Estrutura do Espaço de Medidas Invariantes sob Especificação

por

Thiago Passos Peixinho

UFRJ

16 de Decembro de 2013

FICHA CATALOGRÁFICA

Peixinho, Thiago Passos
Estrutura do Espaço de Medidas Invariantes sob Especificação
Thiago Passos Peixinho.
Rio de Janeiro: UFRJ, IM, 2013.
Dissertação - Universidade Federal do Rio de Janeiro, IM.
1. Sistemas Dinâmicos
2. Teoria Ergódica
3. Análise Matemática
(Mestrado-UFRJ/IM) Gelfert, Katrin Grit
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, III. Título.

Estrutura do Espaço de Medidas Invariantes sob Especificação

por

Thiago Passos Peixinho
Orientadora: Katrin Grit Gelfert

Dissertação de Mestrado submetida ao Programa de Pós-graduação do Instituto de Matemática, da Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Presidente: Prof.ª Katrin Grit Gelfert
IM - UFRJ - Orientadora.

Prof.ª Maria José Pacifico
IM - UFRJ.

Prof.ª Isabel Lugão Rios
IM - UFF.

Prof. Alexander Eduardo Arbieto Mendoza
IM - UFF.

Rio de Janeiro
Decembro 2013

Resumo

Estudamos a propriedade de especificação de sistemas dinâmicos discretos. Deducimos um número de propriedades topológicas e ergódicas de sistemas dinâmicos que têm essa propriedade. Em particular, estudamos o espaço de probabilidades invariantes e concluímos que é um simplex de Poulson e, em particular, que o conjunto dos seus extremos (isto é o conjunto das medidas ergódicas) e conexo por caminho.

Palavras Chaves: sistemas dinâmicos, teoria ergódica, propriedade de especificação, Choquet e Poulson simplex

Abstract

We study the specification property in discrete dynamical systems. We derive a number of topological and ergodic properties of dynamical systems that have this property. In particular, we study the space of invariant probability measures and conclude that it is a Poulson simplex and, in particular, that the set of its extremes (that is, set of ergodic measures) is path connected.

Key words: dynamical systems, ergodic theory, specification property, Choquet and Poulson simplex

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Neste texto, estudaremos a propriedade de especificação em sistemas dinâmicos discretos, isto é, em mapas contínuos definidos em espaços métricos compactos. Sistemas com especificação tem a propriedade de que para quaisquer segmentos de órbitas existirá um ponto periódico cuja órbita se aproxima desses segmentos no tempo desejado. Além disso, o período independe do tamanho dos segmentos de órbitas e nem mesmo da escolha dos pontos que originam esses segmentos, dependendo somente do tamanho da aproximação desejada.

Especificação foi definida primeiramente por Bowen em 1971 através do estudo de difeomorfismos transitivos satisfazendo o axioma A. Esse objeto de estudo se mostrou rico para a dinâmica hiperbólica e para a teoria ergódica. Além de suas propriedades topológicas interessantes como o fato que toda transformação é topológicamente misturadora. Aqui estaremos interessados nas propriedades topológicas e ergódicas desses sistemas.

A finalidade deste trabalho é concluir que o espaço de medidas ergódicas de transformações com especificação é conexo por caminhos. Dessa forma generalizamos o resultado mostrado em [14] no caso específica da transformação de shift agora no o caso geral de um sistema dinâmico num espaço métric compacto com uma transformação continua satisfazendo especificação (Teorema 5.3.8). O texto foi pensado de forma a progressivamente chegarmos nesse resultado, mas essa não é a nossa única meta. Faremos pausas ao longo do caminho para estudarmos outras características peculiares desses sistemas.

Primeiramente, necessitaremos que o leitor possua um bom conhecimento de teoria ergódica e portanto também de teoria da medida, análise funcional e o básico de sistemas dinâmicos. Pois senão o entendimento desta dissertação estará comprometido. De qualquer forma, exibiremos os resultados necessários no Capítulo 2.

Munidos dessas ferramentas começaremos em Capítulo 3 a estudar a propriedade de especificação propriamente dita. Definiremos formalmente a propriedade, estudando suas características básicas, alguns dados topológicos e exibindo alguns exemplos de mapas com especificação. Uma dessas características é o fato citado acima dos sistemas serem topologicamente misturador, além do fato mais relevante deste primeiro capítulo que o conjunto de pontos periódicos é denso. Também veremos uma característica interessante sobre a entropia topológica desses sistemas.

Neste mesmo capítulo, constataremos uma característica singular de sistemas com a propriedade na reta. Mostraremos que nos reais, transformações misturadora topológicas possuem especificação. Esse resultado foi anunciado primeira vez por Blokh em 1983, mas nós seguimos a demonstração de Buzzi. A pesquisa de relações semelhantes a essa em espaços de dimensão maior é um estudo atual da especificação.

No Capítulo 4 estudaremos o espaço de medidas invariantes desses mapas. Veremos que a densidade dos pontos periódicos arrecada em características únicas no espaço de medidas. Veremos que todas as medidas tem suporte em órbitas, isto é, que toda medida possui um ponto genérico que gera-a. Veremos que a densidade de pontos periódicos implica que o conjunto de medidas com suporte periódico é denso no espaço de medidas invariantes o que infere que várias fámilias de medidas são de primeira categoria como por exemplo as medidas ergódicas.

Por fim, concluiremos que o espaço das medidas ergódicas é conexo por caminhos através do estudo dos simplex. Veremos que o espaço de medidas invariantes forma um simplex para quaisquer transformações e que quando o mapa possui especificação, então as medidas invariantes são um tipo único de simplex que é o Poulsen Simplex. E finalmente constataremos que o Poulsen tem a característica de que seu conjuto de pontos extremais ser conexo por caminho.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos e resultados fundamentais da teoria da medida e da análise funcional que serão importantes neste trabalho.

2.1 Teoria da Medida e Análise Funcional

2.1.1 Definição. *Uma subfamília $\mathcal{B}$ de subconjuntos de um conjunto X é dita uma* σ-álgebra *se satisfaz as sequintes propriedades:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{B}$
2. *Se* $E \in X$, *então* $X \setminus E \in \mathcal{B}$
3. *Se* $E_i \in \mathcal{B}\ \forall i \in \mathbb{N}$, *então* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} E_i \in \mathcal{B}$

$\mathcal{B}$ *é dita uma* álgebra *se satisfaz:*

1. $\emptyset, X \in \mathcal{B}$
2. $\forall E \in \mathcal{B},\ \ X \setminus E \in \mathcal{B}$
3. *Se* $E_i \in \mathcal{B}\ \forall 1 \leq i \leq N$, *então* $\bigcup_{i=1}^{n} E_i \in \mathcal{B}$

Os elementos de uma σ-álgebra são chamados de conjuntos *mensuráveis*, portanto a σ-álgebra define a fámilia de conjuntos mensuráveis. Nos chamamos $(X, \mathcal{B})$ um *espaço mensurável*.

Dada uma álgebra, é sempre possível gerar uma σ-álgebra que que será a menor σ-álgebra que contém essa álgebra. Portanto, as vezes tomaremos uma álgebra e assumiremos a σ-álgebra gerada por ela.

Além disso, dada uma topologia em X, é possível criar a menor σ-álgebra que contém essa topologia, isto é, que todos os conjuntos abertos são mensuráveis. Essa σ-álgebra possui o nome especial de *σ-álgebra de Borel* e seus elementos são chamados de *borelianos*. Os teorema que serão enunciados neste capítulo introdutório não necessitam da hipótese da σ-álgebra ser de Borel, mas em todos os outros capítulos é necessário assumirmos que a σ-álgebra utilizada é a de Borel.

Uma função $f\colon X \to \mathbb{R}$ será dita *mensurável* se a pré-imagem de qualquer aberto de $\mathbb{R}$ é um conjunto mensurável de X. Na verdade, para afirmar que f é mensurável, basta verificar que a pré-imagem do intervalo $(-\infty, a)$ é mensurável para qualquer $a \in \mathbb{R}$. Também charemos de funções mensuráveis as funções definidas $f\colon X \to \mathbb{R}_\infty$ se a pré-imagem do intervalo $(-\infty, a)$ é mensurável para qualquer $a \in \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Agora que já estabelecemos o que é uma σ-álgebra, podemos definir o que é uma medida, que serão os objetos mais estudados ao longo deste texto.

2.1.2 Definição. *Uma* medida *em* $(X, \mathcal{B})$ *é uma função* $\mu\colon \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ *tal que:*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(B) \geq 0 \ \forall \ B \in \mathcal{B}$
3. $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(E_i)$ *se* $\forall i \in \mathbb{N}$ $E_i \in \mathcal{B}$ *e* $\forall i \neq j$ $E_i \cap E_j = \emptyset$

Se $\mu(X) < \infty$, então diremos que μ é uma *medida finita*. Se $\mu(X) = 1$, diremos que μ é uma *medida de probabilidade* ou simplesmente um *probabilidade*. Note que se μ é uma medida finita, então se definirmos a medida ν tal que $\nu(E) = \mu(E)/\mu(X)$, temos que ν é uma probabilidade.

Se existem uma família enumerada de conjuntos mensuráveis E_n com $n \in \mathbb{N}$ tal que $X = \cup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ e $\mu(E_n) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então diremos que μ é uma medida *σ-finita*. Se λ é uma função $\lambda\colon \mathcal{B} \to [0, +\infty]$ que satisfaz os itens 1 e 3 da Definição 2.1.2, então chamaremos λ de *carga*. Note que o conjunto das cargas finitas formam um espaço vetorial real de dimensão infinita.

Quando existe uma determinada propriedade P tal que o conjunto dos elementos $x \in X$ que não satisfazem a propriedade P tem medida μ nula, então diremos que P é a satisfeita para μ-quase todo $x \in X$. Quando a medida usada μ estiver subentendida diremos que P é satisfeito quase sempre ou $(\mod 0)$.

Seja $E \in \mathcal{B}$ definimos a função $\mathcal{X}_E\colon X \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\mathcal{X}_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \notin E; \end{cases}$$

A função acima definida é mensurável e chamada de *função característica* de E. Se φ é uma função que é uma combinação linear de funções características em chamamos φ de *função simples*. Temos então que:

$$\varphi := \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j} \, ,$$

onde a_j são números reais distintos e E_j são dois a dois disjunto. Podemos então definir a integral de funções simples que é:

$$\int \varphi \, d\mu := \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j)$$

É possível mostrar que toda função mensurável pode ser aproximada por uma sequência crescente de funções simples. A partir daí, podemos definir integrais de funções. Se f é uma função mensurável positiva, definimos a integral de f com respeito a μ como sendo:

$$\int f \, d\mu := \sup\{ \int \varphi \, d\mu ; \varphi \text{ é função simples e } 0 \leq \varphi(x) \leq f(x) \;\; \forall x \in X\}$$

Uma função mensurável positiva f é dita *integrável* se $\int f d\mu < \infty$. Para funções mensuráveis f não positivas basta considerar $f := f^+ - f^-$, onde $f^+(x) := \sup\{f(x), 0\}$ e $f^-(x) := \sup\{-f(x), 0\}$. f^+, f^- são funções mensuráveis positivas e portanto f será integrável se f^+, f^- também forem com $\int f \, d\mu := \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu$. Dado $E \subset X$ mensurável, podemos definir a integral de f com respeito a μ em E como sendo:

$$\int_E f \, d\mu := \int f \mathcal{X}_E \, d\mu$$

Onde $\mathcal{X}_E$ é a função característica de E.

Note também que se f for uma função contínua definida em um compacto, então f pode ser aproximada por uma sequência crescente de funções simples e também f será integrável. Segue abaixo os principais teoremas de convergência de sequências de funções mensuráveis e integráveis.

2.1.3 Teorema (convergência monótona)**.** *Seja $f_n \colon \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis não-decrescente, que convergem para uma f, então f é mensurável e*

$$\lim \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

2.1.4 Lema (Fatou)**.** *Seja $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis não-negativas, então;*

$$\int \liminf_{n \to \infty} f_n d\mu = \liminf_{n \to \infty} \int f_n d\mu$$

2.1.5 Teorema (convergência dominada)**.** *Sejam $f_n \colon \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções integráveis tal que* $\lim f_n = f$ *em μ-quase todo ponto e g uma função integrável tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e* $\lim \int f_n d\mu = \int f$.

Agor veros mais duas definições de medidas importante para nós.

2.1.6 Definição. *Dada duas medidas μ_1, μ_2, dizemos que μ_1 é* absolutamente contínua *com respeito à μ_2 ($\mu_1 \ll \mu_2$) se $\mu_2(E) = 0$ implica que $\mu_1(E) = 0$ para qualquer $E \in \mathcal{B}$. Dizemos que μ_1, μ_2 são* simutualmente singular *($\mu_1 \perp \mu_2$) se existe um $A \in \mathcal{B}$ tal que $\mu_1(A) = 0$ e $\mu(X \setminus A) = 0$.*

2.1.7 Teorema (Lebesgue)**.** *Seja $(X, \mathcal{B})$ um espaço mensurável, com medidas μ, ν σ-finitas. Então existem únicas medidas σ-finitas λ_1, λ_2 tal que $\nu = \lambda_1 + \lambda_2$ satisfazendo $\lambda_2 \ll \mu$ e $\lambda_1 \perp \mu$.*

2.1.8 Teorema (Radon-Nikodym)**.** *Sejam μ, ν duas medidas σ-finitas em X tal que ν é absolutamente contínua com respeito a μ. Então existe uma função f mensurável positiva tal que:*

$$\nu(E) = \int_E f d\mu \quad \forall E \in \mathcal{B}\,.$$

Além disso, f é unicamente determinada μ-quase todo ponto.

A função f como no teorema acima será chamada de *derivada de Radon-Nikodym* e denotaremos $f := d\nu/d\mu$.

Agora que já evidenciamos os principais resultados da Teoria de Medida, olharemos agora para a Análise Funcional que nos dará alguns permitá obter novos resultados da Teoria de Medida.

Seja V um espaço de Banach, isto é, um espaço vetorial real normado completo. Dados $u \in V$ e $r > 0$ denotamos por $B(u, r) := \{v \in V; \|u - v\|_V < r\}$ a bola de centro u e raio r, onde $\| \cdot \|_V$ é a *norma* de V. Um operador $\Psi \colon V \to \mathbb{R}$ é dito *linear* se $\Psi(au + bv) = a\Psi(u) + b\Psi(v)$ para todos $u, v \in V$ e $a, b \in \mathbb{R}$. Ele é dito *limitado* se:

$$\|\Psi\| := \sup_{u \in B(0,1)} |\Psi(u)| < \infty$$

Note que um funcional linear é contínuo se e somente se for limitado. Agora, denotaremos $V^* := \{\Psi : V \to \mathbb{R}$ operadores lineares, limitados$\}$ e o chamaremos de o *dual* de V. Em geral, trabalharemos com um X espaço métrico compacto. Notamos que

$$C(X, [0, 1]) := \{f \colon X \to [0, 1] \text{ contínua}\}$$

com a norma $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ é um espaço de Banach. Assim tomamos $V = C(X, [0, 1])$ e V^* como sendo o dual de $C(X, [0, 1])$.

2.1.9 Definição. *Seja $\Psi_n \colon V \to \mathbb{R}$ uma sequência de operadores lineares em V^*, então dizemos que:*

$$\Psi_n \to_{n\to\infty} 0 \textit{ fraca} *\textit{, se e somente se, } \Psi_n(v) \to_{n\to\infty} 0 \textit{ para todo } v \in V$$

Usaremos a notação $\Psi_n \rightharpoonup^{w*}_{n\to\infty} 0$ (w do inglês weak*) ou $\lim w *_{n\to\infty} \Psi_n = 0$.*

Note que a definição acima define uma topologia em V^*. De fato, ela é menor topologia tal que os funcionais lineares contínuos continuam contínuos. Mais ainda:

2.1.10 Teorema (Alaoglu)**.** *Se V é um espaço vetorial normado, então $B_{V^*}(0,1)$ é compacto na topologia fraca∗.*

Essa é uma das principais vantagens da topologia fraca∗ no espaço dual. De fato, como o espaço dual é normado podemos definir uma topologia usando sua norma, que charemos de topologia forte, mas em geral, $B_{V^*}(0,1)$ não é compacto na topologia forte.

Agora começaremos a trazer os resultados da Análise Funcional para Teoria da Medida.

2.1.11 Teorema. *Sejam μ_1, μ_2 duas medidas de probabilidades em $(X, \mathcal{B})$ tal que $\int \phi d\mu_1 = \int \phi d\mu_2$ para toda função $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ contínua, então $\mu_1 = \mu_2$.*

2.1.12 Teorema (Representação de Riesz)**.** *Seja $\Psi\colon C(X) \to \mathbb{R}$ um funcional linear contínuo tal que $f \leq 0$ implica $\Psi(f) \leq 0$ e $\Psi(Id) = 1$, então existe μ uma medida de probabilidade tal que $\Psi(f) = \int f\, d\mu$ para toda $f \in C(X)$.*

O Teorema de Riesz é um dos mais importantes da Teoria da Medida. Sua prova é possível de ser encontrada em tantos livros de Teoria da Medida quanto em livros de Análise Funcional (veja, por exemplo, [1, 6, 3]).

Seja (X, d) um espaço métrico compacto, $\mathcal{B}$ uma σ-álgebra de Borel de (X, d). Definimos $\mathcal{M}^1(X) := \{\mu\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}; \mu \text{ medida de probabilidade}\}$ como o espaço das probabilidade de $(X, \mathcal{B})$. Graças aos teoremas acima, temos o seguinte corolário.

2.1.13 Corolário. *Temos uma bijeção entre $\mathcal{M}^1(X)$ e o espaço $\{\Psi\colon C^0 \to \mathbb{R};\ \Psi \text{ é operador linear contínuo e } \Psi(f) \leq 0 \text{ se } f \leq 0\}$.*

Esse corolário nos diz que existe uma equivalência entre o espaço das probabilidades e o espaço dos operadores lineares e portanto, a topologia no espaço das medidas de probabilidade é herdada da topologia do dual do espaço de funções contínuas.

2.2 Teoria Ergódica

Agora que já revisamos s Teoria da Medida e a Análise funcional, estamos prontos para estudar a Teoria Ergódica. Os resultados aqui exibidos são extremamente fundamentais para nosso estudo, mas são altamente conhecidos, portanto não daremos nenhuma prova para os teoremas dessa seção. Para os interessados, recomendamos [18] e [7] (ou [17]) para suas demonstrações.

A partir desta seção e ao longo dessa dissertação, sempre consideramremos X um espaço métrico compacto, $T\colon X \to X$ uma aplicação contínua, $\mathcal{B}$ a σ-álgebra de Borel em X e d uma métrica em X. Dado $x \in X$ denotamos por $\mathcal{O}(x) := \{T^n x; n \in \mathbb{Z}\}$ como sendo a *órbita* de x.

