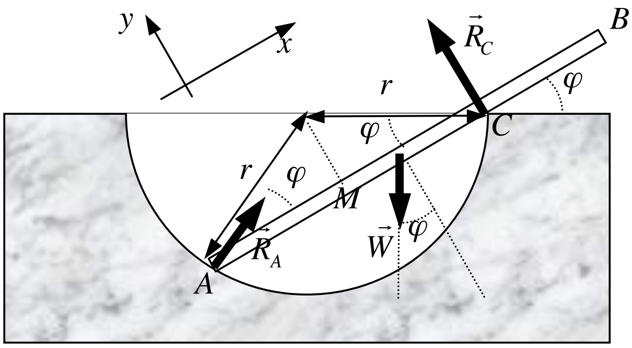
La fuerza de rozamiento es estática y debe ser menor que su valor máximo:

$$F_{roz.} = T \le F_{roz.máx.} = \mu N = \mu P' \quad \Rightarrow \quad \mu \ge \frac{T}{P'} = \boxed{2.2 \cdot 10^{-2}}$$

Una barra pesada uniforme de longitud $\overline{AB} = 2a$ y de peso W se apoya, ver figura, en una semiesfera hueca perfectamente lisa de radio r. Calcular el ángulo φ de equilibrio y las reacciones en A y C.



Solución: I.T.T. 04, I.T.I. 01



Las reacciones en los puntos A y C son perpendiculares a la superficie de contacto con lo que R_A será radial y R_C será perpendicular a la barra. Si los ejes coordenados los tomásemos como siempre, eje X horizontal y eje Y vertical, los cálculos se complicarían ya que en las ecuaciones aparecería el ángulo doble 2φ (ver orientación de la fuerza R_A). Tomaremos en este caso el eje X a lo largo de la barra y el eje Y perpendicular a ésta, como se indica en la figura.

Aplicando las condiciones de la estática:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_A \cos\varphi - W \operatorname{sen}\varphi = 0 \\ R_A \operatorname{sen}\varphi + R_C - W \cos\varphi = 0 \end{cases}$$

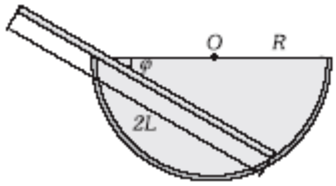
$$\sum_i \vec{\tau}_i^{\,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C\, \overline{AC} - W\, a\cos\varphi = 0$$

$$\overline{AC} = \overline{AM} + \overline{MC} = 2r\cos\varphi$$

Resolviendo el sistema tenemos que:

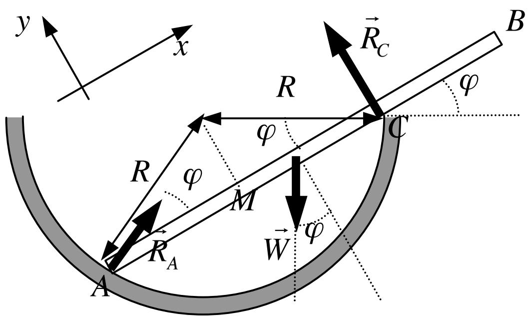
$$\boxed{\begin{array}{l} \cos\varphi = \left(\dfrac{a}{8r}\right) + \sqrt{\left(\dfrac{a}{8r}\right)^2 + \dfrac{1}{2}} \\[2ex] R_A = W \operatorname{tg}\varphi \qquad R_C = \left(\dfrac{a}{2r}\right) W \end{array}}$$

Un agitador de vidrio de longitud de longitud $2L$ se apoya en el fondo y en el borde de una cápsula de porcelana de forma semiesférica de radio R; el agitador se moverá hasta alcanzar una posición de equilibrio. Si los rozamientos son inapreciables, determinar en la posición de equilibrio el ángulo φ indicado en la figura.



Solución: **I.T.I. 04**

Llamamos W al peso del agitador. Las reacciones en los puntos A y C son perpendiculares a la superficie de contacto con lo que R_A será radial y R_C será perpendicular a la barra. Si los ejes coordenados los tomásemos como siempre, eje X horizontal y eje Y vertical, los cálculos se complicarían ya que en las ecuaciones aparecería el ángulo doble 2φ (ver orientación de la fuerza R_A). Tomaremos en este caso el eje X a lo largo de la barra y el eje Y perpendicular a ésta, como se indica en la figura.



