



**INAOE**

# ESTUDIO DEL ESPARCIMIENTO DE LA LUZ EN EL OJO HUMANO

por

**Ismael Kelly Pérez**

Tesis sometida como requisito parcial para  
obtener el grado de

**DOCTOR EN CIENCIAS EN LA  
ESPECIALIDAD DE ÓPTICA**

en el

**Instituto Nacional de Astrofísica, Óptica y  
Electrónica**

Septiembre 2011

Tonantzintla, Puebla

Supervisada por:

**Dr. Luis Raúl Berriel Valdós (INAOE) y  
Dr. Neil Charles Bruce Davidson (UNAM)**

©INAOE 2011

El autor otorga al INAOE el permiso de  
reproducir y distribuir copias en su totalidad o en  
partes de esta tesis





INSTITUTO NACIONAL DE ASTROFÍSICA, ÓPTICA  
Y ELECTRÓNICA

# Estudio del esparcimiento de la luz en el ojo humano

por

Ismael Kelly Pérez

Tesis para cubrir parcialmente los requisitos para obtener el grado  
de

Doctor en Ciencias

en el

Departamento de Óptica

Agosto 2011

# *Resumen*

El ojo humano es el sistema formador de imágenes más importante que conocemos. La función principal de este sistema es captar luz y enviarla a la retina, para formar una imagen en su superficie. Debido a que el ojo está constituido por tejidos biológicos, éste crece, envejece y padece enfermedades. Todos estos procesos afectan la calidad de la imagen que se forma en la retina. Cuando se forman cataratas, el esparcimiento de la luz aumenta, lo que provoca que la imagen pierda calidad óptica. Esta degradación de la imagen es debida al esparcimiento de la luz que se genera en la misma dirección que la luz incidente. Para evaluar la calidad óptica del ojo, los oftalmólogos recurren a la lámpara de hendidura. Este instrumento ayuda al especialista a examinar el lente cristalino. Sin embargo, con esta técnica sólo se analiza el efecto del esparcimiento en sentido opuesto al de la luz incidente, lo que da como resultado una medida indirecta del efecto de este fenómeno en la formación de la imagen en la retina. Nuestro trabajo consiste en simular con la computadora el efecto del esparcimiento en el ojo humano con cataratas. El propósito es analizar la relación entre el esparcimiento que se dirige hacia adelante y el que se dirige hacia atrás. Hemos diseñado un modelo computacional del sistema óptico del ojo en el cual hay una distribución de partículas dentro del lente cristalino. Haciendo uso del método Monte Carlo y de la teoría de trazo de rayos exacto, simulamos los recorridos de los fotones en el ojo. Las partículas dentro del cristalino, muestran un índice de refracción que es diferente al del medio que las rodea y son esféricas. El esparcimiento de la luz generado por estas partículas se simula aplicando la teoría de Mie. En este trabajo mostramos los resultados de nuestro modelo computacional y los comparamos con otros resultados que se obtuvieron a partir de un modelo físico del ojo humano con esparcimiento.

# *Abstract*

The human eye is the most important image formation system that we know. The optics of the eye focuses light down onto the plane of the retina. Because of the eye's biological basis, it grows, ages and suffers disease. These processes affect the quality of image formation on the retina. In cataract formation, an increase in the light scattering produces a degradation of the image. This degradation is due to the forward scattering of the light. In order to evaluate the optical quality of the eye, clinicians use a slit lamp. This instrument helps the clinician to examine the crystalline lens. However, only the back scattering of light is available, and that results in an indirect measure of the effect of this phenomenon. Our work consists of simulating with the computer the scattering in the human eye with cataracts. The purpose is to analyze the relation between forward and backward scattering. We made a model of the human optical system in which there is a distribution of particles inside the crystalline lens. Using the Monte Carlo Method and the exact ray trace theory, we simulate the photon pathways in the eye. The small bodies have a refractive index which is different to that of the media and they are spherical. Scattering of light in these bodies is simulated using Mie theory. We show the results of our computational model and compare these results with other ones we obtained with a physical model of a human eye with scattering.

# *Agradecimientos*

*A Neil Bruce que me dejó hacer y deshacer.*

*A Luis Berriel por su apoyo incondicional.*

*A Pablo Artal por darme la oportunidad de trabajar en su laboratorio.*

*A Juan Manuel Bueno y a Guillermo Pérez por su tiempo.*

*A María Luisa por resolverme tantas dudas.*

*Al CONACYT por brindarme el apoyo económico.*

*A Moni, a Miles y a los Pelegrinos Viajeros.*

# CONTENIDO

Resumen	i
Abstract	ii
Agradecimientos	iii
Dedicatoria	iv
<b>1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2 ANTECEDENTES</b>	<b>4</b>
2.1 Sistema óptico del ojo humano . . . . .	4
2.1.1 Cómo funciona el sistema óptico del ojo humano . . . . .	4
2.1.2 Córnea . . . . .	6
2.1.3 Lente cristalino . . . . .	8
2.1.3.1 Cataratas . . . . .	10
2.2 Esparcimiento de la luz en el ojo humano . . . . .	13
2.2.1 Dónde se origina el esparcimiento . . . . .	14
2.2.2 El esparcimiento que se dirige hacia adelante y el que se dirige hacia atrás . . . . .	15
<b>3 COMPONENTES DEL MODELO COMPUTACIONAL</b>	<b>16</b>
3.1 Introducción . . . . .	16
3.2 Qué son los métodos Monte Carlo . . . . .	18
3.2.1 Función de densidad de probabilidad . . . . .	20
3.2.2 Función de distribución acumulada . . . . .	22
3.3 Esparcimiento de Mie . . . . .	24
3.3.1 Coeficientes de Esparcimiento . . . . .	27
3.3.2 Determinación de la función de fase del esparcimiento . . . . .	28
3.4 Trazo exacto de rayos . . . . .	30
3.4.1 Ecuaciones de trazo de rayos . . . . .	30
3.4.2 Reflexión en la retina . . . . .	34
3.4.3 Cambio de dirección . . . . .	35
3.5 Modelación y simulación de partículas . . . . .	37

---

3.5.1	Procesos puntuales . . . . .	37
3.5.2	Proceso de Strauss . . . . .	40
<b>4</b>	<b>EXPERIMENTO FÍSICO</b>	<b>43</b>
4.1	Introducción . . . . .	43
4.2	Medida de la calidad del sistema óptico humano con la técnica de doble paso . . . . .	44
4.3	Arreglo experimental de la técnica de doble paso . . . . .	46
4.4	Realización del experimento . . . . .	50
<b>5</b>	<b>RESULTADOS MODELO COMPUTACIONAL</b>	<b>60</b>
5.1	Implementación del modelo computacional . . . . .	60
5.2	Resultados del modelo computacional . . . . .	65
5.2.1	Análisis de acuerdo a la cantidad de partículas esparcidoras	66
5.2.2	Análisis del efecto del esparcimiento que produce la retina .	68
5.2.3	Análisis del diámetro de las partículas esparcidoras . . . . .	70
5.2.4	Análisis del índice de refracción relativo . . . . .	72
5.2.5	Análisis de la longitud de onda . . . . .	74
5.2.6	Análisis del diámetro de las partículas esparcidoras con las imágenes de punto extendido . . . . .	77
5.2.7	Análisis de la longitud de onda con las imágenes de punto extendido . . . . .	79
5.2.8	Análisis de la cantidad de partículas esparcidoras con las imágenes de punto extendido . . . . .	80
5.2.9	Comparación entre el modelo computacional y el experimental	82
<b>6</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>85</b>
	<b>Lista de Figuras</b>	<b>88</b>
	<b>REFERENCIAS</b>	<b>91</b>

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCIÓN

”El ciego vive en un mundo de neblina, de neblina verdosa o azulada y vagamente luminosa que es el mundo del ciego. El mundo del ciego no es la noche que la gente supone. El ciego vive en un mundo bastante incómodo, un mundo indefinido, mi caso no es especialmente dramático, ya que me fui quedando ciego con el tiempo. Es dramático el caso de aquellos que pierden bruscamente la vista: se trata de una fulminación, de un eclipse.”

*JorgeLuisBorges*

Las enfermedades oculares y el envejecimiento de los ojos están relacionados con un efecto negativo en la capacidad visual que podemos poseer. Estos padecimientos, producen variaciones del índice de refracción que conforma al medio óptico que resulta afectado. Del tal forma que se altera, de manera directa, al proceso de formación de imágenes que se produce en el ojo humano, lo que da como resultado que las imágenes que se imprimen en la retina aparezcan con una degradación de la calidad óptica.

Las principales causas de discapacidad visual y ceguera son, ante todo, enfermedades de los ojos que se relacionan con el envejecimiento. Una afección que suele desarrollarse en el adulto a una edad avanzada y, que resulta ser la primera causa de ceguera en el mundo es, la catarata. Ésta es una opacidad del lente cristalino del ojo, el cual normalmente es claro y transparente. Algunas de los síntomas comunes de la catarata son: visión nublada o borrosa; deslumbramiento o sensibilidad a la luz; visión doble; cambios en la detección del color; visión nocturna deficiente, causada por los efectos de las luce brillantes.

Cuando la luz entra en el ojo humano ésta es esparcida a causa de las imperfecciones de las superficies ópticas. El esparcimiento de la luz es un fenómeno que cambia la dirección, frecuencia o polarización de las ondas electromagnéticas, como la luz, cuando encuentran discontinuidades en un medio. Las propiedades ópticas de un medio están caracterizadas por su índice de refracción. Si el medio es homogéneo, la luz que pase a través de él, lo hará sin desviarse. Pero si existe algún obstáculo dentro del medio y, es iluminado por una onda electromagnética, las cargas eléctricas (del obstáculo) serán puestas en movimiento oscilatorio debido al campo eléctrico de la onda incidente, y las cargas eléctricas aceleradas radiarán energía electromagnética en todas direcciones, esta radiación secundaria se conoce como la radiación esparcida por el obstáculo.

La catarata es una afección originada por múltiples factores, y los lentes con cataratas pueden contener muchas fuentes ultraestructurales que esparcen luz. De acuerdo la relación que exista entre la longitud de onda y el tamaño de la partícula esparcidora, la dirección de la luz variará su trayectoria hacia adelante, si el ángulo de esparcimiento es menor de 90 grados, con respecto a la dirección que mantenía la luz antes de encontrarse con el obstáculo, y hacia atrás, si el ángulo es mayor de 90 grados. El esparcimiento producido a ángulos mayores de 90 grados dirige la luz hacia atrás, donde el clínico observa con una lámpara de hendidura, lo que da como resultado que menos luz llegue a la retina y por lo tanto, la imagen sea opaca. Este tipo de esparcimiento es producido por partículas que son pequeñas en relación a la longitud de onda de la luz incidente. Por otro lado, la luz que es esparcida a ángulos reducidos (esparcimiento hacia delante) puede afectar la formación de imágenes en la mácula. El esparcimiento hacia delante da como resultado una iluminancia de velo superimpuesta en la imagen retinal y una reducción del contraste retinal. Este fenómeno puede llevar a una variedad de molestias, especialmente un deslumbramiento. El tamaño de las partículas que generan este tipo de esparcimiento es mayor que la longitud de onda de la luz incidente.

El grado de desarrollo del padecimiento de la catarata en el cristalino del ojo es muy difícil medirlo. Esto se debe a que, la imagen que se forma en la retina es de acceso restringido y sólo es posible obtener información de la luz que se captura una vez que la señal inicial (o de referencia) es reflejada por la retina, pantalla en la cual inicia el proceso de la visión. Las técnicas más utilizadas para diagnosticar enfermedades en el ojo humano, como las cataratas, miden el esparcimiento de la

luz que se dirige hacia atrás y con esta medida, relacionan el índice de degradación que sufre la imagen que se forma en la retina[1, 2]. Por lo tanto, realizan una medida indirecta de la calidad de la imagen.

El propósito de este estudio es modelar en la computadora, el efecto del esparcimiento de la luz en la formación de imágenes en la retina así como en la pupila de salida y, analizar la relación que existe entre el efecto del esparcimiento que se dirige hacia adelante y el que se dirige hacia atrás. Particularmente, estamos interesados en estudiar el efecto del esparcimiento que generan distribuciones de partículas cuyo tamaño oscila entre 1 y 4  $\mu m$  y, que se encuentran aleatoriamente dispuestas en el núcleo del lente cristalino. En estudios hechos para determinar los orígenes biológicos de las cataratas se encontró que ciertas estructuras aparecen con más frecuencia en los lentes con cataratas que en los que son transparentes. Este hecho hace pensar que estas partículas, son fuentes potenciales del esparcimiento de la luz que se dirige hacia delante. Estos cuerpos forman objetos esféricos, y se encuentran separados por distancias superiores a unas pocas longitudes de onda de la luz incidente y la distribución es aleatoria. Debido a las características de forma, tamaño y distribución que cumplen estas estructuras, la solución de Mie se usa para describir apropiadamente el esparcimiento de la luz causado por estas partículas.

# CAPÍTULO 2

## ANTECEDENTES

### 2.1 Sistema óptico del ojo humano

Un aspecto muy importante para adentrarse y comprender el proceso complejo de la visión humana, consiste en conocer cómo se forma la imagen en la retina cuando un flujo de luz entra hacia el ojo. Las características geométricas y físicas de los componentes ópticos de este sistema visual conllevan que el proceso de formación de imágenes dé como resultado una señal de salida con ciertos defectos. Los fenómenos que originan imperfecciones en la imagen han sido motivo de múltiples estudios a partir de diversos enfoques. En especial, es de gran interés obtener una medida de la calidad de la imagen que se forma en la retina [3]. A nosotros nos interesa estudiar el efecto que tiene el esparcimiento de la luz en la imagen que se forma en la retina. Para esto, comenzaremos haciendo una introducción del sistema óptico del ojo y de los componentes donde suele presentarse el fenómeno de esparcimiento.

#### 2.1.1 Cómo funciona el sistema óptico del ojo humano

El ojo humano, básicamente, tiene la misma función que una cámara oscura: proyecta imágenes del mundo exterior sobre la zona interior de su superficie. Cuando abrimos nuestros ojos, éstos capturan imágenes de los objetos que nos rodean, siempre y cuando exista una fuente de luz iluminando el lugar en el que se encuentran tales objetos.

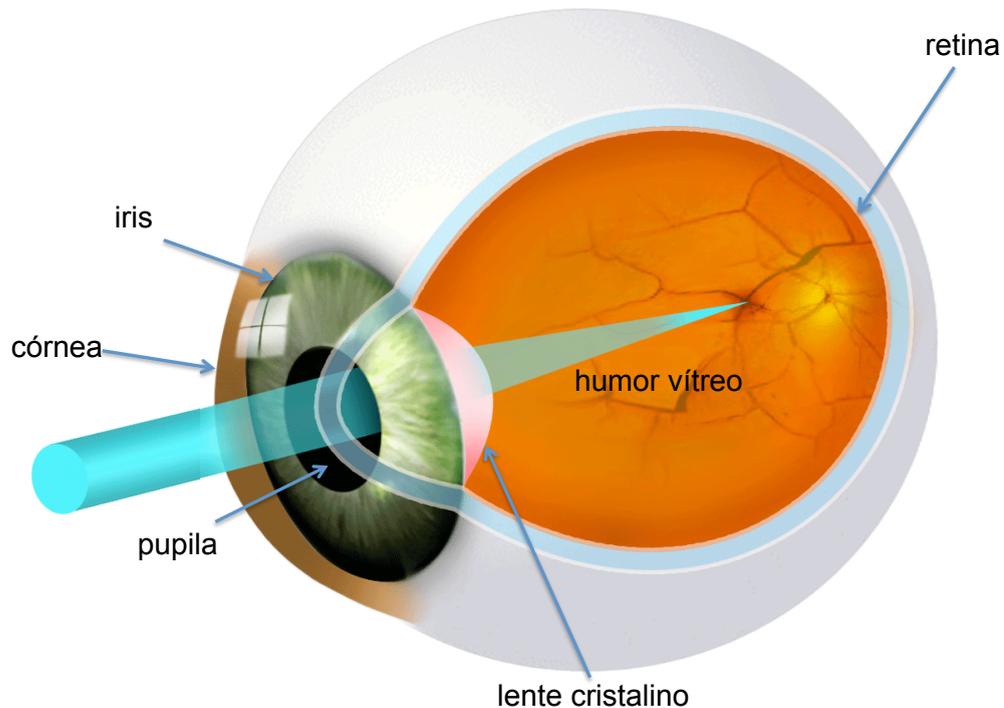


FIGURA 2.1: Diagrama del ojo humano

Las ondas electromagnéticas visibles, que emite o refleja un objeto, entran en el ojo pasando primero a través de la una lente convexa, que está constituida por varias capas, a la cual se le conoce como córnea. Ésta tiene la forma de un domo transparente y se encuentra al frente del ojo.

A continuación, la luz avanza dentro de una apertura circular que se forma en el centro del iris. A esta apertura, se le llama pupila. El tamaño de la pupila cambia debido a las fluctuaciones en la intensidad de la luz que está entrando. Si vemos un objeto muy brillante la pupila reduce su tamaño, si por el contrario, la luz que alcanza a capturar es muy poca la pupila se mantendrá con un diámetro grande. Entre la córnea y el iris tenemos el humor acuoso.

El ojo cuenta con un lente que tiene la capacidad de modificar su forma dependiendo de la distancia a la que nos encontremos de los objetos que deseamos ver. A este dispositivo óptico, usualmente, sólo se le llama el lente del ojo humano pero, para diferenciarlo mejor de la cornea que es también una lente y, debido a que las células que lo forman están compuestas por unas proteínas llamadas cristalinas, se le define como el lente cristalino. Su estructura geométrica es parecida a la de un disco con grueso cuyas caras opuestas son convexas (o a la de una cápsula circular con sus caras convexas). Luego de atravesar el cristalino, la luz continua hacía el

humor vítreo, una sustancia transparente y gelatinosa claro que constituye 80 % del volumen del ojo, para finalmente alcanzar la retina.

Los elementos que se describen anteriormente, son los que principalmente participan en el proceso de formación de imágenes en la retina. La retina es una membrana compleja, compuesta sobretodo por células nerviosas. La retina traduce la señal luminosa en señales nerviosas. Dentro de nuestro modelo, la retina sería equivalente a la película en que grabaríamos la imagen capturada del mundo exterior y que nos daría un registro de la manera en la que la interacción de los fotones con los elementos ópticos afecta la calidad de las imágenes que procesará el cerebro.

La formación de imágenes en el ojo humano es muy parecida a aquella que se produce en un sistema óptico construido por el hombre, y obedece las leyes convencionales de óptica. Sin embargo, existen algunas diferencias notables ya que sus componentes están constituidos por tejidos biológicos. Tal vez, una de las características más relevantes es que el sistema óptico humano responde a los cambios del medio ambiente, por ejemplo, el iris modifica su tamaño de acuerdo con la intensidad de luz que hay en una habitación. Además, el ojo crece, envejece y padece de enfermedades. Y, a diferencia de la mayoría de los sistemas ópticos creados por el hombre, las superficies de este dispositivo son rotacionalmente asimétricos sobre un solo eje. Todo esto hace que el sistema óptico del ojo humano diste de ser perfecto, en particular, cuando la pupila presenta un diámetro grande [3], y por lo tanto, las imágenes que se forman en la retina presentan variaciones con respecto a la figura del objeto-escena que se desea reproducir ópticamente. Al atravesar los medios bio-ópticos, el conjunto de haces que provienen del objeto-escena y, que conforman la figura que se desea reproducir, no quedan ordenados como se esperaba en la retina. Esa falta de correspondencia entre la figura del objeto-escena y la imagen se considera que se debe a la suma de defectos inducidos por el sistema óptico.

### 2.1.2 Córnea

La córnea está diseñada para transmitir luz hacia dentro del ojo, y además, es el principal componente óptico en este sistema, que induce a los haces de luz a cambiar de dirección. Los componentes celulares y extracelulares, que le dan forma a la córnea, presentan la misma composición química básica de otras células

y tejidos del cuerpo que normalmente esparcen la luz extensamente, lo que hace que sean opacos. Sin embargo, la forma en que se encuentran organizados las células y demás componentes que le dan forma a la córnea, reduce la variabilidad del índice de refracción dentro de ella, y por lo tanto, también el esparcimiento [4, 5]. La córnea está compuesta por diferentes capas y cada una de ellas cumple con una función específica que ayuda al funcionamiento óptimo dentro del sistema óptico humano. La manera en cómo se transmite la luz en la córnea es crucial para la generación de una imagen de alta calidad en la retina. Un elevado grado de estructura regular en la córnea ayudará a que ésta, se mantenga transparente y, que la refracción ocurra con una alta precisión. A diferencia de las otras estructuras oculares, la córnea no sufre cambios importantes con el transcurso de la edad, sin embargo, porciones pequeñas de edema corneal, cicatrices o depósitos metabólicos pueden llegar a afectar profundamente el funcionamiento óptico de la córnea [6, 7, 8].

Las superficies principales que componen la córnea son: la película de lágrimas, el epitelio, la membrana de Bowman, el estroma, la membrana de Descemet y el endotelio. La capa en la que se origina la mayor cantidad de esparcimiento es el estroma, ya que ocupa un 90 por ciento del espesor corneal. El estroma consiste en láminas de fibras de colágeno que están bien organizadas y que se encuentran dispuestas de una forma que ayuda a la transparencia de la córnea. Las principales causas de generación de esparcimiento están relacionadas con procesos inflamatorios que se generan dentro del estroma por enfermedades o por traumas en la córnea, y se manifiestan con problemas para tener una capacidad de ver adecuadamente. La falta de transparencia de la córnea y la alteración de la forma de la superficie corneal, también se asocian con cierta pérdida de la vista y, por lo tanto, pueden ocasionar esparcimiento dentro del ojo humano. Los médicos asocian que si hay una pérdida grave de la visión se debe, generalmente, a que existen condiciones inflamatorias graves en la córnea. Por otro lado, si se presenta una pérdida de la visión gradual, ésta la relacionan con una enfermedad corneal que evoluciona lentamente, como ocurre cuando se produce una modificación en forma de la córnea que, a su vez, genera una alteración en el índice de refracción; o cuando sucede una acumulación lenta de opacidades en esta superficie[9].

Dentro de los padecimientos que pueden ser fuente de esparcimiento se encuentran las úlceras en la córnea que pueden ser causadas por algún trauma físico, exposición a químicos o, por alguna infección. Las úlceras son una manifestación

de que ha ocurrido una disminución del epitelio corneal. Lo que podría producir, sobretodo en las primeras etapas de su desarrollo, variaciones localizadas del índice de refracción y, por lo tanto, se formarían imágenes con una cantidad considerable de esparcimiento. Como otro caso tenemos que la acumulación de agua en la córnea, puede causar un aumento en el espesor corneal, así como pérdida de la transparencia en esta superficie, y por consiguiente, una reducción de la capacidad visual. Cuando esto sucede se asocia que hay un edema corneal. El edema corneal ocurre como una consecuencia de un proceso inflamatorio que, altera el arreglo espacial de las fibras de colágeno del estroma, lo que provoca que la córnea pierda su transparencia [6]. En este caso, la agudeza visual se reduce, ya que, las fuentes puntuales de luz se extienden en la retina debido al efecto del esparcimiento, haciendo que se presenten halos cuando dirigimos la mirada hacia una fuente de luz. Además de los dos casos anteriores, las cicatrices en el estroma aparecen como opacidades en la córnea, y causan esparcimiento en la luz que forma la imagen en la retina. Las cicatrices pueden llegar a afectar la forma de la córnea. Las cicatrices pueden aparecer luego de alguna intervención médica, que tuvo por objetivo corregir algún error refractivo en el ojo. Para realizar esta operación los médicos recurren al empleo de técnicas basadas en la ablación con láser, con las cuales modifican la curvatura de la córnea. Con estas técnicas se remueve algo de colágeno que se encuentra en el estroma y durante el proceso de regeneración de colágeno en esta superficie, que se origina después de terminada la operación, se produce un efecto colateral que consiste en la formación de cicatrices. La regeneración de colágeno incrementa el recorrido óptico de la luz que viaja a través de la córnea, lo que da lugar que se induzca una aberración óptica. Y además, el tejido con cicatrices, que nuevamente se vuelve a formar, muestra una organización diferente al que, originalmente, presentaban las capas de colágeno. Por lo tanto, esto ocasiona una variación importante en el índice de refracción.

### 2.1.3 Lente cristalino

Esta es una lente flexible y ópticamente densa, que se encuentra entre la córnea y la retina. La función del lente cristalino es recoger los rayos de luz que entran al ojo y dirigirlos enfocados a la retina. Para poder llevar acabo su función, el lente cristalino tiene dos propiedades ópticas principales que son, como en la córnea, la transparencia y el poder de refracción. La forma que tiene el lente cristalino se describe como biconvexa, las superficies anterior y posterior se aproximan a una

parábola. Esta lente presenta cuatro componentes que son: la cápsula, una membrana fina y elástica que rodea al cristalino; el epitelio, situado detrás de la cápsula anterior, es una monocapa de células que al acercarse al ecuador se transforman en fibras cristalinas; la corteza o cortex, formado por capas concéntricas de fibras cristalinas; y el núcleo, parte central del cristalino.

La cápsula que rodea al lente cristalino es transparente y acelular. Se dice que es la membrana basal más gruesa que hay en el cuerpo humano. Cuando se le observa bajo un microscopio electrónico, se puede notar que está formada por capas delgadas paralelas [10]. Esta estructura de capas delgadas de la cápsula del lente cristalino parece desaparecer con la edad. La membrana basal es una capa acelular que sirve de sostén y, está soportada por un tipo específico de colágeno que es largo y flexible.

El epitelio es una capa individual de células que cubre la cara anterior del lente cristalino, se encuentra entre la cápsula y las fibras del lente. Las células que forman el epitelio tienen varias funciones, entre las principales vale la pena mencionar, la producción de las fibras del lente y la síntesis de los cristalinos y las proteínas de la membrana [11]. El diámetro de las células que componen al epitelio del lente humano oscila entre las 9 y 17 micras [12]. El tamaño de estas células aumenta con la edad, lo que sugiere que hay un cambio de densidad celular [13]. Además, el epitelio del lente cristalino presenta un proceso de muerte celular (apoptosis), que está regulado genéticamente. Debido a este proceso de muerte programada de células se han llevado a cabo investigaciones que tienen como objetivo identificar si el epitelio se relaciona con la formación de cataratas [14]. Estas investigaciones presentan como hipótesis que, el funcionamiento del lente cristalino es normal mientras se conserva la integridad del epitelio del lente cristalino y, una reducción en el número de las células en el epitelio puede provocar cambios en el proceso de regulación que el lente cristalino realiza para mantener un equilibrio interno, lo que a su vez, podría llevar a la formación de cataratas.

El lente cristalino consiste, además, del núcleo y de la corteza. El núcleo comprende aproximadamente un 84 % del diámetro y del grosor del lente, mientras que el resto le pertenece a la corteza [15]. La corteza y el núcleo del lente cristalino están constituidos por células que se caracterizan por tener un contenido elevado de proteínas, manifestar la ausencia de núcleo, mitocondrias, lisosomas, ribosomas y retículo endoplásmico, y estar rodeadas por membranas poco permeables.

La forma de estas células es alargada, por lo que se conocen con el nombre de fibras. Dentro del citoplasma de estas fibras, se presenta una elevada concentración de un tipo de proteínas, que se conocen como cristalinas. Las cristalinas del lente cristalino se acumulan en concentraciones tres veces superiores a las habituales, lo que permite que las fibras presenten un índice de refracción superior al de los líquidos que rodean a esta superficie refractiva. Se ha establecido que, la transparencia que caracteriza al lente cristalino, se debe a la homogeneidad óptica de las fibras, y esta homogeneidad está relacionada con el embalado ordenado y firme que presentan las cristalinas. Sin embargo, los fundamentos físicos de la transparencia del lente cristalino aún no se comprenden completamente [16].

Trokel en 1962 [17], inició el estudio del concepto de transparencia desde el punto de vista físico, y expuso que la transparencia es consecuencia de la distribución uniforme de las proteínas, que se encuentran dentro del citoplasma de las fibras, de modo que no existen fluctuaciones apreciables en el índice de refracción. Por otro lado, conforme avanza la edad del lente cristalino, la transparencia se va reduciendo, haciendo que su color se torne amarillento, y el grosor aumente. Estos cambios en el lente cristalino se han estudiado desde hace tiempo, llevando a cabo un análisis de la cantidad de luz que es absorbida y esparcida [18]. En varios estudios se ha señalado el daño irreversible que habría en los lentes cristalinos, una vez que se inicia el proceso de oxidación en las cristalinas [19]. Y se ha sugerido, que estas alteraciones, que se originan en las cristalinas, pueden traer consigo variaciones importantes en el índice de refracción dentro del núcleo del lente cristalino, lo que a su vez, podría originar esparcimiento de la luz [4]. Una condición patológica que está vinculada con la pérdida de transparencia en el ojo y con efectos de esparcimiento son las cataratas. Conforme las fibras y sus cristalinas maduran, sin ser remplazadas, el daño molecular progresa, lo que da como resultado el desarrollo de la opacidad en los lentes cristalinos con cataratas. Se ha supuesto en varios estudios que el daño producido por la oxidación en las cristalinas se ha relacionado con el origen de las cataratas [20, 21].

### 2.1.3.1 Cataratas

Cualquier opacidad del lente cristalino se considera una catarata. En otras palabras, la catarata consiste en la pérdida de la transparencia del lente cristalino.

Las cataratas se desarrollan por una variedad de razones, entre las que se encuentran la exposición por periodos largos a radiación ultravioleta, efectos secundarios de enfermedades como la diabetes, hipertensión y la edad avanzada. Las cataratas también se pueden originar, por una herida o algún trauma físico en el ojo [22]. Y además, se pueden deber al uso de ciertos medicamentos, como los corticoides [23]. El efecto de las cataratas en la visión, generalmente consiste en una reducción en la sensibilidad al contraste, un aumento del resplandor y halos al mirar objetos cercanos a fuentes de iluminación en la noche sobretodo, y un cambio en la sensibilidad al color debido a lo amarillento de los lentes cristalinos [24].