2.2.1 Definição. *Dizemos que T se T é transitivo, então dados quaisquer $U, V \subset X$ abertos, então existe um $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n U \cap V \neq \emptyset$.*

É possível mostrar que é *transitivo* se existe um $x \in X$ tal que $\overline{\mathcal{O}(x)} = X$. Continuemos com umas definições.

2.2.2 Definição. *Uma tranformação $T\colon X \to X$* preserva *a medida μ ou μ é T*-invariante *se $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$, para todo $A \in \mathcal{B}$. Uma tal transformação T também é chamado de* endomorfismo. *Além disso, se T^{-1} existe e T, T^{-1} forem endomorfismos, então T é chamada de* automorfismo.

Ao longo deste texto, as medidas que nos interessaremos serão exatamente as medidas de probabilidade que são endomorfismos.

2.2.3 Teorema (Recorência de Poincaré)**.** *Sejam $T\colon X \to X$ uma transformação contínua e μ uma medida T-invariante finita. Então para todo $E \in \mathcal{B}$ com $\mu(E) > 0$ e para μ quase todo $x \in E$, existe $n = n(x) \geq 1$ tal que $T^n x \in E$.*

2.2.4 Definição. *Sejam X um espaço métrico compacto e $\mathcal{B}$ uma σ-álgebra de X denotamos por $\mathcal{M}^1(X)$ o espaço das medidas $\mu\colon \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ de probabilidades de X.*

2.2.5 Definição. *A topologia fraca$*$ é a menor topologia tal que a aplicação $\mu \mapsto \int \phi \, d\mu$ é contínua para toda $\phi \in C(X)$. Sua base é dada pelos conjuntos do tipo:*

Dados $\phi_1, \phi_2, ..., \phi \in C(X)$, $\epsilon > 0$, $n \in \mathcal{M}$ e $\mu \in \mathcal{M}^1(X)$ seja

$$V(\mu, \phi_1, \phi_2, ..., \phi_n, \epsilon) := \{\nu \in \mathcal{M}^1(X); |\int \phi_i \, d\nu - \int \phi_i \, d\mu| < \epsilon, \forall i = 1, ..., n\}.$$

2.2.6 Lema. *$\mu_n \to^{w*}_{n\to\infty} \mu$ em $\mathcal{M}^1(X)$ se e somente se $\int \phi \, d\mu_n \to_{n\to\infty} \int \phi \, d\mu$ para toda $\phi \in C(X)$. Também denotaremos $\mu = \lim_{n\to\infty} w * \mu_n$*

Note que o lema acima coincide com a definição de topologia fraca$*$ dada na Definição 2.1.9. De fato, e essa definição e esse lema que motiva a Definição 2.2.5, pois como citado anteriormente, herdaremos a topologia do dual atrvés do Corolário 2.1.13.

Assim, como pelo Teorema de Alaoglu 2.1.10 a bola unitária no dual é compacta, pela bijeção e equivalência de topologias mencionadas acimas, temos que $\mathcal{M}^1(X)$ é compacta na topologia fraca$*$. Isto é, dada uma sequência de probabilidades, sabemos que ela possui uma subsequência que converge fraca$*$ para uma medida de probabilidade.

2.2.7 Lema (Portmanteau)**.** *Sejam $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}^1(X)$ e $n \in \mathcal{N}$. São equivalentes:*

1. $\mu_n \rightharpoonup^{w*}_{n\to\infty} \mu$ *em* $\mathcal{M}^1(X)$
2. $\forall B \subset X$ *fechado* $\limsup_{n\to\infty} \mu_n(B) \leq \mu(B)$
3. $\forall B \subset X$ *aberto* $\liminf_{n\to\infty} \mu_n(B) \geq \mu(B)$
4. $\forall E \in \mathcal{B}$ *com* $\mu(\partial B) = 0$ $\lim_{n\to\infty} \mu_n(B) = \mu(B)$

2.2.8 Teorema. *$\mathcal{M}_1(X)$ munido com a topologia fraca$*$ é um espaço métrico e compacto. De fato, se $\{\phi\}_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em $B_{C(X)}(0,1)$, então:*

$$\rho(\mu, \nu) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\int \phi_n \, d\mu - \int \phi_n \, d\nu|}{2^n}$$

é uma métrica em $\mathcal{M}_1(X)$ que gera a topologia fraca$*$.

Note que uma fámilia $\{\phi\}_{n\in\mathbb{N}}$ denso em $B_{C(X)}(0,1)$ existe, pois X é um espaço métrico compacto.

Concluimos que existem três equivalências para o topologia fraca$*$ em $\mathcal{M}_1(X)$ e usaremos as três ao longo deste texto. Assim, as vezes pensaremos na topologia fraca$*$ como a topologia cuja base é dada como na Definição 2.2.5, quando usarmos argumentos sequências, pensaremos na topologia fraca$*$ como no Lema 2.2.6 e as vezes pensaremos na topologia fraca estrela como a topologia gerada pela métrica definida em 2.2.15.

2.2.9 Teorema (Krylov-Bogolyubov)**.** *Se X é um espaço métrico compacto e $T\colon X \to X$ é uma transformação contínua, então existe pelo menos uma probabilidade T-invariante.*

A demonstração desse teorema utiliza argmentos que serão usados ao longo deste texto, portanto escolhemos mostra-la. Mas primeiro, dados $T\colon X \to X$ uma aplicação contínua no espaço métrico compacto e μ uma probabilidade, definimos:

$$T_*\mu(E) = \mu(T^{-1}(E)) \ \ \forall E \in \mathcal{B}$$

Chamaremos a medida $T_*\mu$ de *push forward*. Note que μ é um endomorfismo se e somente se $T_*\mu = \mu$.

De forma análoga, definimos a medida $T_*^j\mu$ de forma que $T_*^j\mu(E) = \mu(T^{-j}(E))$ para todo $E \in \mathcal{B}$.

2.2.10 Lema. *A aplicação $T_*\colon \mathcal{M}^1(X) \to \mathcal{M}^1(X)$ que leva $\mu \mapsto T_*\mu$ é contínua com relação a topologia fraca$*$.*

Demonstração. Seja $E \subset X$ mensurável e $\mathcal{X}_E$ sua função característica. Temos que:

$$\int \mathcal{X}_E \, dT_*\mu = \int_E dT_*\mu = T_*\mu(E) = \mu(T^{-1}E) = \int_{T^{-1}E} d\mu = \int \mathcal{X}_E \circ T \, d\mu$$

Portanto $\int \mathcal{X}_E \, dT_* = \int \mathcal{X}_E \circ T \, d\mu$ para todo E mensurável. Assim, se φ é uma função simples, então $\int \varphi \, dT_*\mu = \int \varphi \circ T \, d\mu$. Agora, seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe uma sequência de funções simples crescente $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim \varphi_n = f$. Como $\varphi \circ T \to \varphi \circ T$, temos, pelo Teorema da convergência monótona 2.1.3:

$$\int f \, dT_*\mu = \int \lim \varphi_n \, dT_*\mu = \lim \int \varphi_n \, dT_*\mu = \lim \int \varphi_n \circ T \, d\mu = \int \lim \varphi_n \circ T \, d\mu = \int f \circ T \, d\mu$$

Portanto, temos que $\int f \, dT_*\mu = \int f \circ T \, d\mu$ para toda função contínua. Agora, seja $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de probabilidades. Como $f \circ T$ é uma função contínua, então pelo Lema 2.2.6 temos:

$$\int f \, dT_*\mu_k = \int f \circ T \, d\mu_k \to^{w*} \int f \circ T \, d\mu = \int f \, dT_*\mu$$

Assim, $T_*(\mu_k) \to^{w*} T_*(\mu)$, quando $\mu_k \rightharpoonup^{w*}_{k\to\infty} \mu$, portanto T_* é uma aplicação contínua. □

Agora podemos seguir com aprova da existência de medidas invariantes. Mas antes, dado $x \in X$ defina $\delta_x : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ da forma:

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \notin E; \end{cases}$$

Essa função define uma medida de probabilidade que será chamada de medida *delta de Dirac* de x. Notemos que a medida push forward do delta de Dirac é:

$$T_*\delta_x(E) = \delta_x(T^{-1}E) = \begin{cases} 1, & x \in T^{-1}E; \\ 0, & x \notin T^{-1}E; \end{cases} = \begin{cases} 1, & Tx \in E; \\ 0, & Tx \notin E; \end{cases} = \delta_{Tx}(E)$$

E portanto $T_*\delta_x = \delta_{Tx}$. Analogamente, $T_*^j\delta_x = \delta_{T^jx}$.

Prova do Teorema de Krylov-Bogolyubov 2.2.9. Seja $x \in X$ qualquer e δ_x sua medida de delta de Dirac. Defina a sequência de probabilidades da forma:

$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} \delta_{T^jx} = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1} T_*^j\delta_x \, .$$

Como $\mathcal{M}^1(X)$ é compacto, então existe uma subsequência $(\mu_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e uma probabilidade μ tal que:

$$\mu = \lim_{k\to\infty} w * \mu_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k}\sum_{j=0}^{n_k-1} T_*^j\delta_x$$

Agora basta mostrar que μ é uma probabilidade T-invariante. Seja $f \in C(X)$, temos:

$$\begin{aligned}
|\int f\, dT_*\mu - \int f\, d\mu| &= \lim_{k\to\infty} |\int f \circ T\, d\mu_{n_k} - \int f\, d\mu_{n_k}| = \\
&= \lim_{k\to\infty} |\frac{1}{n_k} \sum_{j=0}^{n_k-1} f \circ T^{j+1}\, d\delta_x - \int f \circ T^j\, d\delta_x| \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} |\int (f \circ T^{n_k} - f)\, d\delta_x| = \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{n_k} |f(T^{n_k}x) - f(x)| \leq \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{2\|f\|_\infty}{n_k} = 0\,.
\end{aligned}$$

E portanto $\int f\, dT_*\mu = \int f\, d\mu$ para toda função contínua f e portanto pelo Teorema 2.1.11, $T_*\mu = \mu$ e assim μ é T-invariante, ou seja, existe pelo uma medida de probabilidade T-invariante. □

2.2.11 Definição. *Denotaremos por $\mathcal{M}_T^1(X)$ o conjunto das medidas de probabilidades de X que são T-invariantes.*

2.2.12 Corolário. *Se $T : X \to X$ é uma aplicação contínua em um espaço métrico compacto X, então $\mathcal{M}_T^1(X)$ é um subconjunto compacto convexo de $\mathcal{M}^1(X)$.*

Em vista do Teorema 2.2.9, temos que $\mathcal{M}_T^1(X)$ será um compacto convexo não-vazio e portanto será um nossos principais objetos de estudos. Um tipo especial de medidas de probabilidade T-invariantes que estudaremos são as medidas ergódicas que serão definidas logo em diante. As medidas ergódicas estão diretamente relacionadas com a convexidade do espaço de probabilidades T-invariantes.

2.2.13 Definição. *Uma função $\phi : X \to \mathbb{R}$ é dita* invariante *se $\phi \circ T = \phi$ para todo $x \in X$. Um conjunto $E \in \mathcal{B}$ é dito* invariante *se $T^{-1}B = B$.*

2.2.14 Definição. *Uma probabilidade μ T-invariante é dita* ergódica *se para todo $E \in \mathcal{B}$ invariante ou $\mu(E) = 0$ ou $\mu(E) = 1$.*

2.2.15 Teorema. *São equivalentes:*

1. *μ é ergódica.*
2. *Para toda $\phi : X \to X$ mensurável invariante, existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) = c$ para μ-quase todo $x \in X$.*
3. *Para toda $\phi : X \to X$ mensurável invariante $(\mod 0)$, existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $\phi(x) = c$ para μ-quase todo $x \in X$.*

Outra equivalência será mostrada logo asseguir.

2.2.16 Teorema (Birkhoff). *Sejam $T : X \to X$ uma aplicação contínua em um espaço métrico compacto, μ uma probabilidade T-invariante e $\phi \in L^1(\mu)$. Então*

$$\phi^*(x) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \phi(T^k) \text{ existe para } \mu\text{-quase todo } x \in X\,.$$

Além disso, $\phi^* \in L^1(\mu)$, $\phi^* \circ T = \phi^*$ para μ-quase todo $x \in X$ e $\int \phi^*\, d\mu = \int \phi\, d\mu$.

A função ϕ^* será chamada de *média temporal* de ϕ.

Se em Teorema 2.2.16 tomamos $E \subset X$ um conjunto mensurável e $\phi = \mathcal{X}_E$ sua função característica, temos que

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \mathcal{X}_E(T^k) = \frac{1}{n} \operatorname{card}\{k \in \{0, 1, ..., n-1\}; T^k x \in E\}\,.$$

Portanto,

$$\mathcal{X}_E^*(x) := \lim_{n\to\infty} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{card}\{k \in \{0, 1, ..., n-1\}; T^k x \in E\}$$

será o tempo médio de permanência da órbita de x em E. Esse tempo médio nem sempre existe, mas o Teorema de Birkhoff 2.2.16 afirma que ele existirá para μ-quase todo $x \in E$.

2.2.17 Corolário. *Se μ for ergódica, então $\phi^* = \int \phi\, d\mu$ para μ-quase todo $x \in X$.*

Note que pelo Teorema 2.2.15, a função ϕ^* como definida no Teorema de Birkhoff 2.2.16 será constante μ-quase sempre se μ for uma medida ergódica. Portanto $\phi^* = \int \phi^*\, d\mu = \int \phi\, d\mu$ para μ-quase todo $x \in X$, o que nos dá o corolário acima.

Agora mostraremos mais uma caraterisação equivalente de uma medida ergódica. Essa equivalência é de extrema importância para nós ao longo deste texto, portanto escolhemos demonstra-la. Para isso, mostraremos primeiro este seguinte lema auxiliar.

2.2.18 Lema. *Se μ, ν são medidas de probabilidades T-invariantes tais que μ é ergódica e ν é absolutamente contínua com respeito a μ, então $\mu = \nu$.*

Demonstração. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função mensurável limitada qualquer e seja

$$f^*(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k)$$

sua média temporal. Como μ érgódica, temos pelo Corolário 2.2.17 que f^* é constante, isto é:

$$f^*(x) = \int f\, d\mu$$

para μ-quase todo $x \in X$. Segue que como $v \ll \mu$, $f^*(x) = \int f \, d\mu$ para ν-quase todo $x \in X$ e portanto:

$$\int f^* \, d\nu = \int f \, d\mu \, .$$

Mas pelo Teorema de Birkhoff 2.2.16,

$$\int f^* \, d\nu = \int f \, d\mu \, .$$

Assim, $\int f \, d\nu = \int f \, d\mu$ para qualquer função mensurável limitada. Tomando f como funções características temos que $\mu = \nu$. $\square$

2.2.19 Definição. *Seja X um espaço vetorial real e $Y \subset X$ um subconjunto convexo. Um ponto $p \in Y$ é dito* extremal *se dados quaisquer $x, y \in Y$ e $t \in [0,1]$, temos que $p = tx + (1-t)y$ se e somente se $t = 0$ ou $t = 1$. Denotaremos* $\mathrm{ex}Y$ *o conjunto de pontos extremais de Y.*

2.2.20 Lema. *Uma probabilidade μ invariante é ergódica se e somente se ela é extremal em $\mathcal{M}^1_T(X)$.*

Demonstração. $\Leftarrow$] Suponhamos, por absurdo, que μ é uma medida extremal, mas que μ não é ergódica. Então, pela Definição 2.2.14 de medida ergódica, existe um $A \subset X$ mensurável invariante tal que $0 < \mu(A) < 1$. Definamos as probabilidades μ_1, μ_2 da forma:

$$\mu_1(E) = \frac{\mu(A \cap E)}{\mu(A)}, \quad \mu_2(E) = \frac{\mu(E \cap (X \setminus A))}{\mu(X \setminus A)} \quad \forall E \in \mathcal{B} \, .$$

Como A e $X \setminus A$ são conjuntos invariantes, então μ_1 e μ_2 são probabilidades T-invariantes. Assim, temos que $\mu = \mu(A)\mu_1 + \mu(X \setminus A)\mu_2$ e portanto μ não é extremal, o que é um absurdo.

$\Rightarrow$] Suponhamos que μ é uma medida ergódica e que existem $a, b > 0$ com $a + b = 1$ e medidas de probabilidade μ_1, μ_2 tais que $\mu = a\mu_1 + b\mu_2$. Dado um $E \subset X$ mensurável tal que $\mu(E) = 0$, temos que $\mu_1(E) = \mu_2(E) = 0$, portanto $\mu_1 \ll \mu$ e $\mu_2 \ll \mu$ e assim, pelo Lema 2.2.18, temos que $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ e portanto μ é extremal. $\square$

Abaixo enunciaremos um dos teoremas mais importantes da teoria ergódica. No final do texto, postaremos este teorema de outra forma dando uma demonstração alternativa para ele (Teorema 5.2.7). Para enuncia-lo, definamos uma *partição* de X como sendo uma família $\mathcal{P}$ de subconjuntos de X tal que os elementos P de $\mathcal{P}$ são dois a dois disjuntos e $X = \cup_{P \in \mathcal{P}} P$.

2.2.21 Teorema (Decomposição Ergódica)**.** *Seja $T : X \to X$ uma transformação contínua em um espaço métrico compacto, então existe um subconjunto $X_0 \in \mathcal{B}$ uma partição $\mathcal{P}$ de X_0 e uma família de probabilidades $\{\nu_P; P \in \mathcal{P}\}$ satisfazendo:*

1. *$\nu_P(P) = 1$ para todo $P \in \mathcal{P}$,*

2. *a aplicação* $P \mapsto \nu_P$ *é mensurável,*

3. *todas as medidas* ν_P *são* T*-invariantes e ergódicas para* T.

Além disso, dada uma medida μ T*-invariante, temos que* $\mu(X_0) = 1$ *e*

$$\mu(E) = \int \nu_P(E)\, d\hat{\nu}(P) \quad \text{para todo conjunto mensurável } E \subset X\,.$$

Capítulo 3

Propriedade de Especificação

3.1 Definição e Exemplos

Agora que já estabelecemos algumas das notações e vimos alguns conceitos importantes, já estamos prontos para estudar a propriedade de especificação. Mas antes, vale dizer que nesse capítulo e nos demais, sempre assumiremos $T : X \to X$ uma transformação contínua e X um espaço métrico compacto. Também consideraremos T um homeomorfismo sempre que for necessário e muitas vezes não explicitaremos essas propriedades. Os conceitos mostrado neste capítulo podem ser encontrados em [13].