Aplicando las condiciones de la estática:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_A \cos\varphi - W \operatorname{sen}\varphi = 0 \\ R_A \operatorname{sen}\varphi + R_C - W\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

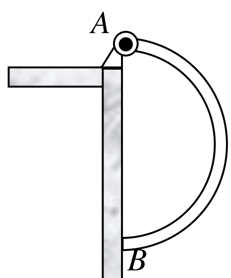
$$\sum_i \vec{\tau}_i^{\,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_C\,\overline{AC} - W\,L\cos\varphi = 0$$

$$\overline{AC} = \overline{AM} + \overline{MC} = 2R\cos\varphi$$

Resolviendo el sistema tenemos que:

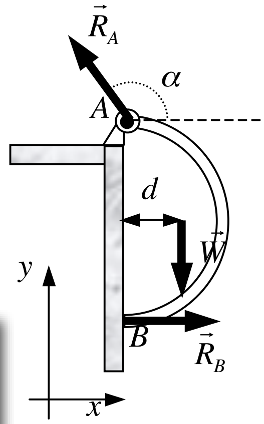
$$\boxed{\begin{gathered} \cos\varphi = \left(\frac{L}{8R}\right) + \sqrt{\left(\frac{L}{8R}\right)^2 + \frac{1}{2}} \\ R_A = W\operatorname{tg}\varphi \qquad R_C = \left(\frac{L}{2R}\right)W \end{gathered}}$$

Una varilla semicircular y uniforme de peso W y radio r, esta sujeta mediante un pasador en A y se apoya en una pared lisa en B. Calcular las reacciones en A y B.



Solución: **I.T.I. 01**

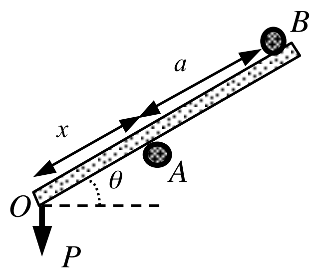
El C.M. de la varilla semicircular se encuentra a una distancia d de la pared igual a $2r/\pi$. La reacción en A tendrá componentes x e y mientras que la reacción en B será normal a la pared y sólo tendrá componente x. Aplicando las condiciones de la estática:



$$\sum_i \vec{\tau}_i^{\,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B(2r) - W\left(\frac{2r}{\pi}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_B = \frac{W}{\pi}}$$

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} R_A\cos\alpha + R_B = 0 \\ R_A \,\mathrm{sen}\,\alpha - W = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{c} R_A = W\sqrt{1+\dfrac{1}{\pi^2}} \\ tg\,\alpha = -\pi \end{array}}$$

Una barra homogénea de peso despreciable, situada en un plano vertical, está en contacto con dos clavijas A y B, separadas una distancia a. En el punto O, distante x de A, actúa una fuerza vertical P. a) Demostrar que si no existe rozamiento el equilibrio es imposible. b) Si existe rozamiento en A y B, hallar las reacciones en ambos puntos.



Solución: **I.T.T. 03**

a) Dibujando todas las fuerzas y planteando las ecuaciones de la estática:

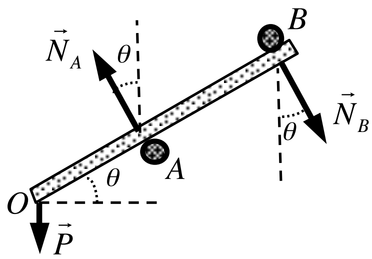
$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A \,\mathrm{sen}\,\theta - N_B \,\mathrm{sen}\,\theta = 0$$

$$\Rightarrow \quad N_A = N_B$$

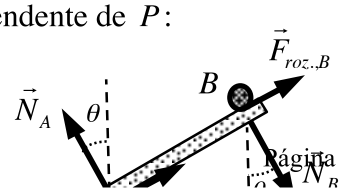
$$\sum_i \vec{\tau}_{i,O} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A\, x - N_B(x+a) = 0$$

$$\Rightarrow \quad N_A \neq N_B \quad !!$$

$$\Rightarrow \quad \text{¡EQUILIBRIO IMPOSIBLE!}$$



b) Las fuerzas de rozamiento en A y en B están dirigidas a lo largo de la barra en sentido ascendente para anular la componente descendente de $\vec{P}$:

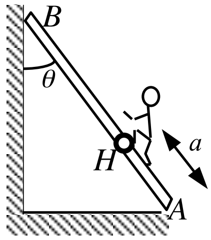


$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P\,\mathrm{sen}\theta - F_{roz.,A} - F_{roz.,B} = 0 \\ \\ P\cos\theta = N_A - N_B \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,O} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_A x - N_B(x+a) = 0$$

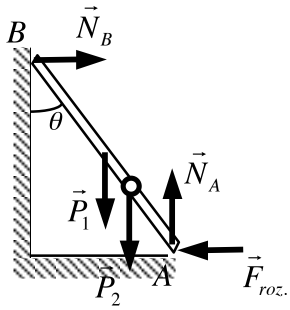
$$\Rightarrow \quad \boxed{N_A = \left(\frac{x+a}{a}\right) P\cos\theta \quad , \quad N_B = \left(\frac{x}{a}\right) P\cos\theta}$$

En una escalera homogénea de peso P_1 y longitud $2L$ está apoyada entre una pared vertical y el suelo, teniendo con este último un coeficiente de rozamiento μ. Un hombre de peso P_2 sube por la escalera hasta un peldaño H, tal que $AH = a$. a) ¿Cuál es el valor máximo del ángulo de la escalera con la pared para que la escalera no resbale. b) ¿Cuál debe ser el ángulo si queremos que el hombre suba hasta el extremo superior B? c) Particularizar las apartados anteriores para $\mu = 0.2$, $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 70$ kg, $L = 3$ m y $a = 1$m.