Las cataratas afectan la manera cómo se forma la imagen en la retina y esto indica que provocan un efecto de esparcimiento que se dirige hacia adelante. Este esparcimiento se debe a que dentro del lente cristalino se han desarrollado una cantidad considerable de variaciones localizadas del índice de refracción y, por lo tanto, se afecta directamente el recorrido de la luz hacia la retina, lo que finalmente, causa que la imagen que se forma allí está deteriorada y se afecte la visión. El grado de afectación puede ser muy elevado, llegando a causar la ceguera de quién padezca determinado tipo y grado de desarrollo de cataratas. Según la zona de opacidad las cataratas se pueden clasificar en: - Cataratas nucleares. Originan un mayor poder de refracción del lente cristalino. Además, el núcleo tiende a obscurecerse, cambiando de claro para hacerse amarillo y algunas veces hasta café. Es el tipo de catarata más asociado con la edad. - Catarata subcapsular anterior. La opacidad se localiza por debajo de la cápsula del lente cristalino. Dentro de esta clasificación podemos encontrar que hay dos tipos las anteriores y las posteriores. Las más comunes son las posteriores, éstas se desarrollan muy rápido. - Cataratas corticales. La opacificación afecta a la corteza del lente cristalino.

Como se ha mencionado las cataratas son una enfermedad que se presenta debido a múltiples factores. Sin embargo, uno de los más importantes es la edad, se estima que 7 de cada 10 personas que alcanzan los 65 años padecen algún tipo de cataratas. A este tipo de catarata, generada por la edad, se le define como catarata senil. Los efectos que tiene el paso de tiempo (edad) en las células que componen al lente cristalino, se relacionan con el daño que se genera en las cristalinas por un proceso de oxidación, que se presenta de forma contundente cuando se tiene edad avanzada, y que se ha sugerido es la principal causa de la formación de cataratas. Conforme avanza el proceso de oxidación dentro de las fibras, las cristalinas pueden

formar agrupaciones con un elevado peso molecular, lo que traería consigo variaciones localizadas del índice de refracción y podría causar esparcimiento de la luz [25, 26]. Pero, aunque la oxidación puede ser el proceso bioquímico fundamental que da lugar a la formación de cataratas en los lentes cristalinos relacionada con la edad, se ha observado que las proteínas dañadas y, además, fusionadas en conjuntos de elevado peso molecular, tienen una distribución homogénea y producen partículas pequeñas e irregulares que esparcen la luz en ángulos que harían que ésta se dirija hacia atrás; por lo tanto, lo más probable es que no conformen las partículas esparcidoras más grandes, las cuales resultan ser la fuente del mayor esparcimiento de la luz, sobretodo de la que, esparcida, se dirige hacia adelante, y causa aquellos defectos en la visión, como los halos y deslumbramientos, que se relacionan directamente con la presencia de cataratas.

### Cuerpos Multi-laminares

Anteriormente, se comentó que el proceso de oxidación puede ser un factor determinante en el nacimiento de cataratas en el lente cristalino. Sin embargo, el hecho que este fenómeno de oxidación se produzca en la cristalinas no ha significado que ellas se conviertan, al agruparse, en las partículas que más capacidad tengan de esparcir la luz cuando se presenta un problema de cataratas. Lo más seguro es que existan otras fuentes de esparcimiento, tales como partículas más grandes, que podrían generar cantidades de esparcimiento más significativas [27].

Además de las cristalinas, otra parte de las fibras que sufre cambios irreversibles debido a un proceso de oxidación son las membranas. Es posible que el daño, que causa la oxidación, en las membranas pudiera generar partículas esparcidoras que sean más grandes que las partículas producidas por la oxidación de las cristalinas. Estas partículas de mayor tamaño, podrían ser más efectivas, que las partículas más pequeñas, produciendo variaciones localizadas considerables del índice de refracción del medio y esparciendo la luz.

Cuando las membranas se dañan, aparecen unos objetos que tienen un núcleo esférico cubierto por varias capas de membrana, y se les denomina cuerpos multilaminares. Estos cuerpos ocupan solamente una fracción de  $3 \times 10^{-5}$  del volumen de una catarata. El tamaño de su diámetro varía de  $1 \mu\text{m}$  a  $4 \mu\text{m}$  con un radio promedio de  $2.4 \mu\text{m}$  y se encuentran dentro del plano ecuatorial en el núcleo del lente cristalino. La presencia de estos cuerpos multilaminares ocurre entre 5 y 7 veces con más frecuencia en lentes con cataratas, que en lentes transparentes y con

la misma edad que los anteriores[28]. Estas partículas grandes están distribuidas aleatoriamente dentro del núcleo de los lentes cristalinos con cataratas seniles. Debido a que estos cuerpos tienen forma globular y sus dimensiones son comparables con la longitud de onda de la luz blanca, cumplen los criterios de las partículas esparcidoras grandes que potencialmente producen un esparcimiento significativo hacia delante.

## 2.2 Esparcimiento de la luz en el ojo humano

Cualquier desviación del frente de onda se puede considerar como un efecto inducido debido a alguna imperfección óptica que sea producida por algún medio constituyente del sistema reproductor de imágenes. Cuando un medio óptico tiene una distribución de variaciones localizadas del índice de refracción parte de la luz que viaje a través de él se desviará aleatoriamente de su trayectoria esperada, lo que originará un halo uniforme en la imagen retiniana [34]. A este efecto se le conoce como esparcimiento de la luz. El esparcimiento de la luz es causado porque el medio óptico no es homogéneo ya que contiene partículas cuyo índice de refracción es diferente al del medio en el que se encuentran. La distribución angular de la luz que es esparcida depende de varios factores; en particular, el tamaño y la forma de la partícula esparcidora, la diferencia entre los índices de refracción del medio y de la partícula y, la escala de las partículas con respecto a la longitud de onda [30, 32]. De modo que, la distribución angular de la luz esparcida puede ser compleja y si la luz se esparce más de una vez resulta aún más compleja. En medios biológicos, la distribución angular puede ser tan compleja que no sea posible predecir la cantidad de luz que es esparcida hacia adelante a partir de medir el esparcimiento de la luz hacia atrás. Esto es particularmente importante, ya que es relativamente sencillo medir directamente, en un ojo vivo, el esparcimiento de la luz hacia atrás pero resulta imposible medir de forma directa el esparcimiento que se dirige hacia delante.

Considerando que las partículas esparcidoras son esféricas, de acuerdo a su tamaño se establecen dos alternativas para determinar el esparcimiento que producen. Si tenemos partículas cuyo diámetro es menor que la longitud de onda de la luz incidente se puede usar el método de Rayleigh [31] para analizar como se verá afectada la luz cuando se encuentre con una partícula con esta característica. Y si las partículas esparcidoras tienen un diámetro mayor que la longitud de onda se

aplica la solución de Mie [29, 31, 32] para estudiar la distribución de la intensidad de la luz con respecto al ángulo de esparcimiento por este tipo de partículas.

El esparcimiento que se modela con Rayleigh nos dice que la cantidad de luz esparcida hacia delante y hacia atrás es igual y que la distribución de la luz es homogénea en ambas direcciones. Por lo tanto, el efecto que generaría la luz esparcida hacia delante sería el de producir un incremento uniforme en la luz de fondo de la imagen. Y, debido a la luz que se esparce hacia atrás, con las partículas esparcidoras dentro del régimen Rayleigh, parte de la luz con la que se ilumina sería regresada. Por otro lado, la presencia en el ojo de fuentes esparcidoras de luz que cuentan con un tamaño semejante al de la longitud de onda de la luz incidente, generaría que la mayor parte de la luz se esparciera hacia delante. Esto provoca que, con partículas esparcidoras bajo el régimen de Mie, la luz se desvíe en la región central de la imagen. En ambos regímenes el efecto que se tiene es que se reduce la capacidad visual, disminuyendo la sensibilidad al contraste y generando un aumento en la sensibilidad al deslumbramiento [35].

En esta investigación nos enfocamos a estudiar a partir de un modelo computacional el efecto que tiene el esparcimiento en el régimen de Mie en la formación de imágenes. La córnea y el lente cristalino, son los medios ópticos del ojo humano que resultan ser las fuentes principales de esparcimiento [36]. Aunque nos enfocamos en el estudio del esparcimiento que se genera en el lente cristalino, es importante describir a la córnea y algunos de sus padecimientos.

### 2.2.1 Dónde se origina el esparcimiento

Dentro del ojo humano hay cuatro fuentes principales que contribuyen a la cantidad de luz que es esparcida: la cornea, el iris y la esclera, el lente cristalino y la retina. El humor vítreo y el humor acuoso ocupan un volumen importante dentro del ojo, sin embargo, resultan ser medios homogéneos.

El esparcimiento de la luz que genera la cornea permanece más o menos constante con la edad, pero puede incrementarse por algún padecimiento o como un efecto no deseado de una cirugía refractiva [43, 44]. En el iris y la esclera tenemos que dependiendo del nivel de pigmentación, parte de la luz que pasa por ellos será transmitida y puede contribuir a la formación de imágenes en la retina, sin embargo este es un efecto no deseado: a la luz que se transmite en esta zona se le llama

falsa luz. El cristalino muestra un aumento del esparcimiento de la luz con la edad, especialmente cuando la gente desarrolla cataratas. Y en la retina, no toda la luz es absorbida, de modo que parte de la luz que llega a ella será reflejada hacia atrás y se esparcirá [45].

En este trabajo de investigación nos concentraremos en estudiar los efectos que tiene, principalmente, el cristalino en el esparcimiento de la luz. Nos proponemos analizar la manera en que se relaciona la presencia de unas partículas, que se incrementan con cierta regularidad en personas que padecen cataratas, con la cantidad de luz que se esparce y, por lo tanto, con la calidad de la imagen que se forma en la retina.

### **2.2.2 El esparcimiento que se dirige hacia adelante y el que se dirige hacia atrás**

Para llevar acabo un diagnóstico del efecto que tiene el esparcimiento de la luz que se origina en la cornea o en el cristalino, los médicos recurren a una técnica que emplea una lámpara de endidura y, observan el reflejo que se produce por alguna de las superficies que puede afectar la formación de imágenes en la retina. A partir de lo que observa, el médico determina qué elemento es el que está dañado y cuál es el efecto que esto podría producir en la imagen que vemos. Sin embargo, podemos notar que el médico realiza una media subjetiva, depende de cómo ve él, por otro lado, no es una medida directa, observa un reflejo y no tiene acceso a la imagen que se genera en la retina. Por lo tanto, este método tiene la desventaja de que el esparcimiento de la luz que evalúa no es el que llega a la retina y por ello no es el que afecta la calidad de la imagen en la retina.

Una partícula que presenta un índice de refracción diferente al medio que la envuelve puede hacer que la luz que se esparza lo haga hacia adelante o hacia atrás. Cuando la luz se esparce con un ángulo mayor de 90 grados con respecto al haz de luz incidente, decimos que el esparcimiento de la luz se dirige hacia atrás. La luz con este efecto no llega a la retina. Así que, la formación de imágenes en la retina se ve afectada, en realidad, por la luz que se esparce hacia adelante. Una parte fundamental del estudio del esparcimiento, que llevaremos acabo, consiste en analizar la relación que existe entre la luz que se esparce hacia adelante y la que se esparce hacia atrás.

# CAPÍTULO 3

## COMPONENTES DEL MODELO COMPUTACIONAL

La computadora juega un papel central en la realización de este trabajo de investigación. El punto inicial en un enfoque computacional, para llevar a cabo una investigación científica, es un modelo matemático del fenómeno físico que deseamos analizar. En este capítulo se hace una descripción de los conceptos básicos que se emplearon para el diseño y la construcción del modelo computacional que se desarrolló para estudiar el esparcimiento de la luz en el ojo humano debido a la presencia de cataratas en el lente cristalino.

### 3.1 Introducción

El sistema que nos concierne modelar es el ojo humano, entendido como un dispositivo óptico que registra imágenes en una pantalla, cuando la radiación visible penetra los medios ópticos que lo componen. Este sistema óptico tiene una forma que se aproxima a una esfera, cuyo diámetro mide 25 mm. Por motivos de protección, gran parte de la esfera está encerrada dentro de una cavidad, y sólo una fracción se muestra al exterior. La fracción que se encuentra expuesta al exterior es la componente de entrada de este sistema. El ojo humano está conformado por una superficie de entrada, la cual consiste de varias capas; en seguida hay un medio acuoso; después tenemos un diafragma que rodea la periferia de la cara anterior de un lente biconvexo; al final del lente biconvexo se encuentra una cámara que abarca cuatro quintas partes del volumen total del ojo, esta cámara está llena

con un líquido compuesto por 99 por ciento de agua; y por último se encuentra la retina, una pantalla que ocupa más de la mitad posterior de la superficie de la esfera.

El objetivo de nuestro modelo computacional es analizar cómo se forman las imágenes en la pantalla cuando los medios ópticos no son homogéneos, es decir, dentro de alguno o varios de los medios podrían presentarse variaciones localizadas del índice de refracción. Estas variaciones, se pueden modelar como partículas esféricas que contienen un índice de refracción diferente al del medio en el que se encuentran. En el momento en que un haz de luz, emitido por el objeto-escena, se encuentra con alguna partícula de este tipo el haz se desvía, aleatoriamente, de la trayectoria esperada. La desviación de un haz de luz que choca con una inhomogeneidad esférica está relacionada con el tamaño de la partícula y, con la razón que existe entre el índice de refracción de la partícula y el del medio que la envuelve. En particular, este trabajo de investigación se centra en el estudio del lente cristalino cuando contiene ciertas partículas que podrían ser las causantes del desarrollo de cataratas en la zona nuclear [27].

Dentro del lente biconvexo que forma parte del sistema óptico humano, se desarrollan estructuras cuya forma es similar a la de una esférica, que muestren alteraciones en el índice de refracción de esta superficie óptica. La cantidad de estas estructuras, distribuidas aleatoriamente en el lente biconvexo, varía llegando a alcanzar en algún caso extremo el número de 4,000,000 [46]. Por limitaciones numéricas, nosotros modelamos distribuciones que se encuentran en el rango de las 100,000 a las 400,000 partículas.

El efecto de la interacción de algunos de los haces de luz, que son enviados hacia el sistema, con las partículas que representan las inhomogeneidades en el lente biconvexo, se imprimirá en la pantalla que representa la retina del ojo humano. La imagen que se registre en esta pantalla mostrará ciertas distorsiones que son producto de los haces de luz que resultan desviados. El sistema carece de una salida al exterior, esto hace que experimentalmente no sea posible colocar un detector que registre la imagen que se forma en la retina, por lo tanto, los haces de luz que alcancen la pantalla se reflejan de manera difusa y salen por la entrada del sistema.

## 3.2 Qué son los métodos Monte Carlo

Los métodos Monte Carlo se han desarrollado para llevar a cabo simulaciones estocásticas. Un método Monte Carlo consiste en representar la solución de un problema como un parámetro de una población hipotética y hacer uso de una secuencia aleatoria de números para construir una muestra de la población, a partir de la cual se puedan obtener estimaciones estadísticas del parámetro [47].

Un evento aleatorio es un evento que tiene más de un resultado posible. A cada resultado se le puede asociar una probabilidad. El resultado de un evento aleatorio no es predecible, sólo se conocen los resultados posibles y sus probabilidades. En contraste, un evento que tiene sólo un resultado posible, la probabilidad del resultado es la unidad.

Los métodos Monte Carlo abarcan el área de las matemáticas experimentales que están concernidas con experimentos de números aleatorios [48]. Los problemas que se pueden tratar con los métodos Monte Carlo son de dos tipos llamados probabilísticos y deterministas de acuerdo a si están relacionados o no con la conducta y el resultado de procesos aleatorios. En el caso de un problema probabilístico el enfoque de Monte Carlo más simple es observar números aleatorios, seleccionados de tal forma que estos números simulen directamente el proceso físico aleatorio del problema original, e inferir la solución a este problema a partir del comportamiento de estos números aleatorios. En ocasiones, la aplicación del método Monte Carlo se usa para analizar problemas que no tienen un componente aleatorio explícito, en estos casos un parámetro determinista del problema se expresa como una distribución aleatoria y se simula dicha distribución. Un ejemplo de problema determinista que se presta a la aplicación de una técnica de Monte Carlo es el cálculo de una integral definida.

El método Monte Carlo proporciona soluciones aproximadas para una variedad de problemas matemáticos al producir experimentos de muestreo estadístico en una computadora. Extraordinariamente, el método se aplica a problemas con ningún contenido probabilístico así como a aquellos problemas que muestran una estructura probabilística inherente [49]. Podemos hacer una gráfica o varias donde se observe el proceso aleatorio de la dirección que sigue un fotón cuando se encuentra a su paso una partícula con un índice de refracción que varía con respecto al medio que la envuelve.

Tradicionalmente, los fenómenos físicos se representan con ecuaciones matemáticas, las cuales se resuelven empleando diferentes métodos numéricos. Sin embargo, los fenómenos físicos que resultan ser complejos, se pueden considerar como un conjunto de procesos básicos. Cada proceso individual se puede tratar de forma más asequible, si lo comparamos, con el hecho de intentar realizar el análisis completo de los fenómenos macroscópicos [50]. Un método que suele ser explotado para determinar el comportamiento promedio de un sistema, a partir del análisis de individual de sus componentes, es el método Monte Carlo.

Los métodos numéricos que se conocen con el nombre de métodos Monte Carlo pueden describirse como métodos de simulación estadística, en los cuales la simulación estadística se define en términos generales como cualquier método que utiliza números aleatorios para realizar dicha simulación.

Los métodos de simulación estadística se pueden contrastar con los métodos convencionales de discretización numérica (por ejemplo, elementos finitos), los cuales se aplican en ecuaciones diferenciales ordinarias o parciales que describen algún sistema matemático o físico fundamental [51]. En muchas aplicaciones del método Monte Carlo, el proceso físico se simula directamente, e incluso no hay necesidad de anotar las ecuaciones diferenciales que describen el comportamiento del sistema. El único requisito es que el sistema físico (o matemático) sea descrito con funciones de densidad de probabilidad (*pdfs*: siglas en inglés), en otras palabras, el comportamiento del sistema se puede describir con *pdfs*. Una vez que las funciones de densidad de probabilidad son conocidas, la simulación con Monte Carlo puede desarrollarse con un muestreo aleatorio a partir de las *pdfs*. Para llevar a cabo este muestreo aleatorio es necesario generar números aleatorios de una forma rápida y efectiva, estos números deben estar uniformemente distribuidos en el intervalo  $[0,1]$ . Los resultados de estos muestreos aleatorios, o pruebas, se deben acumular o contar de una manera apropiada para producir el resultado. En contraste, un enfoque convencional de solución numérica comenzaría con el modelo matemático del sistema físico, haciendo discretas a las ecuaciones diferenciales y, luego, resolviendo un conjunto de ecuaciones algebraicas para el estado desconocido del sistema [52].

Se debe tener en mente que, aunque esta (lo que se acaba de mencionar) es la descripción general del método de Monte Carlo, puede no aplicarse directamente en ciertos estudios o aplicaciones. Se suele pensar que, naturalmente, los métodos Monte Carlo se usan para simular procesos aleatorios, o estocásticos, ya que éstos

se pueden describir con *pdfs* [53]. Sin embargo, esta conexión es en realidad demasiado restrictiva, debido a que muchas aplicaciones de los métodos Monte Carlo no tienen un contenido estocástico obvio. En los casos que así suceda, uno puede plantear la solución deseada en términos de las *pdfs*, y aunque esta transformación puede parecer artificial, este paso permite que el sistema pueda ser tratado como un proceso estocástico para propósitos de simulación y de esta forma puedan aplicarse los métodos Monte Carlo para simular al sistema.

Existen dos factores importantes a considerar cuando se implementan los métodos de Monte Carlo: la distribución de probabilidad para las probabilidades de cada proceso básico y el hecho de satisfacer las leyes físicas. Los métodos Monte Carlo dependen de manera fundamental de la generación de números aleatorios. Una característica importante, que se mencionó anteriormente, de los números aleatorios, es que deben presentar una distribución uniforme entre cero y uno: una secuencia sesgada genera del mismo, resultados que mostrarán estar sesgados. Otra característica es que los números aleatorios no deben estar correlacionados sucesivamente. Un número aleatorio particular no debería estar seguido siempre por el mismo segundo número aleatorio o por secuencias de números. Si un número genera una secuencia idéntica el resultado final estará sesgado. Así que, es muy importante generar números aleatorios que estén uniformemente distribuidos para de esta forma obtener resultados correctos.

### 3.2.1 Función de densidad de probabilidad

Un componente esencial de una simulación Monte Carlo es la modelación del proceso físico por una o más funciones de densidad de probabilidad (*pdfs*). Al describir el proceso como una pdf, que puede ser obtenida por medio de datos experimentales o por medio de un modelo teórico que describa el proceso físico, podemos muestrear un resultado con la pdf, y así simular el proceso físico real.

Para aclarar el concepto de funciones de densidad de probabilidad, haremos referencia a alguna de la terminología más básica de la teoría de probabilidad. Esto nos ayudará a observar las ventajas que tiene aplicar el método Monte Carlo para modelar ciertos sistemas físicos, como el que hemos establecido en nuestro caso.

Un proceso físico, o matemático, se puede ver como un experimento aleatorio (o probabilístico), y este experimento tiene un número, que en algunos casos puede ser

infinito, de resultados, a los cuales se les asignan probabilidades. El experimento aleatorio se define como aquél que es susceptible de dar varios resultados, haciendo imposible predecir con anticipación cuál de ellos va a producirse en una experiencia concreta. El espacio de muestreo (en muchos libros se denomina por la letra  $S$  y también se conoce como espacio muestral o probabilístico) del experimento es la colección de todos los posibles resultados [54, 55] (generalmente denominados con la letra  $s$ ). Así que, si el experimento se lleva a cabo, es seguro que su resultado pertenezca al espacio de muestreo.

Un experimento probabilístico, al que usualmente se recurre para ejemplificar de manera concreta este mismo concepto, es cuando se lanza un determinado número de veces un dado y, se observa cuál de las seis caras queda descubierta y con su superficie paralela a la superficie donde se arroja. Como otro ejemplo, podríamos mencionar el encuentro de un fotón con una partícula esférica que tiene un índice de refracción diferente al medio que la rodea y aquí, deseamos saber cuál será la dirección que tendrá el fotón después del esparcimiento. El espacio de muestreo en el caso del dado, podría ser  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  si sólo requerimos lanzar una vez el dado o el número de combinaciones posibles que surgiría de lanzar  $n$  veces el dado que es igual a  $6^n$ . En el caso del esparcimiento el espacio de muestreo sería todos los valores posibles que podrían tener las funciones de amplitud de esparcimiento. De acuerdo con los posibles resultados que se puedan obtener, además podemos establecer qué es lo que deseamos observar de determinado evento. Por ejemplo, realizamos series de 5 lanzamientos de dados, podemos desear observar en cada serie cuantas veces apareció un determinado valor del dado: en cada serie observar cuantas veces salió la cara con 5 puntos. Al valor que se obtiene en cada serie se le llama variable aleatoria y se puede representar con  $X$  (cara con 5 puntos), para este caso en particular, los valores que puede tomar esta variable aleatoria son discretos. En el caso de las funciones de amplitud los valores que puede tomar se consideran continuos, debido a que los eventos no pueden ser enumerados por enteros. Las variables aleatorias se pueden clasificar en continuas y discretas. Las variables aleatorias son útiles porque permiten cuantificar a los procesos aleatorios y esto facilita las manipulaciones numéricas [56].

Cuando se trata de variables aleatorias discretas la función que asigna una probabilidad a cada valor de la variable se llama función de masa de probabilidad (*pmf*). Cada uno de los valores que puede tomar la variable aleatoria tiene una probabilidad. Si el experimento consiste en lanzar un dado 5 veces y queremos observar

cuantas veces aparece la cara con 3 puntos, la variable aleatoria puede tener los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5. La probabilidad que la variable aleatoria asume para un valor específico, de los que puede tomar, es el valor de la *pmf* que corresponde a ese valor específico.

Para el caso de las variables aleatorias continuas se define una función de densidad de probabilidad (*pdf*), la cual es una función que asigna una densidad de probabilidad para cada uno de los valores que puede tomar la variable aleatoria. La probabilidad que la variable aleatoria asuma un valor específico es indefinida porque la variable aleatoria tiene un número incontablemente infinito de valores. En este caso, para obtener las probabilidades de la *pdf*, para un rango de la variable aleatoria, se lleva a cabo una integral. Para que una función cualquiera sea una *pdf* legítima, es necesario que cumpla con dos condiciones que se resumen a continuación,

$$f(x) \geq 0, -\infty < x < \infty \quad (3.1)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x') dx' = 1 \quad (3.2)$$

Es fácil notar que estas restricciones no son muy exigentes, y que de hecho nos permiten aplicar los métodos Monte Carlo para la resolución de problemas que no tienen, aparentemente, un carácter de ser aleatorios o estocásticos. Si hacemos pasar a una cierta aplicación en términos de funciones que obedezcan estas condiciones relativamente manejables, podemos tratarlas como *pdfs* y, quizá emplear las técnicas de simulación de Monte Carlo para resolver la aplicación original.

### 3.2.2 Función de distribución acumulada

El concepto de función de distribución acumulada, o *cdf*, se aplica para describir todo tipo de variables aleatorias: discretas y continuas. La *cdf* expresa la probabilidad que una variable aleatoria  $X$  tome un valor que sea menor o igual a  $x$ . En particular, para toda  $x$  tenemos

$$cdf = prob(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} \sum_{k \leq x} p(k) & X : \text{discreta} \\ \int_{-\infty}^x f(t) dt & X : \text{continua} \end{cases} \quad (3.3)$$

Cualquier variable aleatoria que se asocia con un modelo de probabilidad determinado tiene una *cdf*, independientemente de si es discreta, continua o de otro tipo. Esto es porque  $\{X \leq x\}$  siempre es un evento y, por lo tanto tiene un probabilidad bien definida [54].

En muchos experimentos, la función de densidad de la variable aleatoria de nuestro interés se puede obtener fácilmente. Sin embargo, en muchas ocasiones es más fácil obtener la función de distribución acumulada que la función de densidad. En el caso que nos concierne, para seleccionar aleatoriamente un valor para el ángulo con el que se esparce un fotón, que se encuentra con una partícula con ciertas características que se ajustan al régimen del esparcimiento de Mie, se recurre a la distribución de probabilidad que se obtiene a partir de la función de distribución acumulada.

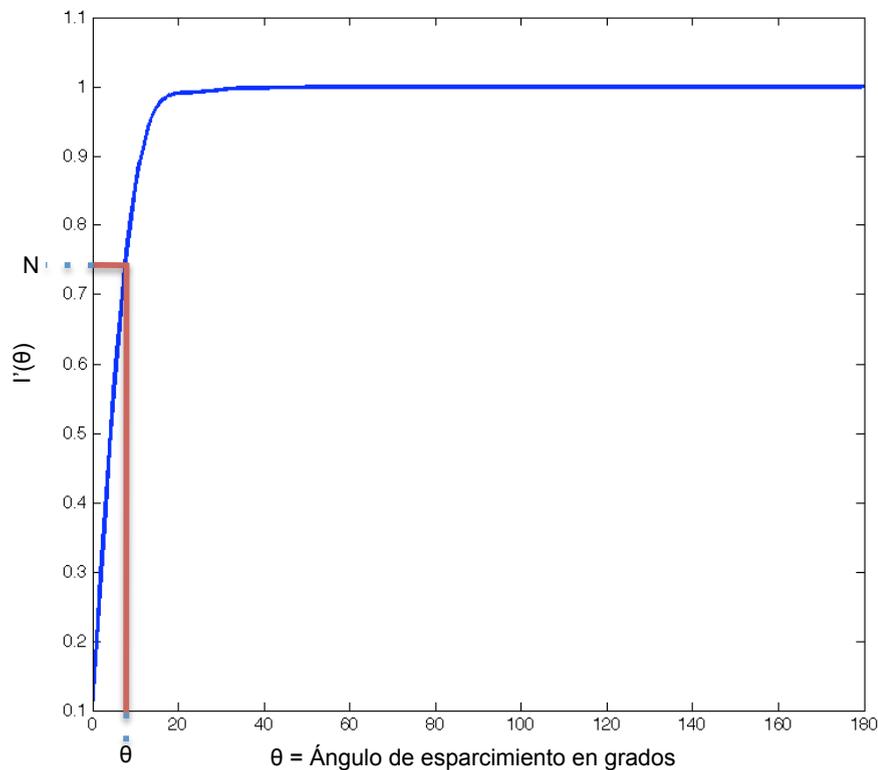


FIGURA 3.1: Distribución acumulada

Si  $I(\theta)$  es la distribución de la intensidad, en función del ángulo de esparcimiento determinado con la solución de Mie, normalizada, de tal forma que  $\int_0^{180} I(\theta)d\theta = 1$ , entonces, podemos escribir una *cdf* que sea  $I'(\theta') = \int_0^{\theta'} I(\theta)d\theta = 1$ . Ahora, si escogemos un número aleatorio  $N$  entre 0 y 1, obtenemos un ángulo de esparcimiento  $\theta$ , en donde  $I'(\theta') = N$ . De esta forma, se selecciona el ángulo de esparcimiento de un fotón que choque con una partícula esférica. En la figura 3.1, se muestra gráficamente esta operación.

### 3.3 Esparcimiento de Mie

La solución de Mie de las ecuaciones de Maxwell proporciona algunas cantidades cuyo sentido es describir la interacción entre una onda electromagnética y una partícula que se encuentra sumergida en el medio en el que viaja la onda. Gustav Mie resolvió las ecuaciones de Maxwell haciendo que la onda electromagnética y la partícula, elementos involucrados en el fenómeno físico del esparcimiento electromagnético simple, cumplieran con ciertas condiciones. Primero, la partícula se asumió que fuera esférica y que estuviera aislada, además que contara con un radio  $a$  y sus capacidades inductivas fueran  $(\varepsilon_{pt}, \mu_{pt})$ . Debido a la forma de la partícula, el problema adquiere simetría esférica y, se considera solamente, el esparcimiento de una onda electromagnética causado por la partícula simple. Segunda condición, el medio  $(\varepsilon, \mu)$  y la partícula son homogéneos, isotrópicos y lineales. Tercera condición, la onda incidentes es plana y polarizada linealmente, con una frecuencia angular  $\omega$  y una dependencia armónica con el tiempo (dependencia temporal armónica)  $e^{-i\omega t}$  [29].