3.1.1 Definição. *Nós dizemos que um sistema dinâmico* (X, T) *possui a* propriedade de especificação *ou que* $(X, T) \in SPEC$*, se para qualquer* $\epsilon > 0$ *existe um* $M = M(\epsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que para quaisquer* $x_1, x_2 \in X$*, e quaisquer strings* $A_1 = \{a_1, a_1 + 1, ..., b_1\}, A_2 = \{a_2, a_2 + 1, ..., b_2\} \subset \mathbb{Z}$ *com* $a_2 - b_1 > M$ *e qualquer inteiro* $p > b_2 - a_1 + M$ *existe um ponto* $x \in X$ *periódico e de periodo* p *tal que:*

$$d(T^j x, T^j x_1) < \epsilon \quad \textit{para todo} \quad j \in A_1\,,$$

$$d(T^j x, T^j x_2) < \epsilon \quad \textit{para todo} \quad j \in A_2\,.$$

A propriedade de especificação foi introducido por Bowen [4] e a seguir principalmente investigado por Sigmund [13].

Essa definição parece ser meio complicada, mas na verdade sua ideia é simples. Nós basicamente queremos aproximar pedaços de órbitas de quaiquer dois pontos distintos por uma órbita de um ponto periódico. E para conseguirmos fazer isso, nós precisamos dar um tempo necessário para que um ponto periódico consiga se aproximar das outras órbitas com uma distância menor que ϵ.

Além disso, a propriedade de especificação parace ser, na primeira vista, muito forte. Talvez tão forte que podemos nos perguntar se de fato existem sistemas dinâmicos que possuem essa propriedade ou se a classe de sistemas dinâmicos com especificação é grande o suficiente para estudarmos.

Mas veremos ao longo desse capítulo, através de algumas técnicas para verificar se um sistema tem especificação, que de fato existem bastante exemplos de sistemas com a propriedade.

3.1.2 Exemplo. *Seja* $\Sigma_k = \{1, 2, ..., k\}^{\mathbb{Z}}$ *e* $T : \Sigma_k \to \Sigma_d$ *definido por* $(T\xi)_n = \xi_{n+1}$ *para todo* $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_k$ *a transformação "shift". No espaço* Σ_k *nós usamos a métrica definida por* $d(\xi, \eta) = 2^{-\ell}$ *para todo* $\xi = (..., \xi_0, ...)$, $\eta = (..., \eta_0, ...) \in \Sigma_k$, *onde* $\ell = \inf\{|n|; \xi_n \neq \eta_n\}$. *Observamos que* (Σ_k, d) *é um espaço compactos. Então* (Σ_k, T) *tem a propriedade de especificação.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$. Existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n_0} < \epsilon$, assim defina $M = 2n_0$ e seja $\xi = (\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}, \eta = (\eta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_k$ e $A_1 = \{a_1, a_1 + 1, ..., b_1\}, A_2 = \{a_2, a_2 + 1, ..., b_2\} \subset \mathbb{Z}$ duas "strings", com $a_2 - b_1 > M$. Defina um ponto

$$z := \{..., \xi_{a_1-n_0}, ..., \xi_{a_1}, ..., \xi_{b_1}, ..., \xi_{b_1+n_0}, ..., \eta_{a_2-n_0}, ..., \eta_{a_2}, ..., \eta_{b_2}, ..., \eta_{b_2+n_0}, ...\}$$

tal que z é periódico (note que z tem que ter periodo $p > b_2 - a_1 + M$). Assim, temos que:

$$d(T^j z, T^j \xi) < \epsilon \quad \text{para toda} \quad j \in A_1\,,$$

$$d(T^j x, T^j \eta) < \epsilon \quad \text{para toda} \quad j \in A_2\,,$$

o que significa $(\Sigma_k, T) \in SPEC$. □

3.1.3 Exemplo. *Nós podemos generalizar o primeiro exemplo para alguns "subshifts" de tipo finito. Uma condição suficiente é que a matriz de transição seja aperiódica.*

Mais especificamente, seja $A = [a_{ij}]_{ij=1}^{k}$ *uma matriz* $n \times n$ *tal que* $a_{ij} \in \{0, 1\}, \forall i, j = 1, 2, ..., k$. *Seja* $\Sigma_A := \{\xi = (..., \xi_0, \xi_1, ...) \in \{1, 2, ..., k\}^{\mathbb{Z}}; a_{\xi_n\xi_{n+1}} = 1, \forall n \in \mathbb{Z}\}$ *e* $T : \Sigma_A \to \Sigma_A$ *a transformação "shift" no espaço* Σ_A.

Nós dizemos que uma matriz é aperiódica *se existe um* N_0 *tal que* $a_{ij}^{N_0} > 0, \forall i, j = 1, 2, ..., k$ *aonde* $A^n = [a_{ij}^n]_{ij=1}^{k}$. *Assim, se definirmos* $M = N_0$ *então é possível provar que* $(\Sigma_A, T) \in SPEC$ *usando os mesmos argumentos.*

3.1.4 Exemplo. *Seja* $X = [0, 1]$ *e* $T : X \to X$ *definida por*

$$T(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1/2; \\ 2 - 2x, & 1/2 \leq x \leq 1; \end{cases}$$

Então T possui especificação. Nós deixaremos a demonstração desse fato no final do Capítulo 3.4, quando tivermos ferramentas melhores do que mostrar explicitamente.

3.2 Propriedades Topológicas

Agora, estudaremos algumas de suas primeiras características. Nós veremos que especificação é de fato uma propriedade forte, conseguiremos assim achar várias propriedades, as quais sistemas com especificação possuem. Os resultados se encontram principalmente em [13].

Enunciaremos primeiro um conceito importante para o estudo de sistemas dinâmicos e da matemática em geral.

3.2.1 Definição. *Dizemos que dois sistemas dinâmicos* (X, T, d_X), (Y, S, d_Y) *são* conjugados *se existe um homeomorfimo* $h : X \to Y$ *com* $S \circ h = h \circ T$. *Se* h *for apenas contínua, então diremos que* (X, T, d_X), (Y, S, d_Y) *são* semi-conjugados *ou que* (Y, S, d_Y) *é um* fator *de* (X, T, d_X).

3.2.2 Proposição. *O fator de um sistema dinâmico em SPEC também está em SPEC.*

Demonstração. Dado um $\epsilon > 0$, por causa da continuidade de h e da compacidade do X, existe um $\delta > 0$ tal que para qualquer $z_1, z_2 \in X$ com $d_X(z_1, z_2) < \delta$, nós temos que $d_Y(h(z_1), h(z_2)) < \epsilon$.

Defina um $M = M(\delta)$ como na Definição 3.1.1 para o sistema $(X, T) \in SPEC$. Tome $y_1, y_2 \in Y$ e dois strings $A_1 = \{a_1, ..., b_1\}, A_2 = \{a_2, ..., b_2\} \subset \mathbb{Z}$ com $a_2 - b_1 > M$, então existem $x_1, x_2 \in X$ com $y_1 = h(x_1)$, $y_2 = h(x_2)$ e um ponto periódico $x \in X$ com periodo $p > b_2 - a_1 + M$, tal que $d_X(T^j x, T^j x_1) < \delta$ para todo $j \in A_1$ e $d_X(T^j x, T^j x_2) < \delta$ para todo $j \in A_2$.

Defina $y = h(x)$. Então, $S^p y = S^p h(x) = h(T^p x) = h(x) = y$, assim y é periódico com periodo p. E $d_Y(S^j y, S^j y_1) = d_Y(S^j h(x), S^j h(x_1)) = d_Y(h(T^j x), h(T^j x_1)) < \epsilon$ porque $d_X(T^j x, T^j x_1) < \delta$ para todo $j \in A_1$.

De forma análoga, $d_Y(S^j y, S^j y_2) = d_Y(S^j h(x), S^j h(x_2)) = d_Y(h(T^j x), h(T^j x_2)) < \epsilon$ porque $d_X(T^j x, T^j x_2) < \delta$ para todo $j \in A_2$, portanto $(Y, S) \in SPEC$. □

Portanto, semi-conjugação preserva a propriedade de especificação o que nos dá o seguinte resultado.

3.2.3 Proposição. *Se* $(X, T), (Y, S) \in SPEC$ *são conjugados e um deles possui especificação, então o outro também tem.*

3.2.4 Exemplo. *Seja* $f : S^1 \to S^1$ *definida por* $f(x) = 2x \mod 1$. *Essa transformação é conjugada ao shift de dois dígitos. De fato, seja* $\sum_2^+ = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ *e* $T : \sum_2^+ \to \sum_2^+$ *a aplicação shift definida por* $(T\xi)_n = \xi_{n+1}$. *Definamos a transformação*

$$\phi : \Sigma_2^+ \to [0, 1], \quad \phi(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n}$$

Temos que

$$\phi(T(\xi_1, \xi_2, ...)) = \phi(\xi_2, \xi_3, ...) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{n+1}}{2^n}.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} f(\phi(\xi_1, \xi_2, ...)) = f(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n}) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^n} \mod 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^{n-1}} \mod 1 \\ = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\xi_n}{2^{n-1}} + \xi_1 \mod 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{n+1}}{2^n} = \phi(T(\xi_1, \xi_2, ...)). \end{aligned}$$

Portanto, ϕ é uma semi-conjugação entre (Σ_2^+, T) e (S^1, f). Como visto no Exemplo 3.1.2, (Σ_2^+, T) possui especificação e assim, pela Proposição 3.2.2, (S^1, f) também possui especificação.

3.2.5 Proposição. *O produto de dois sistemas em SPEC está em SPEC.*

Demonstração. Sejam $(X, T, d_X), (Y, S, d_Y) \in SPEC$. O produto $T \times S : X \times Y \to X \times Y$ é definido pela transformação $(T \times S)(x, y) = (Tx, Sy)$. Note que se d_X é uma métrica em X e d_Y é métrica em Y então $d_{X\times Y}((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = d_X((u_1, u_2)) + d_Y((v_1, v_2))$ é métrica em $X \times Y$. Assim, dado um $\epsilon > 0$, existe um $M_1 = M_1(\epsilon/2)$ e $M_2 = M_2(\epsilon/2)$ dados pela Definição 3.1.1 para o sistema $(X, T, d_X), (Y, S, d_Y) \in SPEC$ respectivamente.

Defina $M = \max\{M_1, M_2\}$ e tome $z_1, z_2 \in X \times Y$ e dois strings $A_1 = \{a_1, ..., b_1\}, A_2 = \{a_2, ..., b_2\} \subset \mathbb{Z}$ com $a_2 - b_1 > M$, então existem pontos $x_1, x_2 \in X$ e $y_1, y_2 \in Y$ com $z_1 = (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$, um número $p > b_2 - a_1 + M$ e pontos $x \in X$, $y \in Y$ ambos com periodo p, de forma que $d_X(T^j x, T^j x_1) < \epsilon/2$ para todo $j \in A_1$, $d_X(T^j x, T^j x_2) < \epsilon/2$ para todo $j \in A_2$, $d_Y(T^j y, T^j y_1) < \epsilon$ para todo $j \in A_1$ e $d_Y(T^j y, T^j y_2) < \epsilon$ para qualquer $j \in A_2$.

Defindo $z = (x, y)$, nós temos que, $(T \times S)^p z = (T^p x, S^p y) = (x, y) = z$, assim z é periódico com periodo p e

$$\begin{aligned} d_{X\times Y}((T \times S)^j z, (T \times S)^j z_1) &= d_{X\times Y}((T \times S)^j (x, y), (T \times S)^j (x_1, y_1)) \\ &= d_{X\times Y}((Tx, Sy), (Tx_1, Sy_1)) \\ &= d_X(Tx, Tx_1) + d_Y(Sy, Sy_1) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

para todo $j \in A_1$ e

$$\begin{aligned} d_{X\times Y}((T \times S)^j z, (T \times S)^j z_2) &= d_{X\times Y}((T \times S)^j (x, y), (T \times S)^j (x_2, y_2)) && (3.1) \\ &= d_{X\times Y}((Tx, Sy)), (Tx_2, Sy_2) && (3.2) \\ &= d_X(Tx, Tx_2) + d_Y(Sy, Sy_2) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon && (3.3) \end{aligned}$$

e para todo $j \in A_2$. E assim, $(X \times Y, T \times S, d_{X\times Y}) \in SPEC$. □

3.2.6 Proposição. *Seja $(X, T) \in SPEC$, então o conjunto dos pontos periódicos é denso em X.*

Demonstração. Seja $U \subset X$ um aberto e $x_1 \in U$. Existe um $\epsilon > 0$ tal que $B(x_1, \epsilon) \subset U$ e tome $x_2 \in X$. Como $(X, T) \in SPEC$, existe um $M = M(\epsilon)$ como na Definição 3.1.1 e definindo $A_1 = \{0\}, A_2 = \{n\}$ onde $M < n \in \mathbb{N}$, nós temos que existe $x \in X$ periódico com periodo $p > n + M$ tal que $d(T^0 x, T^0 x_1) < \epsilon$, $d(T^n x, T^n x_2) < \epsilon$, o que implica que $x \in B(x_1, \epsilon) \subset U$, isto é, dado um $U \subset X$ aberto, existe um $x \in U$ periódico. $\square$

Agora nós deveremos provar que se $(X, T) \in SPEC$ então o sistema é um misturador topológico. Lembrando,

3.2.7 Definição. *Um sistema dinâmico é dito* misturador topológico *se para todos abertos $U, V \in X$, existe um $N > 0$ tal que $T^{-n} U \cap V \neq \emptyset$ para todo $n > N$.*

O seguinte resultado foi anunciado em [13] sem demonstração que apresentamos a seguir.

3.2.8 Proposição. *Se $(X, T) \in SPEC$ então o sistema é um misturador topológico.*

Demonstração. Sejam $U, V \in X$ dois abertos não-vazios e tomemos $x_1 \in V$ e $y \in U$, então existem $r_1, r_2 > 0$ tais que $B(x_1, r_1) \subset V$ e $B(y, r_2) \subset U$. Tomemos $\epsilon = min\{r_1, r_2\}$. Como $(X, T) \in SPEC$, existe um $M = M(\epsilon/2)$ como na Definição 3.1.1, $T^{-n}(B(y, \epsilon)) \neq \emptyset$ para todo $n > M$, assim dado um $n > M$, existe um $x_2 \in V$ tal que $T^n x_2 \in B(y, r_2)$.

Definindo $A_1 = \{0\}, A_2 = \{n\}$, então $n > M$, assim dado $p > n + M$ existe um $x \in X$ periódico de periodo p tal que $d(T^0 x, T^0 x_1) < \epsilon/2 \Rightarrow d(x, x_1) < \epsilon/2 \Rightarrow x \in B(x_1, \epsilon/2)$ e $d(T^n x, T^n x_2) < \epsilon/2 \Rightarrow d(T^n x, y) < d(T^n x, T^n x_2) + d(T^n x_2, y) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \Rightarrow T^n x \in B(y, e) \subset U$. Portanto $x \in T^{-n} U \cap V \Rightarrow T^{-n} U \cap V \neq \emptyset$. $\square$

Note que se T é um misturador topológico, então T é topologicamente transitivo pela Definição 2.2.1 e portanto todo sistema com especificação é topologicamente transitivo.

3.3 Entropia em Sistemas com a Propriedade de Especificação

Entropia é um conceito bastante importante na matemática e na física além de outras áreas e nessa secção estudaremos um pouco a entropia de sistemas com especificação. Vale lembrar que entropia faz parte de uma teoria ampla que vai muito além dos nossos propósitos.

Para maior entendimento desse capítulo, recomendamos a leitura de algum livro de Teoria Ergódica como [18, 7] ou [17]. Também veremos nessa secção algumas outras propriedades de especificação. Os assuntos aqui tratados podem ser encontrados em [13], [7].

Observamos primeiro a seguinte consequência de especificação.

3.3.1 Teorema. *Seja* $(X,T) \in SPEC$ *e* $\epsilon > 0$*, então existe um* $M = M(\epsilon, k)$ *tal que para qualquer* $x_i \in X$ *e strings* $A_i = \{a_i, b_i\}$ *para* $i = 1, ..., k$ *com* $a_{n+1} - b_n > M$ *para* $i = 1, ..., k-1$*, então para todo* $p > b_k - a_1 + M$ *existe um* $x \in X$ *periódico com periodo* p *tal que* $d(T^j x, T^j x_i) < \epsilon$ *para qualquer* $j \in A_i, i = 1, ..., k$*.*

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$, como $(X,T) \in SPEC$, então pela Definição 3.1.1 existe um $M = M(\epsilon/2^k)$. Assim, para x_1, x_2 existe um $y_1 \in X$ tal que $d(T^j x_1, T^j y_1) < \epsilon/2^k$ para todo $j \in A_1$ e $d(T^j x_2, T^j y_1) < \epsilon/2^k$ para todo $j \in A_2$.

Para y_1, x_3 existe um $y_2 \in X$ tal que $d(T^j y_1, T^j y_2) < \epsilon/2^k$ para todo $j \in A_1 \cup A_2$ e $d(T^j x_3, T^j y_2) < \epsilon/2^k$ para todo $j \in A_3$ e assim, $d(T^j x_1, T^j y_2) < d(T^j x_1, T^j y_1) + d(T^j y_1, T^j y_2) < \epsilon/2^k + \epsilon/2^k = \epsilon/2^{k-1}$ para todo $j \in A_1$ e $d(T^j x_2, T^j y_2) < d(T^j x_2, T^j y_1) + d(T^j y_1, T^j y_2) < \epsilon/2^k + \epsilon/2^k = \epsilon/2^{k-1}$ para todo $j \in A_2$.

Repetindo esse processo $(k-1)$-vezes, nós teremos que $d(T^j x, T^j x_i) < \epsilon$ para todo $j \in A_i, i = 1, ..., k$. □

Quando $M(\epsilon, k) = M(\epsilon)$, isto é, o M não depende do k, dizemos que (X,T) tem a propriedade de *especificação forte* também chamada de *especificação periódica*. Você pode as vezes encontrar na literatua matemática o resultado acima como a definição de propriedade de especificação. Também é possível definir a propriedade de *especificação fraca*, da mesma forma que definimos a propriedade de espacificação forte, mas sem a necessidade de que o ponto x seja periódico, mas decidimos escolher a Definição 3.1.1, que é a definição dada em [13]. Ela se encontra entre a especificação fraca e forte.

De fato, existe uma forma mais geral do Teorema 3.3.1 que é:

3.3.2 Lema (Orbit specification lemma)**.** *Sejam* $(X,T) \in SPEC$ *e* $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *uma sequência em* $\mathbb{R}_+$*. Então existe uma sequência* $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de inteiros positivos tais que para qualquer sequência de strings* $A_n = \{a_n, b_n\}$ *com* $a_{n+1} - b_n > M_{|n|}$ *e para qualquer sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X$*, existe um* $x \in X$ *tal que* $d(T^j x, T^j x_n) < \epsilon_n$ *para todo* $j \in A_n, n \in \mathbb{N}$*.*

Demonstração. Nós consideraremos sequências bilaterais, isto é, $n = 0, \pm1, \pm2, ...$ Para cada $k \geq 0$, definamos $\delta_k := \min_{|n|<k} \epsilon_n$ e $M_k := M(\delta_{k+1}/2^{k+3})$. Seja $A_n = \{a_n, a_n + 1, ..., b_n\}$, $n \in \mathbb{Z}$, uma sequência de string's disjuntos tal que $a_{n+1} - a_n > M_k$ para todo $|n| = k$.