Solución: **I.T.T. 03**

1) Dibujando todas las fuerzas y planteando las ecuaciones de la estática:



$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_B - F_{roz.} = 0 \\ N_A - P_1 - P_2 = 0 \end{cases}$$

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad N_B(2L\cos\theta) - P_1(L\,\text{sen}\,\theta) - P_1(a\,\text{sen}\theta) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N_A = P_1 + P_2 \\ F_{roz.} = N_B = \dfrac{1}{2}\left(P_1 + \dfrac{a}{L}P_2\right)\text{tg}\theta \end{cases}$$

Como la fuerza de rozamiento es estática:

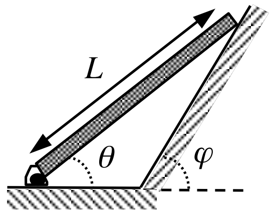
$$F_{roz.} \le F_{roz.máxima} = \mu N_A \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta(a) \le \text{arctg}\left[\frac{2\mu(P_1 + P_2)L}{P_1 L + P_2 a}\right]}$$

2) Haciendo $a = 2L$ en la solución anterior: $\boxed{\theta(2L) \le \text{arctg}\left[\dfrac{2\mu(P_1 + P_2)}{P_1 + 2P_2}\right]}$

3) Introduciendo los valores del enunciado:

$$\boxed{\theta(a) = 43.8^\circ \quad , \quad \theta(2L) = 12.0^\circ}$$

Se tiene una barra metálica de 40 Kp de peso y 4 m de longitud, articulada en el extremo que descansa en el suelo. Su otro extremo se apoya en una pared inclinada $\varphi = 60^\circ$ con respecto a la horizontal, no habiendo rozamiento en este punto. Si la barra queda inclinada $\theta = 45^\circ$, calcular las reacciones en la articulación y en el apoyo.



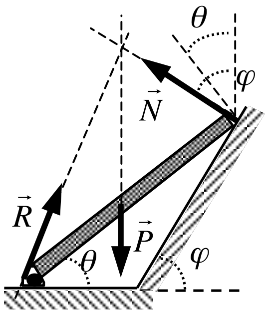
Solución: **I.T.T. 03**

Dibujando todas las fuerzas y planteando las ecuaciones de la estática:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_x - N \operatorname{sen}\varphi = 0 \\ R_y - P + N\cos\varphi = 0 \end{cases}$$

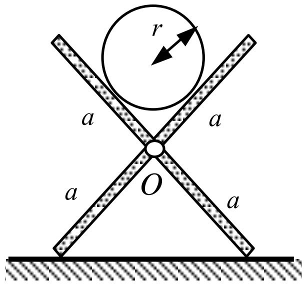
$$\sum_i \vec{\tau}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad N L \cos(\varphi - \theta) - P\frac{L}{2}\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} N = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\cos\theta}{\cos(\varphi-\theta)}\right]P = \boxed{14.64 \text{ Kp}} \\ R_x = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\cos\theta \operatorname{sen}\varphi}{\cos(\varphi-\theta)}\right]P = \boxed{12.68 \text{ Kp}} \\ R_y = \left[1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos^2\theta}{\cos(\varphi-\theta)}\right]P = \boxed{32.68 \text{ Kp}} \end{cases}$$



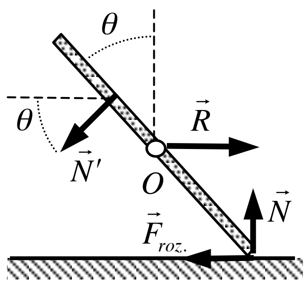
Obsérvese en la figura que al ser un sistema sometido solamente a tres fuerzas no colineales las tres son concurrentes.

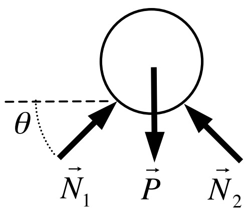
Un cilindro macizo y homogéneo de peso P y radio r, se apoya sobre un caballete formado por dos tablas de longitud $2a$, articuladas en el eje O, que coincide con su punto medio. Suponiendo que entre el cilindro y el caballete no hay rozamiento, y que entre éste y el suelo si hay rozamiento: a) Dibujar el diagrama de fuerzas que actúan sobre cada elemento del sistema. b) Calcular la fuerza de rozamiento necesaria para mantener el sistema en equilibrio de modo que la distancia entre el centro del cilindro y el eje O sea $(3r/2)$. c) ¿Cuál debe ser el mínimo coeficiente de rozamiento para que el sistema este en equilibrio? d) Calcular las reacciones en O y en los puntos de apoyo del cilindro.