La solución rigurosa del esparcimiento de una onda plana debido a una partícula esférica de cualquier tamaño se trata en las referencias [29, 30, 31, 32, 33]. A nosotros nos interesa obtener resultados cuantitativos a partir de la solución de Mie a las ecuaciones de Maxwell, para poder determinar cuál es el cambio de dirección que puede tener un haz al encontrarse con una partícula esparcidora. Los parámetros que resultan clave para los cálculos de Mie son los coeficientes de Mie, los cuales se utilizan para determinar las funciones de amplitud de esparcimiento. En general, en la literatura antes mencionada encontramos que,  $S_1(\theta)$  y  $S_2(\theta)$  representan las funciones de amplitud de esparcimiento y se definen de la siguiente forma:

$$S_1(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos\theta) + b_n \tau_n(\cos\theta)] \quad (3.4)$$

$$S_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \pi_n(\cos\theta) + a_n \tau_n(\cos\theta)] \quad (3.5)$$

donde  $n$  es el número del modo y las funciones dependientes del ángulo  $\pi_n$  y  $\tau_n$  son funciones de los polinomios de Legendre  $P_n^1$ :

$$\pi_n(\cos\theta) = \frac{1}{\sin\theta} P_n^1(\cos\theta) \quad (3.6)$$

$$\tau_n(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta} P_n^1(\cos\theta) \quad (3.7)$$

Los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  son conocidos como los coeficientes de Mie o los coeficientes de esparcimiento:

$$a_n = \frac{m\psi'_n(y)\psi_n(x) - m_{pt}\psi_n(y)\psi'_n(x)}{m\psi'_n(y)\zeta_n(x) - m_{pt}\psi_n(y)\zeta'_n(x)} \quad (3.8)$$

$$b_n = \frac{m_{pt}\psi'_n(y)\psi_n(x) - m\psi_n(y)\psi'_n(x)}{m_{pt}\psi'_n(y)\zeta_n(x) - m\psi_n(y)\zeta'_n(x)} \quad (3.9)$$

la variable  $x = kma$  es el parámetro de tamaño del sistema y  $y = \frac{km_{pt}a}{m}$ . La prima denota que es una derivada con respecto al argumento. Es importante notar que, como lo esperamos, el campo esparcido desaparece si no existe una partícula presente dentro del medio ( $m_{pt} = m$ ).  $\psi_n$  y  $\zeta_n$ , junto con  $\chi_n(z)$ , se conocen como las funciones de Riccati-Bessel las cuales se definen como:

$$\psi_n(z) = zj_n(z) = \sqrt{\frac{\pi z}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(z) \quad (3.10)$$

$$\chi_n(z) = -zy_n(z) = -\sqrt{\frac{\pi z}{2}} Y_{n+\frac{1}{2}}(z) \quad (3.11)$$

$$\zeta_n(z) = zh_n^{(2)}(z) = \psi_n(z) + i\chi_n(z) \quad (3.12)$$

describiendo los componentes que conforman a estas funciones tenemos que,  $j_n(z)$  y  $y_n(z)$  son las funciones esféricas de Bessel,  $h_n^{(2)}(z)$  es la función esférica de Hankel y,  $J_{n+\frac{1}{2}}$  y  $Y_{n+\frac{1}{2}}$  son las funciones de Bessel de primer y segundo especie.

Para el problema que estamos atacando, basta con calcular los coeficientes de Mie y sustituirlos en las funciones de amplitud de esparcimiento. Con estos valores podemos recurrir al método de Monte Carlo y realizar experimentos para decidir con que ángulo se desviaría un fotón que alcanzase a una partícula esparcidora. Observaríamos que, en el problema de esparcimiento producido por una esfera en una onda plana, existe una relación entre las propiedades de la partícula esparcidora, como su tamaño y su índice de refracción, y la distribución angular de la luz esparcida.

En la literatura dedicada al estudio del esparcimiento de Mie podemos encontrar una serie de algoritmos que se han empleado para realizar el cálculo computacional de los coeficientes de esparcimiento [58]. Los primeros algoritmos de Mie publicados fueron los de Dave en 1968. Y, aunque el cálculo de los coeficientes de Mie, se ha realizado con destreza por una serie de importantes investigadores, aún se plantean nuevos investigadores la pregunta de cómo estructurar el cálculo de Mie para alcanzar una mayor eficiencia y evitar inestabilidad numérica [59, 60, 61, 62].

La aplicación de la solución de Mie a las ecuaciones de Maxwell requiere de las computadoras para llevar acabo los cálculos numéricos de las funciones y los coeficientes que están involucrados. La dificultad principal, podríamos decir que radica en la evaluación precisa de los coeficientes de esparcimiento  $a_n$  y  $b_n$ . Esta dificultad podría verse agravada cuando el parámetro de tamaño  $x$  es grande. Algunos de los puntos esenciales que deben ser tratados al desarrollar un algoritmo para el esparcimiento de Mie son:

1. Cómo determinar el número  $N$  para truncar una serie de Mie.
2. Si la funciones de Riccati-Bessel se calcularán utilizando recursión hacia adelante o recursión hacia atrás.
3. Si se hace uso de la recurrencia hacia atrás, cómo tenemos que inicializarla.
4. Cómo estructurar el algoritmo de una manera eficiente.

### 3.3.1 Coeficientes de Esparcimiento

La representación matemática de los coeficientes de esparcimiento puede presentar ligeras variaciones a lo largo del conjunto de la bibliografía que trata el tema de esparcimiento de Mie [29, 30, 31, 32]. Sin embargo, en general se coincide que, para propósitos computacionales, lo mejor es expresar los coeficientes de Mie de una forma que favorezca a la separación de sus componentes real e imaginario, de tal manera que los coeficientes queden descritos de la siguiente forma,

$$a_n = \frac{\left[ \frac{D_n(m_r x)}{m_r} + \frac{n}{x} \right] \psi_n(x) - \psi_{n-1}(x)}{\left[ \frac{D_n(m_r x)}{m_r} + \frac{n}{x} \right] \zeta_n(x) - \zeta_{n-1}(x)} \quad (3.13)$$

$$b_n = \frac{\left[ m_r D_n(m_r x) + \frac{n}{x} \right] \psi_n(x) - \psi_{n-1}(x)}{\left[ m_r D_n(m_r x) + \frac{n}{x} \right] \zeta_n(x) - \zeta_{n-1}(x)} \quad (3.14)$$

para obtener estas ecuaciones se recurre al concepto de derivada logarítmica  $D_n$  de la función Riccati-Bessel  $\psi_n$  que está definido así,

$$D_n(m_r x) = \frac{d}{d(m_r x)} \ln \psi_n(m_r x) = \frac{\psi_n'(m_r x)}{\psi_n(m_r x)} = \frac{[m_r x \cdot j_n(m_r x)]'}{m_r x \cdot j_n(m_r x)} \quad (3.15)$$

En donde,  $m_r$  es la relación entre el índice de refracción de la partícula ( $m_{pt}$ ) y el del medio ( $m$ ),  $m_r = m_{pt}/m$  y, sólo para recordar,  $x = kma$ , siendo  $a$  el radio de la esfera. La derivada logarítmica satisface las relaciones de recurrencia

$$D_{n-1}(\rho) = \frac{n}{\rho} - \frac{1}{D_n(z) + \frac{n}{\rho}} \quad (3.16)$$

$$D_n(\rho) = \frac{1}{\frac{n}{\rho} - D_{n-1}(\rho)} - \frac{n}{\rho} \quad (3.17)$$

se deben de considerar las dos opciones de relación de recurrencia y, emplear un criterio para determinar cuál de las dos relaciones se usará. Esto debido a problemas de estabilidad numérica, que se presentan en el cálculo de la función  $D_n(\rho)$ , si se utiliza la recurrencia hacia arriba, cuando la parte imaginaria de  $mka$  llega a ser significativa [29, 63].

### 3.3.2 Determinación de la función de fase del esparcimiento

Al llevar acabo el cálculo del esparcimiento con la solución de Mie a las ecuaciones de Maxwell para una partícula esférica, obtenemos las funciones de amplitud 3.4 y 3.5. Con estas funciones de amplitud podemos calcular la intensidad de la onda esparcida de la siguiente forma,

$$i_1 = |S_1(\theta)|^2 \quad y \quad i_2 = |S_2(\theta)|^2 \quad (3.18)$$

en donde,  $i_1$  corresponde a la intensidad de la luz esparcida polarizada perpendicularmente y  $i_2$  a la intensidad con polarización paralela. La intensidad de la luz esparcida con polarización natural se calcula así,

$$i_{nopolarizada} = \frac{i_1 + i_2}{2} \quad (3.19)$$

Como puede observarse en las ecuaciones 3.4 y 3.5, para determinar las funciones de amplitud es necesario recurrir al cálculo de los coeficientes  $a_n$  y  $b_n$  que fue descrito en la sección 3.3.1. Además, hace falta calcular las funciones  $\pi_n(\cos\theta)$  y  $\tau_n(\cos\theta)$  que describen los patrones de esparcimiento angular de los armónicos esféricos. Para hacer el cálculo aplicamos las relaciones de recurrencia siguientes,

$$\pi_n(\cos\theta) = \frac{2n-1}{n-1} \cos\theta \pi_{n-1} - \frac{n}{n-1} \pi_{n-2} \quad (3.20)$$

$$\tau_n(\cos\theta) = n \cos\theta \pi_n - (n+1) \pi_{n-1} \quad (3.21)$$

y se comienza haciendo las siguientes asignaciones [64],

$$\pi_0 = 0; \quad \pi_1 = 1; \quad \pi_2 = 3\cos\theta; \quad \tau_0 = 0; \quad \tau_1 = \cos\theta; \quad \tau_2 = 3\cos(2\theta)$$

Para el cálculo de las funciones de amplitud, el índice  $n$  corre de 1 a infinito ( $\infty$ ). Sin embargo, para hacer el cálculo de Mie las fórmulas se pueden truncar a un valor máximo de  $n$ , y este valor se obtiene de la ecuación que implementa Wiscombe [59, 65], descrita así,

$$n_{max} = x + 4.05x^{\frac{1}{3}} + 2 \quad (3.22)$$

De esta forma, podemos obtener para cada ángulo el valor de las funciones de intensidad de esparcimiento.

Cuando un fotón, que se encuentra viajando dentro un medio, colisiona con una partícula con diferente índice de refracción que el del medio óptico, la luz se desvía con cierto ángulo. El valor del ángulo de desviación, no se establece con una función determinista. Es decir, cada vez que un fotón se encuentre con ese obstáculo, aún cuando coincidan las características iniciales de dirección  $(L, M, N)$ , el ángulo con el que se desvía será aleatorio, con cierta tendencia que está definida en el perfil de esparcimiento que genera la partícula esparcidora. En el caso del esparcimiento de Mie, el perfil que puede generar una partícula, está en función del tamaño de la partícula, así como, de la longitud de onda de la luz incidente. A este perfil de esparcimiento, se le llama función de fase. Aunque, sería más apropiado llamarlo función de esparcimiento, ya que, este perfil no tiene conexión con la fase de la onda de la luz incidente. La función de fase se define como la relación que hay entre la energía esparcida por unidad de ángulo sólido en una dirección en particular entre la energía esparcida promedio por unidad de ángulo sólido en todas las direcciones, describe la cantidad de luz que es esparcida en determinada dirección. La función de fase normalizada de Mie se puede definir de la siguiente manera,

$$P(\theta) = \frac{4}{x^2 Q_{sca}} \frac{(|S_1(\theta)|^2 + |S_2(\theta)|^2)}{2} = \frac{4\pi}{k^2 \sigma_{sca}} \frac{(|S_1(\theta)|^2 + |S_2(\theta)|^2)}{2} \quad (3.23)$$

donde  $x = mka$ ,  $Q_{sca}$  es la eficiencia de esparcimiento y  $\sigma_{sca}$  es la sección transversal de esparcimiento. Para determinarla  $Q_{sca}$  se recurre a la siguiente ecuación,

$$Q_{sca} = \frac{\sigma_{sca}}{\pi a^2} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (3.24)$$

La función  $P(\theta)$  se puede tratar como una función de distribución de probabilidad, con la cual podemos determinar el ángulo con el que se desvía un fotón que encuentra un obstáculo o partícula esparcidora en su recorrido.

## 3.4 Trazo exacto de rayos

Si los fotones transitan en un medio homogéneo, la trayectoria que siguen tiene la forma de una línea recta. Al momento de pasar a un medio de diferente índice de refracción que el del medio que estaban recorriendo, los fotones se refractan y se reflejan, dependiendo de las características físicas de los medios que atraviesen. Es de nuestro interés simular el recorrido de los fotones que entran en el sistema óptico del ojo humano, y para esto determinamos las trayectorias que sigue en cada superficie que compone a este dispositivo óptico. Para llevar a cabo esto, recurrimos a un modelo que describe de acuerdo a la dirección y a la posición, al momento de entrar en un medio homogéneo, la posición al transitar al extremo opuesto. Y, cada vez que traspasa una interfaz entre dos medios de diferente índice de refracción, el modelo determina el cambio de dirección que sufrirá un fotón, que está relacionado con la variación de índice de refracción y con la forma de la interfase. El modelo, en general, se conoce con el nombre de trazo de rayos y describe el recorrido de los fotones a través de un sistema óptico. El trazo de rayos se calcula, básicamente, con consideraciones geométricas y trigonométricas.

### 3.4.1 Ecuaciones de trazo de rayos

Las superficies del sistema óptico humano son esféricas, la forma más simple y conveniente para modelar matemáticamente este tipo de superficie, es la de una conoide, la cual se puede describir con la ecuación [66],

$$z = \frac{1}{2}c [x^2 + y^2 + (1 + Q)z^2] \quad (3.25)$$

en donde  $c$  es la curvatura de la superficie,  $Q$  es la asfericidad de la superficie y se calcula usando la relación,

$$Q = \frac{b^2}{a^2} - 1 \quad (3.26)$$

$a$  y  $b$  son la mitad de la distancia del eje mayor y el menor respectivamente [66, 67]. Cada superficie se especifica con el radio de curvatura y la asfericidad. Los diferentes medios en los que se desplaza el fotón quedan especificados con el índice de refracción y el espesor con que cuentan. El espesor se puede ver también como la distancia de separación que existe entre cada superficie. Para llevar a cabo el

cálculo del trazo de rayos, se efectúa un registro de la posición y la dirección de un fotón al salir de un medio óptico y entrar en otro. La posición y la dirección del fotón en el punto que pasa de un medio a otro depende de los índices de refracción de ambos medios, y de la posición y la dirección que tiene el fotón dentro del medio que inicialmente provenía. Las ecuaciones que se enuncian en esta sección se obtuvieron a partir de la referencia [66]. La figura 3.2 representa gráficamente el tránsito de un fotón a partir de una posición inicial, que en general coincide con el lugar donde el fotón entra en un medio óptico, hasta llegar a la siguiente superficie, donde el fotón sale del medio óptico para entrar en otro diferente.

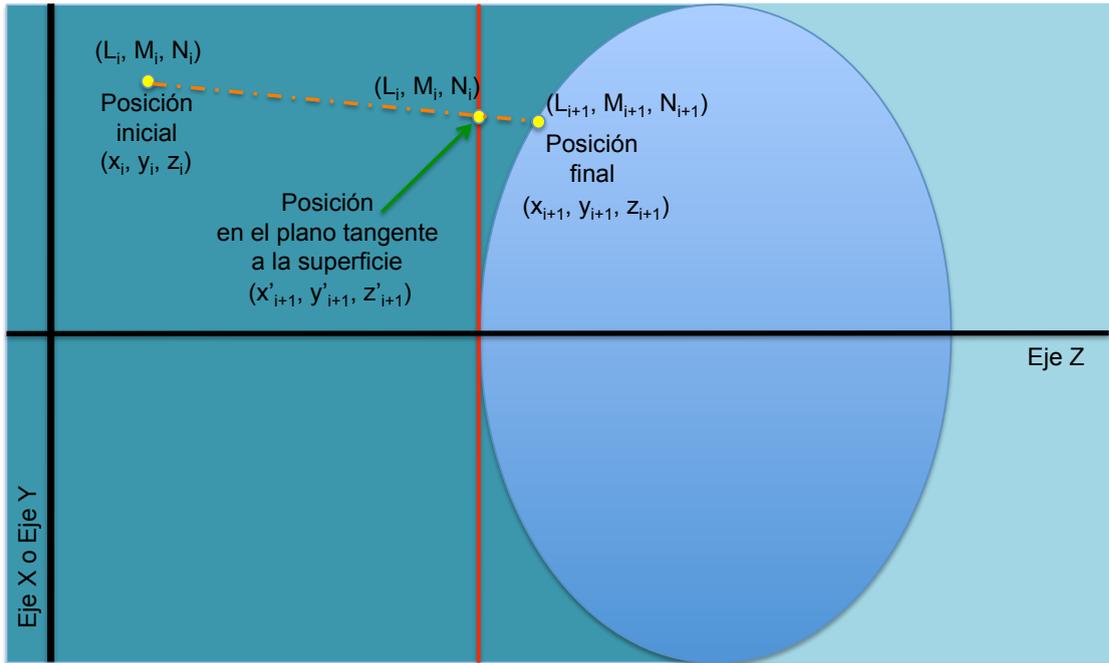


FIGURA 3.2: Esquema del trazo de rayos.

La primera etapa del cálculo del trazo de rayos consiste en determinar la posición en la que el fotón se encontrará al alcanzar el plano tangente al vértice, que se encuentra sobre el eje óptico, de la siguiente superficie a la que se dirige (el fotón), luego de atravesar la superficie en la que inició su recorrido. Para esto se aplica,

$$x'_{i+1} = x + L_i \frac{d_r}{N_i} \quad (3.27)$$

$$y'_{i+1} = y + M_i \frac{d_r}{N_i} \quad (3.28)$$

$$z'_{i+1} = \sum_{j=0}^i d_j \quad (3.29)$$

en donde,  $L_i, M_i, N_i$  son los cosenos directores que describen la dirección del fotón,  $x_i, y_i, z_i$  la posición inicial del fotón, y  $d_r$  es la distancia que recorre hasta el plano tangente.  $x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}$  es la posición del fotón en el plano tangente al vértice de la superficie siguiente. En el modelo que estamos proponiendo necesitamos que el recorrido se realice en ambos sentidos, es decir, de izquierda a derecha y de derecha a izquierda. Para hacer esto, la  $d_r$  se calcula de acuerdo al sentido en el que viaja el fotón y es igual a,

$$d_r = d_i - \left( z_i - \sum_{j=0}^{i-1} d_j \right) \quad (3.30)$$

En la siguiente etapa, lo que corresponde es determinar en la posición exacta en la que sale de una superficie y, a la vez, entra a la otra superficie. En otras palabras, tenemos que encontrar la distancia entre el plano tangente y la superficie, para esto tenemos primero que la posición en la superficie se describe así,

$$x_{i+1} = x'_{i+1} + L_i \Delta \quad (3.31)$$

$$y_{i+1} = y'_{i+1} + M_i \Delta \quad (3.32)$$

$$z_{i+1} = z'_{i+1} + N_i \Delta \quad (3.33)$$

Para calcular la posición en la superficie necesitamos encontrar  $\Delta$ . Esta variable se encuentra al sustituir en la ecuación de la superficie esférica las ecuaciones anteriores, sólo que se hace un cambio en el cálculo del valor de  $z_{i+1}$ , para facilitar el cálculo,

$$z_{(i+1)Origen} = N_i \Delta \quad (3.34)$$

Encontramos que  $\Delta$  queda definida de la siguiente manera,

$$\Delta = \frac{F}{G + [G^2 - cF(1 + QN^2)]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.35)$$

en donde,

$$F = c \left( x'_{i+1}{}^2 + y'_{i+1}{}^2 \right) \quad (3.36)$$

$$G = N - c \left( L_i x'_{i+1} + M_i y'_{i+1} \right) \quad (3.37)$$

y la posición a la salida de la superficie en la que viajaba el fotón se obtiene al sustituir  $\Delta$  en las ecuaciones 3.27, 3.28 y 3.29. Esta posición se convierte en la posición inicial del fotón en su recorrido a través de la superficie que continua.

En seguida, tenemos que encontrar el cambio de dirección al pasar de una superficie a otra. Para esto se aplica la ley de Snell,

$$n_{i+1} (\vec{r}_{i+1} \times \vec{n}) = n_i (\vec{r}_i \times \vec{n}) \quad (3.38)$$

$n_{i+1}$  es el índice de refracción del medio siguiente a la que se dirige el fotón,  $n_i$  es el índice de refracción del medio en la que transitaba anteriormente,  $\vec{r}_{i+1}$  y  $\vec{r}_i$  son los vectores unitarios a lo largo de los rayos refractado e incidente, respectivamente, y  $\vec{n}$  es el vector unitario a lo largo de la normal a la interfase. La ley de Snell se puede transformar en la ecuación que sigue a continuación si la multiplicamos vectorialmente por  $\vec{n}$ ,

$$n_{i+1} (\vec{r}_{i+1} - \vec{n} (\vec{r}_{i+1} \cdot \vec{n})) = n_i (\vec{r}_i - \vec{n} (\vec{r}_i \cdot \vec{n})) \quad (3.39)$$

$\vec{r}_{i+1}$  es un vector unitario formado con los cosenos directores  $(L_{i+1}, M_{i+1}, N_{i+1})$  y  $\vec{r}_i = (L_i, M_i, N_i)$ . Los componentes  $(\alpha, \beta, \gamma)$  de  $\vec{n}$  están dados por el gradiente de la superficie 3.25 y su magnitud,

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{-\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{-c_{i+1}x_{i+1}, -c_{i+1}y_{i+1}, 1 - c_{i+1}\varepsilon_{i+1}z_{i+1}}{[1 - 2c_{i+1}(\varepsilon_{i+1} - 1)z_{i+1} + c_{i+1}^2\varepsilon_{i+1}(\varepsilon_{i+1} - 1)z_{i+1}^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.40)$$

El signo de menos en la ecuación 3.40 indica que este vector apunta hacia el interior de la superficie.

La ecuación 3.39 con los componentes de los vectores correspondientes queda,

$$n_{i+1} \begin{bmatrix} L_{i+1} \\ M_{i+1} \\ N_{i+1} \end{bmatrix} - n_i \begin{bmatrix} L_i \\ M_i \\ N_i \end{bmatrix} = \overbrace{\left( n_{i+1} \begin{bmatrix} L_{i+1} \\ M_{i+1} \\ N_{i+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} - n_i \begin{bmatrix} L_i \\ M_i \\ N_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \right)}^k \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$$k = n_{i+1} \cos I_{i+1} - n_i \cos I_i \quad (3.42)$$

y,

$$\cos I_i = \frac{N - c'(Lx' + My' + N\varepsilon'z'_{Origen})}{[1 - 2c_{i+1}(\varepsilon_{i+1} - 1)z_{i+1} + c_{i+1}^2\varepsilon_{i+1}(\varepsilon_{i+1} - 1)z_{i+1}^2]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.43)$$

Empleando identidades trigonométricas llegamos a la ecuación siguiente,

$$n_{i+1}\cos I_{i+1} = [n_{i+1}^2 - n_i^2(1 - \cos^2 I_i)]^{\frac{1}{2}} \quad (3.44)$$

De la ecuación 3.41, podemos obtener,

$$n_{i+1}L_{i+1} - n_iL_i = k\alpha \quad (3.45)$$

$$n_{i+1}M_{i+1} - n_iM_i = k\beta \quad (3.46)$$

$$n_{i+1}N_{i+1} - n_iN_i = k\gamma \quad (3.47)$$

y sustituyendo, en estas ecuaciones, los resultados de las ecuaciones 3.42 y 3.45 a 3.47, obtenemos los cosenos directores que dan la nueva dirección del fotón al entrar en la superficie que continua. Resumiendo el trazo de rayos, los datos iniciales son la posición y la dirección del fotón y, lo que deseamos, es conocer la posición, primero, en el plano tangente al vértice de la superficie a la que se dirige, luego, la posición exacta en sobre la superficie, por último, necesitamos calcular la refracción que sufre al pasar de un medio a otro. Este algoritmo se aplica para cada superficie que conforma el sistema óptico. En nuestro programa el cálculo del trazo de rayo se realiza en ambos sentidos (de izquierda a derecha y luego de derecha a izquierda).

### 3.4.2 Reflexión en la retina

En nuestro programa, cuando los fotones llegan a la retina, éstos son dirigidos en sentido opuesto y ahora llegarán hacia la cornea por donde saldrán, la cual, originalmente, representa la entrada de nuestro sistema óptico. Para simular la reflexión de la luz en la retina, se recurrió al modelo que considera que los conos, debido a su forma, tamaño, e índice de refracción, tienen las propiedades de las guías de onda [68, 69]. Esta idea surgió al medir la direccionalidad de los fotorreceptores en forma de cono en la retina [70, 71, 72]. Los conos mostraron sensibilidad a la dirección en la que llegan los fotones a la retina: si los conos apuntan hacia el centro de la pupila, la luz que entre a través del centro de la

pupila será percibida con más brillo que la que provenga del borde de la pupila. Este diferencial de sensibilidad, se atribuye al alineamiento de los segmentos más externos de los conos con respecto al centro de la pupila, y al hecho que los conos actúan como guías de onda, coleccionando luz a partir de una extensión angular restringida y dirigiendo la luz incidente a lo largo de los segmentos más externos.

Para medir el efecto que se describe en el párrafo anterior, mejor conocido como efecto Stiles-Crawford de primer tipo, se recurre al empleo de técnicas psicofísicas y por otro lado se han desarrollado técnicas reflectométricas para medirlo [73, 74]. De acuerdo a la aplicación de los estudios que se han llevado a cabo para medir la direccionalidad de los fotorreceptores en forma de conos, se ha establecido que la distribución angular de la luz reflejada por los conos es una distribución Gaussiana. A partir de la distribución que se obtiene al encontrar la mayor intensidad con respecto a la dirección de los conos, se determina el valor que corresponde con el ancho de la Gaussiana, y que se conoce como la medida de la direccionalidad. Para nuestro modelo seleccionamos el valor de  $\Delta\theta = 0.189$  que se obtuvo del artículo de Marcos, et al. [72]. Este valor se asigna en la siguiente ecuación, la cual se calcula para cada rango de ángulos que va de 0 a 180 grados,

$$I = 10^{\frac{-\theta^2}{\Delta\theta^2}} \quad (3.48)$$

con esta ecuación obtenemos el valor de la intensidad para cada ángulo. Aplicando el método de Monte Carlo, se genera el valor del ángulo con respecto al eje de desplazamiento, que necesitamos cuando la luz se refleja en la retina (ver sección 3.2.2). Además, tenemos que obtener, aleatoriamente, un valor entre 0 y  $2\pi$ , que es el valor del ángulo azimutal. Con estos ángulos y la posición de llegada del fotón en la retina se determina la nueva dirección del fotón al ser reflejado en la retina.

### 3.4.3 Cambio de dirección

En nuestro modelo computacional, se presentan dos ocasiones en las cuales es necesario ajustar la dirección del fotón. La primera surge, al momento que el fotón se refleja en la retina, como lo mencionamos en la sección anterior. La segunda ocasión aparece cuando el fotón se desvía de su trayectoria original debido al esparcimiento que sufre cuando se encuentra con una partícula que representa

una inhomogeneidad dentro del sistema óptico. Para el esparcimiento, se hace necesario determinar, inicialmente, el ángulo con el que se desvía del vector de desplazamiento que originalmente describía el fotón y, a continuación el ángulo azimutal. En la retina, la dirección se determina a partir de la normal a esta superficie.

Para calcular la rotación total una vez que se producen, el ángulo de desviación  $\theta(0 \leq \theta \leq \pi)$  y el ángulo azimutal  $\phi(0 \leq \phi \leq 2\pi)$ , debemos calcular las rotaciones por separado. La relación entre un sistema  $\vec{u}$  y el otro sistema  $\vec{u}'$  que ha sido rotado por un ángulo  $\phi$  alrededor del eje  $z$  se define de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Rotando el mismo sistema un ángulo  $\theta$  alrededor del eje  $y$  y tenemos,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

Ahora, al multiplicar ambas matrices obtenemos la transformación que se necesita cuando se gira con los dos ángulos,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \cos\phi & \sin\theta\sin\phi \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

Esta matriz de rotación tiene un determinante que es siempre igual a la unidad y la inversa de esta matriz es su transpuesta. Para trasladar un vector a un nuevo sistema de coordenadas, lo primero que hacemos es rotar el vector para que viaje a lo largo del eje  $z$ . A continuación, el vector se rota al nuevo sistema de coordenadas especificado por los ángulos,  $(\theta, \phi)$ . Finalmente, el vector se rota de nuevo al sistema de coordenadas original. Si un fotón se desvía con un ángulo  $(\theta, \phi)$ , a partir de la dirección  $(\mu'_x, \mu'_y, \mu'_z)$ , la nueva dirección queda especificada de la

siguiente manera,

$$\mu'_x = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\mu_z^2}} (\mu_x\mu_z\cos\phi - \mu_y\sin\phi) + \mu_x\cos\theta \quad (3.52)$$

$$\mu'_y = \frac{\sin\theta}{\sqrt{1-\mu_z^2}} (\mu_y\mu_z\cos\phi - \mu_x\sin\phi) + \mu_y\cos\theta \quad (3.53)$$

$$\mu'_z = \sqrt{1-\mu_z^2} (\sin\theta\cos\phi) + \mu_z\cos\theta \quad (3.54)$$

En caso que el ángulo  $\theta$  sea muy próximo al eje  $z$  los nuevos cosenos directores se calculan así,

$$\mu'_x = \sin\theta\cos\phi \quad (3.55)$$

$$\mu'_y = \sin\theta\sin\phi \quad (3.56)$$

$$\mu'_z = \frac{\mu_z}{|\mu_z|}\cos\theta \quad (3.57)$$

## 3.5 Modelación y simulación de partículas

Dentro de las superficies ópticas que constituyen al ojo humano se pueden desarrollar una cantidad importante de partículas esparcidoras, como sucede en el caso de la presencia de cataratas en el cristalino. Para este caso en particular, se confía que la distribución de las partículas, que se consideran las causantes del esparcimiento, es aleatoria [46]. En esta sección, haremos referencia al estudio que llevamos acabo para simular computacionalmente, la distribución de grupos de partículas esparcidoras que van de los 50,000 a los 400,000 individuos. La idea principal es modelar nubes de puntos en el espacio tridimensional, que presenten una distribución aleatoria, y que además, cada punto mantenga con el resto una distancia mínima de separación.