Definamos a sequinte sequência de strings: $B_0 = A_0$, $B_k = \{a_{-(k-1)}, a_{-(k-1)} + 1, ..., b_k\}$ e $B_{-k} = \{a_{-k}, a_{-k} + 1, ..., b_k\}$ para $k > 0$. Definamos de forma induziva uma sequência $(z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ em X tal que $z_0 = x_0$ e se z_0 foi definido para $|n| < k$, então z_k satisfaz:

$$d(T^j z_k, T^j z_{-(k-1)}) < \delta_k / 2^{k+2} \text{ para } j \in B_{-(k-1)}$$

$$d(T^j z_k, T^j z_k) < \delta_k / 2^{k+2} \text{ para } j \in A_k$$

e z_{-k} satisfaz:

$$d(T^j z_{-k}, T^j z_k) < \delta_k / 2^{k+2} \text{ para } j \in B_k$$

$$d(T^j z_{-k}, T^j z_{-k}) < \delta_k / 2^{k+2} \text{ para } j \in A_{-k}$$

Esses z_k, z_{-k} existem para todo $k \in \mathbb{N}$ por causa da propriedade de especificação 3.1.1, pois $a_k - b_{k-1} > M_{k-1}$ e $a_{-(k-1)} - b_{-k} > M_k > M_{k-1}$. E também é possível ver por indução que se $n, m \in \mathbb{Z}$ com $|n| > |m|$, então

$$d(T^j z_m, T^j x_n) < \epsilon_n / 2^{n+1} \text{ para } j \in A_n$$

E portanto seja $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ a sequência acima somente com $k > 0$. Como visto acima, ela é de Cauchy e assim seja $x = \lim_{k \to \infty} z_k$. Escolhemos $k_0 > |n|$ tal que

$$d(T^j x, T^j z_k) < \epsilon_n / 2 \text{ para todo } j \in B_n$$

Assim, pelas desigualdades acimas, temos que:

$$d(T^j x, T^j z_k) < \epsilon_n / 2 + \epsilon_n / 2^{n+1} < \epsilon_n \text{ para todo } j \in B_n \, .$$

□

Agora falaremos um pouco sobre a entropia toplógica de sistemas com a propriedade de especificação. Veremos adiante que a entropia topológica de sistema com especificação é positiva. Entropia é um conceito bastante rico e estudado na matemática, portanto nos limitaremos aos conhecimentos necessários para provar a afirmação feita acima.

3.3.3 Definição. *Dado um $n \geq 1$, $K \subset X$ compacto e $\epsilon > 0$, dizemos que um subconjunto $Y \subset K$ é (n, ϵ)*-separado *com respeito a T se para todos $x, y \in X$ com $x \neq y$, temos que $d_n(x, y) > \epsilon$ onde:*

$$d_n(x, y) := \max_{0 \leq k \leq n-1} d(T^k x, T^k y)$$

Também definiremos $S_n(\epsilon, K, T) :=$ maior cardinalidade de um subconjunto (n, ϵ)-separado em K com respeito a T.

3.3.4 Definição. *Se $K \subset X$ é compacto, chamamos $h^*(T,K)$ de* entropia *de T em K, onde:*

$$h^*(T) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log S_n(\epsilon, K, T)$$

Podemos agora definir a entropia topológica *$h(T)$ de T:*

$$h_{top}(T) := \sup_{K \subset X\ compacto} h^*(T,K)$$

Vale dizer, que na literatura matemática, a entropia topológica em geral não é definida como acima. Mas quando o espaço X é um espaço métrico compacto, é possível provar que a definição acima é equivalente à definição encontrada por exemplo em [18] e [7].

Lembrando que nós sempre estamos com a hipótese de X ser um espaço métrico compacto, portanto temos que a definição acima é suficiente para os nossos propósitos. Agora estamos preparados para provar o resultado esperado desta seção:

3.3.5 Proposição. *Seja $(X,T) \in SPEC$. Então a entropia topológica de (X,T) é positiva.*

Demonstração. Suponha que card$(X) > 1$. Sejam $x, y \in X$ e tome $\epsilon > 0$ tal que $d(x,y) > 3\epsilon$. Seja $k > 0$ e $M = M(\epsilon, k)$ como no Lema 3.3.1. Defina $\{x,y\}_{i=1}^k = \{(z_1, ..., z_k); z_i \in \{x,y\}, \forall i = 1, ..., k\}$. Pelo Lema 3.3.1, como $(X,T) \in SPEC$, para todo $a = (z_1, ..., z_k) \in \{x,y\}_{i=1}^k$ existe $z_a \in X$ tal que $d(T^{iM} z_a, z_i) < \epsilon$ para todo $i = 1, ..., k$. Note que se $a \neq b \in \{x,y\}_{i=1}^k$, então $z_a \neq z_b$. Como card$\{x,y\}_{i=1}^k = 2^k$, concluimos então que card$\{z_a; a \in \{x,y\}_{i=1}^k\} = 2^k$ e como $\{z_a; a \in \{x,y\}_{i=1}^k\}$ é um conjunto (kM, ϵ)-separado, então

$$h_{top}(T) \geq \limsup \frac{1}{kM} \log 2^k = \frac{1}{M} \log 2 > 0\,.$$

□

3.4 Especificação em Intervalos Compactos da Reta

Como visto nos capítulos anteriores, um sistema dinâmico com a propriedade de especificação é também um misturador topológico. Nesse capítulo, veremos que no caso dos intervalos compactos reais, misturador topológico implica a propriedade de especificação, isto é, existe uma equivalência entre especificação e misturador topológico. Portanto obtemos uma grande classe de sistemas dinâmicos que satisfazem a propriedade de especificação.

3.4.1 Teorema (de Blokh [2])**.** *Seja $T\colon [0,1] \to [0,1]$ uma transformação contínua. Então (X,T) possui especificação, se e somente se, é um misturador topológico.*

Vale citar que existem exemplos de sistemas dinâmicos que são misturadoras topológicas que têm entropia topologica nula e, portanto, não possuem especificação (veja, por exemplo [15]), portanto essa propriedade não vale para outros espaços.

A demonstração do Teorema de Blokh é bastante técnica, e assim necessitaremos de alguns lemas auxiliares. Essa demonstração se deve a Buzzi em [5]. Para outra prova recomendamos também [12]. Uma das ferramentas que usaremos bastante é o teorema do valor intermediário:

3.4.2 Teorema (do valor intermediário)**.** *Seja $T : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, então para todo $Ta < y < Tb$, existe um $x \in (a,b)$ tal que $Tx = y$.*

Outra ferramenta que usaremos bastante, algumas vezes sem mensionar, é:

3.4.3 Lema. *Se $T : X \to X$ é contínua, misturadora topológica e X é compacto, então T é sobrejetora.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que T não é sobrejetora, isto é, que existe $y \in X$ tal que $y \in X - TX$. Como T é contínua e X é compacto, então TX é compacto, logo é fechado em X o que implica que existe $U = viz(z) \in X$ aberto tal que $U \subset X \setminus TX$. Assim, $TX \cap U = \emptyset$ e portanto $T^n X \cap U = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é uma contradição com o fato de T ser misturadora topológica. □

Note que, usando essa mesma demonstração, podemos concluir que sistemas dinânicos topologicamente transitivos são também sobrejetores. Agora já estamos preparados para mostrar os lemas técnicos que usaremos nessa seção.

3.4.4 Lema. *Seja $T : [0,1] \to [0,1]$ uma função contínua misturadora topológica, então para todo $\alpha, \delta > 0$ existe um $N = N(\alpha, \delta) \in \mathbb{N}$ tal que $T^n B(x, \alpha) \supset [\delta, 1-\delta]$ para todo $x \in [0,1], n \geq N$.*

Demonstração. Como sabemos, $[0,1] \subset \bigcup_{x \in [0,1]} B(x, \alpha/2)$ e como $[0,1]$ é compacto, então existem $x_1 < \cdots < x_k \in [0,1]$ tal que $[0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \alpha/2)$. Sem perda de generalidade, suponharemos que $x_1 = 0$ e $x_k = 1$ e como $B(x_i, \alpha/2), (0, \delta)$ e $(1-\delta)$ são abertos para todo $i = 1, ..., k$ e (X,T) é misturador topológico, então existem $N_k, M_k \in \mathbb{N}$ tal que $T^n B(x_i, \alpha/2) \bigcap (0, \delta) \neq \emptyset$ para todo $n \geq N_i$, $i = 1, ..., k$ e $T^n B(x_i, \alpha/2) \bigcap (1-\delta, 1) \neq \emptyset$ para todo $n \geq M_i$, $i = 1, ..., k$.

Para $N = \max_{i,j=1,\ldots,k}\{N_i, M_j\}$ para todo $n \geq N$ tem-se $T^n B(x_i, \alpha/2) \bigcap (0, \delta) \neq \emptyset$ e $T^n B(x_i, \alpha) \bigcap (1-\delta, 1) \neq \emptyset$. Como T^n são funções contínuas para todo $n \in \mathbb{N}$, então, pelo Teorema 3.4.2, $T^n B(x_i, \alpha/2) \supset [\delta, 1-\delta]$ para todo $x \in [0,1], n \geq N$ e para todo $i = 1, ..., k$. Seja $x_0 \in [0,1] \subset \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i, \alpha/2)$ então existe $i_0 = 1, ..., k$ tal que $x_0 \in B(x_{i_0}, \alpha/2)$.

Se $y \in B(x_{i_0}, \alpha/2)$, então $|x_0 - y| \leq |x_0 - x_{i_0}| + |x_{i_0} - y| < \alpha/2 + \alpha/2 = \alpha$, portanto $B(x_{i_0}, \alpha/2) \subset B(x_0, \alpha)$ e assim, $T^n B(x_0, \alpha) \supset T^n B(x_{i_0}, \alpha/2) \supset [\delta, 1-\delta]$ para todo $n \geq N$ como queriamos demonstrar. □

3.4.5 Lema. *Seja $T : [0,1] \to [0,1]$ uma transformação contínua, misturadora topológica tal que $Tx \neq 0$ para todo $x \neq 0$ e $T0 = 0$, então para todo $h > 0$ existe um $x_0 \in (0,h)$ tal que $Tx_0 = x_0$.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existe um $h_0 > 0$ tal que $Tx \neq x$ para todo $x \in (0,h)$. Pelo Teorema 3.4.2, temos que $Tx > x$ para todo $x \in (0,h)$ ou $Tx < x$ para todo $x \in (0,h)$.

Se $Tx < x$ para todo $x \in (0,h)$, então $Tx < x < h$, o que implica que $Tx \in (0,h)$, isto é $T(0,h) \subset (0,h)$ e assim $T^n(0,h) \subset (0,h)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo com o fato de T ser misturador.

Para o caso $Tx > x$ para todo $x \in (0,h)$, defina $a = \min\{Tx; x \in [h,1]\}$. Assim tomando $x \in [a,1]$ temos dois casos:

Primeiro caso - Se $h \leq a$, então $x \in [h,1]$ e assim $Tx \geq a$ e $T^n[a,1] \subset [a,1]$ para todo$n \in \mathbb{N}$. Absurdo.

Segundo caso - Se $h > a$, então $x \in [a,h) \cup [h,1]$. Se $x \in [a,h)$, então $Tx > x > a$, pois $Tx > x$ para todo $x \in (0,h)$ e assim $T^n[a,1] \subset [a,1]$ para todo$n \in \mathbb{N}$. Absurdo. Se $x \in [h,1]$, então, pela definição de a, $Tx \geq a$ e assim $T^n[a,1] \subset [a,1]$ para todo$n \in \mathbb{N}$, o que também é absurdo.

Como todos os casos chegaram em um absurdo, então concluimos que o lema é verdadeiro. □

Esses dois lemas são fundamentais para mostrar o próximo lema. Mas antes, precisaremos das seguintes definições:

3.4.6 Definição. *Dizemos que 0 ou 1 é* acessível *se existe $a \in (0,1)$ tal que $T^n a = 0$ ou 1 (Note que sempre podemos supor que $n = 1$ ou 2).*

3.4.7 Definição. *Dados $x \in X$, $\epsilon > 0$ definamos:*

$$B_n(x,\epsilon) = \{y \in X; d(T^k x, T^k y) < \epsilon \ \textit{para todo} \ k = 0,1,...,n-1\} = \bigcap_{k=0}^{n-1} T^{-k} B(T^k x, \epsilon)$$

Chamaremos $B_n(x,\epsilon)$ de bola dinâmica *ou de* bola de Bowen*. Lembramos também que se d_n foi definido como em 3.3.3, então $B_n(x,\epsilon) = B_{d_n}(x,\epsilon)$.*

3.4.8 Lema. *Seja* $T : [0,1] \to [0,1]$ *uma função contínua, misturadora topológica. Então para todo* $\alpha, \epsilon \geq 0$*, existe um* $N = N(\alpha,\epsilon) \in \mathbb{N}$ *e* $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ *tal que, para todo* $x, y \in [0,1]$ *existe* $z = z(y,\epsilon) \in B_n(y,\epsilon)$ *tal que:*

$$T^N B(x,\alpha) \supset B(z,\delta) \cap [0,1] \,.$$

Demonstração. Sejam $x, y \in [0,1]$ e $\alpha, \epsilon > 0$.

Primeiro caso - Suponha que tanto 0 quanto 1 são acessíveis. Então existem $a, b \in (0,1)$ e $i_0, i_1 \in \mathbb{Z}$ com $i_0, i_1 = 1ou2$ tal que $T^{i_0}a = 0$ e $T^{i_1}b = 1$. Assim, tomando $0 < r < \min\{a, b, 1-a, 1-b\}$ temos que $a, b \in [r, 1-r]$, portanto, pelo lema 3.4.4, para $\alpha, r > 0$ existe $N_1 = N_1(\alpha, r) \in \mathbb{N}$ tal que $T^n B(x,\alpha) \supset [r, 1-r]$ para todo $n \geq N_1$. Assim $T^n B(x,\alpha) \supset [0,1]$ para todo $n \geq N_1 + 2$, portanto basta tomar $N = N_1 + 2$, $z(y,\epsilon) = y$ e $\delta(\epsilon) > 0$ qualquer que temos que $T^N B(x,\alpha) \supset B(z,\delta) \cap [0,1]$. (Note que para esse caso, não há necessidade do ϵ para a escolha do N).

Segundo caso - Suponha que somente o ponto 0 não é acessível (o caso em que somente 0 é acessível é similar). Usando o Lema 3.4.5 e a continuidade da T, tomamos $p \neq 0$ um ponto fixo tal que $T^i[0,p] \subset [0\epsilon/3]$.

Como 1 é acessível, então existe $a \in (0,1)$ tal que $Ta = 1$. Seja $\delta = p/2$ e $\bar{\bar{\delta}} = \min\{\delta, a, 1-a\}$. Note que δ só depende do ϵ. Analogamente ao primeiro caso, usando o Lema 3.4.4, defina $N = N_1(\alpha, \bar{\delta})$ de forma que $T^N B(x,\alpha) \supset [p/2, 1]$. Agora precisamos encontrar um $z = z(y,\epsilon) \in B_n(y,\epsilon) \cup [p,1]$.

Seja $m = \min\{k \geq 0; T^k y \in [p,1]\}$.

Se $m = 0$, então basta tomar $z = y$ que temos o desejado. Note que esse caso evidencia que o nosso problema é achar zs para ys perto do 0.

Se $m = \infty$, então, pela defição de m, $T^k y \in [0,p)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim $p - T^k y < p < \epsilon/3$ e como $T^k p = p$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $p \in B_k(y,\epsilon)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Portanto, tome $z = p$.

O caso difícil é quando $0 < m < \infty$. Lembre que pela definição do m, temos que $T^k y \in [0,\epsilon/3)$ para todo $k = 1, ..., m-1$ e pela escolha do p, $T^k y \in [0,\epsilon/3)$ também para $k = m$. Como $T^m y \in [p,1] \subset (0,1]$ e como T é topologicamente misturadora, então para todo $0 < \beta < \epsilon/3$, existe um $M = M(\beta) < \infty$ tal que $T^m y \in T^M(p, p+\beta)$. Assumimos que M é o menor possível, de forma que $T^M(p, p+\beta) \subset [0,\epsilon/3]$ para todo $k = 1, ..., M-1$ (Se existisse um $k_0 = 1, ..., M-1$ tal que existe um $y_0 \in T^M(p, p+\beta) \cap (\epsilon/3, 1]$, então $T^{k_0}p = p < T^m y < \epsilon/3 < y_0 \in T^M(p, p+\beta)$ e pelo teorema do valor intermediário, $T^m y \in T^M(p, p+\beta)$ e portanto M não é mínimo).

Tomando β for pequeno o suficiente, podemos garantir que $M < m$. Fixe $z \in$

$T^{M-m}(p, p+\beta)$ uma pré-imagem de $T^m y$ pela T^m. Então $z = z(y,\epsilon) \in B_n(y,\epsilon)$ como queríamos.

Terceiro caso - Tanto 0 como 1 não são acessíveis. Note que nesse caso, ou $T0 = 0$ e $T1 = 1$ ou $T0 = 1$ e $T1 = 0$. Mas se $T0 = 1$ e $T1 = 0$, então $T^2 0 = 0$ e $T^2 1 = 1$ e portanto só precisamos considerar o caso $T0 = 0$ e $T1 = 1$. Mas nesse caso, tanto o 0 como o 1 são pontos fixos e portanto a demonstração é semelhante ao segundo caso, tomando $T^i[0, p_1] \subset [0\epsilon/3]$ e $T^i[0, p_2] \subset [1-\epsilon/3, 1]$.

Assim de toda forma é possível achar $N = N(\alpha,\epsilon) \in \mathbb{N}$ e $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que, para todo $x, y \in [0,1]$ existe $z = z(y,\epsilon) \in B_n(y,\epsilon)$ tal que $T^N B(x,\alpha) \supset B(z,\delta) \cap [0,1]$. $\square$

3.4.9 Definição. *Denotaremos por $\widetilde{B}_n(x,\epsilon)$ como a componente conexa de $B_n(x,\epsilon)$ que contém x.*

3.4.10 Lema. *Para todo $0 < \epsilon < 1/2, \delta > 0$ existe um $N_2(\epsilon,\delta) \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\widetilde{B}_n(x,\epsilon) \subset B(x,\delta) \ \textit{para todo} \ x \in [0,1] \ \ n \geq N_2$$

(Note que a condição de $\epsilon < 1/2$ só é necessária porque senão $\widetilde{B}_n(x,\epsilon) = B_n(x,\epsilon) = [0,1]$).