Solución: I.T.I. 03, I.T.T. 03

a) La fuerzas que se ejercen entre sí las dos tablas en el eje que pasa por O deben ser iguales y de sentido contrario de acuerdo con la tercera ley de Newton. Por otro lado el sistema tiene simetría respecto de un eje vertical, con lo que las dos fuerzas deben tener componente horizontales de distinto signo y componentes verticales del mismo signo. La única forma de que se verifiquen las dos condiciones anteriores es que dichas fuerzas sean horizontales, es por este motivo que la reacción $\vec{R}$ en la figura tiene dicha orientación. Al mismo tiempo y debido a los mismos motivos: $N_1 = N_2 = N'$. Las fuerzas que actúan sobre la segunda tabla son simétricas respecto del eje vertical de las que actúan sobre la primera (suponemos que las tablas tienen una masa despreciable).





b) y d) Según los datos que nos dan, en el equilibrio $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{2}{3}$, planteando las condiciones de la estática:

Para el cilindro: $\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad 2N'\operatorname{sen}\theta - P = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N' = \dfrac{P}{2\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{3}{4}P}$

Para la tabla: $\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R - F_{roz.} - N'\cos\theta = 0 \\ N - N'\operatorname{sen}\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = N'\operatorname{sen}\theta = \dfrac{1}{2}P} \end{cases}$

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,O} = 0 \quad \Rightarrow \quad N' \frac{r}{\operatorname{tg}\theta} + Na\operatorname{sen}\theta - F_{roz.} a\cos\theta = 0$$

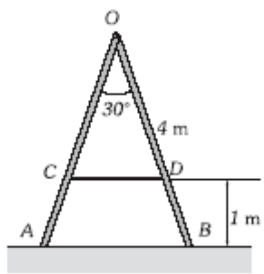
$$\Rightarrow \quad \boxed{F_{roz.} = \left[\frac{9r}{8a} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right] P}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{R = \frac{9}{4}\left[\frac{r}{2a} + \frac{1}{\sqrt{5}}\right] P}$$

c) Como la fuerza de rozamiento es estática:

$$F_{roz.} \leq F_{roz.máx} = \mu N \quad \Rightarrow \quad \mu \geq \frac{F_{roz.}}{N} = \boxed{\left[\frac{9r}{4a} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right]}$$

Una escalera de tijera de masa m = 12 kg, está formada por dos brazos de longitud L = 4 m, unidos por una cuerda horizontal a h =1 m del suelo, y que forman entre sí un ángulo φ = 30°. Si la escalera soporta en su punto más alto un cuerpo de masa M = 80 kg y el rozamiento con el suelo es despreciable, determinar: a) la fuerza normal que el suelo ejerce sobre los puntos A y B de la escalera, b) la tensión de la cuerda, c) la fuerza que cada brazo ejerce sobre el otro en el punto O en el que están engoznados.

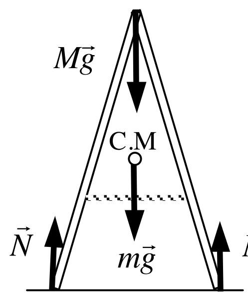


Solución: **I.T.I. 04**

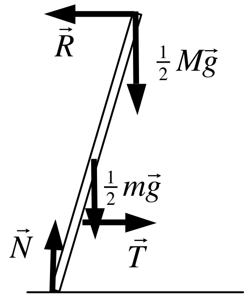
a) Si consideramos el sistema formado conjuntamente por la escalera y la cuerda, las fuerzas externas que actúan sobre dicho sistema vienen reflejadas en la figura (por simetría la normal que ejerce el suelo es igual en ambas partes de la escalera), y planteando la condición de equilibrio para las fuerzas:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad (M + m)g - 2N = 0$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{1}{2}(M + m)g = \boxed{450.8 \text{ N}}$$



b) Aislemos uno de los brazos de la escalera y consideremos las fuerzas que actúan sobre él. Teniendo en cuenta que las reacciones que se ejercen entre si los dos brazos de la escalera en el punto O tienen que ser según la tercera ley de Newton iguales y de sentido contrario y que por simetría entre izquierda y derecha su componente horizontal tendría que ser opuesta pero la componente vertical tendría que ser la misma se llega a la conclusión de que dichas reacciones no pueden tener componente vertical y que su orientación es horizontal.



Planteando la condición de equilibrio para los momentos de fuerza calculados respecto del punto O, $\sum_i \vec{\tau}_{i,O} = 0$:

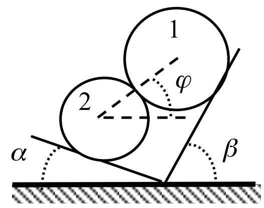
$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}mg\right)\left(\frac{L}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) + T\left[L\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - h\right] - NL\,\text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad T = \left(N - \frac{1}{4}mg\right)\left[\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \frac{h}{L}\right]^{-1}\text{sen}\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \boxed{152.3\text{ N}}$$

c) Planteando la condición de equilibrio para las fuerzas que actúan sobre un brazo aislado:

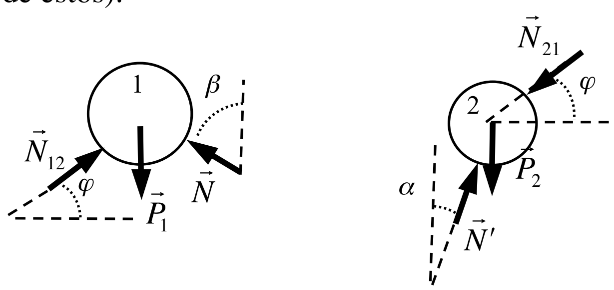
$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad T - R = 0 \quad \Rightarrow \quad R = T = \boxed{152.3\text{ N}}$$

Dos discos de pesos P_1 y P_2 se apoyan entre si y sobre dos planos inclinados, siendo β y α respectivamente los ángulos de inclinación sobre la horizontal. Determinar: a) la reacción de cada plano sobre el disco correspondiente, b) la tangente del ángulo φ que forma la recta que une los centros de los discos con la horizontal.



Solución: **I.T.T. 03**

a) Dibujando el diagrama de fuerzas para los dos discos y planteando las condiciones de la estática (la condición de momentos de fuerza nulos se satisface automáticamente ya que todas las fuerzas que actúan sobre cada disco pasan por el centro de éstos):



$$\text{Disco 1:} \quad \sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N_{12}\cos\varphi - N\,\text{sen}\beta = 0 \\ N_{12}\,\text{sen}\varphi + N\cos\beta - P_1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{P_1}{\cos\beta + \text{sen}\beta\,\text{tg}\varphi} \quad , \quad N_{12} = \left[\frac{\text{sen}\beta/\cos\varphi}{\cos\beta + \text{sen}\beta\,\text{tg}\varphi}\right]P_1$$

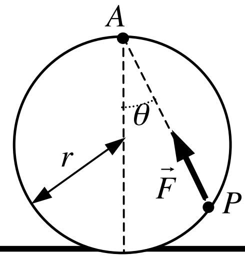
Disco 2: $\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} N' \operatorname{sen}\alpha - N_{21}\cos\varphi = 0 \\ N'\cos\alpha - N_{21}\operatorname{sen}\varphi - P_2 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad N' = \frac{P_2}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\varphi} \quad , \quad N_{21} = \left[\frac{\operatorname{sen}\alpha / \cos\varphi}{\cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{tg}\varphi}\right] P_2$$

b) Teniendo en cuenta que $N_{12} = N_{21}$:

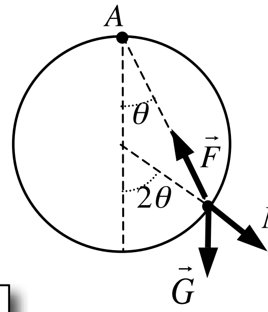
$$\Rightarrow \quad \ldots \quad \operatorname{tg}\varphi = \boxed{\frac{P_1 \operatorname{sen}\beta \cos\alpha - P_2 \operatorname{sen}\alpha \cos\beta}{(P_1 + P_2)\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta}}$$

Una masa puntual P de peso G puede moverse libremente sin rozamiento sobre una circunferencia vertical de radio r perfectamente lisa. Dicha masa es atraída por el punto superior A de la circunferencia mediante una fuerza de módulo constante F. Determinar el valor de θ para la posición de equilibrio. Reacción de la circunferencia sobre la masa y valor máximo de F para que la posición de equilibrio sea distinta de la trivial ($\theta = 0$).



Solución: I.T.I. 03

Dibujando el diagrama de fuerzas, imponiendo las condiciones de la estática (la suma de momentos es nula al ser las tres fuerzas claramente concurrentes) y teniendo en cuenta que el ángulo que forma la normal con la vertical es 2θ (téngase en cuenta que el triángulo formado por A, el centro de la circunferencia y la partícula es isósceles) tenemos que:



$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} F\cos\theta - N\cos 2\theta - G = 0 \\ N\,\mathrm{sen}\,2\theta - F\,\mathrm{sen}\,\theta = 0 \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{ \boxed{\begin{array}{c} N = G \\ \cos\theta = \dfrac{F}{2G} \end{array}} \right.$$

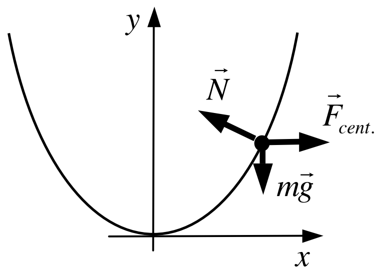
y teniendo en cuenta que el coseno debe ser igual o inferior a la unidad:

$$\cos\theta = \frac{F}{2G} \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{F \leq 2G}$$

Hallar las posiciones de equilibrio de una bola de masa m, que puede deslizar a través de un alambre rígido cuya ecuación es $x^2 = 2\alpha y$, que está girando alrededor de su eje Y con velocidad angular $\vec{\omega}$.

Solución: I.T.T. 04, I.T.I. 03

Si nos colocamos en un sistema de referencia que gire conjuntamente con el alambre nuestro problema se transforma en un problema de estática. El diagrama de fuerzas que actúan sobre la bola presenta además de las fuerzas de interacción de la normal y el peso una fuerza de inercia centrífuga.