### 3.5.1 Procesos puntuales

Dentro de la estadística, existe un área llamada estadística espacial que se ocupa de los métodos estadísticos que consideran, explícitamente, el arreglo espacial de los datos [75]. La mayoría de los estadísticos y los ingenieros están familiarizados con datos de series de tiempo, en donde las observaciones se miden en intervalos

discretos de tiempo. Sabemos que, existe la posibilidad que las observaciones posteriores en las series dependan de los valores obtenidos anteriormente. Al momento de analizar estos datos, podríamos estar interesados en investigar el proceso temporal que generó los datos. Este proceso se podría interpretar como una curva que no es observable, y que nosotros queremos estimar, la cual se genera en relación con sus propios valores previos. De manera similar, podemos pensar que los datos espaciales son medidas que se observan en lugares discretos en una región de dos o tres dimensiones. Como con los datos de series de tiempo, las observaciones podrían estar espacialmente correlacionadas (en dos o tres dimensiones).

Los métodos que se generan para el estudio y análisis de la estadística espacial caen en una de las tres categorías que están basadas en el tipo de datos espaciales que se están analizando. Estos tipos de datos se llaman: patrones de puntos, datos geoestadísticos y datos de retícula [76]. Para la cuestión que nos concierne estudiar, nos enfocaremos en los tipos de datos que se conocen como patrones de puntos. El análisis de datos de patrones de puntos, corresponde a estudios en los cuales el interés se centra en dónde ocurren los eventos que nos son de relevancia. Una pregunta fundamental es, si los puntos de interés ocurren o no aleatoriamente, o si los puntos se agrupan de alguna forma, o si quizá los puntos de interés ocurren con algún tipo de regularidad. Para modelar los datos tipo patrones de puntos se desarrollaron modelos matemáticos que describen si el arreglo de objetos que están distribuidos irregularmente o aleatoriamente en el espacio. El conjunto de estos modelos se les conoce como estadística de procesos de puntos en el espacio o estadística de procesos de puntos.

El objetivo de la estadística de procesos de puntos es analizar la estructura geométrica de los patrones que forman los objetos que se encuentran distribuidos aleatoriamente en una, dos o tres dimensiones del espacio [77]. La estadística de procesos puntuales se confronta con varios tipos de correlación de los patrones. Se correlacionan las distancias relativas entre los puntos, así como el número de puntos de las regiones adyacentes. Además, las características de los objetos que están representados por los puntos se pueden correlacionar (espacialmente). Por lo tanto, el análisis estadístico está muy relacionado con la detección y la descripción de estas correlaciones.

También, el análisis de un patrón de puntos proporciona información acerca de los procesos subyacentes que originaron los patrones, y a su vez, nos informa de las propiedades geométricas de la estructura que está representada por los puntos.

La estadística de procesos de puntos puede ayudar a modelar estas estructuras y a encontrar parámetros apropiados del modelo, los cuales pueden ser útiles para clasificar y para identificar cambios estructurales en los patrones de puntos que dependen del tiempo o de los parámetros físicos.

La estadística de procesos de puntos usa diferentes tipos de modelos para formular hipótesis científicas en términos de los parámetros que se modelen. Para observar si las propiedades que se derivaron del patrón, a partir de las hipótesis que se generan, se reflejan en el patrón y, por lo tanto, para verificar que el patrón soporta o desaprueba las hipótesis, se pueden emplear enfoques estadísticos. En particular, estos modelos hacen posible la simulación de los patrones de puntos, lo cual puede ser una forma útil de entender los procesos naturales subyacentes que han formado al patrón [78].

El interés básico del análisis del patrón de puntos en el espacio es detectar si éste está distribuido aleatoriamente o si representa un patrón agrupado o regular. Lo primero que hay que hacer para realizar el análisis del patrón de puntos en el espacio es aplicar métodos de exploración de datos [79]. Estos métodos de exploración nos proporcionan cierta evidencia para reconocer el modelo que podría explicar el proceso que generó el patrón de puntos en el espacio.

Las técnicas de modelación de puntos en el espacio se emplean para explicar un patrón de puntos que se tenga, y usualmente, esto implica realizar una comparación con el modelo de aleatoriedad espacial completa, (CSR siglas en inglés, complete spatial randomness) [78]. Un patrón de puntos que se genera por un proceso espacial aleatorio debe seguir un proceso homogéneo de Poisson [80]. Esto implica que cada evento tiene la misma probabilidad de ocurrir en cualquier posición en el área o volumen de estudio, y la ocurrencia es independiente de la ubicación de cualquier otro evento. Al comparar este modelo básico con nuestro patrón de puntos estamos realizando el análisis que nos permitirá decidir si el proceso de puntos es regular, agrupado o aleatorio. El análisis para explicar el tipo de proceso que generó el patrón de puntos en el espacio, se basa en comparar las pruebas aplicadas a ambos patrones (el teórico y el observado), basadas en las distancias de los vecinos más cercanos [81, 82].

Una vez que uno determina que el modelo de CSR no es el correcto, si ese fuera el caso, entonces se debe revisar que otro modelo es razonable. Y esto se hace de la misma manera que para el caso de la comparación con el modelo CSR. Sin

embargo, en lugar de simular a partir de un proceso CSR, podemos simular a partir de otro proceso que exteriorice regularidad o agrupamiento. Entre los modelos alternativos a los que se pueden recurrir se encuentran, el proceso heterogéneo de Poisson, un proceso binomial, el proceso de Cox, el proceso de Poisson de agrupación o proceso Markov de puntos y el proceso de Strauss [77].

Una vez que se ha analizado exitosamente un patrón de puntos usando los métodos exploratorios y el análisis ha sugerido una clase de modelos conveniente, lo que sigue es ajustar un modelo a los datos.

Hasta aquí hemos hecho mención de los conceptos generales que subyacen en el método que se desarrolló para simular la distribución de las partículas esparcadoras que se pueden hallar en el cristalino del ojo humano. A continuación, se describirá el algoritmo que se empleó para simular un proceso de puntos en el espacio.

### 3.5.2 Proceso de Strauss

El patrón de puntos que deseamos simular presenta una característica de inhibición. Esto es, cada punto que se describa en el patrón tiene que estar alejado del resto de puntos por lo menos cierta distancia y además, consideramos que es un patrón que muestra regularidad. Para simular un patrón con estas características lo conveniente es considerar un proceso de inhibición, como el proceso de núcleo duro o el proceso de Strauss [77, 81]. Nosotros decidimos que lo mejor sería aplicar un proceso de Strauss para simular la posición dentro del cristalino de las partículas esparcadoras, porque es un proceso más flexible.

Para simular un proceso de inhibición lo primero que se necesita hacer es generar un proceso homogéneo de Poisson en la región que nos interesa, formando un caso a la vez y descartando los casos candidatos si éstos se encuentran dentro de la distancia de inhibición de cualquier caso que haya sido retenido previamente. Este tipo de proceso se conoce algunas veces como inhibición secuencial espacial.

El proceso de Strauss es un patrón de puntos en el cual a una fracción especificada de los casos se le permite encontrarse dentro de la distancia de inhibición de cualquier otro caso generado. Para generar este patrón, el primer caso se ubica uniformemente en la región. Las ubicaciones de otros casos se generan secuencialmente, haciendo algo similar a lo del proceso de inhibición secuencial espacial. Si hay casos que se presentan dentro de la distancia de inhibición con relación a la

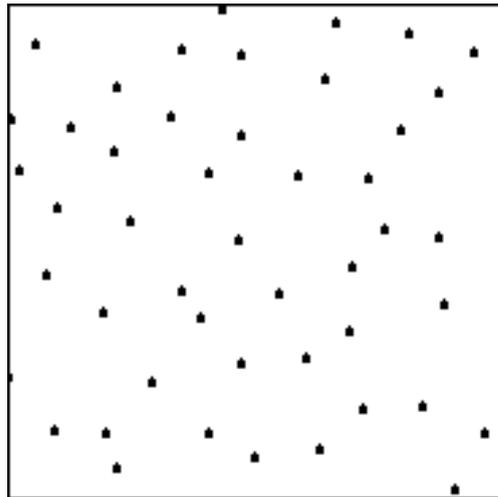
ubicación del caso candidato, este se acepta con cierta probabilidad. El parámetro de inhibición está dado por esta probabilidad y especifica la fracción de casos que se les permite encontrarse dentro de la distancia de inhibición. Si la probabilidad que se especifica es igual a cero, entonces el proceso que resulta es el mismo que el de inhibición secuencial espacial.

Un ejemplo de los pasos que se tienen que seguir para un tipo de simulación con el método de Monte Carlo de un proceso de Strauss sería el siguiente:

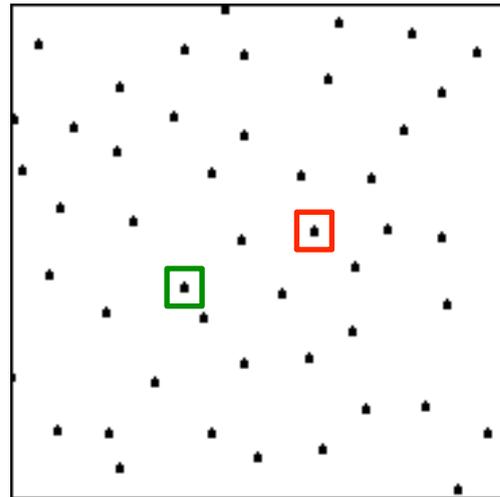
1. Para una región  $W = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$ , simular un patrón uniforme  $X$  de  $n$  puntos.
2. Escoger aleatoriamente un elemento  $i$  del patrón de puntos,  $i = 1, \dots, n$ .
3. Simular un caso candidato  $x$  uniformemente en  $W$ .
4. Calcular  $\alpha(x') = \exp(-\gamma * S(i, x'))$  [83].  $S(i, x') = \sum_j P(\|x_j - x'\| < R)$ ,  $R$  es la distancia que deben estar separados los sucesos entre sí, en donde  $j$  no es igual a  $i$ , y  $P(\text{'evento'}) = 1$  si 'evento' es verdadero, y 0 de otra forma. El parámetro  $\gamma$  debe ser positivo para conseguir un efecto que se conoce como de núcleo duro, que se define como aquel en el que los eventos están separados por lo menos por una distancia determinada o que suceden dentro de cierto límite y no fuera de él, en este caso la distancia  $R$ . En teoría el rango de  $\gamma$  es  $[0, \infty]$ . Si  $\gamma = 0$  tenemos un proceso de Poisson. Si  $\gamma = \infty$  tenemos un proceso de núcleo duro verdadero. La idea es encontrar un valor de  $\gamma$  con el que se llegue a generar la distribución de puntos que se requiere.
5. Escoger aleatoriamente un valor,  $U$ , entre 0 y 1. Si  $U < \alpha(x')$ , se acepta  $x$  como un caso nuevo,  $x_i$ , de  $X$ .
6. Se repiten los pasos 2 al 4 las veces que se requiera. Por ejemplo, el número de veces se podría calcular como  $1000 \times (\text{número de puntos en la muestra}) / (\text{volumen de la región de observación})$ .

Con la intención de aclarar el proceso definido en los puntos anteriores, se muestra la figura 3.3. La imagen 5.12(g) se refiere al inciso 1. Los puntos 2 y 3 se representan en la imagen 5.13(e). El elemento marcado con el recuadro verde es el que corresponde al punto 2, y el marcado con el recuadro rojo es el caso candidato del inciso 3. Si se cumple la condición estipulada en el punto 4, se elimina el elemento

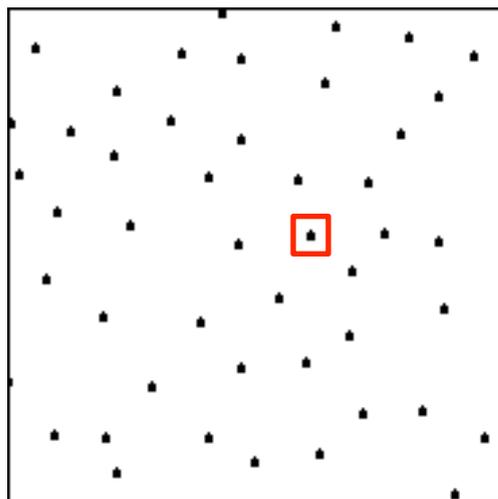
marcado con el recuadro verde y agrega el caso candidato, como se muestra en la imagen 3.3(c); si no se cumple con la condicin el elemento nuevo se rechaza y se mantiene el elemento que se encontraba en el patrón de puntos.



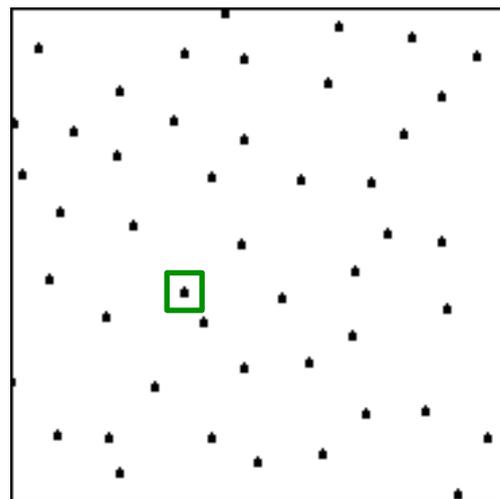
(a) Patrón uniforme de  $n$  puntos.



(b) Selección de un elemento del patrón y simulación de un nuevo elemento.



(c) Se acepta el caso candidato como un caso nuevo.



(d) Se rechaza el caso candidato.

FIGURA 3.3: Proceso de puntos con el modelo de Strauss.

# CAPÍTULO 4

## EXPERIMENTO FÍSICO

### 4.1 Introducción

En un lugar cercano a la Mancha, cuyo nombre alguna vez habrán escuchado, Murcia, llevé acabo una estancia de investigación de la que resultó el montaje de un experimento con el cual era posible simular y medir el efecto del grado del esparcimiento presente en el cristalino sobre las imágenes que se forman en la retina. El trabajo lo realicé específicamente, en el Laboratorio de Óptica de la Universidad de Murcia, que dirige el Dr. Pablo Artal. él es uno de los investigadores más prominentes en el área de Ciencias de la Visión, y trabajar bajo su dirección resultó de gran ayuda para mi trabajo de investigación. Esta estancia me proporcionó la oportunidad de desarrollar un modelo físico, que me ayudó a comprender con más claridad las complicaciones que tiene medir las imágenes que se forman en la retina de un ojo humano y, a la vez, los resultados que obtuve al realizar el experimento, funcionan como un punto de referencia con el cual puedo comparar los resultados que obtuve en mi modelo computacional.

En término generales, el experimento consiste en generar una fuente puntual, cuya ubicación está en el plano objeto, y por lo tanto, es la señal de entrada en el sistema. A continuación, el sistema óptico que producirá la señal que nos interesa medir, está representado por un ojo humano artificial, cuyos componentes ópticos emulan los componentes principales de un ojo humano real, teniendo la característica de poder introducir partículas en el componente que representa el lente cristalino y, simular de esta forma un ojo con presencia de cataratas. La imagen final se obtiene en la pupila de salida del ojo artificial, esta imagen es la señal de salida

del sistema, señal que deseamos medir. Para medir la imagen final se coloca un sistema que envía la información de esta imagen a una cámara que registra dicha información.

Las imágenes que se registran con la cámara, se procesan y analizan para observar el efecto que ocurre debido a la existencia de partículas de diferente índice de refracción que el del medio en el que se encuentran y, por lo tanto, que hacen que el medio sea inhomogéneo.

En el componente del ojo artificial que representa al cristalino, se agregan controladamente partículas de un mismo diámetro, que oscilan en un rango de 0.5 a 3  $\mu m$ , en cada experimento. Para cada tamaño de partícula se va incrementando la cantidad de partículas que se encuentran en el cristalino artificial, hasta que ya no es posible obtener con la cámara una medida estable de la intensidad de la imagen que se forma en la retina.

El experimento que se montó es conocido como técnica de doble paso y se aplica para medir la calidad de las imágenes que se forman de la retina y entender el proceso de formación de imágenes. En esta parte de la tesis, expondremos el desarrollo del modelo experimental que se montó y haremos la presentación de los resultados que se obtuvieron, junto con el análisis que se llevó a cabo, para mostrar la variación que se presenta en el esparcimiento de acuerdo al tamaño y a la cantidad de partículas que se introducen en el lente cristalino de un ojo artificial.

## **4.2 Medida de la calidad del sistema óptico humano con la técnica de doble paso**

Para evaluar la calidad óptica de la imagen que se forma en un sistema óptico se utilizan distintas métricas. Normalmente, se suelen utilizar funciones tales como la PSF (Point Spread Function), que es la imagen de un punto a través del sistema óptico; la raíz cuadrática media o RMS (Root Mean Square) de la aberración óptica; la función de transferencia de modulación o MTF (Modulation Transfer Function), la cual da idea de la capacidad que tiene un sistema óptico para transferir distintas frecuencia espaciales; o la razón de Strehl, que es un parámetro que incluye a la aberraciones y al esparcimiento.

En el caso del ojo humano, es un sistema óptico que resulta de difícil acceso, si no es que se debería decir de prácticamente imposible acceso, para lograr un registro directo de la señal de salida que produce al recibir una señal de entrada. Por lo anterior, se ha hecho necesario implementar una técnica con la cual se logre medir la imagen del fondo del ojo, a partir de la luz que es reflejada desde la misma retina cuando el ojo forma una imagen de un objeto que representa la señal de entrada del sistema.

La técnica que se implementa para registrar y analizar las imágenes que se forman en la retina del ojo humano, por la vía de la reflexión, se le conoce como de doble paso. En general, para estudiar el proceso de formación de imágenes a través del sistema óptico humano, se emplea como señal de entrada una fuente puntual de luz coherente. El sistema óptico forma una imagen, de esta fuente puntual, en el plano de la retina y, por lo tanto, decimos que el plano donde se encuentra la señal de entrada y el plano donde se forma la imagen o señal de salida son planos conjugados. Esta parte constituye lo que se conoce como el primer paso de la técnica. Una vez que tenemos la imagen de la señal de entrada en la retina, una fracción de la energía que alcanza la retina se refleja. El otro paso consiste en capturar la energía que se refleja de la retina, para esto, se coloca una cámara de CCD en un plano que se conjugue con el plano de la retina y con la cámara se registra la imagen de la retina cuando va de regreso hacia afuera del ojo. De esta forma se obtiene la imagen de la retina con la técnica de doble paso.

El grupo de colaboradores del Laboratorio de Óptica de la Universidad de Murcia (LOUM), ha llevado a cabo muy importantes aportaciones en el desarrollo del modelo del sistema óptico de doble paso. Y con este modelo, han investigado una amplia gama de características relevantes del ojo humano, que resultan muy útiles, para comprender el proceso de formación de imágenes que ocurre a través de este sistema óptico. La experiencia que tiene este grupo de investigación en el montaje de este arreglo óptico, así como en el campo de la óptica visual, fue de gran ayuda para el desarrollo del experimento que construimos con el objeto de investigar el efecto del esparcimiento en un sistema óptico, de tanta transcendencia como lo es el ojo humano. A continuación, hago una breve descripción del proceso de formación de las imágenes de doble paso.

La señal de entrada u objeto de nuestro sistema la constituye una fuente puntual de luz coherente. La luz que emana de la fuente atraviesa los componentes ópticos del primer brazo del sistema de doble paso y los del ojo artificial para formar la

imagen del objeto que se imprime en la retina. Debido a que, en el primer paso la señal de entrada es una fuente coherente, el proceso de formación de la imagen se adecua con el de un sistema lineal para la distribución de campo. Tomando en cuenta que el objeto es una fuente puntual, éste se puede representar como una función delta de Dirac ( $\delta(x, y)$ ) y la imagen que obtenemos en la retina de dicha señal es el resultado de la convolución de la señal de entrada con la función de respuesta al impulso o función de punto extendido. La imagen que se obtiene está dada por la distribución de intensidad en la retina y en este caso corresponde directamente con la función de punto extendido del sistema óptico que estamos considerando.

En el segundo paso, tenemos que la retina refleja parte de la luz que incide en ella y la imagen que se forma en esta parte del proceso es el resultado de la convolución de la imagen geométrica invertida de la función de punto extendido, con la función de punto extendido del segundo paso. La convolución de una imagen con la copia de sí misma, y girada 180 grados, da como resultado la autocorrelación, la cual tiene siempre simetría par [84]. El hecho que tengamos simetría par implica que las aberraciones asimétricas, como la coma, se pierdan en las imágenes de doble paso. Para obtener la información de la forma de la imagen que aparece en la retina, se requirió realizar una modificación sencilla en el dispositivo de doble paso para evitar la simetría par. Dicha modificación consiste en conseguir que las pupilas de entrada y salida, en el arreglo de doble paso, sean de diferente tamaño, y haciendo que una de ellas, usualmente la pupila de entrada, sea lo suficientemente pequeña para lograr una imagen en la retina similar a un patrón limitado por difracción. Por consiguiente, la imagen registrada del doble paso consiste en la correlación de la función de punto extendido del primer paso con la función de punto extendido del segundo paso. Una vez hecha tal modificación, la simetría de la configuración convencional de doble paso desaparece y es posible conocer la información de la forma real de la imagen en la retina.

### **4.3 Arreglo experimental de la técnica de doble paso**

En la figura 4.1 se muestra un diagrama del arreglo experimental que se montó para medir el grado del esparcimiento empleando la técnica de doble paso. Las

unidades de las distancias de separación entre los componentes que constituyen el sistema de doble paso corresponden a milímetros. Los elementos descritos en la imagen como Pol1, Pol2 y Pol3 corresponden a polarizadores. Los ejes ópticos de los polarizadores Pol1 y Pol2 se colocaron cruzados entre sí con el fin de aumentar la capacidad del sistema para discriminar los niveles de luz difundida en las zonas más excéntricas de la imagen de doble paso. P1 y P2 se refieren a las pupilas artificiales de entrada y de salida, respectivamente. Los componentes señalados con f1, f2, f3, f4, f5 y f6 son las lentes que se emplearon para el recorrido de la luz en los brazos de entrada y de salida.

La fuente de luz que se utilizó fue un láser He-Ne, de luz roja, con un longitud de onda de  $634\text{ nm}$ . En experimentos anteriormente montados en el mismo LOUM se empleaban, además del láser de luz roja, un láser de Ar que generaba luz verde y azul. En el momento de la realización de este experimento sólo se pudo contar con el láser que se ha mencionado.

Una vez que se consiguió alinear, se inició el montaje del brazo de entrada de este sistema óptico. El primer componente que se requiere colocar, es un espejo que sirve para modificar en  $90^\circ$  la dirección de la luz roja, podemos decir que este dispositivo forma parte de la alineación y ayuda a fijar el recorrido inicial de la luz. A continuación, se requiere aplicar un proceso de filtrado espacial para eliminar las aberraciones en el haz de luz, las cuales se deben a la óptica de la fuente generadora de luz. Para esto, se hace pasar la luz a través de un objetivo de microscopio, que tiene integrado a la salida un pinhole (micro-orificio) de  $50\ \mu\text{m}$  de diámetro. De esta forma, una vez que el haz ha sido enfocado por el objetivo de microscopio se produce una imagen de la fuente con ruido y, el pinhole remueve los patrones de luz que son causados por la difracción debida al polvo o las imperfecciones de los lentes que se encuentran en el sistema óptico del láser.

Una característica importante que debe presentar el haz, es que el diámetro de éste debe permanecer constante durante el recorrido por el sistema óptico, esto indica que tenemos un haz de rayos paralelos. Para lograr esto, se coloca en frente del pinhole un lente colimador. La distancia entre la lente y el pinhole debe coincidir con la distancia focal objeto de la lente y, además, se debe buscar que el centro de la luz que refleje el lente se ajuste con el pinhole (micro-orificio). Haciéndolo de esta forma se obtiene un haz colimado y extenso. El lente que se empleó para colimar tiene una distancia focal de  $150\text{ mm}$ .

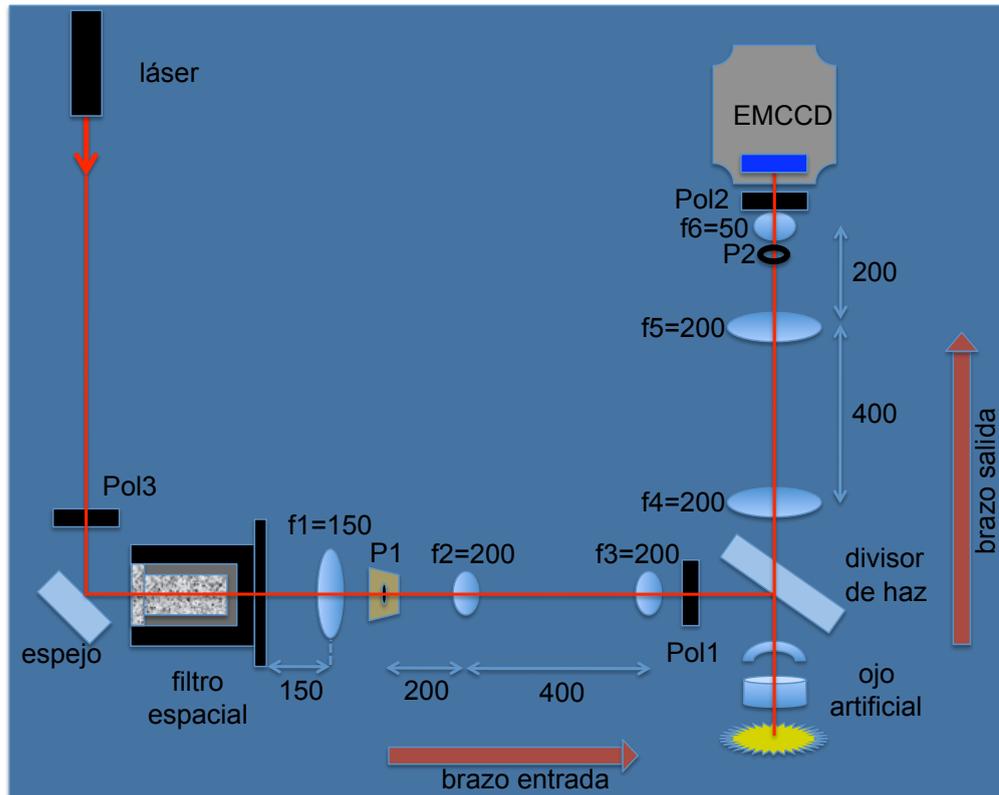


FIGURA 4.1: Diagrama del arreglo experimental.

Para cumplir con la condición que la pupila de entrada del ojo artificial sea suficientemente pequeña, el diámetro del haz colimado se reduce colocando una lámina con una apertura circular de un milímetro de diámetro delante de la lente colimadora. La luz que logra pasar por el orificio de la pupila, forma un haz muy delgado, y será la única radiación visible a la que se permita incidir en el ojo artificial. El orificio de la pupila de un milímetro de diámetro estaba conjugada con la pupila del ojo artificial, para esto, se coloca una lente con un distancia focal de 200 mm delante de la pupila, ajustando que la pupila se encuentre en el foco de la lente. Una segunda lente, de 200 mm de distancia focal, se coloca a continuación, de manera que los focos de ambas lentes coincidan. Lo que obteníamos, colocando de esta manera estas dos lentes, era un sistema afocal. En general, un sistema óptico es referido como un sistema afocal, debido a que tanto el objeto como la imagen, están localizados en el infinito. De este modo, el ojo puede trabajar sin acomodación, y por lo tanto no se fuerza la vista mientras se hacen las medidas de esparcimiento en pacientes con cataratas.

Dentro del recorrido que realiza la luz, entre la segunda lente del sistema afocal y el ojo artificial, se coloca un polarizador lineal y, en seguida de éste, se dispone

un divisor de haz. El divisor de haz producirá que la luz del brazo de entrada incida en el ojo, y la luz que refleje la retina se conduzca a un brazo de salida que es en donde se encuentra la cámara que hará el registro de las imágenes de doble paso. El divisor de haz que se empleó es de película, y la relación entre la luz transmitida y reflejada es de aproximadamente 50% a 50% para el rango de la radiación visible.

Como hemos referido, las medidas del esparcimiento de la luz se realizan para un ojo artificial, que se había diseñado anteriormente en el LOUM, con la característica que este dispositivo contaba con un lente cristalino en el cuál era posible introducir las partículas esparcidoras. En este dispositivo, parte de la luz de la imagen que se forma en la retina, se reflejaba y pasaba de regreso, a través de los medios ópticos que lo formaban. La imagen de doble paso, se conducía a través de un camino óptico, en el que al final, se encontraba la cámara que realizaba el registro. El brazo de salida estaba formado, nuevamente, por un sistema afocal, compuesto de dos lentes de 200 *mm* de distancia focal. La disposición de este segundo sistema afocal era tal que, la pupila del ojo se conjugaba con una pupila de abertura variable.

El dispositivo que se empleó para registrar las imágenes de doble paso, es una cámara Ixon DV887 (Andor, Reino Unido). Esta cámara cuenta con la tecnología EMCCD (Electro Multipliyng CCD). Esta tecnología captura imágenes recurriendo a un proceso de foto-multiplicación de la señal sobre el mismo detector, antes de ejecutar el proceso de almacenamiento de la imagen. De esta forma, resulta que contamos con un dispositivo electrónico que se caracteriza por tener una elevada sensibilidad en el registro, por lo tanto, se puede hacer la captura de imágenes bajo condiciones de muy baja iluminación. Para llevar acabo la captura y almacenamiento de las imágenes, se hizo uso del software con que la misma cámara contaba de fábrica. El área de registro de la cámara era de 512 x 512 píxeles, y el tamaño del píxel era de 16  $\mu m$ . Con un objetivo de 50 *mm*, colocado justo después de la pupila de abertura variable, se focalizaba la imagen de doble paso en la zona activa de la cámara y, se conseguía que el tamaño angular del campo imagen fuera de 9.4°.

El ojo artificial que se diseñó para llevar acabo las medidas del esparcimiento, consistía de tres componentes principales, una lente que tenía la función de emular a la córnea, un depósito, con agua, figurando el lente cristalino, en el que se

colocaban las partículas esparcidoras, y un difusor para representar el efecto de reflexión en la retina.