Demonstração. Suponha que esse lema não é verdade, então existe uma sequência $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{N}$ e um $x_0 \in [0,1]$ tal que $\widetilde{B}_{n_j}(x_0,\epsilon) \cap [0,1] \setminus B(x_0,\delta)$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Definimos a sequência $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de forma que $x_j \in \widetilde{B}_{n_j}(x_0,\epsilon) \cap [0,1] \setminus B(x_0,\delta)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Como $B(x_0,\delta)$ é aberto, então $[0,1] \setminus B(x_0,\delta)$ é compacto, o que implica que uma subsequência de $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge (para simplificar a notação, suponharemos que a própria $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ converge). Também sem perda de generalidade, suponharemos que $|x_{j+1} - x_0| \leq |x_j - x_0|$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

Seja $x = \lim_{j\to\infty} x_j$. Portanto temos que $x \in \widetilde{B}_n(x_0,\epsilon)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, assim temos que $x, x_0 \in B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{B}_n(x_0,\epsilon)$ e portanto B é um intervalo com $\operatorname{card} B > 1$. Então, pela definição de B, $\operatorname{diam}(T^n B) \leq \operatorname{diam} B \leq \operatorname{diam} B(x_0,\epsilon) = 2\epsilon < 1$ para todo $n \geq 0$, o que contradiz o fato de T ser um misturador topológico. $\square$

Observe o lema acima é falso se considerarmos $B_n(x,\epsilon)$ em vez de $\widetilde{B}(x_0,\epsilon)$.

3.4.11 Lema. *Seja $T : [0,1] \to [0,1]$ uma transformação contínua, misturadora topológica. Se para todo $\epsilon > 0$:*

$$\alpha(\epsilon) := \inf_{x\in[0,1], n\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(T^n \widetilde{B}_n(x,\epsilon)) > 0$$

então T possui especificação.

Demonstração. Fixe $\epsilon > 0$. Como no Lema 3.4.8, defina $\delta(\epsilon/2)$. Seja $\alpha = \alpha(\epsilon/2) > 0$. Como no Lema 3.4.8, fixe $N = N_1(\alpha, \epsilon/2)$ e como no Lema 3.4.10, fixe $N_2 = N_2(\epsilon/2, \delta)$. Sejam $(x, l_1), (y, l_2) \in [0, 1] \times \mathbb{N}$. Agora nós construiremos o ponto periódico de acordo com a definição de especificação.

Defina $z_1 = z_1(x, \epsilon/2) \in B_{l_1+N_2}(x, \epsilon/2)$ e $z_2 = z_2(y, \epsilon/2) \in B_{l_2+N_2}(y, \epsilon/2)$ como no lema1.3.5. Sejam:

$$J_1 = \widetilde{B}_{l_1+N_2}(z_1, \epsilon/2) \subset B_{l_1+N_2}(x, \epsilon/2), \quad J_2 = \widetilde{B}_{l_2+N_2}(z_2, \epsilon/2) \subset B_{l_2+N_2}(y, \epsilon/2)$$

Pelo teorema do valor intermediário, temos que $T^{l_1+N_2}J_1$ e $T^{l_2+N_2}J_2$ são intervalos e pela definição do α, $T^{l_1+N_2}J_1$ e $T^{l_2+N_2}J_2$ tem diâmetro maior ou igual a α. Isto é, $B(x, \alpha) \subset T^{l_1+N_2}J_1$ e $B(y, \alpha) \subset T^{l_2+N_2}J_2$. Pela definição do N_2, $J_1 \subset B(z_1, \delta)$ e $J_2 \subset B(z_2, \delta)$. Assim

$$J_2 \subset B(z_2, \epsilon) \subset T^N B(x, \delta) \subset T^{l_1+N_2+N} J_1$$

$$J_1 \subset B(z_1, \epsilon) \subset T^N B(y, \delta) \subset T^{l_2+N_2+N} J_2$$

Tomemos $D = D(\epsilon) = N + N_2$ (lembre que N depende de α e N_2 depende de δ, mas tanto α quanto δ só dependem de ϵ). Esse será o "N"da especificação e assim

$$J_1 \subset T^{l_2+D} J_2 \subset T^{l_2+l_1+2D} J_1$$

$$J_2 \subset T^{l_1+D} J_1 \subset T^{l_2+l_1+2D} J_2$$

Antes de continuarmos com a demonstação, mostraremos uma pequena propriedade de análise na reta necessária para continuar a demonstração do lema.

3.4.12 Lema. *Seja* $T : [a, b] \to \mathbb{R}$ *contínua tal que* $[a, b] \subset T[a, b]$. *Então existe um* $x_0 \in [a, b]$ *tal que* $Tx_0 = x_0$.

Demonstração. Como $T : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, então existem $c, d \in \mathbb{R}$ e $\widetilde{c}, \widetilde{d} \in [a, b]$ tal que $[c, d] = T[a, b]$ e $T\widetilde{c} = c$, $T\widetilde{d} = d$. Note que, $c \leq a \leq \widetilde{c}$ e $\widetilde{d} \leq b \leq d$ Defina $S : [a, b] \to \mathbb{R}$ da forma $Sx = Tx - x$. Assim, $S\widetilde{c} = c - \widetilde{c} \leq 0$ e $S\widetilde{d} = d - \widetilde{d} \geq 0$. Poratanto, pelo teorema do valor intermediário, existe um $x_0 \in [\widetilde{c}, \widetilde{d}] \subset [a, b]$ tal que $Sx_0 = 0$, isto é, $Tx_0 = x_0$. □

Agora podemos continuar a demonstração do lema..., achando o ponto periódico. Assim, como $J_2 \subset T^{l_1+D}J_1$, tomaremos um intervalo fechado $K \subset J_1$ de forma que $T^{l_1+D}K \subset J_2$. Ainda, como $J_1 \subset T^{l_2+l_1+2D}J_1$, podemos supor que $K \subset T^{l_2+l_1+2D}K$. Portanto, pelo lema acima, $T^{l_2+l_1+2D}$ possui um ponto fixo em K. Portanto achamos um ponto periódico que se aproxima do x e do y nos tempos l_1 e l_2 respectivamente. Para realmente ajeitar o tempo das órbitas, basta lembrar que T é sbrejetiva. Concluimos assim a prova. □

Esse lema nos deu uma ferramenta para verificar se um sistema dinâmico possui a propriedade de especificação, ou seja, é natural que o usaremos para mostrar o teorema de Blokh:

Demonstração do Teorema 3.4.1 de Blokh. Devemos mostrar que se $T : [0,1] \to [0,1]$ uma transformação contínua, misturadora topológica, então para todo $\epsilon > 0$:

$$\alpha(\epsilon) = \inf_{x \in [0,1], n \in \mathbb{N}} \operatorname{diam}(T^n \widetilde{B}_n(x,\epsilon)) > 0$$

Para mostrar isso, provaremos duas observações:

Primeira observação: Temos um princípio de não contração, para todo $\epsilon > 0$ temos que

$$\beta(\epsilon) = \inf_{I, n \in \mathbb{N}} \operatorname{diam}(T^n I) > 0 \text{ tais que } \operatorname{diam} I \geq \epsilon$$

De fato, seja $P = \{t_0 = 0 < ... < t_j < ... < t_k = 1\}$ uma partição de $[0,1]$ tal que $t_{j+1} - t_j < \epsilon/2$ para todo $j = 1, ..., k-1$. Defina $I_j = (t_j, t_{j+1})$ para todo $j = 0, ..., k$. Como T é misturador topológico, existe um $N_j \in \mathbb{N}$ tal que $T^n I_j \supset [1/4, 3/4]$ para todo $n > N_j$ e para todo $j = 0, ..., k$. Assim $\inf_{n \geq 0} \operatorname{diam}(T^n I_j) = \min\{\operatorname{diam} I_j, \operatorname{diam} T^1 I_j, ..., \operatorname{diam} T^{N_j} I_j, 1/2\} > 0$ para todo $j = 0, ..., k$.

Concluimos então que $\inf_{j=0,...,k; n \geq 0} \operatorname{diam}(T^n I_j) > 0$. Como para todo I intervalo tal que $\operatorname{diam}(I) > \epsilon$, existe um $j_0 = 0, ..., k$ tal que $I_{j_0} \subset I$, podemos concluir que

$$\beta(\epsilon) = \inf_{I, n \in \mathbb{N}} \operatorname{diam}(T^n I) > \inf_{j=0,...,k; n \geq 0} \operatorname{diam}(T^n I_j) > 0$$

. Issom mostra a primeira observação.

Segunda observação: Se $T^{n+1} \widetilde{B}_{n+1}(x,\epsilon) \neq T(T^n \widetilde{B}_n(x,\epsilon))$ é porque $\widetilde{B}_n(x,\epsilon)$ contém pontos separados pela T^{n+1} de $T^{n+1}x$ por uma distância maior que ϵ, isto é, $T^{n+1} \widetilde{B}_{n+1}(x,\epsilon)$ tem diametro maior ou igual a ϵ.

Usando as duas observações temos, enfim, que:

$$\alpha(\epsilon) = \inf_{x \in [0,1], n \in \mathbb{N}} \operatorname{diam}(T^n \widetilde{B}_n(x,\epsilon)) > \beta(\epsilon) = \inf_{I, n \in \mathbb{N}} \operatorname{diam}(T^n I) > 0$$

O que implica que o sistema possui a proopriedade de especificação. □

Portanto concluimos que na reta, possuir a propriedade de especificação e ser um misturador topológico são equivalentes. Isso nos dá uma ferramenta para identificar as dinâmicas da reta que possuem especificação. De fato, vamos voltar para o Exemplo 3.1.4.

Como discutido nesse cápitulo, para mostrar que T possui especificação, basta mostrar que T é um misturador topológico. Para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $0 \leq k \leq 2^n - 1$, defina

$A_{n,k} = [k/2^n, k+1/2^n]$. É fácil ver que $\operatorname{diam} TI = 2 \operatorname{diam} I$, se I for um intervalo tal que $\operatorname{diam} I$ é suficientemente pequeno. Na verdade, dados um $n \in \mathbb{N}$ e um $0 \leq k \leq 2^n - 1$, existe um $0 \leq \widetilde{k} \leq 2^{n-1} - 1$ tal que $TA_{n,k} = A_{n-1,\widetilde{k}}$ e portanto, temos que $T^n A_{n,k} = [0,1]$ para todo $n \in \mathbb{N}$, para todo $0 \leq k \leq 2^n - 1$. Assim, $T^m A_{n,k} = [0,1]$ para todo $m > n$, $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq k \leq 2^n - 1$. Portanto, sejam $U, V \subset [0,1]$ dois abertos não vazios quaisquer. Sabemos que existem n_0, k_0 de forma que $A_{n_0,k_0} \subset U$ e assim $[0,1] = T^{n_0} A_{n_0,k_0} \subset T^{n_0} U$ o que implica que $T^m U = [0,1]$ para todo $m > n_0$, isto é, $T^m U \cap V = [0,1] \cap V = V \neq \emptyset$ para todo $m > n_0$. Ou seja, T é um misturador topológico e pelo Teorema de Block 3.4.1, temos que $([0,1], T)$ possui especificação.

Capítulo 4

Estrutura do Espaço de Medidas Invariantes

Agora que já definimos especificação e já estudamos algumas características de sistemas dinâmicos com essa propriedade, estudaremos seu espaço de medidas invariantes, que é o objetivo principal deste texto. Para a boa compreenção desse capítulo, recomendamos ao leitor que tenha algum conhecimento de teoria ergódica e dos conceitos introduzidos no Capítulo 2.

4.1 Pontos Genéricos no Espaços de Medida Invariante

Lembrando, seja $T : X \to X$ uma aplicação contínua, com X um espaço métrico compacto. Definimos $\mathcal{M}^1(X) := \{$espaço das medidas de probabilidade de $X.\}$. Vimos que a topologia usada nesse espaço é a topologia fraca$*$, isto é, dado uma sequencia $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{M}^1(X)$ dizemos que $\mu_n \rightharpoonup^{w*}_{n\to\infty} \mu$ se, e só se, $\int f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu$ para toda $f \in C(X)$, onde $C(X) := \{f : X \to \mathbb{R}; f$ é contínua$\}$. Vimos que $\mathcal{M}^1(X)$ é um espaço métrico compacto.

Definimos $\mathcal{M}^1_T(X)$ como o subespaço de $\mathcal{M}^1(X)$ das medidas T-invariantes, isto é, $\mu \in \mathcal{M}^1_T(X)$ se, e só se, $\int f \circ T\, d\mu \to \int f\, d\mu$ para toda $f \in C(X)$. Também vimos que $\mathcal{M}^1_T(X)$ é um subespaço convexo compacto não-vazio de $\mathcal{M}^1(X)$ e que as medidas ergódicas são o conjunto extremal de $\mathcal{M}^1_T(X)$.

4.1.1 Definição. *Dado um $x \in X$ e um $N > 0$, denotaremos por $\mu(x, T; N)$ como:*

$$\mu(x, T; N) := \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \delta_{T^j x}\,,$$

onde δ_y é a medida delta de Dirac no ponto y. Denotaremos por $V_T(x)$ como o conjunto de pontos de acumulação da sequencia $\mu(x, T; N)$

Baseado na topologica fraca* existe um correspondência imediata entre as medidas $\mu(x,T;N)$ e os funcionais lineares:

$$f \mapsto \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1} f(T^j x) \quad \text{para toda} \quad f \in C(X)$$

Portanto muitas vezes iremos nos referir a essas medidas pelos funcionais. Como $\mathcal{M}_T^1(X)$ é um espaço métrico compacto, então $V_T(x) \neq \emptyset$. Além disso temos a seguinte proposição.

4.1.2 Proposição. *$V_T(x)$ é fechado e conexo.*

Demonstração. Como $V_T(x)$ é um conjunto de pontos de acumulação, temos que $V_T(x)$ é fechado. Mostrar que $V_T(x)$ é conexo é um pouco mais complicado. Para isso, mostraremos que $|\int f\,d\mu_n - \int f\,d\mu_{n+1}| \to 0$, quando $n \to \infty$. Temos que,

$$\begin{aligned}
|\int f\,d\mu_n - \int f d\mu_{n+1}| &= |\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) - \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} f(T^i x)| \\
&= |\frac{n+1}{n(n+1)}\sum_{i=0}^{n-1} f(T^i x) - \frac{n}{n(n+1)}\sum_{i=0}^{n} f(T^i x) - \frac{1}{n+1} f(T^n x)| \\
&\leq \frac{1}{n+1}\frac{1}{n}|\sum_{i=0}^{n} f(T^i x)| + \frac{1}{n+1}|f(T^n x)|\,.
\end{aligned}$$

Como sabemos, $\frac{1}{n}|\sum_{i=0}^{n} f(T^i x)|$ e $|f(T^n x)|$ são limitados e portanto,

$$\frac{1}{n+1}\frac{1}{n}|\sum_{i=0}^{n} f(T^i x)| + \frac{1}{n+1}|f(T^n x)| \to 0$$

E assim, $|\int f d\mu_n - \int f d\mu_{n+1}| \to 0$, quando $n \to \infty$ e portanto, concluimos que $\rho(\mu_n, \mu_{n+1}) \to 0$ (onde ρ é a métrica de $\mathcal{M}_T^1(X)$). Para concluir que $V_T(x)$ é conexo, suponhemos por absurdo que que $V_T(x)$ é desconexo. Portanto existem $U, V \subset \mathcal{M}_T^1(X)$ abertos disjuntos tais que existem $V_T(x) \subset U \cup V$. Como $V_T(x)$ é fechado, podemos supor que $\bar{U} \cap \bar{V} = \emptyset$. Assim, $\inf\{\rho(\nu,\lambda); \nu \in U, \lambda \in V\} > 0$. Seja $\epsilon > 0$ tal que $\inf\{\rho(\nu,\lambda); \nu \in U, \lambda \in V\} > 4\epsilon$.

Sejam $\mu_1, \mu_2 \in V_T(x)$ tal que $\mu_1 \in U$ e $\mu_2 \in V$. Como $\mu_1, \mu_2 \in V_T(x)$, existem subsequência dos naturais $(n_j)_{j\in\mathbb{N}}, (n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\mu_{n_j} \to \mu_1$ e $\mu_{n_k} \to \mu_2$. Assim, seja $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu_{n_j} \in U$ para todo $n_j > n_0$, $\mu_{n_k} \in V$ para todo $n_k > n_0$ e $\rho(\mu_n, \mu_{n+1}) < \epsilon$ para todo $n > n_0$. Temos que dado $n_{j_0} > n_0$ e $n_{k_0} > n_0$, se supormos $n_{j_0} > n_{k_0}$, vai existir um $n_{j_0} > m > n_{k_0}$ tal que $\mu_m \notin U \cap V$. Como existem infinito ìndices n tais que $\mu_n \in U$ e $\mu_n \in V$, então existirá infinitos ns tais que $\mu_n \notin U \cap V$ e portanto criaremos uma subsequência de μ_n que não está em $U \cap V$. E como $\mathcal{M}_T^1(X)$ é compacto, então $\mathcal{M}_T^1(X) \setminus U \cap V$ é compacto e portanto essa subsequência terá uma subsequência que convergirá. Mas assim seu limite não estará em $U \cap V$ e portanto não estará em $V_T(x)$ o que é um absurdo pela definição do $V_T(x)$. Concluindo então que $V_T(x)$ é conexo. □

4.1.3 Definição. *Se $V_T(x) = \{\mu\}$ para algum $\mu \in \mathcal{M}_T^1(X)$, então diremos que x é um* ponto genérico *para μ com respeito a T e escreveremos $\mu := \mu(x, T)$.*

Vale notar, que se μ é ergódica, então, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff 2.2.16, sabemos que $V_T(x) = \{\mu\}$ para μ-quase todo $x \in X$.

Se x é periódico, com periodo minimal p, então x é genérico para a medida $\mu(x, T) = \mu(x, T; p)$. Tais medidas chamaremos de medidas CO (do inglês *closed orbit*, isto é, órbita fechada). É claro que as medidas CO são ergódicas. Além disso, denotaremos por $P(p)$ o conjunto das medidas CO cujo suporte são pontos periódicos de periodo minimal p.

4.1.4 Definição. *Se $x \in X$ é genérico para alguma medida $\mu \in \mathcal{M}_T^1(X)$, então diremos que x é* quasiregular. *Denotaremos por $Q_T(X)$ o conjunto de pontos quasiregular de X.*

É facil ver que $Q_T(X)$ é um subconjunto mensurável de X e, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff 2.2.16, $\mu(Q_T(X)) = 1$ para todo $\mu \in \mathcal{M}_T^1(X)$. Em particular, $Q_T(X) \neq \emptyset$.

Agora mostraremos um dos mais importantes resultados de Sigmund [13], que é uma consequência direta do fato de o conjuntos de pontos periódicos de sistemas dinâmicos com a propriedade de especificação ser denso.