La dirección de la normal la podemos obtener considerando la curva del alambre como una curva equiescalar para un campo escalar bidimensional: $\Phi(x,y) = x^2 - 2\alpha y$ (en los puntos del alambre se verifica que $\Phi(x,y) = 0$). El gradiente de este campo escalar tendrá una dirección perpendicular a dicha curva. Bastará finalmente por construir un vector unitario $\hat{n}$ en dicha dirección y con componente x negativa (ver figura):

$$\vec{\nabla}\Phi = 2x\hat{i} + 2\alpha\hat{j} \quad \Rightarrow \quad \hat{n} = \frac{-\vec{\nabla}\Phi}{\left|\vec{\nabla}\Phi\right|} = \frac{-x\hat{i} + \alpha\hat{j}}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}$$

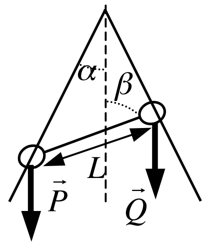
La fuerza normal vendrá por lo tanto dada por: $\vec{N} = \left(\frac{-x\hat{i} + \alpha\hat{j}}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}\right)N$

Imponiendo las condiciones de la estática (la suma de momentos es nula al ser las tres fuerzas claramente concurrentes):

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\alpha N}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} - mg = 0 \quad \Rightarrow \quad N = \left(\dfrac{\sqrt{x^2 + \alpha^2}}{\alpha}\right) mg \\ \\ \dfrac{-xN}{\sqrt{x^2 + \alpha^2}} + m\omega^2 x = 0 \quad \Rightarrow \quad -\left(\dfrac{x}{\alpha}\right) mg + m\omega^2 x = 0 \end{cases}$$

De la última ecuación se deduce que $x = 0$ es una solución para la posición de equilibrio. En el caso particular de que $\boxed{\omega^2 = \frac{g}{\alpha}}$ cualquier valor de x es también una posición de equilibrio.

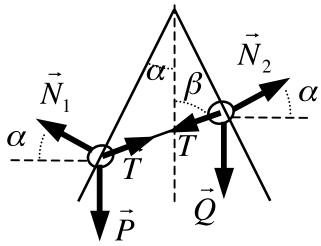
Dos anillos de pesos P y Q, están atados a un hilo ideal y pueden deslizar sobre dos guías rectilíneas igualmente inclinadas respecto de la vertical. Prescindiendo del rozamiento determinar el ángulo que la cuerda forma con la vertical en la posición de equilibrio, así como su tensión y las reacciones de las guías sobre los anillos.



Solución: **I.T.I. 03**

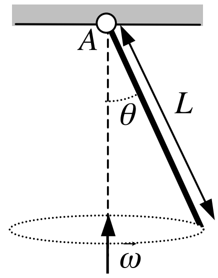
Dibujando el diagrama de fuerzas e imponiendo las condiciones de la estática (la suma de momentos sobre cada anillo es nula al ser las tres fuerzas que actúan sobre ellos concurrentes):

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T\,\mathrm{sen}\beta - N_1\cos\alpha = 0 \\ T\cos\beta + N_1\,\mathrm{sen}\alpha - P = 0 \\ N_2\cos\alpha - T\,\mathrm{sen}\beta = 0 \\ N_2\mathrm{sen}\alpha - T\cos\beta - Q = 0 \end{cases}$$



$$\Rightarrow \quad \boxed{N_1 = N_2 = \frac{P+Q}{2\,\mathrm{sen}\alpha} \quad , \quad \mathrm{tg}\beta = \left(\frac{P+Q}{P-Q}\right)\mathrm{ctg}\alpha \quad , \quad T = \frac{P+Q}{2\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{sen}\beta}}$$

Una barra homogénea de masa M y longitud L gira alrededor de una rótula situada en su extremo superior A con velocidad angular constante ω, describiendo una superficie cónica. Calcular: a)¿ Qué fuerzas actúan sobre la barra? b) El ángulo distinto de cero que forma la barra con la vertical en la posición de equilibrio c) Reacción en la rótula.

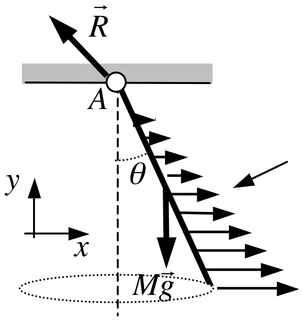


Solución: **I.T.I. 03**

d) Para que el problema sea un problema de estática debemos colocarnos en un sistema de referencia no inercial con origen en el eje de rotación y girando con la misma velocidad angular que la barra. Desde ese punto de vista la barra permanecerá estática formando un ángulo θ con la vertical y sometida a las siguientes fuerzas:

Fuerza centrífuga infinitesimal sobre un diferencial de longitud dl a distancia l de A (con l variando entre 0 y L):

$$dF_{cent.} = dm\,\omega^2 r = (\lambda\, dl)\omega^2 (l\,\text{sen}\theta)$$



Fuerzas centrífugas actuándo sobre cada una de las partes de la barra

Integrando para toda la barra tenemos la fuerza centrífuga total equivalente a todas las fuerzas microscópicas:

$$F_{cent.} = \int_0^L \lambda\,\omega^2 l\,\text{sen}\,\theta\, dl = \frac{1}{2}\lambda\,\omega^2 L^2\,\text{sen}\theta = \frac{1}{2}M\,\omega^2 L\,\text{sen}\,\theta$$

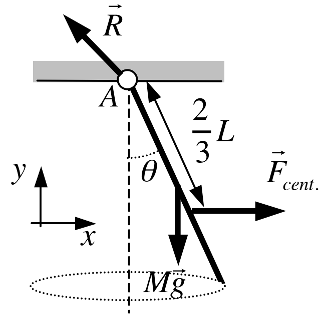
El momento de fuerzas respecto de A de una fuerza centrífuga infinitesimal será:

$$d\tau_{cent.A} = dF_{cent.} l\cos\theta = dm\,\omega^2 r = \lambda\,\omega^2 l^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\, dl$$

Integrando para toda la barra tenemos el momento centrífugo total equivalente a todos los momentos microscópicos:

$$\tau_{cent.A} = \int_0^L \lambda\,\omega^2 l^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta\, dl =$$

$$= \frac{1}{3}\lambda\,\omega^2 L^3\,\text{sen}\theta\cos\theta = F_{cent.}\left(\frac{2}{3}L\right)\cos\theta$$



Todas las fuerzas microscópicas centrífugas se pueden sustituir por lo tanto por una única fuerza $\vec{F}_{cent.}$ aplicada en un punto de la barra a $\frac{2}{3}L$ de A:

e) Aplicando la condición de la estática para los momentos:

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad F_{cent.}\left(\frac{2}{3}L\right)\cos\theta - Mg\left(\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}\theta = 0$$

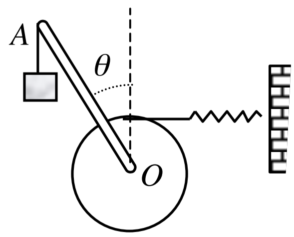
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{3}M\omega^2 L^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta = Mg\left(\frac{L}{2}\right)\operatorname{sen}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\begin{array}{l} \operatorname{sen}\theta = 0 \quad \text{(solución trivial)} \\ \\ \cos\theta = \dfrac{3g}{2\omega^2 L} \end{array}}$$

f) Aplicando la condición de la estática para las fuerzas:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} R_x + F_{cent.} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_x = -\dfrac{1}{2}M\omega^2 L\operatorname{sen}\theta} \\ R_y - Mg = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_y = Mg} \end{cases}$$

Un bloque de 200 Kg está sujeto a la palanca AO, de 200 mm de longitud según se indica en la figura. El radio de la polea es de 75 mm y la constante del muelle es de 50 kN/m. Sabiendo que el muelle está sin deformar cuando $\theta = 0$, determinar las posiciones de equilibrio.



Solución: I.T.I. 03

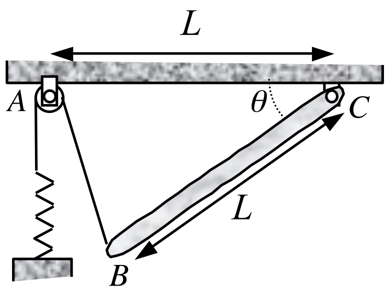
Aplicando la condición de la estática para los momentos:

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,O} = 0 \quad \Rightarrow \quad MgL\operatorname{sen}\theta - F_{elástica}R = 0$$

$$F_{elástica} = k(R\theta) \quad \Rightarrow \quad MgL\operatorname{sen}\theta = kR^2\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{MgL}{kR^2}\operatorname{sen}\theta$$

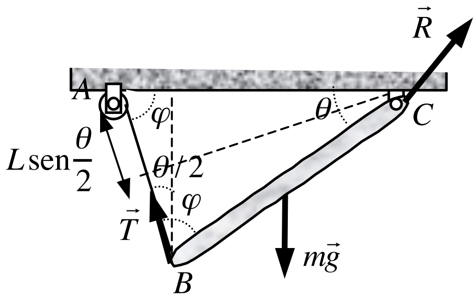
Ecuación trascendente cuyas soluciones son: $\boxed{\theta = 0 \quad , \quad \theta \approx 78.16^{\text{o}}}$

La varilla BC de la figura puede rotar libremente alrededor de C. En el extremo B se le ata una cuerda ligada a un muelle de constante elástica k, el cual no estaría estirado si la varilla adoptase una posición horizontal ($\theta = 0$). a) Determinar el valor de θ correspondiente al ángulo de equilibrio del sistema en función de la masa m y la longitud L de la varilla y la constante elástica k del muelle. b) Calcular el valor de todas las fuerzas que actúan sobre la varilla en función de m, L, k y el ángulo de equilibrio θ.