La córnea artificial consistía de un menisco de 38.1 *mm* de distancia focal. Esta lente, se encontraba montada en un sistema que la ayudaba a fijar su posición con respecto a los demás componentes del ojo, se podía desplazar de manera lateral, axial y modificar su altura. El lente cristalino, estaba construido con un par de ventanas de vidrio planos colocadas de forma paralela entre ellas, dentro de una montura de una lente. Esta montura tenía un orificio en la parte superior, por el cual se agregaba la mezcla de agua y microesferas, que simulaba el núcleo de un lente cristalino que padece cataratas. Esta componente del sistema óptico del ojo artificial se colocó sobre una base móvil que le ayudaba a controlar micrométricamente el desplazamiento lateral y axial. Por último, una pantalla difusora fabricada de papel representaba a la retina. Para simular la reflexión de la luz en la retina, la pantalla se hacía girar mediante un motor al que se encontraba acoplada. Mientras se realizaba el experimento el difusor se encontraba girando, lo que provocaba que la coherencia de la luz reflejada se rompiera, de esta forma, se representaban las condiciones de formación de imágenes en la retina del ojo.

## 4.4 Realización del experimento

El ojo artificial que se logró construir para este experimento está compuesto de las tres principales superficies ópticas con las que cuenta un ojo humano real: la córnea, el lente cristalino y la retina. Las características físicas de los componentes artificiales, en realidad, resultan ser diferentes a las que manifiestan los componentes de un ojo real. No obstante, para fines prácticos, como evaluar el efecto del esparcimiento debido a la presencia de cataratas artificiales resultan de gran utilidad.

Para simular a las partículas esparcidoras dentro del cristalino, se utilizaron microesferas de poliestireno. A través de la empresa Polysciences, que se dedica a la fabricación de este tipo de partículas, se consiguió un lote con cuatro tipos de radios de microesferas que varían de las 0.5 a las 3  $\mu m$ . Este rango de tamaño de radio de las microesferas es similar al rango de tamaño de radio que se ha observado en las partículas que se consideran las generadoras de las cataratas en los ojos humanos.

Las microesferas estaban contenidas en unos recipientes de plástico y venían mezcladas con agua destilada. Cada frasco contenía 5 ml de la mezcla de agua con microesferas. La mezcla de los frascos se agregó al recipiente que simulaba el lente cristalino, el cual contenía agua. Se llevaron a cabo una serie de medidas para los diferentes tamaños de microesferas que eran de: 0.5, 1, 2 y 3  $\mu\text{m}$ .

La forma de proceder para llevar a cabo las medidas fue iniciar con el registro de la imagen de doble paso cuando el cristalino sólo contenía agua. A continuación, comenzamos agregando cierta cantidad de la mezcla con partículas en el cristalino, y realizamos, nuevamente, el registro de la imagen con el efecto de las partículas esparcidoras. Cada ocasión que se terminaba de obtener el registro, el cristalino se removía del ojo artificial y, se agregaba otra porción de la mezcla con partículas, por lo tanto, la concentración de partículas en el cristalino aumentaba. Este proceso se repetía hasta que ya no era factible alcanzar un máximo de intensidad estable.

Para agregar la mezcla de partículas en el lente cristalino, se hizo uso de una micropipeta. Con el empleo de este instrumento lo que se buscaba era, tener una idea de la cantidad de partículas esparcidoras que se incorporaban al lente cristalino. Sin embargo, no fue posible determinar la cantidad de partículas debido a que al llevar a cabo las medidas del efecto del esparcimiento, la cantidad menor que se podía capturar directamente del recipiente era de 10 microlitros y, sobretodo en el caso de las partículas de mayor radio, con esta cantidad de mezcla agregada no se lograba obtener un máximo de intensidad estable, por lo que teníamos que disminuir la cantidad de partículas esparcidoras agregando otra cantidad de agua en la mezcla inicial. La cantidad de agua que se agregaba era la que estaba contenida en el cristalino y no era posible determinarla precisamente, debido a fallas técnicas que presentaba el dispositivo que funcionaba como depósito. La manera en que se agregó la mezcla en la serie de experimentos fue de acuerdo a cómo se observaba que el registro de las imágenes con las partículas esparcidoras nos permitía alcanzar el máximo de intensidad estable.

Con este experimento se busca observar las variaciones en la distribución de la intensidad de las imágenes de doble paso, tomando en cuenta dos factores que podíamos variar, el primero era el tamaño de las partículas esparcidoras y, el segundo era la cantidad de partículas que se encontraban concentradas en el cristalino del ojo artificial. Otro factor importante podría haber sido variar la longitud de onda de la fuente de luz emitida. Sin embargo, como lo hemos mencionado

anteriormente, las medidas de esparcimiento sólo se pudieron realizar usando un láser He-Ne de 634 nm.

La serie de medidas que se tomaron para cada tamaño de partícula, con respecto a la cantidad de partículas que se encontraban en el núcleo del lente cristalino, se repitió por lo menos tres veces. Los registros que se obtenían con la cámara de CCD de alta sensibilidad, se analizaban en la computadora bajo el entorno de programación que se conoce como MATLAB. Los resultados que se presentan de este experimento, son imágenes que describen la relación entre la suma de la intensidad de un número de píxeles, que corresponden a aquellos píxeles que cumplen con la característica de estar alejados una distancia  $R$  de un píxel central, entre el número de píxeles. El píxel central corresponde a aquel que tiene el valor máximo, de todo los píxeles que componían una imagen. En general, este píxel se encontraba en el centro de la imagen. Para tratar de eliminar en lo posible el ruido que se genera por los medios ópticos del segundo brazo del arreglo experimental y la cámara CCD, se hace un registro de datos sin que el haz láser llegue al ojo artificial. Esta imagen, denotada como de ruido de fondo, se resta a las imágenes de doble paso en las cuales entra la luz del láser hasta la retina del ojo artificial en presencia de partículas esparcidoras y sin ellas.

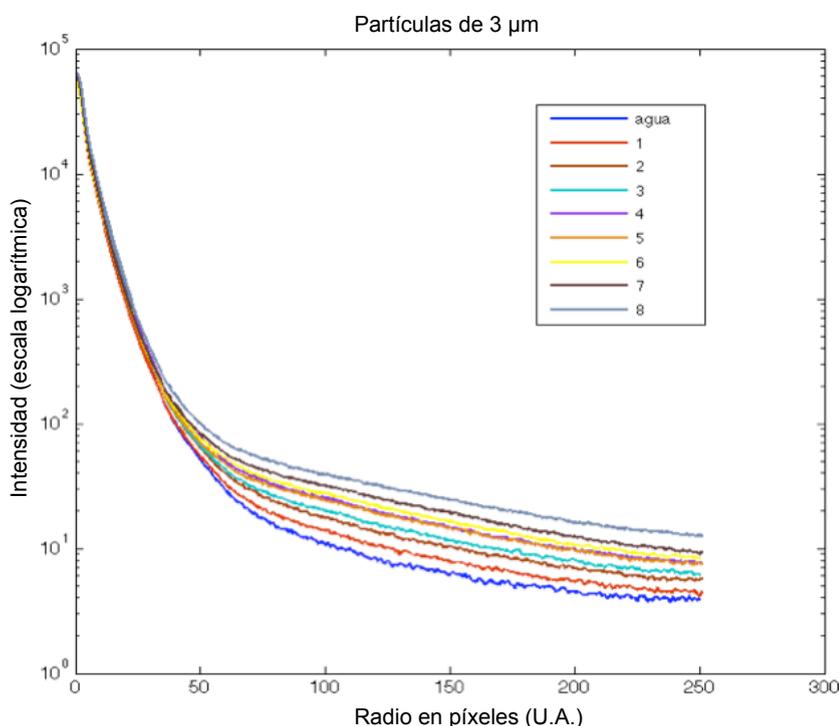


FIGURA 4.2: Resultados del efecto del esparcimiento debido a partículas de 3 µm de diámetro. El número de partículas aumenta en pequeñas porciones.

Las imágenes 4.2 y 4.3 son el resultado del análisis que se llevó a cabo a los datos que se registraron para medir el esparcimiento, cuando el tamaño de las partículas esparcidoras, que se encuentran en el lente cristalino corresponde a  $3 \mu m$ . La diferencia entre los resultados de ambas imágenes está relacionada con la cantidad de partículas que se fueron agregando en el lente cristalino. La figura 4.2 muestra que, debido a la diferencia mucho menor entre las líneas que contiene, la porción de la mezcla con partículas que agregamos era más pequeña que en la segunda ocasión que se realizó el experimento, cuyo resultado se representa en la figura 4.3. La línea de color azul marino, representa la medida del esparcimiento cuando sólo existe agua, y las demás líneas representan diferentes niveles de concentración de partículas en el lente cristalino. Como podemos observar, mientras mayor es la cantidad de partículas, el esparcimiento aumenta, modificando claramente el nivel de intensidad en los bordes de las imágenes.

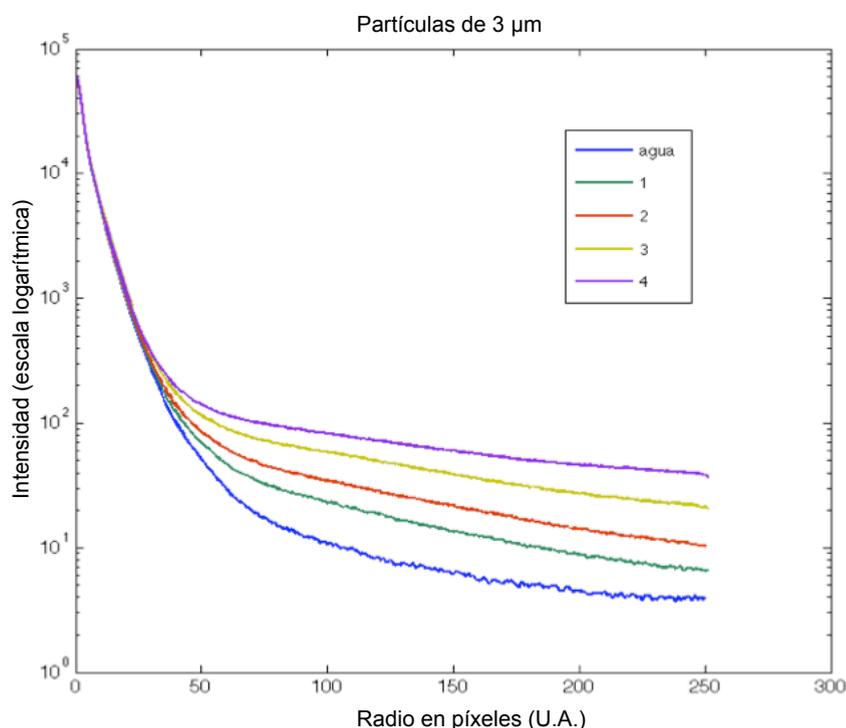


FIGURA 4.3: Resultados del efecto del esparcimiento debido a partículas de  $3 \mu m$  de diámetro. El número de partículas aumenta en porciones relativamente grandes.

Algunas ocasiones, sólo era posible realizar entre uno o dos números de registros de las medidas de esparcimiento que se podían hacer para partículas de cierto tamaño. Esto, porque la mezcla que se agregaba al medio de núcleo del lente cristalino contenía una cantidad elevada de partículas esparcidoras, lo que causaba que no fuera posible conseguir varios registros para el caso en que se iba incrementando

la porción de mezcla de partículas esparcidoras en dicho medio. El caso que se muestra a continuación, representa un ejemplo de un número relativamente bajo de registros, debido a que no fue posible obtener durante la medición de la tercera adición de la mezcla al núcleo, un máximo de intensidad estable.

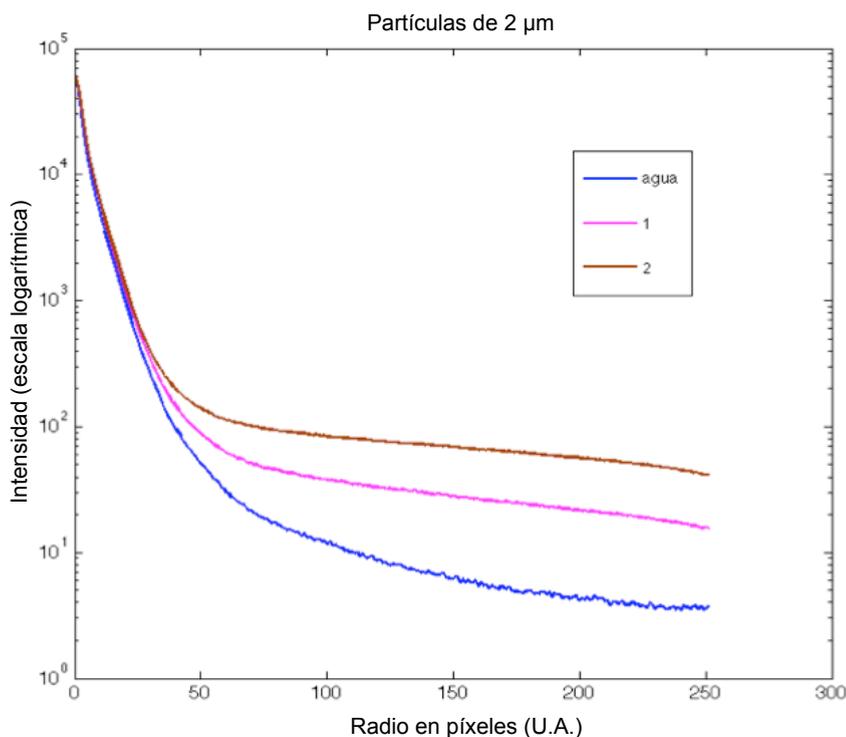


FIGURA 4.4: Resultados del efecto del esparcimiento debido a partículas de  $2 \mu\text{m}$  de diámetro. Obtención de limitado número de registros.

La figura 4.4, es el resultado del análisis realizado a las imágenes que se obtuvieron al medir el esparcimiento cuando las partículas que se integraban en el núcleo del lente cristalino era de  $2 \mu\text{m}$ . La línea azul representa la medida cuando no hay presencia de partículas esparcidoras, y las líneas 1 y 2, son el resultado del efecto del esparcimiento debido a la mezcla de las partículas esparcidoras de  $2 \mu\text{m}$  que se fueron añadiendo. En este caso, llevamos a cabo el experimento en tres oportunidades. La primera oportunidad, agregué las microesferas, directamente del recipiente que las contenía. Al realizar la medida no fue posible alcanzar el máximo. La segunda ocasión, tomando las microesferas con la micropipeta, se agregaron 0.05 ml directamente del recipiente, sólo se pudo obtener una medida con partículas esparcidoras en el núcleo. Y, en el tercer intento, lo que se hizo fue agregar la mezcla del núcleo que se produjo del segundo intento. Con esta mezcla, que contenía una mayor cantidad de agua que la mezcla que se obtiene directamente del recipiente, fue posible obtener dos imágenes, que corresponden

a la primera porción de mezcla que se agregó y al aumento de concentración de partículas debido a la segunda porción que se añadió.

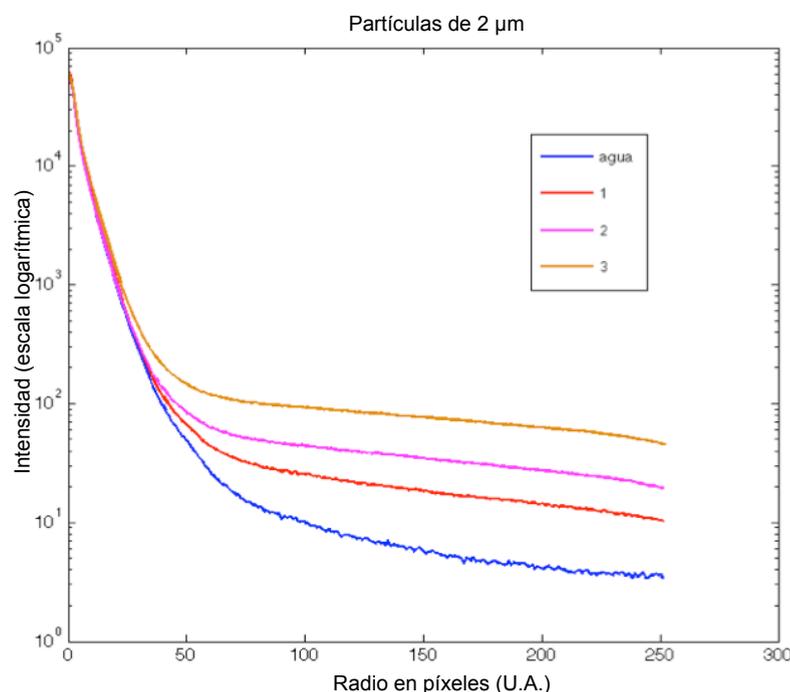


FIGURA 4.5: Resultados del efecto del esparcimiento debido a partículas de  $2 \mu\text{m}$  de diámetro. Primera prueba.

Los resultados que se observan en las figuras 4.5 y 4.6, son las medidas del esparcimiento que se obtuvieron de dos realizaciones diferentes del experimento, usando como partículas esparcidoras microesferas de  $2 \mu\text{m}$ . En ambos casos, nos fue posible alcanzar el máximo de intensidad estable en 3 ocasiones en las que se agregó la mezcla de microesferas en el núcleo del lente cristalino. Se puede observar que, conforme aumentábamos la cantidad de microesferas en el núcleo cristalino el esparcimiento causaba que la intensidad en los bordes de las imágenes aumentara.

Conforme se ejecutaba el experimento se fueron haciendo adaptaciones en la forma en qué se agregaban las microesferas al lente cristalino. Al principio, comenzamos con porciones muy pequeñas que se obtenían directamente del recipiente, en donde estaban contenidas las microesferas, y cuando se observaba que la primera medida o la segunda medida que se intentaba hacer, no era posible hacer un registro debido a que no se alcanza un máximo de intensidad estable, lo que hacíamos era realizar nuevamente el experimento agregando la mezcla que se generaba en el núcleo en el primer intento. Se decidió que para conseguir más de dos registros del efecto de esparcimiento para cada tamaño de partícula, se mezclaran 300 microlitros de

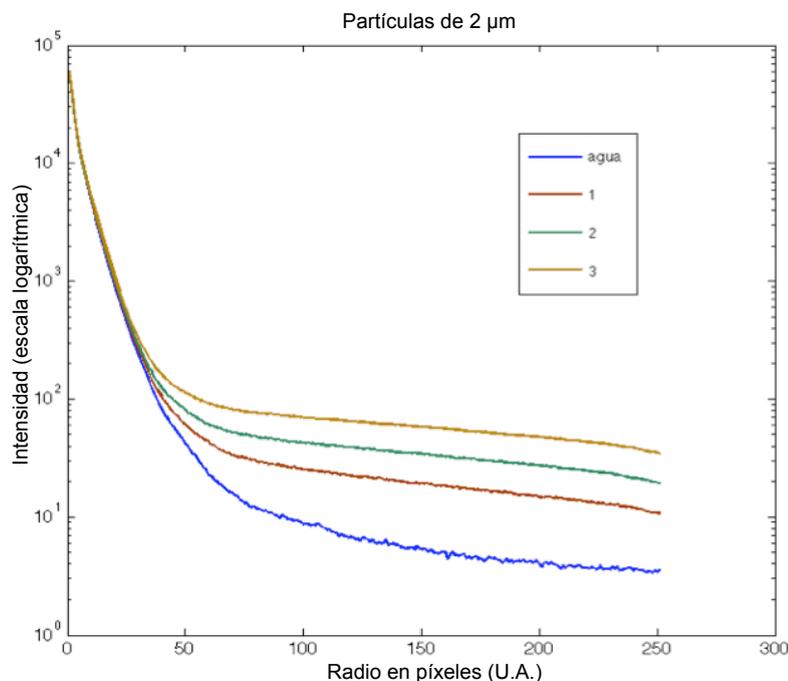


FIGURA 4.6: Resultados del efecto del esparcimiento debido a partículas de  $2 \mu\text{m}$  de diámetro. Segunda prueba.

agua con 15 microlitros de la mezcla original de microesferas. En el núcleo del lente cristalino se añadían porciones de 10 microlitros de esta mezcla, y se hacían los registros para cada vez que se aumentaba la concentración de microesferas.

La figura 4.7 muestra el resultado del análisis que se llevó a cabo para el registro de intensidad cuando el lente cristalino tiene partículas esparcidoras de  $1 \mu\text{m}$ . Con este tamaño de partícula fue posible obtener cuatro registros, que muestran, nuevamente, cómo se varía la intensidad en los bordes de las imágenes de acuerdo al aumento en el número de microesferas presentes en el núcleo. Al momento de presentar estos resultados se hizo necesario cambiar la escala del eje donde se representa la intensidad, y pasó de una lineal a una logarítmica, esto para que fuera mucho más claro observar las diferencias que se presentan conforme aumenta el esparcimiento y afecta la cantidad de intensidad que se registra en diferentes regiones de las imágenes.

El esparcimiento afectaba la distribución de la intensidad en las imágenes que se registraban, mostrando sobretodo sus efectos en los extremos en relación con la imagen de referencia que se obtenía cuando se realizaba la medición sin partículas esparcidoras en el núcleo del lente cristalino. Para asegurarnos que el registro que se había conseguido de manera correcta, la medición del esparcimiento se repetía

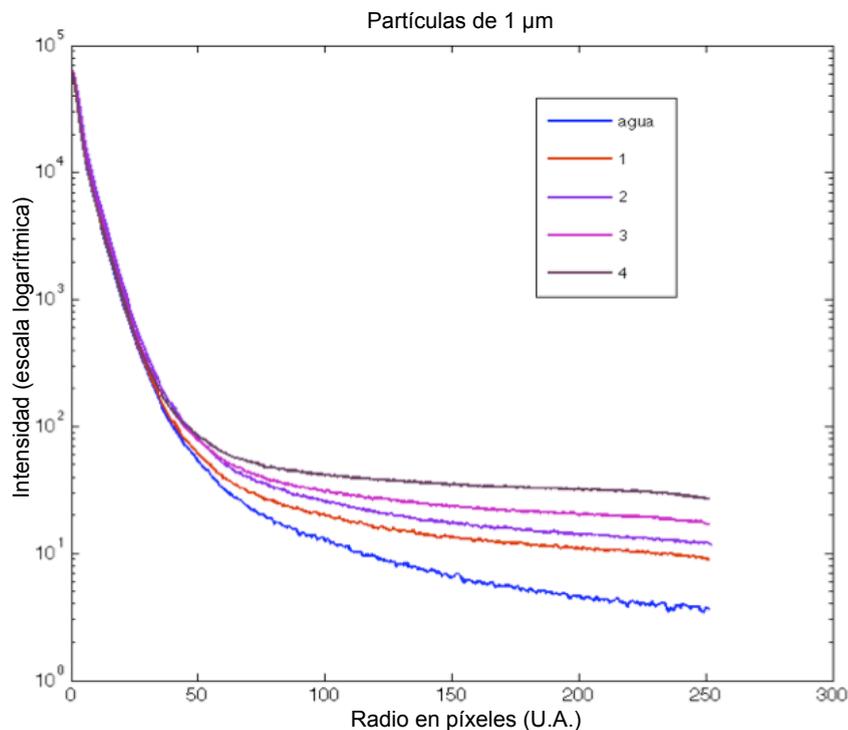


FIGURA 4.7: Resultados del efecto del esparcimiento debido a partículas de 1  $\mu\text{m}$  de diámetro.

entre 3 y 5 veces, para cada ocasión que se incorporaban las porciones de mezcla con microesferas. Una vez que se ejecutaba el análisis de las imágenes registradas se comparaban los resultados obtenidos. De esta manera, verificábamos si había desviaciones entre las medidas, debidas a que muchas microesferas comenzaban a descender hasta el fondo del recipiente conforme pasaba el tiempo.

Las líneas 1, 2, 3, 4 y 5 de la figura 4.8 representan la distribución de la intensidad conforme nos vamos desplazando del centro, con un valor de radio igual a cero, hacía la región donde se encuentra el límite externo de las imágenes que se registraron conforme se iban agregando porciones de la mezcla de partículas esparcidoras cuyo tamaño era de  $0.5 \mu\text{m}$ . Como en los anteriores casos, lo primero que hicimos fue proceder con el registro cuando el lente cristalino está libre de microesferas, el análisis de este caso se muestra con la línea azul, la cual marca nuestra referencia. A partir de esta referencia, se observa cómo, conforme se incrementa la concentración de microesferas en el núcleo, aumenta en la periferia la intensidad, de acuerdo con el análisis de las imágenes que se obtienen para los casos en los cuales se produce un esparcimiento debido a la presencia de partículas, cuyo índice de refracción es diferente al del medio en el que se encuentran.

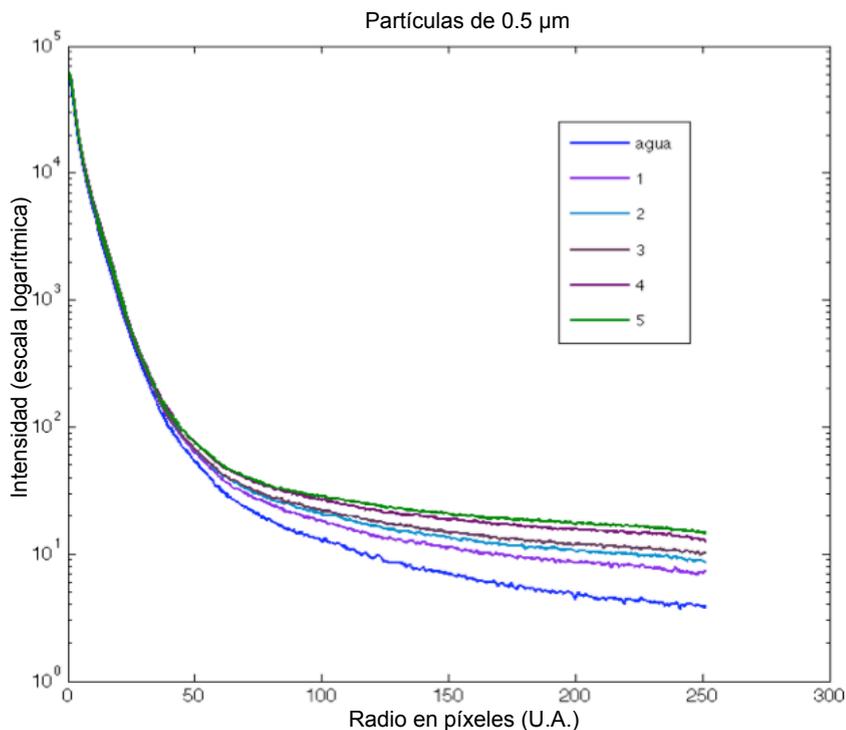


FIGURA 4.8: Resultados del efecto del esparcimiento debido a partículas de  $0.5 \mu\text{m}$  de diámetro.

Algunos registros que se obtuvieron muestran, al conseguir el resultado de su análisis, efectos oscilatorios en la región periférica. La causa de estas variaciones se desconoce. Sin embargo, a lo largo de la serie de experimentos que se realizó, en varias ocasiones se notó que, cierta cantidad de agua salía del recipiente que simulaba el lente cristalino. Esto se podría haber debido a que una de las ventanas de vidrio, de las dos que conformaban las paredes paralelas del recipiente, era movable y, algunas veces pudo haber sido colocada de forma que se saliera el líquido al momento de realizar el registro y, esto generase el efecto de oscilación.

En la figura 4.9 se muestra un ejemplo de lo que se acaba de mencionar. Esta figura 4.9, es el resultado del análisis hecho a las imágenes que se registraron cuando las microesferas que se agregaban tenía el tamaño de  $0.5 \mu\text{m}$ . En el extremo de las líneas 1 y 2 podemos observar una oscilación, mientras que, en la línea 3, que representa la distribución de intensidad de la imagen que se consigue al agregar por tercera vez la mezcla de partículas esparcidoras, la oscilación no está presente.

El experimento de doble paso nos permite llevar a cabo registros de la formación de imágenes en la retina, a partir de los cuales, es posible observar, la manera cómo varía la distribución de intensidad, de acuerdo a la cantidad de partículas

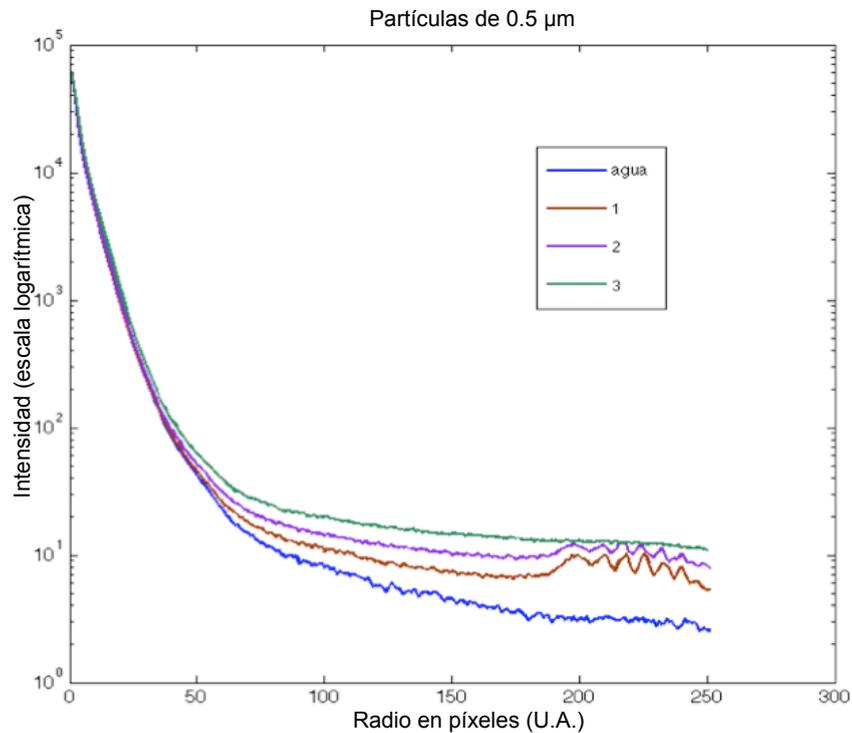


FIGURA 4.9: Resultados del efecto del esparcimiento debido a partículas de  $0.5 \mu\text{m}$  de diámetro. Aparición de ruido en la cola de las distribuciones.

esparcidoras que se agregan en algún medio, en este caso el lente cristalino, que forme parte del sistema óptico que podría ser afectado por la presencia de estas partículas. Las imágenes que se mostraron en esta sección corresponden al análisis que se realizó para cada registro que se obtuvo y expresan los promedios radiales de intensidad normalizados, correspondientes a las imágenes de doble paso registradas para los diferentes tamaños de partículas y las variaciones en la porción de éstas que se presentaba en el lente. De acuerdo a los resultados obtenidos podemos concluir que, conforme se incrementa la cantidad de partículas esparcidoras en el medio, la distribución de intensidad se ve afectada y aumenta, sobretodo en los extremos de las imágenes, esto se observa al apreciar las diferencias entre los perfiles radiales de las imágenes de doble paso. Con los resultados de este experimento se tiene una referencia para verificar de manera cualitativa los resultados que se obtuvieron con el modelo computacional que se desarrolló para evaluar el efecto del esparcimiento de la luz en el ojo humano. Se plantea que sea una comparación cualitativa debido a que existen variantes importantes entre el modelo experimental y el modelo computacional.