4.1.5 Teorema. *Se $(X, T) \in SPEC$, então $\bigcup_{p \in \mathbb{N}} P(p)$ é denso em $\mathcal{M}_T^1(X)$.*

Demonstração. Seja $\mu \in \mathcal{M}_T^1(X)$ e

$$V = V(\mu, F, \epsilon) = \{\nu \in \mathcal{M}_T^1(X); |\int f d\mu - \int f d\nu| < \epsilon \ \ \forall f \in F\}$$

uma vizinhança de $\mathcal{M}_T^1(X)$, onde F é um subconjunto finito de $C(X)$. Nós suponharemos que $\|f\| \leq 1$ para todo $f \in F$. E mostraremos que existe um elemento de $P(p)$ em V, para algum $p \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff 2.2.16, dado um $x \in X$ existe um $N = N(x) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(T^i x) - f^*(x)| < \frac{\epsilon}{4}$$

para todo $f \in F$ e para todo $x \in Q_T(X)$, onde f^* é média temporal de f. Além disso temos que $\int f d\mu = \int f^* d\mu$ e portanto, como $\mu(Q_T(X)) = 1$, temos que

$$\int_{Q_T(X)} f^* \, d\mu = \int f^* \, d\mu = \int f \, d\mu \text{ para toda } f \in F \, .$$

Seja $Q_1, ..., Q_k$ uma partição de $Q_T(X)$ tal que a $w(f, Q_j) < \epsilon/4$ para todo $f \in F$, onde $w(f, A) = \sup\{|f(x)|; x \in A\}$ é a oscilação de f em $A \in X$. Para todo $j = 1, ..., k$ tome um

$x_j \in Q_j$. Temos que:

$$\begin{aligned}
|\int_{Q^T(X)} f^* d\mu - \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) f^*(x_j)| &= |\int_{Q_1 \cup \ldots \cup Q_k} f^* d\mu - \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) f^*(x_j)| \\
&= |\sum_{j=1}^{k} \int_{Qj} f^* d\mu - \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) f^*(x_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} |\int_{Qj} f^* d\mu - \mu(Q_j) f^*(x_j)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{k} \frac{\epsilon}{4} \mu(Q_j) = \frac{\epsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Portanto, temos que para toda $f \in F$

$$\begin{aligned}
&|\int_{Q^T(X)} f d\mu - \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) (\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(T^i x_j))| \\
&\quad \leq |\int_{Q^T(X)} f d\mu - \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) f^*(x_j)| + |\sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) f^*(x_j) - \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) (\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(T^i x_j))| \\
&\quad \leq |\int_{Q^T(X)} f d\mu - \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) f^*(x_j)| + \sum_{j=1}^{k} \mu(Q_j) |f^*(x_j) - \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(T^i x_j)| \\
&\quad \leq \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}.
\end{aligned}$$

Sejam $m_1, ..., m_k \in \mathbb{N}$ tais que $\sum_{j=1}^{k} m_j = m$ e $\mu(Q_j) \sim m_j/m$ para todo $j = 1, ..., k$. Então

$$|\int_{Q^T(X)} f d\mu - \sum_{j=1}^{k} \frac{m_j}{m} (\frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} f(T^i x_j))| \leq \frac{\epsilon}{2} \qquad (*)$$

Como $F \subset C(X)$ é finito e X é compacto, então existe um $\delta > 0$ tal que para toda $f \in F$ tem-se $|f(x) - f(y)| < \epsilon/4$ para todo $x, y \in X$ tal que $d(x, y) < \delta$. Seja $M = M(\delta, k)$ dado pelo Lema 3.3.1. Defina

$$a_t = t(N + M - 1) \text{ e } b_t = t(N + M - 1) + N - 1 \text{ para todo } t = 0, 1, ..., m - 1$$

Defina $A_t = \{a_t, ..., b_t\} \subset \mathbb{Z}$ para todo $t = 0, ..., m - 1$. Note que $b_t - a_t = N - 1$ e que $a_{t+1} - b_t = M$, de forma que os conjuntos A_t tenham exatamente N elementos e que entre A_t e A_{t+1} tenha-se $M + 1 > M$ inteiros. (É claro que a_t, b_t foram definidos dessa forma para termos essas propriedades.) Assim definamos $\overline{m}_0 = 0$ e $\overline{m}_j = \sum_{i=0}^{j} m_i$ para todo $j = 1, ..., k$ e definimos $y_t = x_j$ para todo $\overline{m}_{j-1} \leq t < \overline{m}_j$ com $j = 1, ..., k$. Visualizando:

$$\begin{array}{c}
\{ \quad y_0 \quad , ..., \; y_{\overline{m}_1 - 1} \;, \; y_{\overline{m}_1} \;, ..., \; y_{\overline{m}_2 - 1} \;, ..., \; y_{\overline{m}_{k-1}} \;, ..., \; y_{\overline{m}_k - 1} \; \} \\
N\text{-vezes} \left\{ \begin{array}{cccccccccccc}
x_1 & ,..., & x_1 & , & x_2 & ,..., & x_2 & ,..., & x_k & ,..., & x_k \\
Tx_1 & ,..., & Tx_1 & , & Tx_2 & ,..., & Tx_2 & ,..., & Tx_k & ,..., & Tx_k \\
T^{N-1}x_1 & ,..., & T^{N-1}x_1 & , & T^{N-1}x_2 & ,..., & T^{N-1}x_2 & ,..., & T^{N-1}x_k & ,..., & T^{N-1}x_k
\end{array} \right\}
\end{array}$$

Portanto temos que

$$m_j \sum_{i=0}^{N-1} f(T^i x_j) = \sum_{t=\overline{m}_{j-1}}^{\overline{m}_j - 1} \sum_{i=0}^{N-1} f(T^i y_t) \text{ para todo } j = 1, ..., k$$

E assim,

$$(*) = \ |\int_{Q^T(X)} f d\mu - \frac{1}{mN} \sum_{j=1}^{k} \sum_{t=\overline{m}_{j-1}}^{\overline{m}_j - 1} \sum_{i=0}^{N-1} f(T^i y_t)| = |\int_{Q^T(X)} f d\mu - \frac{1}{mN} \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{N-1} f(T^i y_t)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Então pela propriedade de especificação, existe um $y \in X$ com periodo $p = b_{m-1} - a_0 + M = (m-1)(N+M+1) + N + 1 + M = m(M+N+1)$ tal que

$$d(T^j y, T^j y_t) < \delta \text{ para todo } j \in A_t \text{ para todo } t = 0, ..., m-1$$

Para a medida $\mu(y, T)$, temos que $\int f d\mu(y, T) = 1/p \sum_{i=0}^{p-1} f(T^i y)$ para toda $f \in C(X)$

$$|\int f d\mu - \frac{1}{mN} \sum_{i \in A_t} f(T^i y)| \leq$$

$$|\int f d\mu - \frac{1}{mN} \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{N-1} f(T^i y_t)| + |\frac{1}{mN} \sum_{t=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{N-1} f(T^i y_t) - \frac{1}{mN} \sum_{i \in A_t} f(T^i y)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{3\epsilon}{4}.$$

Isso mostra que $\cup_p P(p)$ é denso em $\mathcal{M}_T^1(X)$. □

4.2 Residuias e Conjuntos de 1ª Categoria em $\mathcal{M}_T^1(X)$

O Teorema 4.1.5 da seção anterior nos dá uma importante propriedade dos espaços de medidas invariantes de sistemas dinâmicos com especificação. Através dele podemos concluir que vários subconjuntos do espaço de medidas invariantes são um residual ou de 1ªcategoria. Lemdrando:

4.2.1 Definição. *Um subconjunto $A \subset X$ é dito de* 1ª categoria *se $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ onde $int(\bar{A_n}) = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Um subconjunto B é um* residual *se $B = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n$ onde $\bar{B_n} = X$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Note que um conjunto é de 1ª categoria se, e somente se, seu complementar é um residual. Um teorema importante usando esses conceitos é o seguinte teorema:

4.2.2 Teorema (de Baire). *Seja X é um espaço métrico compacto e $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ uma sequência de abertos densos de X, então $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ é denso em X.*

O Teorema de Baire é um dos mais importantes da Análise Funcional. Conjuntos densos, apesar de terem seu fecho igual ao conjunto todo, podem ser bem pequenos. Por exemplo, os racionais é um subconjunto enumerável denso dos reais, que são não-enumeráveis.

Apliquemos agora esses novos conceitos:

4.2.3 Teorema. *Seja* $\mathcal{M}_E(X) := \{\mu \in \mathcal{M}^1_T(X); \mu$ *é ergódica*$\}$*. Se* $(X,T) \in SPEC$*, então* $\mathcal{M}_E(X)$ *é um residual.*

Demonstração. Primeiro, mostraremos que $\mathcal{M}_E(X)$ é uma interseção enumerável de abertos. De fato, defina

$$F_n := \{\mu \in \mathcal{M}^1_T(X);\ \text{existem } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathcal{M}^1_T(X) \text{ tais que } \mu = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \text{ e } \ \rho(\lambda_1, \lambda_2) \geq \frac{1}{n}\}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, onde ρ é a métrica em $\mathcal{M}^1_T(X)$. Fixe $n \in \mathbb{N}$ e seja $(\mu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência em F_n tal que converge na topologia fraca$*$ para $\mu \in \mathcal{M}^1_T(X)$. Então existem $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$,$(\nu_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sequências em $\mathcal{M}^1_T(X)$ tais que $\mu_i = \frac{1}{2}(\lambda_i + \nu_i)$ e $\rho(\lambda_i, \nu_i) \geq \frac{1}{n}$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

Como $\mathcal{M}^1_T(X)$ é compacto, existem $(\lambda_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ e $\lambda \in \mathcal{M}^1_T(X)$ tal que $\lambda_{i_j} \to \lambda$. De novo, como $\mathcal{M}^1_T(X)$ é compacto, existem $(\nu_{i_{j_k}})_{k\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(\nu_{i_j})_{j\in\mathbb{N}}$ e $\nu \in \mathcal{M}^1_T(X)$ tal que $\nu_{i_{j_k}} \rightharpoonup^{w*}_{k\to\infty} \nu$. Denotaremos $\lambda_k = \lambda_{i_{j_k}}$ e $\nu_k = \nu_{i_{j_k}}$. Assim,

$$\mu = \lim_k \mu_k = \lim_k \frac{1}{2}(\lambda_k + \nu_k) = \frac{1}{2}(\lambda + \nu)$$

E como $\rho(\lambda_k, \nu_k) \geq 1/n$ para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\rho(\lambda, \nu) \geq 1/n$ o que implica que $\mu \in F_n$ e portanto F_n é fechado para todo $n \in \mathbb{N}$. É fácil ver que μ é não extremal se, e só se, $\mu \in F = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$, isto é, $\mathcal{M}_E(X) = \mathcal{M}^1_T(X) \setminus F = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{M}^1_T(X) \setminus F_n$ é uma interseção enumerável de abertos. Como $P(p) \subset \mathcal{M}_E(X)$, concluimos então que $\mathcal{M}^1_T(X) \setminus F_n$ são densos para todo $n \in \mathbb{N}$ e portanto $\mathcal{M}_E(X)$ é um residual. □

Na verdade, podemos concluir mais ainda. Seja $\mathcal{M}_{E^l}(X) := \{\mu \in \mathcal{M}^1_T(X); \mu$ é ergódica para $T^l\}$ com $l \in \mathbb{N}$. Então $\bigcap_{l=1}^{\infty} \mathcal{M}_{E^l}(X)$ é um residual. Se $\mu \in \bigcap_{l=1}^{\infty} \mathcal{M}_{E^l}(X)$, então diremos que μ é totalmenta ergódica.

4.2.4 Teorema. *Seja* $\mathcal{M}_{\widetilde{N}}(X) := \{\mu \in \mathcal{M}^1_T(X); \mu(\{x\}) = 0$ *para todo* $x \in X\}$ *o conjunto das probabilidades invariantes não atômicas. Se* $(X,T) \in SPEC$*, então* $\mathcal{M}_{\widetilde{N}}(X)$ *é residual.*

Demonstração. Dado $\tau > 0$ defina

$$C(\tau) := \{\mu \in \mathcal{M}^1_T(X); \mu(\{x\}) \geq \frac{1}{r} \ \text{para algum } \ x \in X\}$$

Afirmação 1) $C(\tau)$ é fechado.
De fato, seja $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{M}_{\widetilde{N}}(X)$ tal que $\mu_n \rightharpoonup \mu \in \mathcal{M}^1_T(X)$. Então para

todo $n \in \mathbb{N}$ existe um $x_n \in X$ tal que $\mu(\{x_n\}) \geq \tau$. Como X é compacto, então existe $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_j} \to x_0 \in X$. Seja $\bar{B}_r = \bar{B}(x_0, 1/r) = \{x \in X; d(x, x_0) \leq 1/r\}$. Então

$$\mu(\bar{B}_r) \geq \limsup_j \mu_{n_j}(\bar{B}_r) \geq \tau \text{ para todo } r \in \mathbb{N}$$

e portanto $\mu(\{x_0\}) = \mu(\bigcap_{r\in\mathbb{N}} \bar{B}_r) = \lim_{r\to\infty} \mu(\bar{B}_r) \geq \tau$. Assim, $\mu \in C(\tau)$ e portanto $C(\tau)$ é fechado.

Afirmação 2) $\operatorname{int} C(\tau) = \emptyset$
Suponha exite $U \subset C(\tau)$ aberto em X. Pelo Teorema 4.1.5, existe uma medida CO em U, i é, existe um $x \in X$ periódico de periodo p (podemos supor que $1/p < \tau$) tal que $\mu = \mu(x, T) \in U$. Mas $\mu(\{y\}) \leq 1/p < \tau$ para todo $y \in X$ e portanto $\mu \notin C(\tau)$. Absurdo!

Como $\mathcal{M}_{\tilde{N}}(X) = \mathcal{M}_T^1(X) \setminus (\bigcup_{r\in\mathbb{R}} C(1/r))$, então $\mathcal{M}_{\tilde{N}}(X)$ é residual. □

4.2.5 Teorema. *Seja $\mathcal{M}_A(X) := \{\mu \in \mathcal{M}_T^1(X); \mu(A) \neq 0$ para todo $A \subset X$ aberto$\}$ o conjunto das probabilidades invariantes tais que todo conjunto aberto tem medida positiva. Se $(X, T) \in SPEC$, então $\mathcal{M}_A(X)$ é residual.*

Demonstração. Procederemos de forma similar ao teorema anterior. Seja $A \subset X$ aberto não vazio e

$$G(A) = \{\mu \in \mathcal{M}_T^1(X); \mu(A) = \emptyset \text{ para todo } A \subset X \text{ aberto } \}$$

Como no caso anterior, mostraremos duas afirmações:
Afirmação 1) $G(A)$ é fechado.
Seja $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $G(A)$ tal que $\mu_n \rightharpoonup \mu \in \mathcal{M}_T^1(X)$. Então

$$\mu(A) \leq \liminf_n \mu_n(A) = 0 \text{ para todo } A \text{ aberto}$$

e portanto $\mu \in G(A)$ e $G(A)$ é fechado.
Afirmação 2) $G(A)$ é fechado.
Suponha que existe um $U \subset G(A)$ aberto em $\mathcal{M}_T^1(X)$. Pelo Teorema 4.1.5, existe um $x \in A$ periódico de periodo tal que $\mu = \mu(x, T) \in U$. Mas como $x \in A$, então $\mu(A) \geq 1/p$ o que implica que $\mu \notin G(A)$. Absurdo!
Como X é espaço métrico compacto, então existe $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma base enumerável de abertos e assim temos que, $\mathcal{M}_A(X) = \mu \in \mathcal{M}_T^1(X) \setminus (\cup_{n\in\mathbb{N}} G(A_n))$ e portanto $\mathcal{M}_A(X)$ é residual. □

4.3 Conjuntos Fechados Conexos do Espaço de Medidas Invariantes

Neste cápitulo continuaremos a estudar o ártigo [13] do Sigmund e portanto continuaremos com a hipótese de X ser um espaço métrico compacto e T uma aplicação contínua em X.

Vimos no cápitulo anterior que os conjuntos $V_T(x)$ são fechados e conexos, isso valendo para qualquer sistema mesmo sem especificação. Nesta secção veremos que para qualquer fechado conexo do espaço de medidas invariantes existe um $x \in X$ tal que $V_T(x)$ é esse conjunto, quando o sistema possui especificação. Para mostrar isso primeiro vamos enunciar um importante fato o qual pode ser encontrado em [1].

4.3.1 Teorema. *Existe uma família enumerável $F \subset C(X)$ tal que $\mu_n \rightharpoonup^{w*}_{n\to\infty} \mu$ se e somente se $\int f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu$ para toda $f \in F$.*

Vamos direto para o teorema mencionado mais acima.

4.3.2 Teorema. *Suponhamos que o sistema (X, T) possui especificação. Então para qualquer conjunto V fechado conexo não-vazio no espaço de probabilidades T-invariantes existe um $x \in X$ tal que $V = V_T(x)$.*

Demonstração. Seja V um conjunto fechado conexo não-vazio no espaço de probabilidades T-invariantes.

Seja $F = \{f_1, f_2, ...\} \subset C(X)$ uma família enumerável dada pelo Teorema 4.3.1. Sem perda da generalidade podemos supor que $\|f_k\| = 1$ para toda k. Denotemos $F_k := \{f_1, f_2, ..., f_k\} \subset F$. Dada uma medida $\mu \in \mathcal{M}^1$ definimos as vizinhanças $U_k(\mu)$ de μ como:

$$U_k(\mu) := \left\{ \nu \in \mathcal{M}_1; \left| \int f d\mu - \int f d\nu \right| \leq 2^{-k}, f \in F_k \right\}.$$

Como V é um subconjunto fechado de um conjunto compacto, V é compacto. Portanto, pelo Teorema 4.1.5, para cada k fixado, existe um número finito de medidas CO $\mu_1^k, ..., \mu_{m_k}^k$ tal que $V \subset \bigcup_{j=1}^{m_k} U(\mu_j^k)$. Como V é conexo podemos assumir que μ_j^k são enumerados de forma que $U_k(\mu_j^k) \cap U_k(\mu_{j+1}^k) \cap V \neq \emptyset$ para todo $j = 1, ..., m_k - 1$ e $U_k(\mu_{m_k}^k) \cap U_{k+1}(\mu_1^{k+1}) \cap V \neq \emptyset$. Chamaremos por x_j^k os pontos periódicos que geram as medidas μ_j^k. Para simplificar a notação, tomemos $U_n = U_k(\mu_j^k)$, $x_n = x_j^k$ e $\mu_n = \mu_j^k$ para $n = m_1 + m_2 + ... + m_{k-1} + j$ e $0 \leq j < m_k$. Assim temos que U_n são vizinhanças de μ_n e $U_n \cap U_{n+1} \cap V \neq \emptyset$. Assumiremos também que x_n tem período p_n primo.