Solución: **I.T.I. 03**

a) El triángulo ABC es un triángulo isósceles con lo que un sencillo cálculo trigonométrico indica que el ángulo que forma la tensión con la vertical es $\theta/2$, el mismo ángulo que forma con la dirección perpendicular a la barra. Dicha tensión será igual a la constante elástica del muelle multiplicada por lo que éste se ha alargado que es justamente la distancia $\overline{AB} = 2L\,\text{sen}\frac{\theta}{2}$.



Tomando momentos respecto de C y aplicando las condiciones de la estática:

$$\sum_i \vec{\tau}_{i,C} = 0 \quad \Rightarrow \quad mg\frac{L}{2}\cos\theta - \left(2kL\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\right)L\cos\frac{\theta}{2} = 0$$

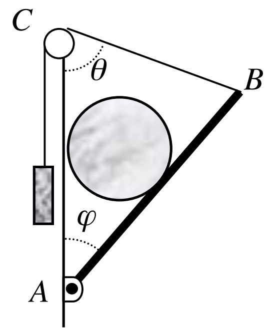
$$\left(2\,\text{sen}\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \text{sen}\,\theta\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{tg}\,\theta = \frac{mg}{2kL}}$$

b) Como ya hemos utilizado en el apartado anterior: $\boxed{T = 2kL\,\text{sen}\frac{\theta}{2}}$

Aplicando las condiciones de la estática para las fuerzas:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} R_x - T\,\text{sen}\frac{\theta}{2} = 0 & \Rightarrow & R_x = T\,\text{sen}\frac{\theta}{2} = \boxed{2kL\,\text{sen}^2\frac{\theta}{2}} \\ R_y + T\cos\frac{\theta}{2} - mg = 0 & \Rightarrow & R_y = mg - T\cos\frac{\theta}{2} = \boxed{mg - kL\,\text{sen}\,\theta} \end{array}\right.$$

Un disco homogéneo de peso W y radio R se apoya en una pared vertical lisa y sobre una barra de peso Q. Uno de los extremos de la barra puede girar alrededor de una rótula en A y el otro extremo está unido a un hilo que tras pasar por una polea sin rozamiento lleva en el otro extremo suspendido un peso P. Determinar las distintas reacciones entre los sólidos, así como el peso P para que la barra esté en equilibrio formando un ángulo de 30º con la vertical. $\overline{AB} = \overline{AC} = 2L$.



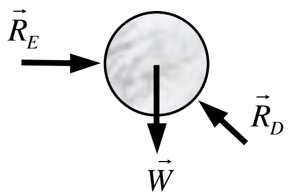
Solución: **I.T.I. 03**

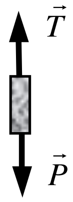
El triángulo ABC es isósceles con lo que los otros lados del triángulo valen: $\theta = \dfrac{\pi - \varphi}{2}$.

Si llamamos D al punto de contacto del disco con la barra:

$$\frac{R}{\overline{AD}} = \mathrm{tg}\frac{\varphi}{2} \quad \Rightarrow \quad \overline{AD} = R\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2}$$

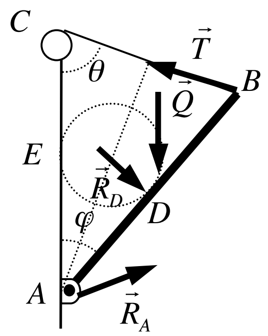
Aplicando las condiciones de la estática para cada uno de los cuerpos (para la barra el cálculo de momentos se realiza respecto del punto A):





$$T - P = 0 \quad \Rightarrow \quad T = P$$

$$\left.\begin{array}{l} R_E - R_D\cos\varphi = 0 \\ R_D\,\mathrm{sen}\varphi - W = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} R_D = \dfrac{W}{\mathrm{sen}\varphi} \\ R_E = \dfrac{W}{\mathrm{tg}\varphi} \end{array}} \right.$$



$$\left.\begin{array}{l} R_{A\,x} + R_D\cos\varphi - T\,\mathrm{sen}\theta = 0 \\ R_{A\,y} - R_D\,\mathrm{sen}\,\varphi + T\cos\theta - Q = 0 \\ T(2L)\mathrm{sen}\,\theta - QL\mathrm{sen}\,\varphi - R_D\,\overline{AD} = 0 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{array}{l} P = Q\,\mathrm{sen}\dfrac{\varphi}{2} + \dfrac{WR}{2L\mathrm{sen}\varphi\;\mathrm{sen}\dfrac{\varphi}{2}} \\ R_{A\,x} = \dfrac{1}{2}Q\mathrm{sen}\varphi + \left[\left(\dfrac{R}{2L}\right)\left(\mathrm{sen}\varphi\;\mathrm{tg}\dfrac{\varphi}{2}\right)^{-1} - \mathrm{ctg}\varphi\right]W \\ R_{A\,y} = Q\cos^2\dfrac{\varphi}{2} + \left[1 - \dfrac{R}{2L\mathrm{sen}\,\varphi}\right]W \end{array}} \right.$$