# CAPÍTULO 5

## RESULTADOS MODELO COMPUTACIONAL

### 5.1 Implementación del modelo computacional

El objetivo de este estudio es analizar la relación que existe entre la imagen que se forma en la retina, afectada por el esparcimiento hacia adelante, y la imagen formada en la pupila con el efecto del esparcimiento hacia adelante generado por el doble paso y el esparcimiento de la retina. De tal forma que, se implementó un modelo computacional cuyo diagrama de flujo está representado en la figura 5.1.

El programa se inicia con la posición y la dirección de los fotones en la superficie tangente a la córnea. La posición se genera de manera aleatoria, tomando en cuenta el diámetro del haz de la señal de entrada al sistema. El ancho del haz incidente se fijó de 1 mm, ubicándosele justo enfrente de la cornea y en el centro de ésta. La dirección de los fotones se considera paralela al eje  $Z$  que fue el que se escogió como aquel en el cual los componentes ópticos se encuentran centrados. A continuación, se aplican las ecuaciones de trazo exacto de rayos, para determinar la posición y la dirección de los fotones en las superficies que separan a los medios ópticos. Si en un medio existen partículas esparcidoras, se determina si los fotones atraviesan alguna partícula. Si se cumple esto, se determina la nueva dirección de los fotones, aplicando Monte Carlo a la relación entre la intensidad y el ángulo de esparcimiento, calculada con la solución de Mie. La posición de los fotones una vez que se esparcen, es la posición de la partícula con la que chocaron. A

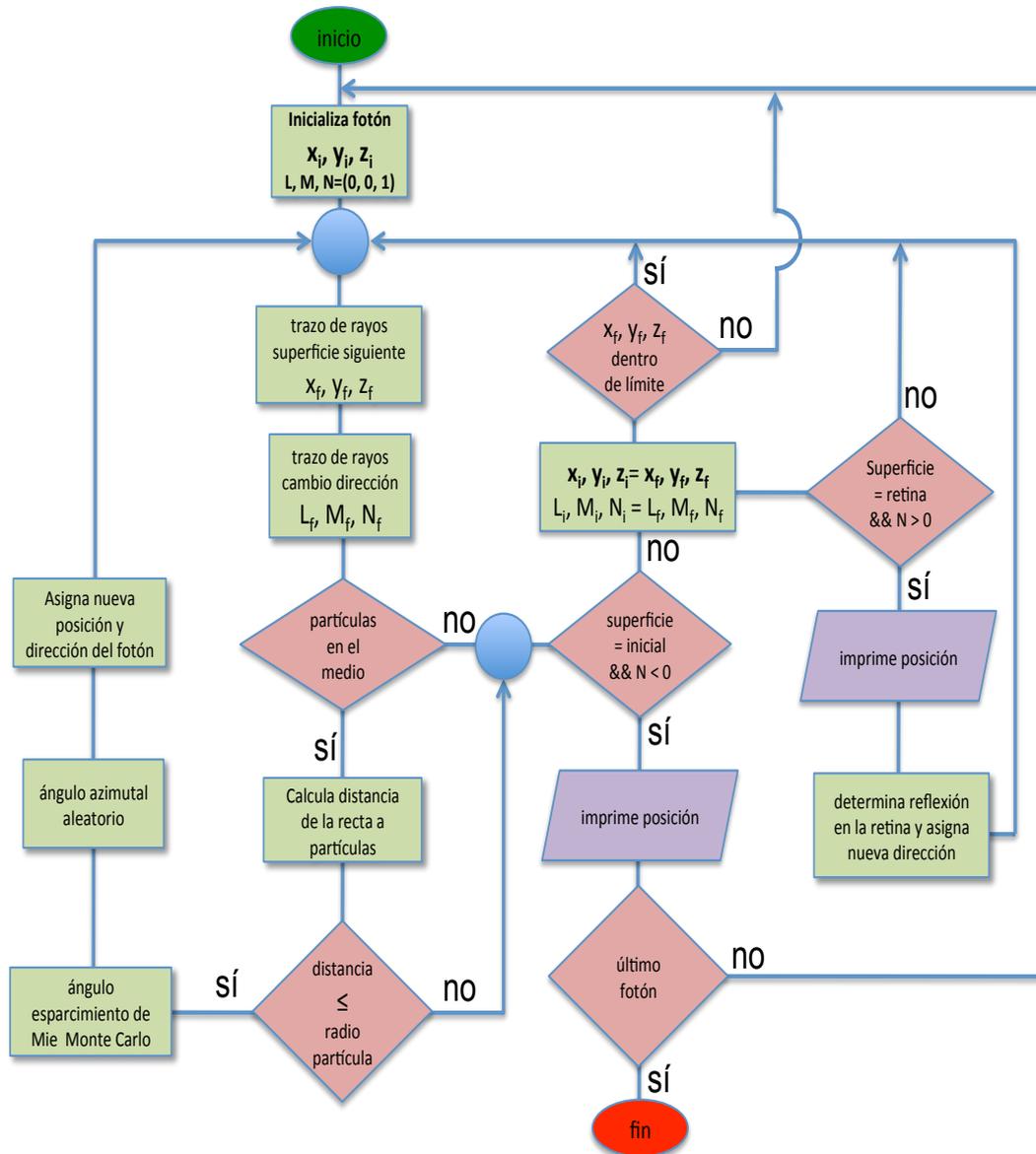


FIGURA 5.1: Diagrama de flujo del programa que modela el recorrido de fotones en el ojo humano con cataratas

partir de este momento se vuelve a aplicar el trazo de rayos. Este proceso se repite hasta que los fotones llegan a la retina, en donde se reflejan, y hacemos uso del modelo de Marcos, et al. [28]. Además, al llegar a la retina, la información de las posiciones de los fotones se almacenan en un archivo binario. En el segundo paso se repite el proceso de aplicar trazo de rayos y verificar, si los medios tienen partículas esparcidoras y si los fotones atraviesan algunas. Para cada experimento se simuló el recorrido de 100, 000 fotones dentro del ojo. Finalmente, cuando los fotones llegan a la superficie tangente a la córnea se imprimen sus posiciones y se almacenan en otro archivo binario. Con los archivos de las posiciones de los

fotones al llegar a la retina y en el plano de inicio, se generan matrices de datos con las cuales se pueden producir imágenes que se relacionan con la distribución de la intensidad en ambos planos.

Para elaborar el modelo computacional se utilizó el enfoque de programación orientada a objetos, empleando el lenguaje de programación C++. Además del programa descrito en la figura 5.1, con este mismo lenguaje de programación y enfoque, se desarrollaron los programas para determinar la relación entre la intensidad y el ángulo de esparcimiento haciendo uso de la solución de Mie, la distribución espacial de las partículas esparcidoras en el núcleo del lente a partir del proceso de Strauss, y un modelo de guías de onda y esparcimiento [28]. El código de los programas lo elaboramos nosotros mismos recurriendo a la teoría explicada en el capítulo 2 de esta tesis.

Las características con las que cuenta la computadora que se usó para ejecutar las simulaciones son un procesador Intel(R) Pentium(R) CPU 2.93 GHZ y con una memoria RAM de 2.00 GB. El tiempo que tardaba en correr una simulación estaba relacionado con la cantidad de partículas esparcidoras que se simulaban en el núcleo del lente. Para una distribución de 100,000 partículas el tiempo de ejecución era de alrededor de 30 minutos y para distribuciones de 400,000 el tiempo se elevaba a 2 horas y 15 min aproximadamente.

Tabla 1. Tabla de los parámetros del modelo óptico del ojo humano.

Número Superficie	Radio de Curvatura (mm)	Asfericidad Q	Indice de Refracción n	Separación
1	7.83	-0.26	1.333	6.0 $\mu m$
2	7.46	-0.36		
3	7.09	-0.46	1.401	50.0 $\mu m$
4	6.718	-0.56	1.378	500.0 $\mu m$
5	6.34	-0.66	1.357	5.0 $\mu m$
6	11.0	-1.0	1.336	3.0 mm
7	-8.0	-0.5	1.42	3.60 mm
8	12.0	0	1.336	16.0 mm

FIGURA 5.2: Modelo computacional del ojo humano

El modelo del ojo humano se encuentra descrito en la figura 5.2. Los datos de los medios y las superficies se tomaron de Atchison, et al. [67]. En el modelo que proponemos la córnea se compone por cuatro capas que son: la película lagrimal, el epitelio, el estroma y el endotelio. Las superficies 6 y 7 del modelo computacional del ojo humano corresponden a las superficie anterior y posterior del lente cristalino. En el núcleo del lente, es donde se presentan las estructuras con forma esférica, que cuentan con un índice de refracción que varía en relación al índice de refracción que compone la generalidad de la lente. Se considera que estas partículas ocasionan una redistribución de la luz hacia delante y se les vincula con la generación de cataratas. Estos cuerpos se han encontrado a lo largo de toda la zona nuclear de la lente, es decir, desde el núcleo embrionario (embrionario) hasta la región del núcleo adulto, sin incluir la corteza. La figura 5.3 es un corte que muestra el interior del lente cristalino y las diferentes regiones que lo componen, tomada del artículo de Gilliland, et. al. [28]. Del centro a los extremos, tenemos: el núcleo embrionario (en), el núcleo fetal (fn), el núcleo juvenil (jn), el núcleo adulto (an) y la corteza de la lente (c).

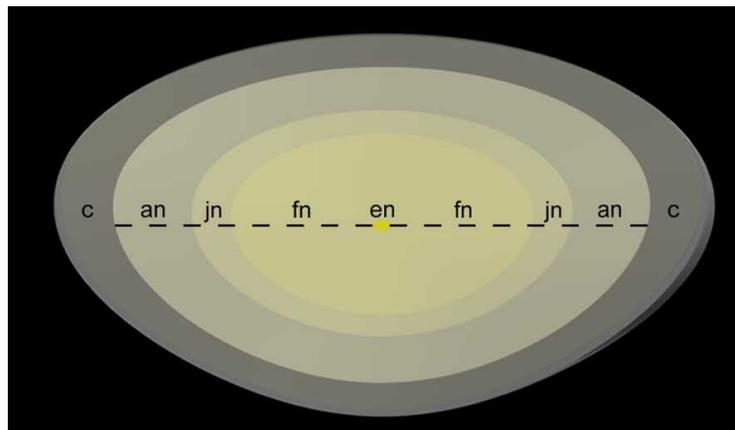


FIGURA 5.3: Diagrama del lente cristalino. Se especifican las regiones que conforman el núcleo: el núcleo embrionario (en), el núcleo fetal (fn), el núcleo juvenil (jn), el núcleo adulto (an).

Empleando el algoritmo del proceso de Strauss, que es un modelo de un proceso de puntos comúnmente utilizado en aplicaciones espaciales para generar patrones de puntos aleatorios en el espacio, se simulieron las diferentes distribuciones que se consideraron de cuerpos esparcidos (ver sección 3.5.1). La figura 5.4 representa las posiciones de 200, 000 partículas dentro del núcleo de la lente. De la misma manera se tienen simulaciones de las posiciones de 100, 000; 300, 000 y 400, 000 partículas distribuidas aleatoriamente en esta región del lente.

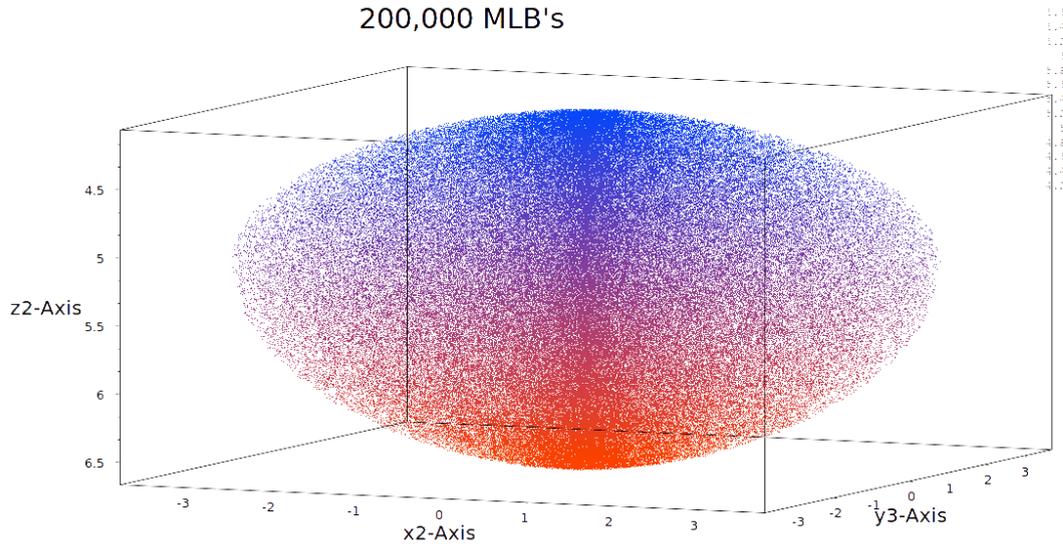


FIGURA 5.4: Distribución de partículas esparcidas en el núcleo del lente. Representación gráfica de las posiciones de 200,000 partículas en el núcleo del lente.

Si un fotón choca con alguno de estos cuerpos mientras transita esta región, sufrirá una variación en la dirección. Para determinar el cambio de dirección se recurre a la función de fase normalizada, y se procede a determinar el ángulo de esparcimiento como se indicó en la sección 3.2.2; además, se determina al azar, el ángulo acimutal. Los fotones que llegan a la retina son reflejados hacia la pupila. Los fotones reflejados, pasan por segunda ocasión por los medios ópticos que componen al ojo; y pueden sufrir, nuevamente, el fenómeno de esparcimiento al recorrer el cristalino. El término de su trayectoria se fija cuando este fotón sale de ciertos límites, definidos para cada superficie, o cuando vuelve a llegar al plano donde inició su recorrido hacia dentro del ojo. Al final, lo que obtenemos con nuestro programa de simulación son dos archivos de datos que contienen las posiciones de los fotones que alcanzan la retina y las posiciones, en la pupila de salida, de los que llegan a salir en el doble paso.

A partir de los archivos de las posiciones de los fotones, en el plano de la retina y en el plano de la pupila de salida, se diseñan matrices cuadradas, cuyos elementos contienen el número de fotones que caen dentro de los límites de determinado segmento de la región central de la retina o de la pupila. Cada segmento corresponde con algún elemento  $(i_{col}, j_{fila})$  de la matriz. El tamaño de los segmentos se determina con la razón de la longitud del alto (o el ancho) que se desee fijar para la región central entre el número de segmentos que se divida dicha región. Con los

datos organizados de esta forma en las matrices, se lleva a cabo el análisis de la serie de simulaciones que se realizaron.

Las gráficas de los resultados mostrados fueron realizadas aplicando un método que consiste en considerar que la imagen de un punto extendido, puede dividirse para su análisis en aros concéntricos. El centro de estos aros corresponde con el centro de la imagen, que regularmente contendrá el valor máximo dentro de esta matriz. Cada aro está formado por los elementos de la matriz que cumplan con la condición de encontrarse a determinada distancia del centro. A continuación, se suman los valores que contiene cada elemento que conforma a un aro y el total se divide entre el número de elementos de ese aro. Lo que se obtiene es un vector que describe cual es el comportamiento de la intensidad radial en promedio conforme nos alejamos del centro de la imagen. Este vector es el que graficamos, y a él nos referimos cuando mencionamos a la distribución de la intensidad en uno u otro plano.

## 5.2 Resultados del modelo computacional

La serie de simulaciones computacionales que se realizó para estudiar el efecto del esparcimiento en las imágenes que se forman en la retina y en la pupila, se organizó: por el tamaño de las partículas esparcidoras; a continuación, por el número de partículas que se encontraban distribuidas en el lente; y finalmente, por la longitud de onda y la relación entre el índice de refracción de la partícula y el del medio. Los diámetros de las partículas que se fijaron para trabajar fueron: 1, 2, 3 y 4  $\mu m$ . Se simularon distribuciones en el cristalino de las posiciones de los cuerpos generadores de esparcimiento, que cumplieran con la condición que la distancia menor entre un elemento y el resto fuera mayor o igual que 10 micras. Las distribuciones se diseñaron para contener 100,000; 200,000; 300,000 y 400,000 elementos en el cristalino. El programa para el cálculo del esparcimiento con la solución de Mie, utilizó como parámetros de entrada, los diámetros de las partículas; las longitudes de onda de 400  $nm$ , 550  $nm$  y 700  $nm$ ; y las relaciones del índice de refracción de la partícula y del medio de 1.46/1.42 y 1.49/1.42.

### 5.2.1 Análisis de acuerdo a la cantidad de partículas esparcidoras

El conjunto de imágenes de la figura 5.5 muestra que, en el plano de la retina (imágenes a la izquierda), el efecto del esparcimiento se hace notable a partir que las partículas esparcidoras tienen  $1 \mu\text{m}$  de diámetro, tomando en consideración la cantidad de partículas esparcidoras.

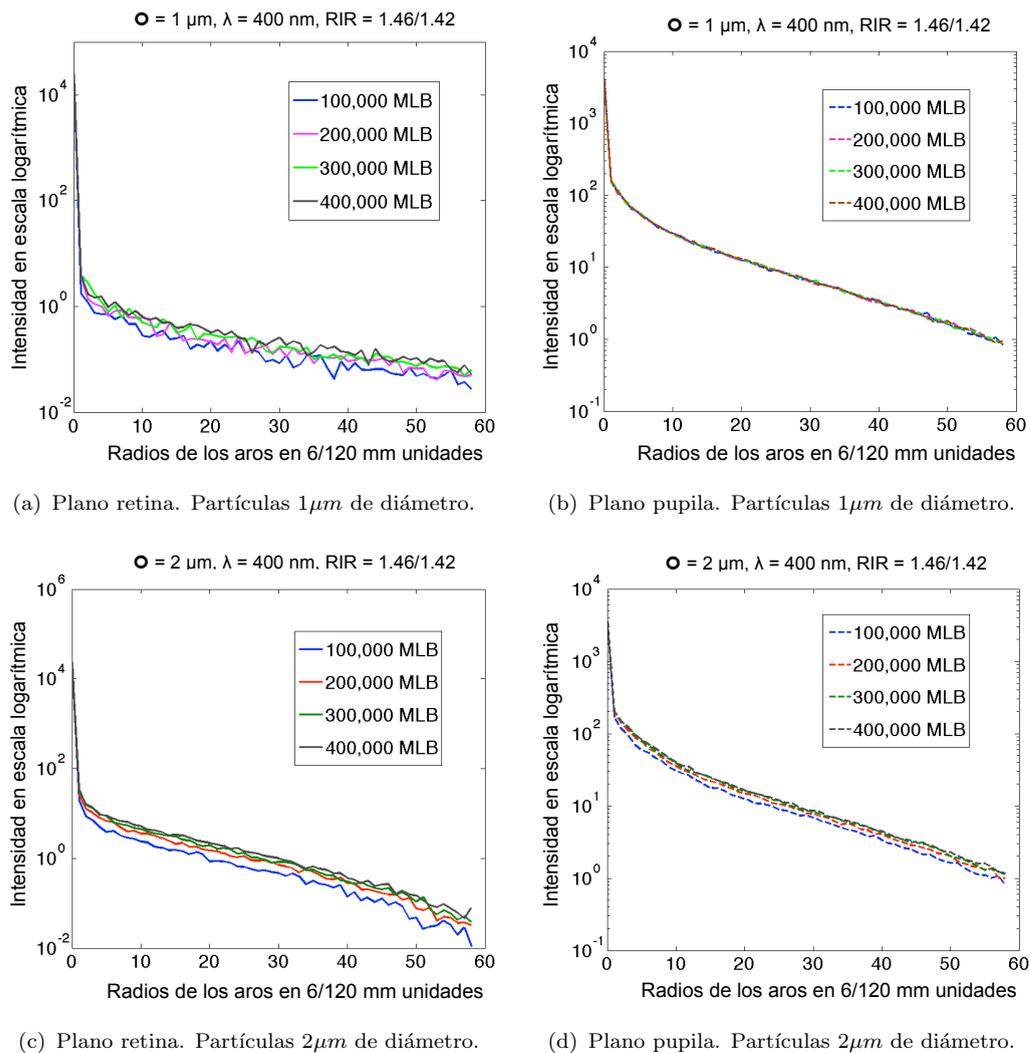


FIGURA 5.5: Comparación de la distribución de intensidad entre el plano de retina y el plano de pupila.

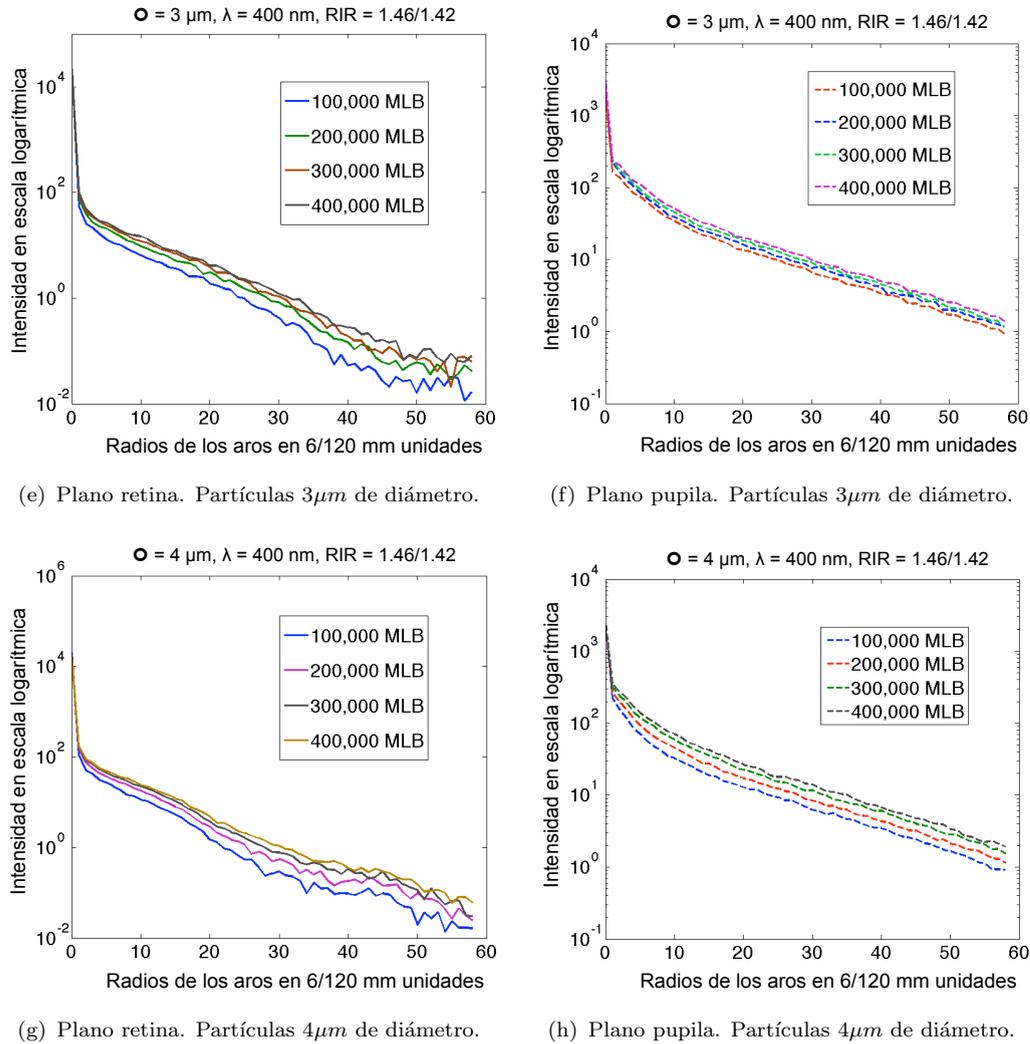


FIGURA 5.5: (Continuación) Comparación de la distribución de intensidad entre el plano de retina y el plano de pupila.

Como puede observarse conforme se incrementa el número de partículas, el esparcimiento provoca que la distribución de la intensidad aumente a partir de una distancia muy cercana al segmento central, en donde por lo regular se encuentra el máximo de intensidad de cada registro. Este incremento de la intensidad se va haciendo más evidente conforme avanzamos hacia los extremos. Aunque al final, se observa cierto ruido, debido a que las señales son más pequeñas en esta región. Sin embargo, esta variación en la distribución de intensidad conforme aumenta la cantidad de partículas no parece advertirse, tan pronunciadamente, en el plano de la pupila de salida. El caso más claro se observa cuando el tamaño de las partículas es de  $1\mu\text{m}$ : para las diferentes cantidades de partículas, la distribución de la luz es muy semejante. A partir que el diámetro de los cuerpos esparcidos es de

2 micras, comienza a notarse la diferencia entre los diferentes niveles de concentración de estos cuerpos. Comparando la imagen de  $2 \mu m$  con la de  $4 \mu m$ , ambas en el plano de la pupila de salida, se observa claramente la influencia que tiene el tamaño de las partículas en el hecho de esparcir luz. En la imagen para  $4 \mu m$  cada línea representando la distribución de intensidad, se puede ver claramente separada de las demás y, la diferencia entre la distribución de la luz con 100,000 partículas y con 400,000 es mayor que en el caso que se observa para partículas de 2 y  $3 \mu m$ .

### 5.2.2 Análisis del efecto del esparcimiento que produce la retina

Para determinar la dirección con la que regresarán los fotones hacia el exterior del ojo se recurre a un método de Monte Carlo, como en el caso de la simulación del esparcimiento de Mie, para seleccionar el ángulo al que se refleja el fotón. Así, se modela que en la retina se refleja y redirecciona la luz, haciendo que cada fotón salga de este medio con una dirección particular. Esto produce que la retina sea un modelo de un medio que también esparce la luz. Lo que se representa en las imágenes de la figura 5.6, es la comparación entre distribución de la luz, en el plano de la pupila, cuando se aplica el modelo de guías de onda y esparcimiento en la retina y, cuando se modela que los fotones se reflejan de manera paralela al eje en el cual están centrados los medios ópticos, es decir sin incluir el efecto de guías de ondas y esparcimiento.