Definiremos para todo $n \in \mathbb{N}$ faixas de inteiros $A_n = \{a_n, a_n + 1, ..., b_n\}$ satisfazendo:

1. o espaço entre os A_n é grande o suficiente para permitir sombreamento menor que 2^{-n} ao longo da faixa A_n,

2. o numero de elementos em A_n é muito maior do que o numero de elementos em A_{n-1}, mais precisamente, $a_n/b_n \to 0$ quando $n \to \infty$,

3. o numero de elementos em A_n é muito maior do que o espaço entre A_n e A_{n+1}, mais precisamente $(a_{n+1} - b_n)/(b_n - a_n) \to 0$, quando $n \to \infty$,

4. $(p_{n-1} + p_n)/(b_{n-1} - a_{n-1}) \to 0$.

Pelo Lema 3.3.2 existe um $x \in X$ tal que

$$d(T^j x, T^j x_n) < 2^{-n} \quad \forall j \in A_n \ \ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.1}$$

Mostremos meramente que $V \subset V_T(x)$. Para mostrar que $V_T(x) \subset V$ veja [13].

Consideremos $\mu \in V$. Tomemos uma sequência n_k de naturais tal $\mu \in U_{n_k}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Mostraremos que a sequência $\mu(x, T; b_{n_k}) \rightharpoonup^{w*}_{k\to\infty} \mu$ quando $k \to \infty$. Fixando $f \in F$ e tomando k suficientemente grande, temos pelos itens 2 e 3 que:

$$\left| \frac{1}{b_{n_k}} \sum_{i=0}^{b_{n_k}} f(T^i x) - \frac{1}{b_{n_k} - a_{n_k}} \sum_{i \in A_{n_k}} f(T^i x) \right| < \epsilon/3. \tag{4.2}$$

Definindo $\omega(g, \delta)$ como a oscilação da função g nas bolas de raio δ, isto é,

$$\omega(g, \delta) := \sup \left\{ |g(y_1) - g(y_2)| ; d(y_1, y_2) < \delta \right\} ,$$

temos pelo item 1 e 2 que:

$$\left| \frac{1}{b_{n_k} - a_{n_k}} \sum_{i \in A_{n_k}} \big(f(T^i x) - f(T^i x_n) \big) \right| < \omega(f, 2^{-n_k}). \tag{4.3}$$

E se k for grande o suficiente, $\omega(f, 2^{-n_k}) < \epsilon/3$. De novo, pelo item 2, temos que:

$$\left| \frac{1}{b_{n_k} - a_{n_k}} \sum_{i \in A_{n_k}} f(T^j x_{n_k}) - \int f d\mu(x_{n_k}, T) \right| < \epsilon/3 \tag{4.4}$$

Para k suficientemente grande. Pelas equações (4.2), (4.3) e (4.4)

$$\int f d\mu(x, T; b_k) \to \int f d\mu \quad \text{quando} \quad k \to \infty .$$

E portanto $\mu \in V_T(x)$. □

Capítulo 5

Conexidade por Caminhos

Continuaremos o estudo topológico do espaço de medidas invariantes de sistemas com especificação. Chegaremos então na conclução deste texto, de um fato conhecido na matemática, mas talvez ainda então explicitado, que é que o espaço de medidas ergódicas de um sistema com essa propriedade é conexo por caminhos. Dessa forma generalizamos [14] onde o resultado foi mostrado no caso particular do shift. Para provar esse fato usaremos a teoria de Choquet, mais precisamente, o conceito de Poulsen Simplex.

5.1 Caso Shift

Para começar, olharemos primeiramente a transformação shift já estudada anteriormente. Veremos que o espaço de medidas ergódicas do shift é conexo por caminhos o que nos dá a motivação de estudar essa propriedade em sistemas com especificação. De fato, lembremos que se $\Sigma_d = \{1, 2, ..., d\}^{\mathbb{Z}}$, então a transformação shift $T : \Sigma_d \to \Sigma_d$ é definida por $(T\xi)_n = \xi_{n+1}$ para todo $(\xi_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_d$.

Como já sabemos, o shift possui especificação e portanto seu espaço de medidas invariantes tem as propriedades já discutidas aqui. Mas vamos fazer um estudo mais específico de suas medidas. Para isso, criaremos primeiramente uma σ-álgebra em $\Sigma_d = \{1, 2, ..., d\}^{\mathbb{Z}}$. Definamos $[\xi_{n_1}, \xi_{n_1+1}, ..., \xi_{n_2-1}, \xi_{n_2}] := \{\eta = (\eta_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \Sigma_d; \eta_n = \xi_n \text{ para todo } n_1 \leq n \leq n_2\}$ e chamaremos esses conjuntos de *cilindros*.

A família de uniões finitas de cilindros formam uma álgebra em Σ_d. Portanto a σ-álgebra que usaremos em Σ_d será a σ-álgebra gerada pela álgebra dos cilindros. Definiremos portanto as medidas do shift nessa σ-álgebra.

Existem vários exemplos explícitos de medidas em (Σ_d, T). Entre eles estão as medidas de Bernoulli. As medidas de Bernoulli são definidas nos cilindros de tal forma: para todo

$1 \leq i \leq d$ definimos p_i tal que $\sum_{i=1}^{d} p_i = 1$ e $\mu([\xi_{n_1}, ..., \xi_{n_2}]) = \prod_{n=n_1}^{n_2} p_{\xi_n}$.

É fácil ver que as medidas de Bernoulli são de fato medidas de probabilidade. Também é conhecido que as medidas de Bernoulli não são somente invariantes pelo shift, mas também são ergódicas [18]. Usaremos essas medidas para criar uma curva no espaço de medidas ergódicas.

Peguemos um caso simples. Seja a aplicação $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ e $T\colon \Sigma_2 \to \Sigma_2$ o shift. Seja $\alpha\colon [0,1] \to \mathcal{M}_e$ tal que $t \mapsto \mu_t$ onde μ_t são as medidas de Bernoulli com $p_0^t = t$ e $p_1^t = 1-t$. A aplicação acima está bem definida e portanto para ela ser de fato uma curva, basta mostrar que α é contínua. Para isso, mostraremos que se $(t_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência em $[0,1]$ tal que t_m converge para um t_0, então $\mu_{t_m} \rightharpoonup^{w*} \mu_{t_0}$. Como sabemos, $\mu_{t_m} \rightharpoonup^{w*} \mu_{t_0}$ se e só se, $\int f\, d\mu_{t_m} \to \int f\, d\mu_{t_0}$ para toda $f \in C(\Sigma_2)$.
Mas primeiro, seja $f\colon \Sigma_2 \to \mathbb{R}$ a função característica no cilindro definida por:

$$f(\eta) = \mathcal{X}_{[\xi_{n_1},...,\xi_{n_2}]}(\eta) := \begin{cases} 1, & \eta \in [\xi_{n_1}, ..., \xi_{n_2}], \\ 0, & \eta \notin [\xi_{n_1}, ..., \xi_{n_2}]. \end{cases}$$

Então $\int f\, d\mu_{t_m} = \mu_{t_m}([\xi_{n_1}, ..., \xi_{n_2}]) = \prod_{n=n_1}^{n_2} p_{\xi_n}^{t_m}$. Se tomarmos

$$n_0 = \operatorname{card}\{n \in \{n_1, ..., n_2\};\ p_{\xi_n}^{t_m} = 0\},$$

então $\prod_{n=n_1}^{n_2} p_{\xi_n}^{t_m} = t_m^{n_0}(1-t_m)^{n_2-n_1-n_0+1}$. Fazendo $m \to \infty$, temos que

$$t_m^{n_0}(1-t_m)^{n_2-n_1-n_0+1} \to t_0^{n_0}(1-t_0)^{n_2-n_1-n_0+1} = \prod_{n=n_1}^{n_2} p_{\xi_n}^{t_0} = \mu_{t_0}([\xi_{n_1}, ..., \xi_{n_2}]) = \int f\, d\mu_{t_0}\,.$$

Portanto temos que $\int f\, d\mu_{t_m} \to \int f\, d\mu_{t_0}$ para toda função característica em cilindros.
Se g for uma combinação linear de funções características em cilindros, então é fácil ver que $\int g\, d\mu_{t_m} \to \int g\, d\mu_{t_0}$. Mas se $f \in C(\Sigma_2)$, então existe uma sequência de funções que são uma combinação linear de funções características em cilindros que converge para g. De fato, seja f uma função contínua e $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência definida da forma:

$$\begin{cases} f_1 = \inf_{[0]} f(x)\mathcal{X}_{[0]}(x) + \inf_{[1]} f(x)\mathcal{X}_{[1]}(x) \\ f_2 = \inf_{[0,0]} f(x)\mathcal{X}_{[0,0]}(x) + \inf_{[0,1]} f(x)\mathcal{X}_{[0,1]}(x) + \inf_{[1,0]} f(x)\mathcal{X}_{[1,0]}(x) + \inf_{[1,1]} f(x)\mathcal{X}_{[1,1]}(x) \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \\ \quad\quad\quad . \end{cases}$$

Como f é contínua e Σ_2 é compacto, então dado $\epsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $d(\xi, \eta) < \delta$, temos que $|f(\xi) - f(\eta)| < \epsilon$. Seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-k_0} < \delta$. Então $\xi_1 = \eta_1, ..., \xi_{k_0} = \eta_{k_0}$ implica que $d(\xi, \eta) < \delta$, e que implica que $|f(\xi) - f(\eta)| < \epsilon$. Portanto:

$$\inf_{[z_1,...,z_{k_0}]} |f(y) - f(y)| < \epsilon,\ \ \forall y \in [z_1, ..., z_{k_0}],\ \ \forall [z_1, ..., z_{k_0}] \Rightarrow |f_{k_0} - f| < \epsilon$$

Assim concluimos que o conjunto $\mathcal{F}$ das combinações lineares de funções características é denso no espaço das funções contínuas de Σ_2. Portanto dado $f \in C(\Sigma_2)$ e um $\epsilon > 0$ existe uma função $g \in \mathcal{F}$ tal que $|f(x) - g(x)| < \epsilon/2$ para todo $x \in \Sigma_2$ e existe um $m_0 > 0$ tal que $\int g\, d\mu_{t_m} - \int g\, d\mu_{t_0} < \epsilon/2$ para todo $m > m_0$ e assim $\int f\, d\mu_{t_m} - \int f\, d\mu_{t_0} < \epsilon$ para todo $m > m_0$. Portanto concluimos que $\int f\, d\mu_{t_m} \to \int f\, d\mu_{t_0}$ para toda $f \in C(\Sigma_2)$, isto é, α é uma curva no espaço das medidas ergódicas.

Esse fato por se só não implica que o espaço das medidas ergódicas do shift é conexa por caminhos, mas que pelo menos existem curvas nesse espaço. Mas Sigmund consegue mostrar em [14] explicitamente que o espaço das medidas ergódicas do shift é conexo por caminhos. Na verdade, basta a transformação ser um subshift do tipo finito com matriz de transição aperiódica para termos essa propriedade. Não faremos essa demonstração pois ela é muito técnica e temos um resultado mais geral as seguinte (Teorema 5.3.8).

5.2 Simplex

Começaremos a mostrar que o espaço de medidas ergódicas de sistemas com especificação é conexo por caminho. Essa demostração é puramente topológica e segue da teoria de Choquet que pode ser encontrada em [10] e de um resultado em [9] através do fato do espaço de medidas invariantes ser um simplex. Para melhor compreensão definiremos primeiramente o simplex em espaço vetorias de dimensão finita:

5.2.1 Definição. *Uma* combinação afim *é uma combinação linear cuja a soma dos coeficientes é igual a 1. Diremos que um conjunto é* afinamente independente *se nenhum elemento pode ser escrito como combinação afim de outros elementos do conjunto.*

Uma combinação convexa *é uma combinação linear cuja a soma dos coeficientes é igual a 1 e todos os coeficientes são maiores ou iguais a 0. O* fecho convexo *de um conjunto M que denotaremos por* $\operatorname{conv} M$ *é o conjunto de todas as combinações convexas de todos os elementos de M.*

5.2.2 Definição. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita. Um subconjunto $M \subset E$ é dito um* simplex *se $M = \operatorname{conv} N$ para algum subconjunto $N \subset E$ afinamente independente.*

Segue do fato de N ser afinamente independente que N é um conjunto extremal de M e que qualquer elemento de M é unicamente representado por uma combinação convexa de elementos de N. É possível mostrar que se M não é um simplex então existe um elemento que tem duas representações distintas por elementos do conjunto extremal.

A ideia é definir um simplex em um espaço vetorial qualquer de forma que ele equivale a definição acima se a dimensão do espaço for finita e tem propriedades similares quando o espaço for de dimensão infinita. Além disso, gostariamos de provar o espaço das medidas invariantes é um simplex.

Seja M um conjunto compacto convexo de um espaço vetorial real E localmente convexo. Sem perda de generalidade, suponha que M não contém a origem (por exemplo, podemos supor E é o hiperplano $E \times \{1\}$ em $E \times \mathbb{R}$). Então $\widetilde{M} = \{ax; a \geq 0, x \in M\}$ é o cone convexo gerado por M (também diremos que M é base de $\widetilde{M}$).

É possível definir uma ordem parcial em E através de $\widetilde{M}$. Diremos que $x \geq y$ se e somente se, $x - y \in \widetilde{M}$. Como M não contém a origem, então $\widetilde{M} \cap -\widetilde{M} = \{0\}$ e portanto se $x \geq y$ e $y \geq x$, então:

$$\begin{cases} x \geq y \Rightarrow x - y \in \widetilde{M} \\ y \geq x \Rightarrow y - x \in \widetilde{M} \Rightarrow -(x-y) \in \widetilde{M} \Rightarrow x - y \in -\widetilde{M} \end{cases}$$

Portanto $x - y = 0$, isto é, $x = y$. Sais ainda, é possível mostrar que se $x, y \in \widetilde{M} - \widetilde{M}$, então existe um $z \in \widetilde{M}$ tal que $z \geq x, z \geq y$, isto é, que x, y é limitado superiormente em $\widetilde{M} - \widetilde{M}$. Nós dizemos que z é o *supremo* de x, y se $z \leq w$ para todo $w \geq x, w \geq y$ e denotamos $z = x \vee y$.

5.2.3 Definição. *Um conjunto convexo que é base do cone $\widetilde{M}$ é dito um* simplex *se $\widetilde{M} - \widetilde{M}$ é um reticulado na ordem induzida por X, isto é, se para todos $x, y \in \widetilde{M} - \widetilde{M}$ existe $x \vee y \in \widetilde{M}$.*

Analogamente, $\widetilde{M} - \widetilde{M}$ é um reticulado se para todos $x, y \in \widetilde{M} - \widetilde{M}$ existe o ínfimo de x, y denotado por $x \wedge y$ em $\widetilde{M}$. Na verdade, é possível mostrar que se $\widetilde{M} - \widetilde{M}$ é um reticulado, então $\widetilde{M}$ é um reticulado.

Em [10], é possível ver que a definição acima conicide com a definição de simplex em espaço vetorias de dimensão finita. Além disso temos o seguinte teorema.

5.2.4 Teorema (Choquet)**.** *Seja M um subconjunto compacto, convexo, métrico de um espaço localmente convexo. Então M é um simplex se e só se, para cada $x \in M$ existe uma única medida μ tal que $f(x) = \int f\, d\mu$ para toda função f linear contínua e $\mu(M \setminus \mathrm{ex} M) = 0$, onde $\mathrm{ex}\, M$ é o conjunto extremal de M.*

De fato, é possível encontrar na literatura o teorema acima como a *definição* de simplex e frequentemente os simplex são chamados de *Choquet Simplex.*

Voltemos agora para o caso de dimensão finita. Seja E um espaço vetorial real tal que $\dim(E) = n$, e seja $M \subset E$ um simplex. Então M é um conjunto compacto convexo tal que $\mathrm{ex}\, M$ é um conjunto afinamente independente. Portanto $\mathrm{ex}\, M$ tem no máximo n pontos.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\operatorname{ex} M$ tem n pontos, isto é, suponhamos que $\operatorname{ex} M = \{x_1, ..., x_n\}$.

Seja $x \in M$. Então existem $\lambda_1, ..., \lambda_n$ números reais positivos tais que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ e $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$. Assim tomando as medidas delta de Dirac δ_{x_i} para todo $i = 1, ..., n$, definimos $\mu := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \delta_{x_i}$. Portanto temos:

$$\begin{aligned}\int_M f d\mu &= \int_{\{x_1,...,x_n\}} f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \int_{\{x_i\}} f d\mu = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\mu(\{x_i\}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i x_i) = f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) = f(x).\end{aligned}$$

Em outras palavras, o Teorema de Choquet 5.2.4 em espaço vetoriais de dimensão infinita equivale a dizer que qualquer ponto do simplex pode ser escrito, de forma única, como combinação convexa dos pontos extremais. Veremos uma outra aplicação do Teorema de Choquet mais abaixo (Teorema 5.2.7).

Agora que já definimos o que é um simplex, provaremos que o espaço das medidas invariantes é um simplex. De fato, seja X um espaço métrico compacto, $\mathcal{B}$ uma σ-álgebra de X e $T : X \to X$ uma transformação contínua. Lembrando a notação, seja $\mathcal{M}^1$ o espaço das medidas de probabilidade T-invariantes. Denotemos por $\mathcal{P}$ o espaço de todas as medidas finitas de X T-invariantes.

É fácil ver que $\mathcal{P}$ é um cone no espaco vetorial das cargas finitas, cuja base é $\mathcal{M}^1$ que é métrico e convexo. Além disso, já sabemos que as medidas ergódicas formam o conjunto extremal de $\mathcal{M}^1$ ([7, 18]). Portanto, para mostrar que $\mathcal{M}^1$ é um simplex, basta mostrar que $\mathcal{P} - \mathcal{P}$ é um reticulado.

5.2.5 Lema. *Suponhamos que μ, ν são medidas, que μ é T-invariante e que ν é absolutamente contínua com μ com derivada de Radon-Nikodym $f = d\nu/d\mu$. Então ν é T-invariante se e somente se $f = f \circ T \mod \mu$.*

Demonstração. $\Leftarrow$] Seja $E \in \mathcal{B}$, então

$$\nu(T^{-1}E) = \int_{T^{-1}(E)} f d\mu = \int_{T^{-1}(E)} f \circ T d\mu = \int_E f d(\mu \circ T^{-1}) = \int_E f d\mu = \nu(E)\,.$$

$\Rightarrow$] Suponhamos que $\nu \circ T^{-1} = \nu$. Dado um $r \in \mathbb{R}$ definamos $A_r := \{x \in X; f(x) \leq r\}$ e sejam $B_r := T^{-1}A_r \setminus A_r$ e $C := A_r \setminus T^{-1}A_r$.

Assim, se $x \in B_r$, então $x \notin A_r$ e portanto $f(x) > r$ e $\nu(B_r) = \int_{B_r} f d\mu \geq \int_{B_r} r d\mu = r \int_{B_r} d\mu = r\mu(B_r)$, isto é, $\nu(B_r) - r\nu(B_r) \geq 0$. Note que $\nu(B_r) - r\nu(B_r) = 0$ se e somente se $\mu(B_r) = 0$. Analogamente, se $x \in C_r$, então $x \in A_r$ e assim $\nu(C_r) = \int_{C_r} f d\mu \leq \int_{C_r} r d\mu = r\mu(C_r)$.