Cada imagen corresponde con un tamaño de partícula, y son simulaciones hechas cuando el número de elementos esparcidores es de 400,000. En el recuadro se señala con un signo + a las líneas que se obtuvieron cuando se aplicó el modelo de guías de onda y esparcimiento para la retina y, las líneas que tienen al final tiene un signo - corresponden a las líneas que representan las distribuciones cuando se realizaron pruebas sin implementar dicho modelo. Las líneas describen la distribución de intensidad, para cada caso y, según las longitudes de onda con las que se trabajó. En el caso en que se aplica el modelo de guías de onda y esparcimiento, se observa que la diferencia en las distribuciones de la luz con respecto a cada longitud de onda, es notoria hasta que el diámetro de las partículas es de  $4 \mu m$ . Cuando el diámetro es de  $1 \mu m$ , la diferencia entre cada simulación variando la longitud de onda es prácticamente imperceptible. Algo similar ocurre

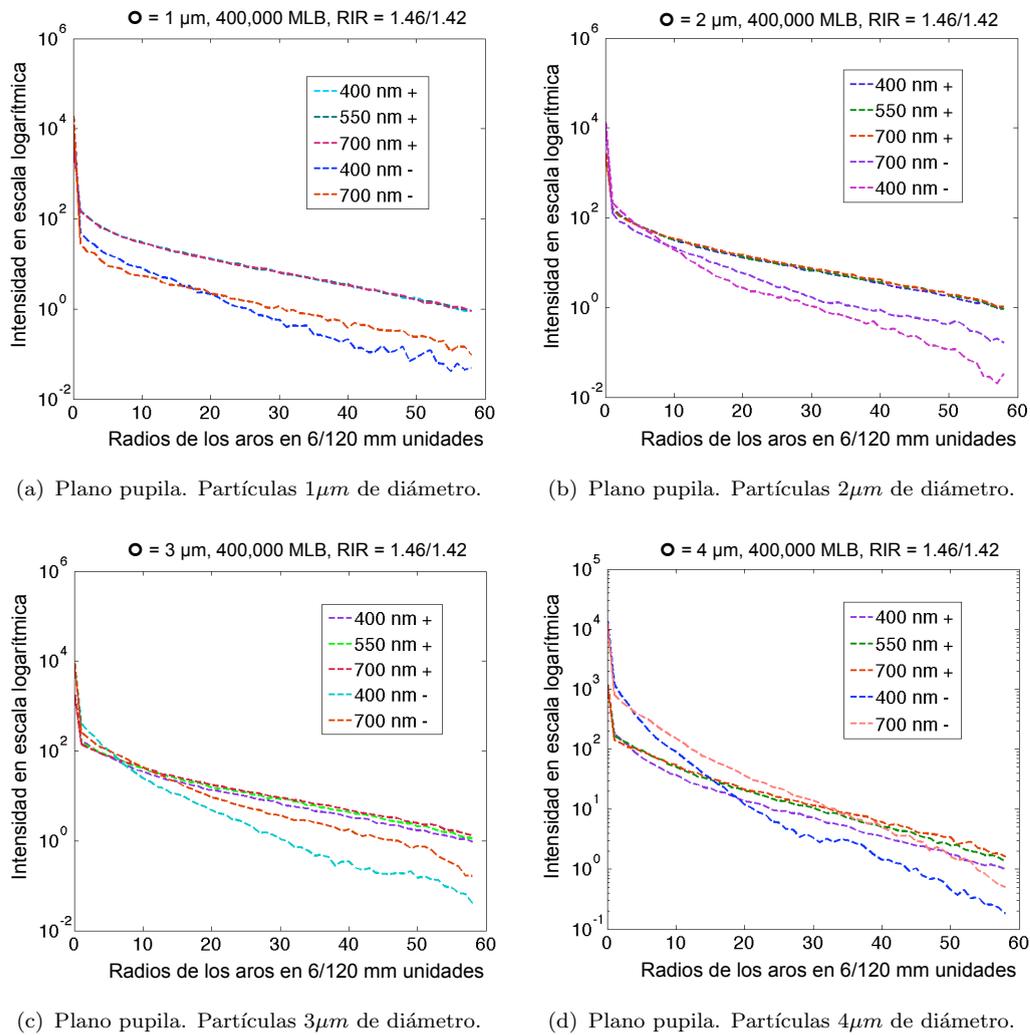


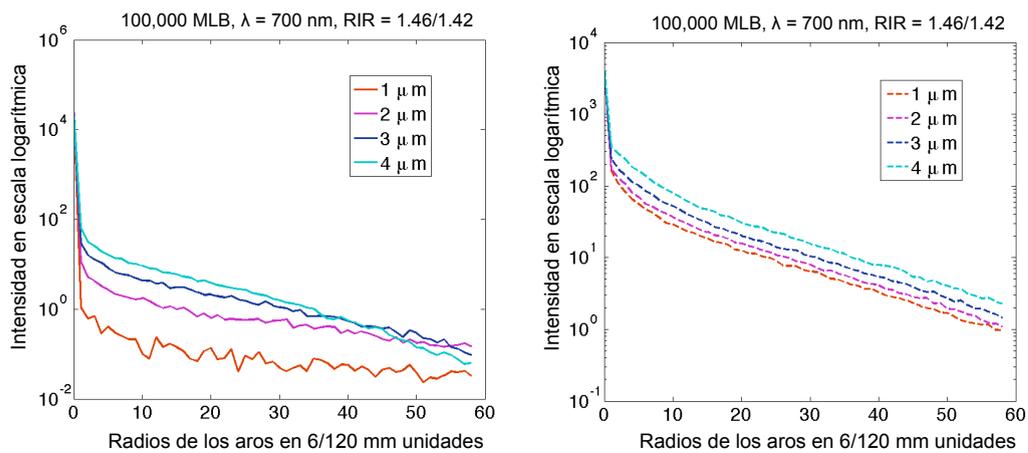
FIGURA 5.6: Comparación del efecto en la distribución de la luz en presencia y en ausencia de esparcimiento en la retina.

cuando las partículas tienen  $2\mu m$  de diámetro, la diferencia apenas se puede observar. En la simulación con  $3\mu m$  la diferencia entre las distribuciones con respecto a la longitud de onda comienza a ser más clara. Por el otro lado, cuando se simula que los fotones se reflejan con la misma dirección, es evidente la diferencia que existe en las distribuciones de intensidad que se obtuvieron para las longitudes de onda de  $400\text{ nm}$  y  $700\text{ nm}$ , respectivamente. En estos casos, se observa que en la región próxima al centro de la imagen el esparcimiento es mayor cuando se usa la longitud de onda de  $400\text{ nm}$ . Conforme nos alejamos de esta zona, se presenta un cruce entre ambas distribuciones y, a partir de ese punto, el esparcimiento es mayor cuando se recurre al valor de longitud de onda de  $700\text{ nm}$  para llevar acabo la prueba. Lo apenas descrito, es muy notable cuando el diámetro de la partícula es de  $1\mu m$ . Aunque, para los demás tamaños de partícula ocurre algo

muy similar, lo que se observa es que mientras aumenta el diámetro, el cruce de las distribuciones para diferente longitud de onda, tiene lugar a una distancia que está, cada vez, más cercana al centro de la imagen.

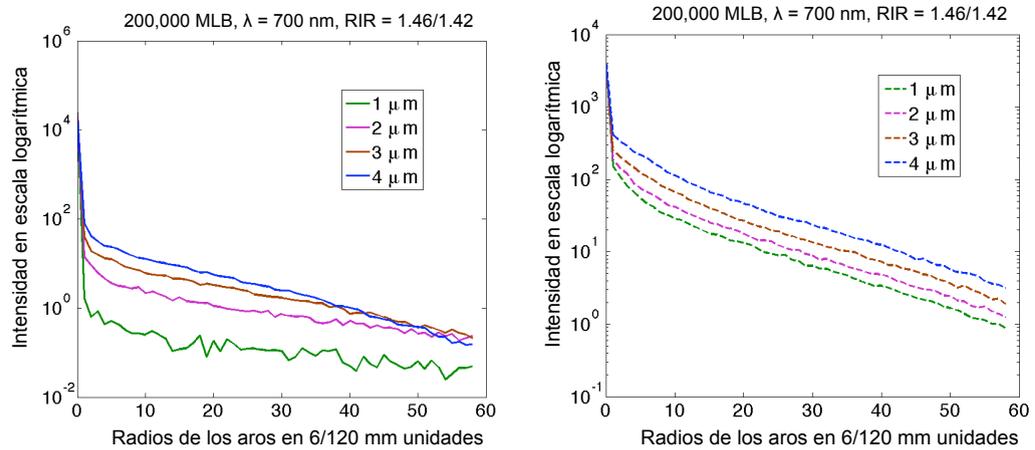
### 5.2.3 Análisis del diámetro de las partículas esparcidoras

El control que se puede ejercer sobre la mayoría de los parámetros que varían en el sistema que estamos estudiando mediante el modelado computacional, nos permite llevar a cabo una variedad de análisis que en muchas ocasiones no es posible practicar con el modelo experimental. En la figura 5.7 se compara la distribución de la luz, cuando se mantiene el valor de la longitud de onda en  $700\text{ nm}$ , mientras varía el diámetro de las partículas esparcidoras. En las imágenes de la izquierda se muestran las distribuciones en el plano de la retina y en la columna de la derecha las de la pupila de salida. Cada fila de esta figura corresponde con una simulación para un valor de longitud de onda diferente. Con los registros en el plano de la retina, se logra ver que existe una marcada diferencia entre las distribuciones de  $2, 3$  y  $4\ \mu\text{m}$  con respecto a la de  $1\ \mu\text{m}$ . Esta diferencia se amplía conforme la longitud de onda aumenta.

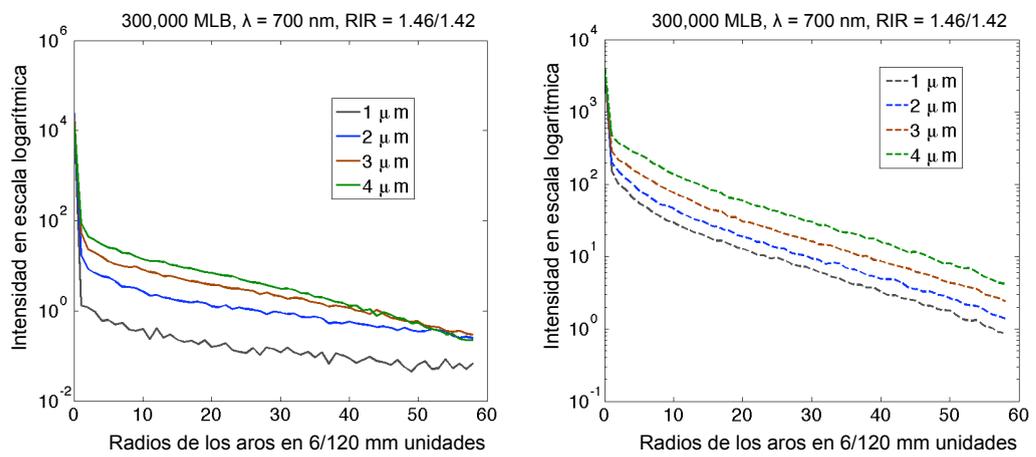


(a) Plano retina. 100,000 partículas esparcidoras. (b) Plano pupila. 100,000 partículas esparcidoras.

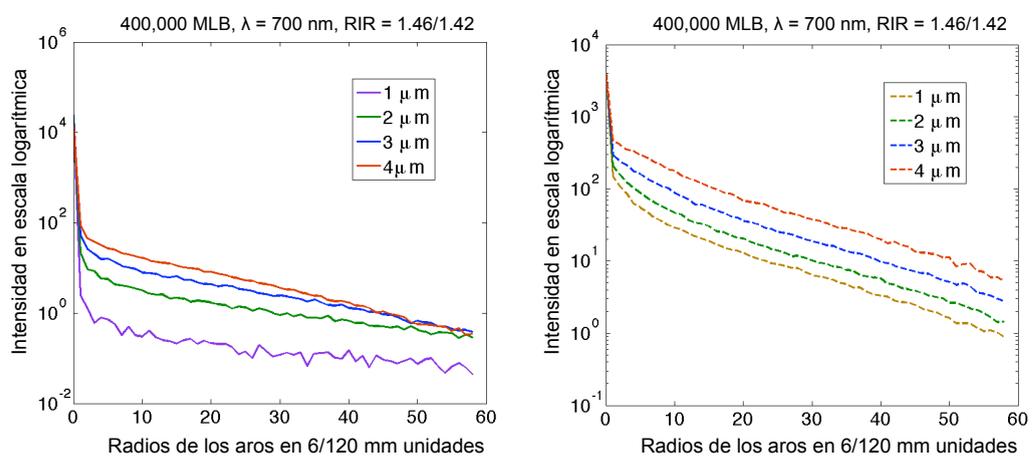
FIGURA 5.7: Análisis de la variación del diámetro de las partículas esparcidoras, conforme se incrementa el número de las mismas.



(c) Plano retina. 200,000 partículas esparcidas. (d) Plano pupila. 200,000 partículas esparcidas.



(e) Plano retina. 300,000 partículas esparcidas. (f) Plano pupila. 300,000 partículas esparcidas.



(g) Plano retina. 400,000 partículas esparcidas. (h) Plano pupila. 400,000 partículas esparcidas.

FIGURA 5.7: (Continuación) Análisis de la variación del diámetro de las partículas esparcidas, conforme se incrementa el número de las mismas.

Mientras que, aunque en el plano de la pupila, se presenta claramente variación entre los diferentes tamaños de partículas, la diferencia entre la distribución de la luz cuando las partículas son de  $1 \mu m$ , no es tan amplia con respecto al resto. Lo que nos dice que, según nuestro modelo, el efecto del esparcimiento en la retina afecta de manera importante al proceso de formación de imágenes en el plano de la pupila de salida y, se confirma que el tamaño de la partícula es la variable que más contribuye con el fenómeno del esparcimiento, porque está relacionada de manera proporcional con la cantidad de éste.

#### 5.2.4 Análisis del índice de refracción relativo

El índice de refracción del núcleo del lente es de 1.42, mientras que el índice de refracción para partículas con características esparcidoras puede variar entre 1.46 y 1.49. Se seleccionaron ambas relaciones del índice de refracción (1.46/1.42 y 1.49/1.42) para la realización de la serie de simulaciones. Los resultados revelan que para los dos casos de relación de los índices de refracción, prácticamente no hay una diferencia notable. Estos resultados son mostrados en la figura 5.8. Las imágenes de esta figura corresponden a tamaños de partícula de 1 micra para la columna izquierda y  $4 \mu m$  para la columna derecha. Cada fila representa una de las tres longitudes de onda que se escogieron para llevar a cabo las simulaciones. Por otro lado, en estas imágenes se puede observar que para partículas esparcidoras de  $1 \mu m$ , el esparcimiento debido a la retina causa un efecto considerablemente mayor en la distribución de la luz, en el plano de la pupila, que en el que causan las partículas en el plano de la retina. En el caso con presencia de partículas esparcidoras de  $4 \mu m$  en el núcleo, la diferencia entre la distribución de la luz en el plano de la retina y en el plano de la pupila de salida no es tan amplia, aunque sí es bastante notable.

Al observar en estas imágenes el efecto que tiene la variación de la longitud de onda, si comparamos la distribución de la luz en el plano de la retina y en el plano de la pupila cuando el tamaño de partículas es de  $1 \mu m$ , parece no haber un cambio notable entre los pares de distribuciones, es decir, la diferencia entre la distribución en el plano de la pupila y el plano de la retina es similar para los tres valores de longitud de onda que se consideró. En cambio, cuando el tamaño de partículas esparcidoras dispuestas en el núcleo es de  $4 \mu m$ , la diferencia entre los pares de distribuciones es diferente. En la zona cercana al máximo de intensidad,

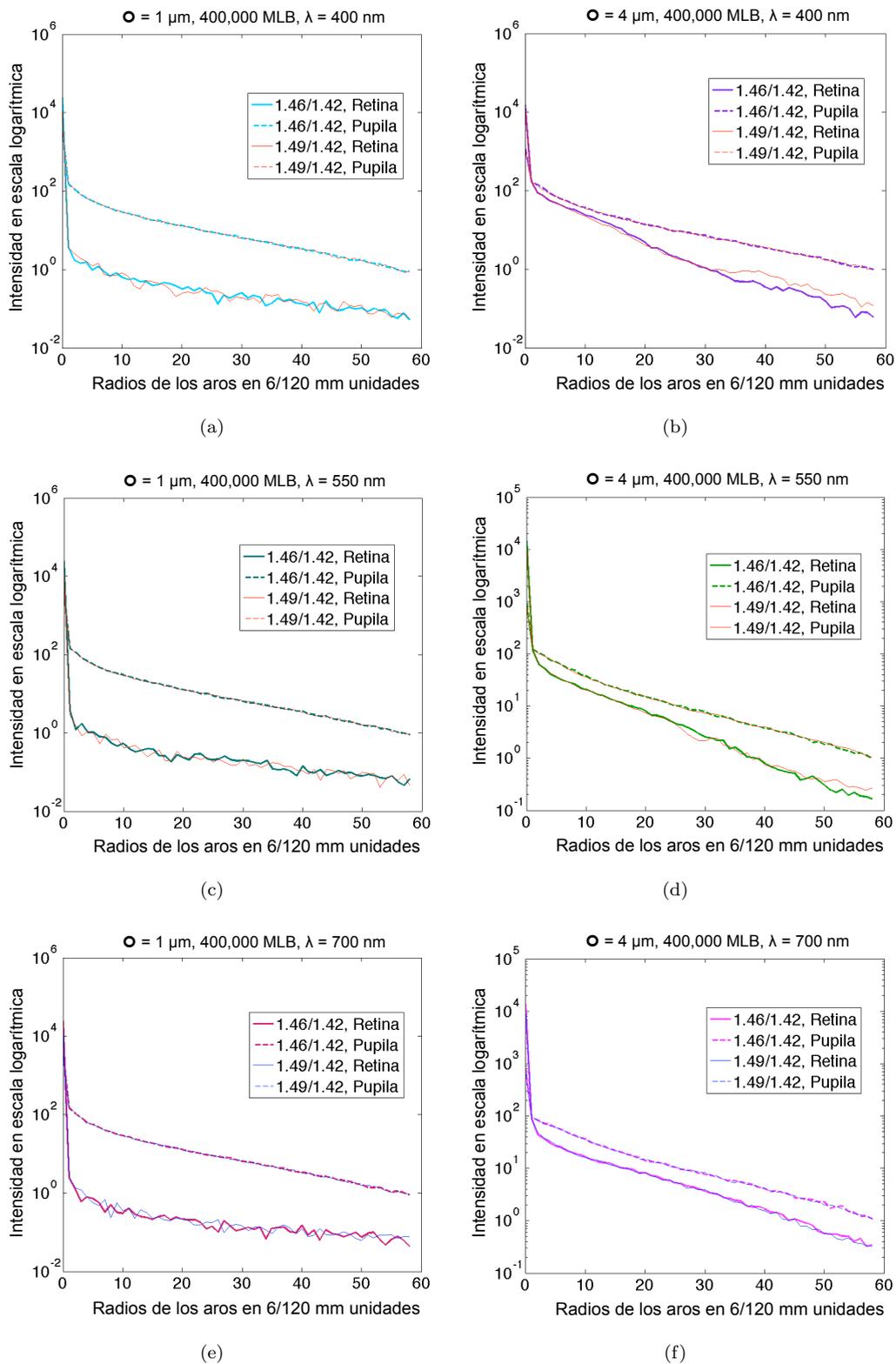


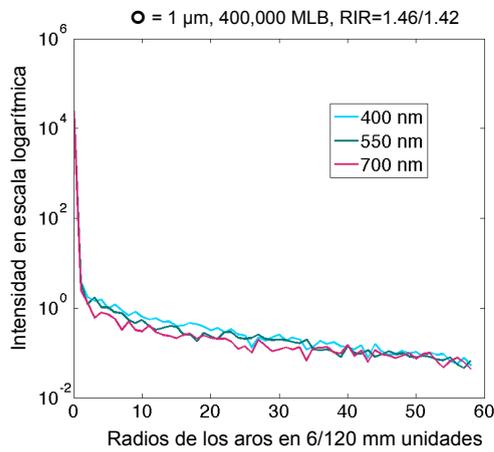
FIGURA 5.8: Relación entre el efecto del esparcimiento en el plano de la retina y en el plano de la pupila de salida variando la longitud de onda, para distribuciones de partículas de  $1\mu\text{m}$  y  $4\mu\text{m}$ .

que en la imagen comprende del valor 2 al 15 de distancia (unidades  $6/120 \text{ mm}$  representadas en el eje horizontal), para la longitud de onda de  $400 \text{ nm}$  la diferencia en las distribuciones de intensidad es menor que cuando se tiene una longitud de onda de  $700 \text{ nm}$ . Al pasar del valor de 15 unidades, la situación se invierte en la zona externa de la imagen, para  $400 \text{ nm}$  la diferencia ahora es mayor que para  $700 \text{ nm}$ .

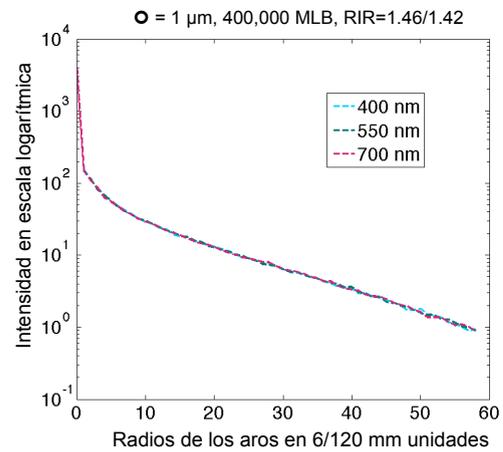
### 5.2.5 Análisis de la longitud de onda

La variación de la longitud de onda tiene un efecto importante en la distribución de la intensidad. Este efecto es más patente o notorio, en proporción al diámetro de las partículas esparcadoras y a la cantidad de éstas presentes en los medios ópticos. La porción de luz esparcida es mayor para la longitud de onda de  $400 \text{ nm}$ , según datos encontrados en la literatura [27], para lentes con cataratas nucleares. Mientras que, para lentes transparentes la porción de luz esparcida es similar para los tres valores de longitud de onda. Tomando en consideración estos resultados se enfatiza la importancia de tener cierta densidad de partículas para producir un esparcimiento de la luz significativa.

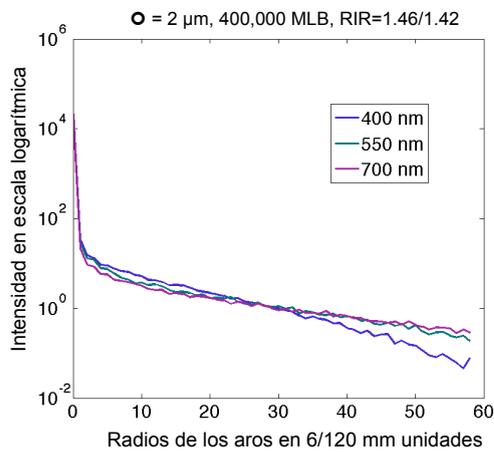
A partir de los resultados obtenidos con las simulaciones del modelo computacional propuesto se refuerza la conclusión que las partículas con diámetros entre  $1$  y  $4 \text{ }\mu\text{m}$ , y relaciones de índice de refracción de  $1.46/1.42$  y  $1.49/1.42$ , como las que se encuentran en lentes con cataratas nucleares, esparcen una mayor porción de luz incidente cuando la longitud de onda es  $400 \text{ nm}$ , es decir en el azul, a ángulos estrechos lo que ocasiona potencialmente una gran influencia en la formación de imágenes en la mácula. En la figura 5.9 se muestran los resultados al comparar las distribuciones de la intensidad para las tres longitudes de onda, tanto en el plano de la retina así como en el plano de la pupila de salida, para cada tamaño de partícula, siendo  $400,000$  el número de partículas dispuestas en el núcleo del lente. Las imágenes de la izquierda contiene los registros del plano de la retina, mientras que las imágenes de la derecha presenta los registros del plano de la pupila de salida. Para el plano de la retina se tiene que en todos los casos, considerando el tamaño de las partículas, la distribución de la luz esparcida es mayor cuando la longitud de onda es de  $400 \text{ nm}$ , dentro de un rango de distancia que va de  $0$  a  $15$  unidades. Analizando cada caso de acuerdo al tamaño de partícula tenemos que, para  $1 \text{ micra}$  el azul esparce más, prácticamente, a lo largo de toda la imagen (de



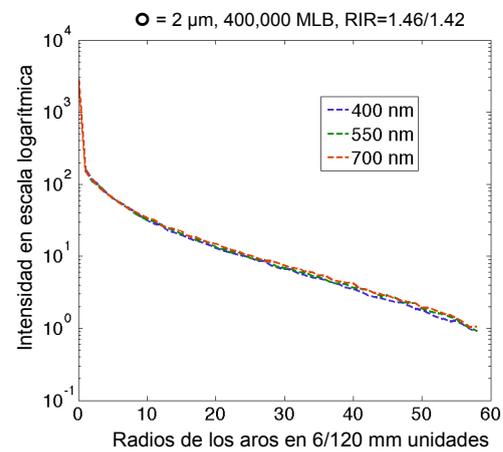
(a) Plano retina. Partículas 1 $\mu\text{m}$  de diámetro.



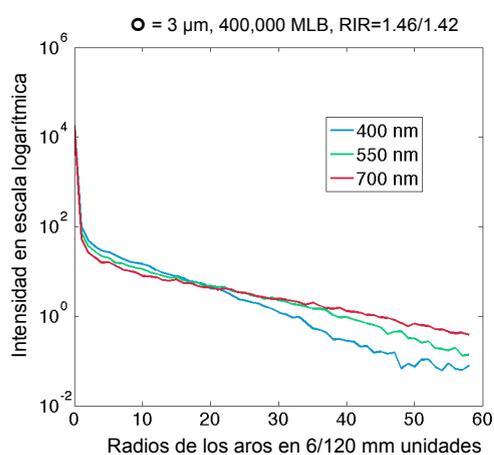
(b) Plano pupila. Partículas 1 $\mu\text{m}$  de diámetro.



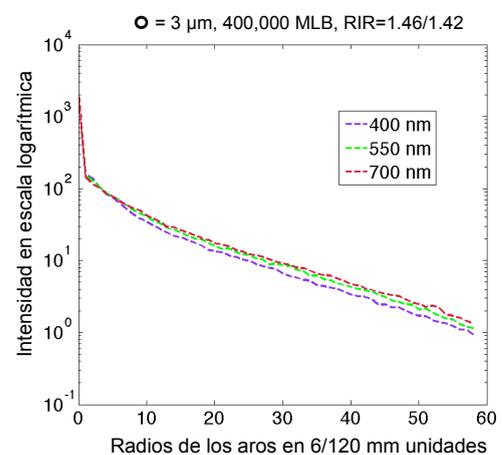
(c) Plano retina. Partículas 2 $\mu\text{m}$  de diámetro.



(d) Plano pupila. Partículas 2 $\mu\text{m}$  de diámetro.

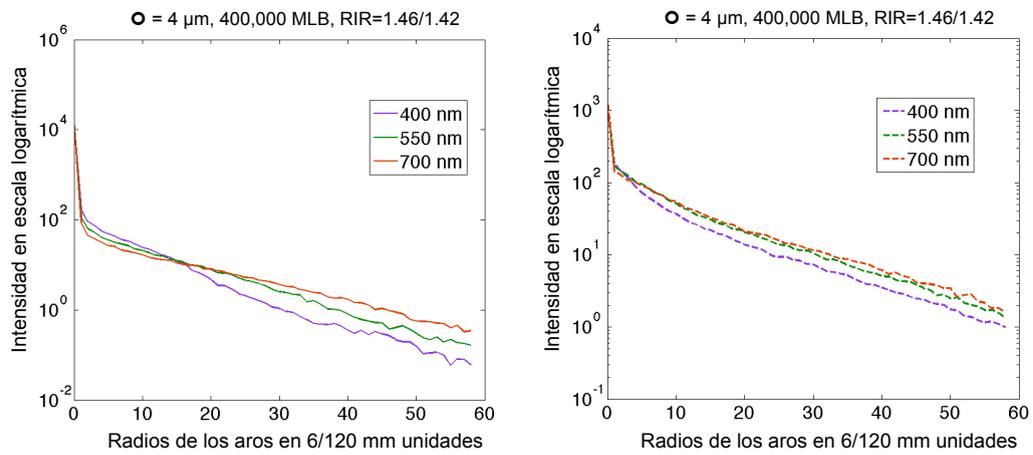


(e) Plano retina. Partículas 3 $\mu\text{m}$  de diámetro.



(f) Plano pupila. Partículas 3 $\mu\text{m}$  de diámetro.

FIGURA 5.9: Relación entre la variación de la longitud de onda y el tamaño de las partículas esparcidoras, en ambos planos.



(g) Plano retina. Partículas  $4\mu m$  de diámetro.

(h) Plano pupila. Partículas  $4\mu m$  de diámetro.

FIGURA 5.9: (Continuación) Relación entre la variación de la longitud de onda y el tamaño de las partículas esparcidoras, en ambos planos.

2 a 59 unidades). Conforme aumenta el diámetro de las partículas, se produce un cruce, y en seguida de esto, se tiene que las partículas esparcen más luz cuando la longitud de onda es de  $700\text{ nm}$ . Para el caso de  $2\ \mu m$ , el cruce se produce en la mitad de la imagen, para  $3\ \mu m$  a un tercio de la imagen y para  $4\ \mu m$  a un cuarto de la longitud de la imagen, aproximadamente. Sin embargo, en el plano de la pupila de salida, el hecho que varíe la longitud de onda, parece no producir diferencia entre las distribuciones de la intensidad, cuando el tamaño de las partículas esparcidoras es menor que  $3\ \mu m$ . A partir que el tamaño es de  $3\ \mu m$  se observa cierta variación en las distribuciones de intensidad debidas a cada longitud de onda. De la misma manera, que en el plano de la retina, en el plano de la pupila de salida se presenta un cruce de estas distribuciones. Este cruce ocurre a una distancia mucho menor que en el caso anterior: del centro de la imagen hasta 5 unidades, se tiene que la distribución de la intensidad es mayor para  $400\text{ nm}$  de longitud de onda y, a partir de ese punto, se invierte la situación, siendo que las partículas esparcen más luz cuando la longitud de onda es de  $700\text{ nm}$ . Una vez más, se observa que el efecto del esparcimiento en la retina esconde el efecto del esparcimiento al ocurrir el doble paso de la luz.

### 5.2.6 Análisis del diámetro de las partículas esparcidoras con las imágenes de punto extendido

Las matrices a partir de las cuales se obtuvieron las gráficas, descritas en las secciones anteriores, que manifiestan el comportamiento de la distribución de la luz para nuestro modelo computacional, pueden ser usadas para representar otro enfoque de lo que ocurre en la serie de simulaciones. La figura 5.10 constituye un conjunto de imágenes que muestra el comportamiento de la función de punto extendido, para el caso en el cual se varia el tamaño de los elementos esparcidores, el número de éstos es de 400,000, la relación del índice de refracción es de 1.46/1.42 y la longitud de onda es de 400 nm.

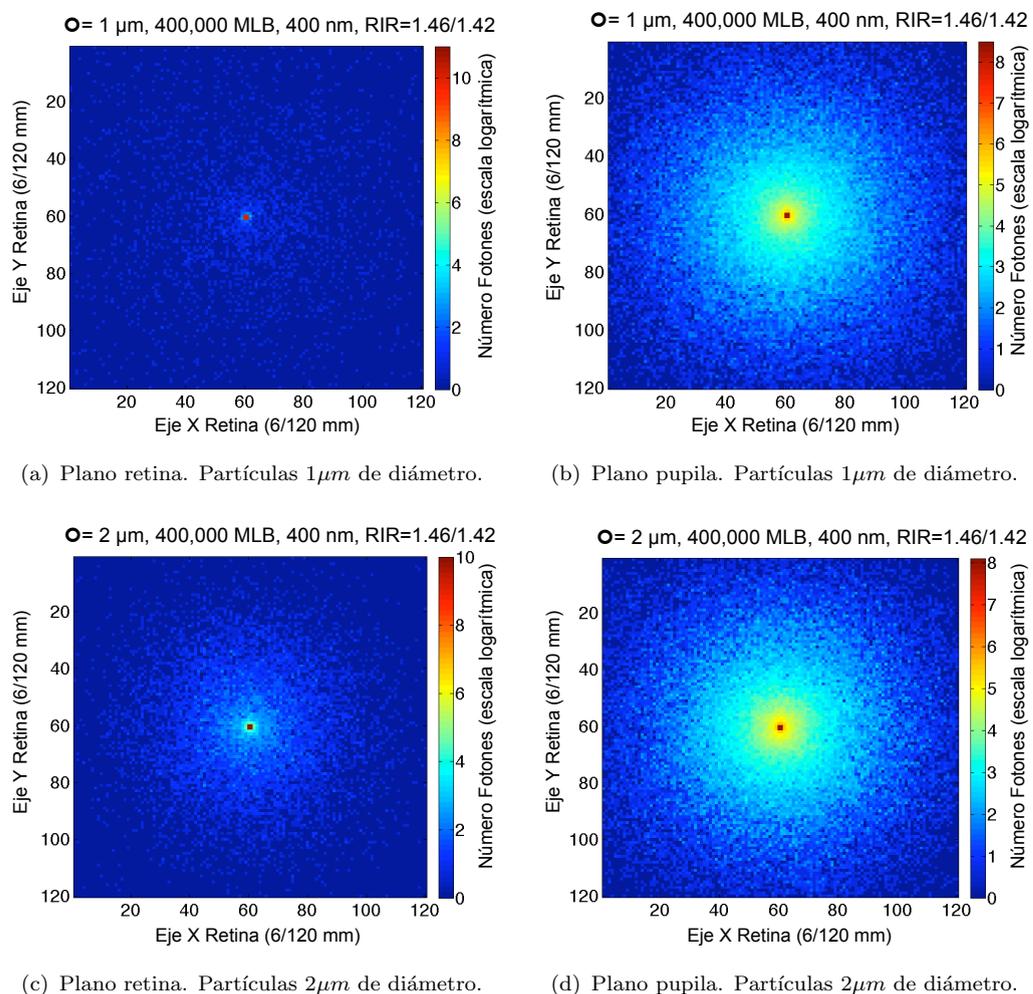


FIGURA 5.10: Efecto de la variación del diámetro de las partículas esparcidoras en la formación de imágenes en el plano de la retina y en el de la pupila.