Agora, $\nu(B_r) = \nu(T^{-1}Ar_r \setminus Ar_r) = \nu(T^{-1}A_r) - \nu(T^{-1}A_r \cap A_r)$, mas pela hipótese, $\nu(T^{-1}A_r) = \nu(A_r)$ e portanto $\nu(B_r) = \nu(A_r) - \nu(T^{-1}A_r \cap A_r)$. Além disso, $\nu(C_r) = \nu(A_r \setminus T^{-1}A_r) = \nu(A_r) - \nu(A_r \cap T^{-1}A_r)$. Concluimos então que $\nu(C_r) = \nu(B_r)$.

Com argumentos similares, como μ também T-invariante, podemos substituir ν por μ e concluir que $\mu(B_r) = \mu(C_r)$. Assim, temos que $\nu(B_r) \geq r\mu(B_r) = r\mu(C_r) \geq \nu(C_r) = \nu(B_r)$ e portanto $\nu(B_r) = r\nu(B_r)$ e $\nu(C_r) = r\mu(C_r)$ e como visto acima, temos então que $\mu(B_r) = \mu(C_r) = 0$.

Concluimos então que, dado um r qualquer, os conjuntos A_r e $T^{-1}A_r$ diferem somente por um conjunto de medida μ nula. Agora, suponhemos que $g, h : X \to \mathbb{R}$ são duas funções quaisquer. Como $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned}
\{x \in X; g(x) > h(x)\} &= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} \{x \in X; g(x) > r \geq h(x)\} = \\
&= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (\{x \in X; r \geq h(x)\} \setminus \{x \in X; r \geq g(x)\}).
\end{aligned}$$

Tomando $g = f$ e $h = f \circ T$, temos que

$$\begin{aligned}
\{x; f(x) > f(Tx)\} &= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (\{x; r \geq f(Tx)\} \setminus \{x; r \geq f(x)\}) = \\
&= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (T^{-1}\{x; r \geq f(x)\} \setminus \{x; r \geq f(x)\}) = \\
&= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} (T^{-1}A_r \setminus A_r) = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} B_r
\end{aligned}$$

E portanto $\mu(\{x; f(x) > f(Tx)\}) \leq \sum_{r\in\mathbb{Q}} \mu(B_r) = 0$. Similarmente, $\{x; f(x) < f(Tx)\} = \cup_{q\in\mathbb{Q}} C_r$ e assim $\mu(\{x; f(x) < f(Tx)\}) = 0$. Conluimos então que o conjunto de pontos tais que $f \neq f \circ T$ tem medida μ nula como queríamos mostrar. $\square$

Voltemos agora para os simplex. Vimos que para mostrar que $\mathcal{M}^1$ é um simplex, temos que mostrar que o cone $\mathcal{P}$ das medidas finitas T-invariantes é um reticulado, isto é, que duas medidas T-invariantes finitas quaisquer possuem em ínfimo.

Lembrando que a ordem no espaço das cargas finitas é induzida pelo cone $\mathcal{P}$ e portanto dadas duas cargas λ_1, λ_2, temos que $\lambda_1 > \lambda_2$ se e somente se $\lambda_1 - \lambda_2 \in \mathcal{P}$. Isto é se $\lambda_1 - \lambda_2$ for uma medida T-invariante finita.

Portanto para mostrar que $\mathcal{M}^1$ é um simplex, basta mostrar dadas duas medidas finitas μ, ν T-invariantes, existe o ínfimo $\mu \wedge \nu$ que também é uma medida T-invariante.

Assim dadas duas medidas finitas μ, ν, temos que $\mu \ll \mu + \nu$ e $\nu \ll \mu + nu$. Sejam $f = d\mu/d(\mu+\nu)$ e $g = d\nu/d(\mu+\nu)$ sa derivadas de Radon-Nikodym de μ e ν respectivamente e seja $h = \inf\{f, g\}$. Definimos a medida $\mu \wedge \nu$ de forma:

$$(\mu \wedge \nu)(E) = \int_E hd(\mu + \nu) \quad \forall E \in \mathcal{B}$$

Portanto temos o seguinte lema.

5.2.6 Lema. *$\mu \wedge \nu$ é de fato o ínfimo de μ, ν.*

Demonstração. Para mostrar que $\mu \wedge \nu$ é de o ínfimo de μ, ν, devemos mostrar as seguintes afirmações. Primeiro, que $\mu \wedge \nu$ é de fato uma medida, depois que $\mu \wedge \nu$ é uma medida finita T-invariante, que $\mu \wedge \nu < \mu$, $\mu \wedge \nu < \nu$ e enfim que se $\lambda < \mu$ e $\lambda < \nu$, então $\lambda < \mu \wedge \nu$.

Mostrar que $\mu \wedge \nu$ é uma medida é fácil, visto que o Teorema de Radon-Nikodym 2.1.8 garante que f e g são funções mensuráveis positivas e portanto h também é uma função mensurável positiva, o que implica que $\int_E hd(\mu + \nu)$ define uma medida.

Mostrar que $\mu \wedge \nu$ é T-invariante é um pouco mais complicado. Mas como μ e ν são medidas finitas T-invariantes, então $\mu + \nu$ também é uma medida finita T-invariante. Assim, pelo ida do Lema 5.2.5, temos que $f = f \circ T$ e $g = g \circ T$ para $(\mu + \nu)$-quase todo $x \in X$ e portanto $h = h \circ T$ para $(\mu + \nu)$-quase todo $x \in X$.

Mas pela definição de $\mu \wedge \nu$, temos que $\mu \wedge \nu \ll \mu + \nu$ e portanto, pela volta do Lema 5.2.5, temos que $\mu \wedge \nu$ é T-invariante.

Continuando com a prova, temos que dado um E mensurável, $(\mu \wedge \nu)(E) = \int_E h\, d(\mu + \nu) \leq \int_E f\, d(\mu + \nu) = \mu(E)$, portanto $\mu - \mu \wedge \nu \geq 0$ isto é, a carga $\mu - \mu \wedge \nu$ é na verdade uma medida, que é finita, pois $\mu - \mu \wedge \nu \geq \mu$. Além disso, é fácil ver que $\mu - \mu \wedge \nu$ é T-invariante e portanto $\mu - \mu \wedge \nu \in \mathcal{P}$ o que conclui que $\mu \wedge \nu \leq \mu$ pela ordem induzida por $\mathcal{P}$. De forma análoga, $\mu \wedge \nu \leq \nu$.

Agora, seja λ uma medida tal que $\lambda < \mu$ e $\lambda < \nu$, então $\mu - \lambda$, $\nu - \lambda$ são medidas finitas T-invariantes e portanto $\lambda(E) \leq \mu(E)$ e $\lambda(E) \leq \nu(E)$ para todo E mensurável. Assim, λ é absolutamente contínua com relação às medidas μ e ν e portanto λ é absolutamente contínua com respeito à $\mu + \nu$.

Pelo Teorema de Radon-Nikodym 2.1.8, existe um φ função mensurável positiva tal que $\varphi = d\lambda / d(\mu + \nu)$. Assim, tomando $E_1 = \{x \in X; \varphi(x) > f(x)\}$, temos $\lambda(E_1) = \int_{E_1} \varphi\, d(\mu + \nu) \leq \int_{E_1} f\, d(\mu + \nu) = \mu(E_1)$e a igualdade vale se e somente se $(\mu + \nu)(E_1) = 0$. Mas como $\lambda(E_1) \leq \mu(E_1)$ temos que $(\mu + \nu)(E_1) = 0$ e portanto $\varphi \leq f$ em um conjunto de medida $\mu + \nu$ nula.

Analogamente, $\varphi \leq g$ para $(\mu + \nu)$-quase todo $x \in X$. Assim, $\varphi \leq h$ para $(\mu + \nu)$-quase todo $x \in X$ o que implica que $(\mu \wedge \nu - \lambda)(E) = \int_E h - \varphi\, d(\mu + \nu) \geq 0$, isto é, $\mu \wedge \nu - \lambda$ é uma medida finita. Além disso, $\mu \wedge \nu - \lambda = (\mu \wedge \nu - \mu) + (\mu - \lambda)$ que são medidas T-invariantes e portanto $\mu \wedge \nu - \lambda$ é uma medida T-invariante. Isso conclui que $\mu \wedge \nu \leq \lambda$.

Como $\mu \wedge \nu$ satisfaz todas as propriedades discutidas, concluimos que $\mu \wedge \nu$ é fato o ínfimo de μ, ν. $\square$

Conluimos então o cone $\mathcal{P}$ das medidas finitas T-invariantes é um reticulado. Para concluir que $\mathcal{M}^1$ é um simplex só falta mostrar que ele está em um espaço vetorial real munido com uma topologia localmente convexa. Mas é bastante conhecido que a topologia fraca estrela no espaço de medidas é localmente convexa e portanto $\mathcal{M}^1$ é de fato um simplex.

Assim temos que $\mathcal{M}^1$ goza das propriedades de simplexes entre elas o Teorema de Choquet mencionado em 5.2.4. Lembrando que o espaço das medidas ergódicas $\mathcal{M}_E$ é o conjunto extremal do conjunto das probabilidades T-invariantes.

Da análise funcional, temos que se f é uma função contínua, então $F : \mathcal{M}^1 \to \mathbb{R}$ tal que $F(\mu) = \int_X f\, d\mu$ é um funcional linear contínuo. Na verdade, todos os funcionais lineares de $\mathcal{M}^1$ são dessa forma.

Portanto o teorema de Choquet aplicado em $\mathcal{M}^1$ fica da forma:

5.2.7 Teorema. *Seja X um espaço métrico compacto e $T : X \to X$ uma transformação contínua. Então como $\mathcal{M}^1$ é um simplex, para cada medida $\mu \in \mathcal{M}^1$ existe uma única probabilidade m definida na σ-álgebra de Borel de $\mathcal{M}^1$ tal que:*

1. $m(\mathcal{M}_E) = 1$
2. $\int_X f\, d\mu = \int_{\mathcal{M}_E} (\int_X f\, d\nu)\, dm(\nu)$ *para toda* $f \in C(X)$.

O conjunto o conjunto $\mathcal{M}_E$ é mensurável, pois como visto na demonstração do Teorema 4.2.3, ele é uma interseção enumerável de abertos de $\mathcal{M}^1$.

O Teorema 5.2.7 nada mais é que o teorema da decomposição ergódica visto em 2.2.21 enunciado de outra forma. Portanto o teorema da decomposição ergódica nada mais é do que um corolário imediato do Teorema de Choquet 5.2.4.

5.3 Poulsen Simplex

Os assuntos tratados na secção anterior se referem a transformações contínuas $T : X \to X$ quaiquer com X um espaço métrico compacto. A pergunta natural é se o estudo do espaço de probabilidades T-invariantes através de simplexes traz novas propriedades se colocarmos a hipótese de T possuir especificação. A resposta é afirmativa, utilizando o Poulsen Simplex.

5.3.1 Definição. *Seja S um simplex métrico tal que seu conjunto de pontos extremais* $\operatorname{ex} S$ *é denso em S, então dizemos que S é o* Poulsen Simplex.

A primeira pessoa a construir um simplex com essas propriedades foi E.T. Poulsen em [11], daí vem seu nome. Esses simplex foram estudados principalmente por J. Lindenstrauss, G. Olsen e Y. Sternfeld em [9]. Eles mostraram nesse artigo, além de outras propriedades, que o Poulsen Simplex é de fato único a menos de homeomorfismos afins e portanto todos possuem propriedades topológicas semelhantes, onde uma aplicação $h : E \to F$ entre dois espaços vetoriais reais é dita afim se $h((1-t)u+tv) = (1-t)h(u)+th(v)$ para todo $u, v \in E$ e $t \in [0,1]$. Portanto não faz sentido falar em um Poulsen Simplex, mas sim no Poulsen Simplex.

Como visto na secção anterior, o espaço de probabilidades T-invariantes é um simplex. Além disso, como vimos ele é um espaço métrico e seus pontos extremais, que são as medidas ergódicas, é denso nele e portanto o espaço de probabilidades T-invariantes é um Poulsen Simplex. Assim ele goza das propriedades do Poulsen Simplex.

Nessa secção discutiremos essas características do Poulsen Simplex mostradas no artigo de Lindenstrauss, Olsen e Sternfeld citado acima. Os teoremas exibidos asseguir são bastante fortes, mas não serão demonstrados aqui. Somente a demonstração do terceiro teorema não se encontra no artigo de Lindenstrauss, Olsen e Sternfeld, que se deve a R. Haydon e pode ser encontrada em [8].

Mas antes, dado um simplex S dizemos que um subconjunto convexo $F \subset S$ é uma *face* de S se $u \in F$ e $u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$ implica $v_i \in F$ para $i = 1, \ldots, n$.

5.3.2 Teorema. *Sejam S o Poulsen Simplex, F_1 e F_2 duas faces próprias fechadas de S e φ um homeomorfismo afim sobrejetivo que leva F_1 em F_2. Então φ pode ser extendido em um autohomeomorfismo de S que leva F_1 em F_2.*

5.3.3 Teorema. *Sejam S o Poulsen Simplex e R um simplex métrico. Então existe uma face F de S que é afinamente homeomorfa a R.*

5.3.4 Teorema. *Todo espaço métrico completo separável é o conjunto extremal de algum simplex metrizável.*

Munido desses teoremas, podemos mostrar algumas propriedades topológicas do conjunto extremal do Poulsen Simplex. Aqui, sempre suponharemos que S é o Poulsen Simplex.

5.3.5 Teorema. *O interior (relativo a norma induzida por* $\operatorname{ex} S$*) de qualquer conjunto compacto de* $\operatorname{ex} S$ *é vazio.*

Demonstração. Seja $K \subset \operatorname{ex} S$ compacto. Suponhemos, por absurdo, que $\operatorname{int} K \neq \emptyset$. Temos que existe um $U \subset S$ aberto não-vazio tal que $\operatorname{int} K = U \cap \operatorname{ex} S$. Como S é o Poulsen, então $\overline{\operatorname{ex} S} = S$ e assim $\operatorname{int} K$ é denso em U. Seja $F = \overline{\operatorname{conv} K}$. Então F é uma face que contém o aberto U de S o que é um absurdo. □

5.3.6 Teorema. *Todo espaço métrico compacto separável é homeomorfo a algum subconjunto fechado de* $\operatorname{ex} S$*.*

Demonstração. A prova deste teorema é consequência direta dos teoremas acima. De fato, pelo Teorema 5.3.4 é o conjunto extremal de algum simplex metrizável. E pelo Teorema 5.3.4 todo simplex métrico é homeomorfo a uma face de S. □

5.3.7 Teorema. *Para cada par de subconjuntos K_1 e K_2 homeomorfos compactos de* $\operatorname{ex} S$ *existe um automorfismo de S que leva K_1 em K_2.*

Demonstração. De fato, definindo $F_i = \overline{K_i}$ para $i = 1, 2$, temos que F_1 e F_2 são duas faces afinamente homeomorfas de S e portanto, pelo Teorema 5.3.2, temos que o homeomorfimo afim pode ser extendido em um autohomeomorfismo de $\operatorname{ex} S$ que leva F_1 F_2. □

5.3.8 Teorema. $\operatorname{ex} S$ *é conexo por caminhos.*

Demonstração. Sejam s_1 e s_2 dois pontos de S quaisquer. Como $[0, 1]$ é um subconjunto métrico compacto separável da reta, então pelo Teorema 5.3.6 existe um homeomorfimo h entre $[0, 1]$ e algum subconjunto fechado de $\operatorname{ex} S$. Assim a função contínua $h : [0, 1] \to \operatorname{ex} S$ é um curva contínua em $\operatorname{ex} S$.

Portanto, pelo Teorema 5.3.7, existe um autohomeomorfismo g de $\operatorname{ex} S$ tal que $g(h(0)) = s_1$ e $g(h(1)) = s_2$. Assim a função $g \circ h : [0, 1] \to \operatorname{ex} S$ é contínua e portanto define uma curva em $\operatorname{ex} S$ tal que seus pontos extremos são $g(h(0)) = s_1$ e $g(h(1)) = s_2$ o que implica que existe uma curva contínua ligando os pontos s_1 e s_2. □

O teorema acima é o resultado que pretendíamos chegar neste capítulo. Tomando $\mathcal{M}^1$ como o Poulsen Simplex S, temos que o espaço das medidas ergódicas $\mathcal{M}_E$ é o conjunto extremal de S e portanto $\mathcal{M}_E$ é conexo por caminhos.

Este resultado é a última conclusão mostrada neste texto, que o espaço de medidas ergódicas de sistemas dinâmicos com a propriedade de especificação é conexo por caminhos.

Bibliografia

[1] R. Bartle, The Elements of Integration, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1966.

[2] A.M. Blokh, Decomposition of dynamical systems on an interval, Russ. Math. Surv. **38** (1983), 133–134.

[3] H. Brezis, Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations, Universitext, Springer, New York, 2011.

[4] R. Bowen, Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms, Trans. Amer. Math. Soc **154** (1971), 377–397.

[5] J. Buzzi, Specification on the interval, Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), 2737–2754.

[6] J. B. Conway, A Course in Function Analysis, Graduate Texts in Mathematics, **96**, Springer-Verlag, New York, 1985.

[7] M. Denker, C. Grillenberger, K. Sigmund, Ergodic Theory on Compact Spaces, Lecture Notes in Mathematics **527**, Springer-Verlag, 1976.

[8] R. Haydon, A new proof that every polish space is the extreme boundary of a simplex, Bull. London Math. Soc. **7** (1975), 97–100.

[9] J. Lindenstrauss, G. Olsen, and Y. Sternfeld, The Poulsen simplex, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **28** (1978), 91–114.

[10] R. R. Phelps, Lectures on Choquet's theorem. Lecture Notes in Mathematics **1757**, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[11] E. T. Poulsen, A simplex with dense extreme points, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **11** (1961), 83–87.

[12] S. Ruette, Chaos for continuous interval maps - a survey of relationship between the various sorts of chaos, Preprint, disponível em `http://www.math.u-psud.fr/ ruette/publications.html`

[13] K. Sigmund, On dynamical systems with the specification property, Trans. Amer. Math. Soc. **190** (1974), 285–299.

[14] K. Sigmund, On the connectedness of ergodic systems, Manuscripta Math. **22** (1977), 27–32.

[15] M. Boyle, R. Pavlov, e M. Schraudner, Multidimensional sofic shifts without separation and their factors, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), 4617–4653.

[16] K. Oliveira, Um Primeiro Curso de Teoria Ergódica, Rio de Janeiro: Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2005.

[17] K. Oliveira, M. Viana, Fundamentos da Teoria Ergódica. Um Curso Introdutório, Versão preliminar, disponível em `http://w3.impa.br/ viana/out/fte.pdf`

[18] P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory. Graduate Texts in Mathematics **79**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.