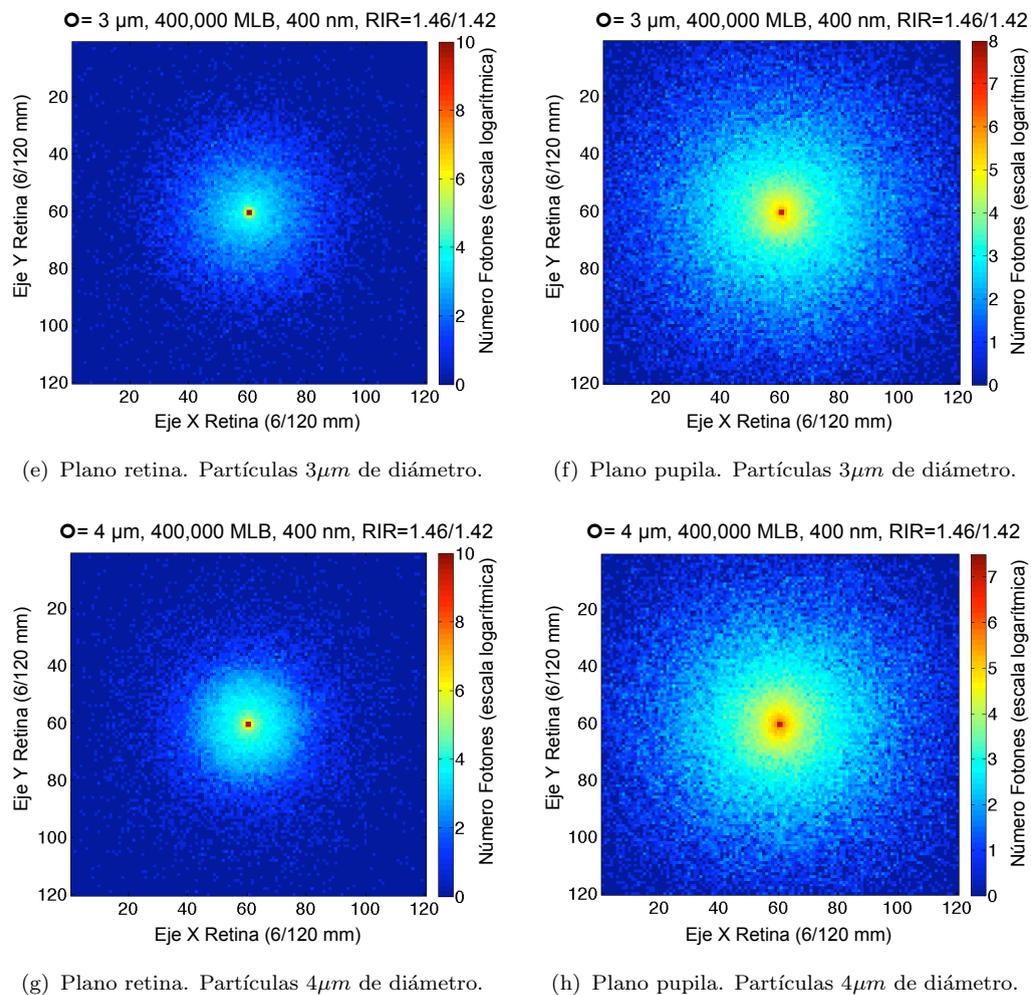


FIGURA 5.10: (Continuación) Efecto de la variación del diámetro de las partículas esparcidoras en la formación de imágenes en el plano de la retina y en el de la pupila.

En el plano de la retina (columna izquierda), se observa que la imagen del punto se amplía conforme aumenta el diámetro de las partículas esparcidoras. Al comparar la imagen del punto en el plano de la retina y cómo se transforma al transitar el doble paso (columna de la derecha), se hace notable que en el plano de la pupila de salida la imagen del punto se amplía más. El efecto que consigue la variación del diámetro de los cuerpos que esparcen luz, no parece contener cambios significativos cuando se analiza el plano de la pupila, por lo menos cuando se observa de manera gradual. Si comparamos la imagen del punto extendido cuando el tamaño de partícula es de 1 micra con la imagen para partículas de 4 micras, se puede notar que al variar el tamaño se presenta cierta ampliación del punto. Sin embargo, la variación en la extensión del punto es mucho más evidente en el plano de la retina que en el plano de la pupila de salida.

### 5.2.7 Análisis de la longitud de onda con las imágenes de punto extendido

Al llevar a cabo un análisis del punto extendido cuando la variable que cambia es la longitud de onda tenemos que, para 400 nm se observa el punto extendido más amplio en el plano de la retina (figura 5.11). Conforme aumentamos la longitud de onda el punto se reduce. Sin embargo, en las imágenes de este plano también se puede observar que la longitud de onda de 700 nm tiene el efecto de generar mayor esparcimiento en la zona externa de la imagen. En los otros dos casos el efecto se ve disminuido, conforme reducimos la longitud de onda.

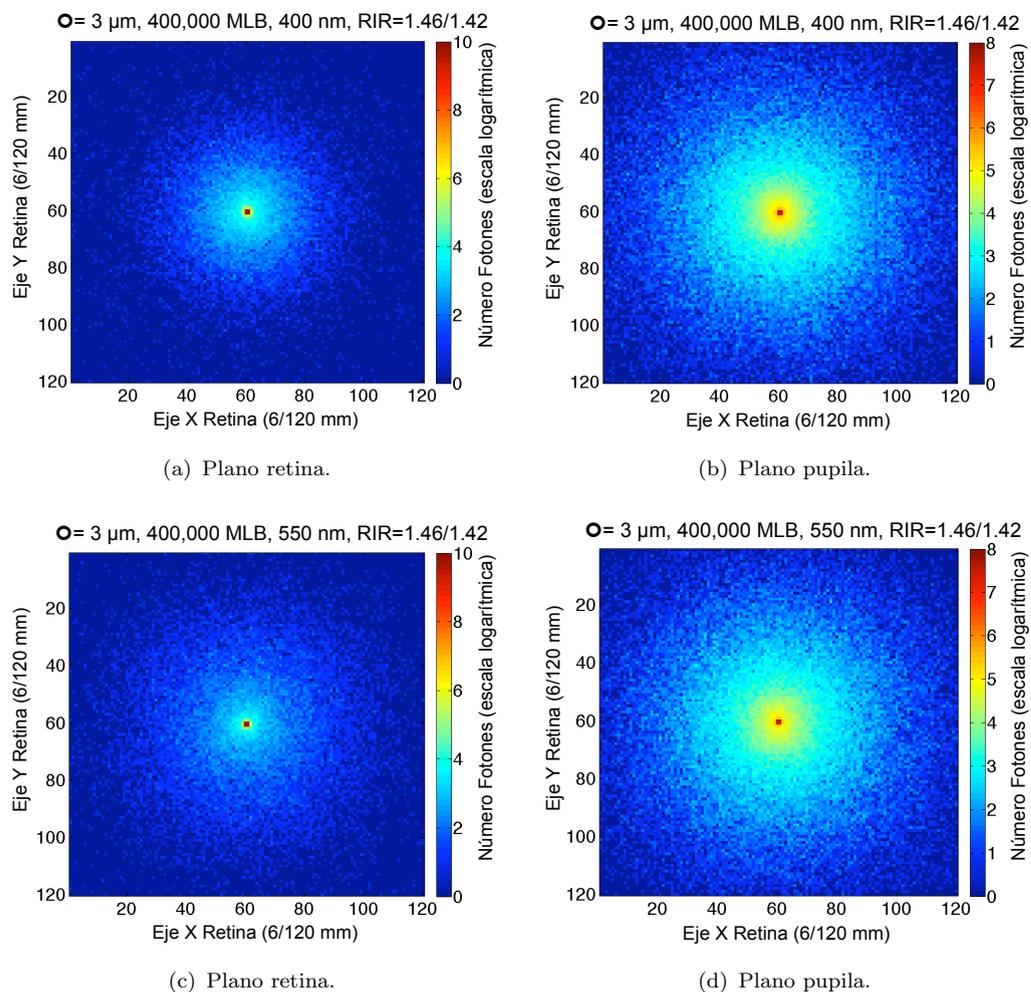


FIGURA 5.11: Efecto en la formación de imágenes de la variación de la longitud de onda, en el plano de la retina y en el de la pupila de salida

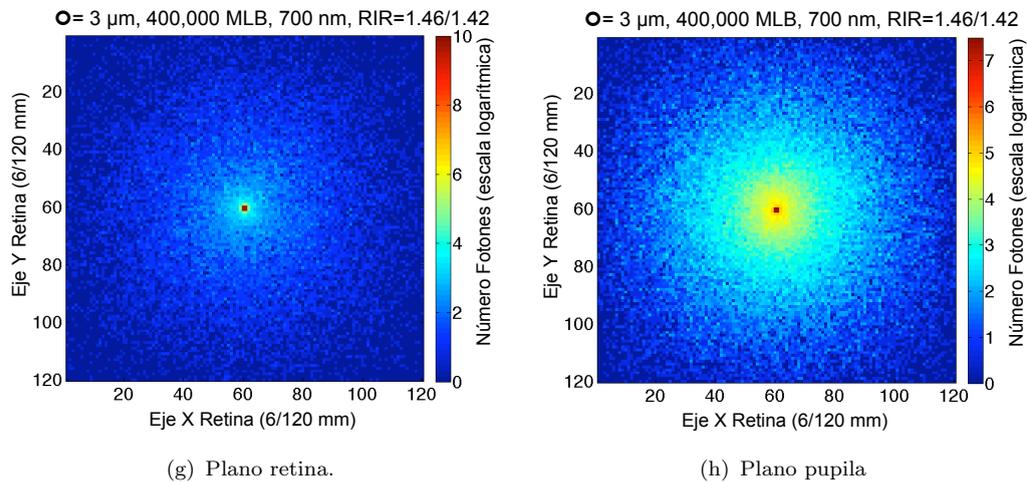


FIGURA 5.11: (Continuación) Efecto en la formación de imágenes de la variación de la longitud de onda, en el plano de la retina y en el de la pupila de salida

Conforme aumentamos la longitud de onda el punto se reduce. Sin embargo, en las imágenes de este plano también se puede observar que la longitud de onda de 700 nm tiene el efecto de generar mayor esparcimiento en la zona externa de la imagen. En los otros dos casos el efecto se ve disminuido, conforme reducimos la longitud de onda. Por otro lado, en el plano de la pupila el tamaño de la mancha parece muy similar para los tres casos de longitud de onda. Lo mismo ocurre para la distribución de la luz en la zona externa, parece no presentar diferencias para los diferentes casos de longitud de onda que se propusieron simular. Lo anterior se muestra en la figura 5.11, conformada por un conjunto de imágenes ordenadas de arriba hacia abajo por la longitud de onda de 400 nm, 550 nm y 700 nm y, la columna de la izquierda contiene las imágenes que se forman en el plano de la retina, mientras que a la columna de la derecha pertenecen las imágenes formadas por el doble paso, en la pupila de salida.

### 5.2.8 Análisis de la cantidad de partículas esparcidoras con las imágenes de punto extendido

La figura 5.12 muestra el efecto que tiene el número de elementos que esparcen luz en la formación de imágenes. En este caso se mantiene constante el diámetro de las esferas en 4 micras, el valor de la longitud de onda es de 400 nm y la relación del índice de refracción interno y externo es de 1.49/1.42.

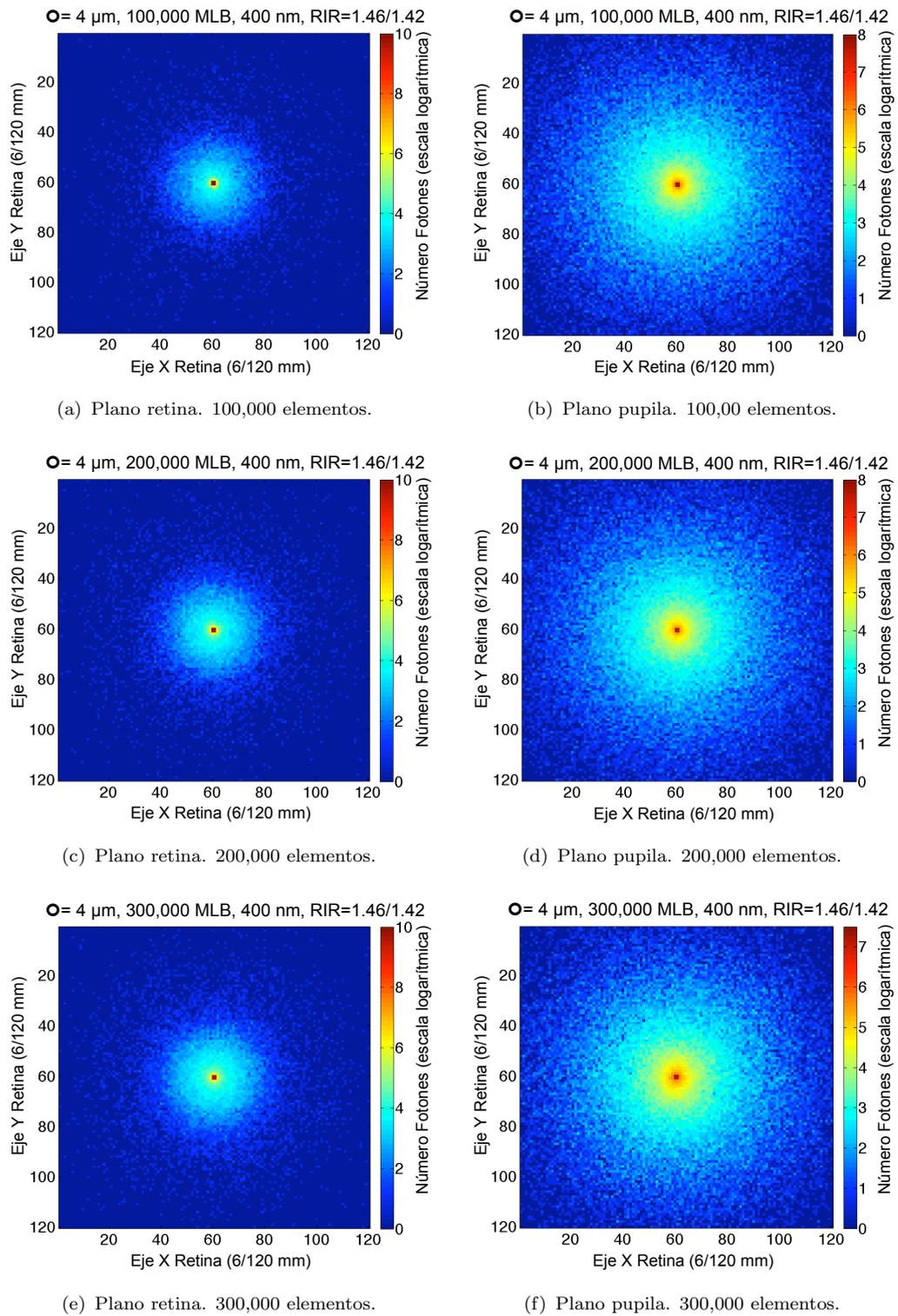


FIGURA 5.12: Efecto del espaciamiento conforme se incrementa el número de partículas esparcidas.

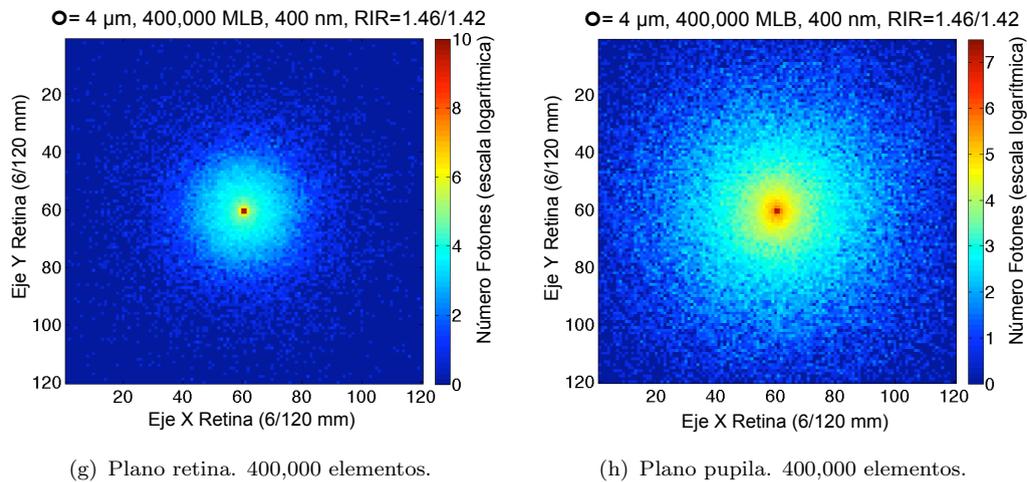


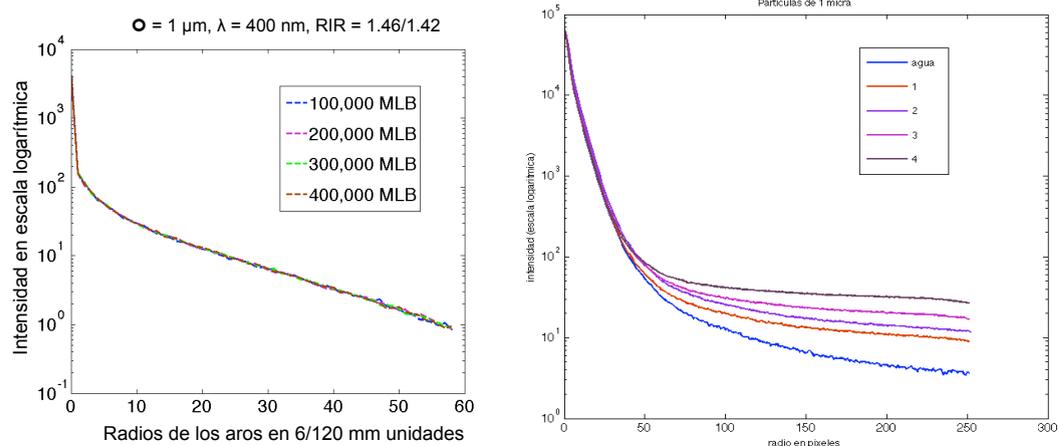
FIGURA 5.12: Efecto del esparcimiento conforme se incrementa el número de partículas esparcidoras.

En la columna de la izquierda el incremento en el número de partículas genera que el punto extendido se expanda más. En la zona externa, más allá de la mancha central, también se observa que el esparcimiento es mayor en proporción al aumento de partículas esparcidoras. Aunque, en esta ocasión el efecto que tiene el tamaño de la partícula en la generación del esparcimiento hace que la diferencia entre el tamaño de las manchas no sea tan clara. Esto también nos da información de la contribución que tiene el tamaño de las partículas en la distribución de la luz esparcida. En el plano de la pupila de salida, la variación del número de partículas no parece marcar una diferencia que resulte notable. El tamaño de las manchas es muy similar, así como la cantidad de luz esparcida en la zona externa, en las cuatro imágenes del registro del doble paso. Esto nos permite confirmar que el efecto del esparcimiento de la retina en la formación de las imágenes de doble paso puede esconder de manera importante al efecto debido al esparcimiento de las partículas, lo que causaría que la identificación del grado de afección de las cataratas no sea tan directo y sencillo, cuando se observan las imágenes que se reflejan de la retina.

### 5.2.9 Comparación entre el modelo computacional y el experimental

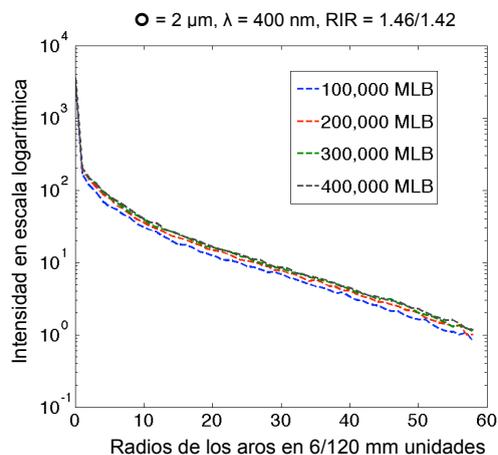
Se muestra una comparación cualitativa entre los resultados que obtuvimos con nuestro modelo computacional y con el experimento del sistema de doble paso para

estudiar el esparcimiento de la luz en el ojo humano (ver figura 5.13). Los resultados con el modelo experimental muestran que, al agregar porciones de elementos esparcidores, en los perfiles radiales de la distribución de intensidad la energía aumenta en las zonas excéntricas de la imagen de doble paso. Mientras que, con el modelo computacional este aumento de la energía en las zonas excéntricas no es tan notorio. Consideramos que esta diferencia entre los resultados de ambos modelos se debe a la manera en que se simuló la retina. Campbell et al. [85] examinaron la naturaleza de la reflexión de la luz en la retina y concluyeron que el fondo del ojo humano se comporta como un difusor perfecto. En el experimento físico se utilizó una hoja de papel que se hace girar con un motor. El difusor giratorio reduce el ruido de speckle o patrón de moteado. Este ruido está asociado con la interferencia de la luz reflejada por una superficie rugosa, como la retina. Por otro lado, en nuestro modelo computacional simulamos la reflexión de la retina con un modelo que considera las propiedades de guías de onda de los fotorreceptores y la interferencia de la luz re-emitida por los conos. Con el modelo que seleccionamos, el efecto del esparcimiento de la luz de la retina tiene mayor influencia, al parecer, que el efecto causado por las partículas esparcidoras, lo que genera que al comparar los perfiles radiales de las imágenes de doble paso no se observe una diferencia importante entre simulaciones en las que se varía el número de elementos esparcidores en el medio.

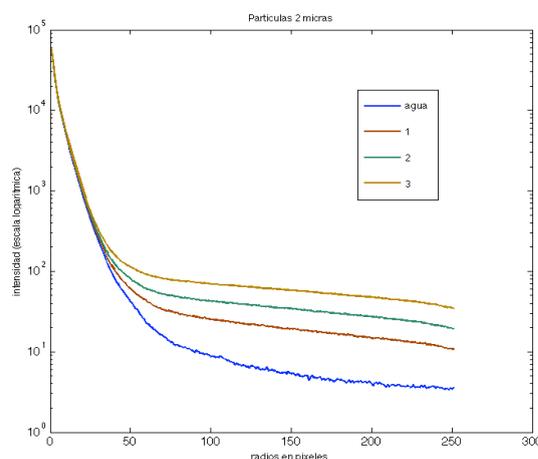


(a) Plano pupila. Partículas  $1\mu\text{m}$  de diámetro. (b) Plano pupila experimento. Partículas  $1\mu\text{m}$  de diámetro.

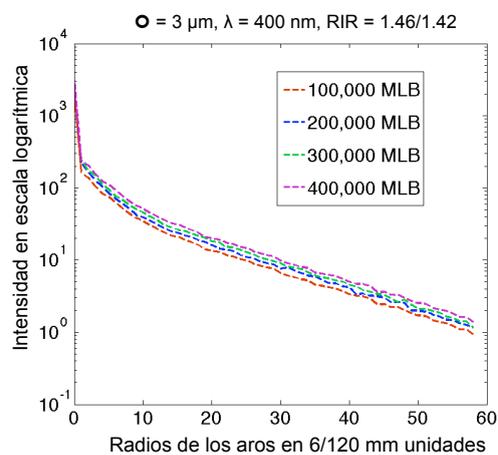
FIGURA 5.13: Comparación entre el modelo computacional y el experimental. El número de partículas aumenta en porciones relativamente grandes.



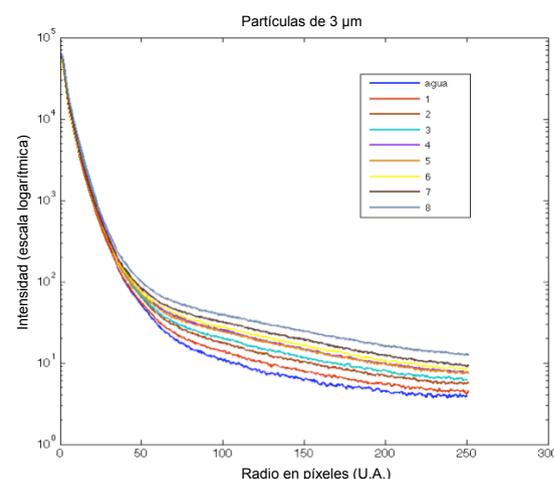
(c) Plano pupila. Partículas  $2\mu\text{m}$  de diámetro.



(d) Plano pupila experimento. Partículas  $2\mu\text{m}$  de diámetro.



(e) Plano pupila. Partículas  $3\mu\text{m}$  de diámetro.



(f) Plano pupila experimento. Partículas  $3\mu\text{m}$  de diámetro.

FIGURA 5.13: (Continuación) Comparación entre el modelo computacional y el experimental. El número de partículas aumenta en porciones relativamente grandes.

Una ventaja importante que se obtiene con un modelo computacional para simular el esparcimiento debido a partículas, es que resulta muy sencillo controlar el número preciso de éstas dentro de cierto medio, en este caso nos referimos al núcleo del lente. Además, que las partículas modeladas permanecen fijas y el mismo arreglo se usa para las pruebas que se desee ejecutar. Esto lo mencionamos ya que en el caso del experimento físico, en varias ocasiones se percibía que durante la ejecución del mismo, las microsferas descendían al fondo del recipiente que las contenía. Mientras que, el cristalino del ojo humano es una estructura sólida, y los cuerpos esparcidos permanecen fijos dentro del volumen de este medio óptico.

# CAPÍTULO 6

## CONCLUSIONES

El objetivo principal de esta investigación fue analizar la relación que existe entre el efecto del esparcimiento de la luz, en la imagen se forma en la retina y en la imagen que se obtiene en la pupila de salida de un ojo humano. Bajo la hipótesis que, ciertos padecimientos que ocurren en los medios de este sistema óptico, se pueden modelar como distribuciones de partículas esféricas cuyo índice de refracción varía con respecto al del medio en el que se encuentran, se propuso construir un modelo computacional en el que se considera el esparcimiento producido por este tipo de partículas. Este trabajo se centra en estudiar el padecimiento conocido como catarata, el cual es generado en el núcleo del lente cristalino.

Una parte importante de esta investigación fue el desarrollo de un modelo experimental que consistió, en un arreglo de doble paso, en el cual se integra un ojo artificial que contiene un elemento óptico cuya función es simular al cristalino. Este arreglo contó con una cámara CCD de alta sensibilidad con la cual fue posible el registro de las imágenes de doble paso. A partir de este modelo experimental, se llevaron a cabo registros de las distribuciones de la intensidad que incluían el efecto del esparcimiento generado por colecciones de partículas en el cristalino. Se obtuvieron una serie de imágenes, las cuales una vez analizadas, muestran el efecto del esparcimiento de acuerdo al número de partículas esparcidoras, de determinado diámetro, que se agregaban en el cristalino artificial. Los resultados obtenidos muestran claramente que el esparcimiento en las imágenes de doble paso aumenta de acuerdo a la cantidad de elementos esparcidores que existe en el cristalino.

Las simulaciones realizadas con el modelo computacional arrojan resultados similares cuando consideramos la variación del número de partículas esparcidoras

dentro del lente cristalino. Sin embargo, el modelo computacional establece que, en el plano de la pupila de salida, la relación entre el efecto del esparcimiento y la cantidad de partículas se hace más evidente, conforme el diámetro de las partículas esparcidoras aumenta. Mientras que, en el plano de la retina, el incremento de la intensidad, a partir de cierta zona cercana al centro hasta la zona externa de las imágenes, se hace notable para los diferentes tamaños de partículas que se estudiaron. El hecho que con el modelo computacional el efecto del esparcimiento en las imágenes de doble paso sea menos notorio que en las imágenes de sistema experimental de doble paso, se puede deber a que el efecto de la retina se modela de manera diferente en ambos casos.

Al comparar las distribuciones de intensidad de acuerdo al número de partículas esparcidoras y al tamaño de éstas, se observa que en el plano de la retina el tamaño de las partículas tiene un efecto decisivo en la generación de esparcimiento. Al aumentar el diámetro de las partículas esparcidores se incrementa el esparcimiento, sobre todo a partir de una zona cercana al centro de la imagen hasta una zona cercana a los bordes de la misma. Además, en este plano se presenta una amplia diferencia entre el esparcimiento generado por partículas de 1 micra y el resto. En el plano de la pupila, el esparcimiento también se encuentra fuertemente relacionado con el tamaño de las partículas, sólo que la diferencia en el esparcimiento generado por partículas de 2, 3 y 4  $\mu m$  y las de 1  $\mu m$  no resulta ser tan notable como en el plano de la retina.

También se registró el efecto que tiene modificar la relación del índice de refracción de las partículas con el medio que las rodea. Las relaciones que se simularon fueron de 1.46/1.42 y 1.49/1.42. Para estas dos relaciones no se observó algún cambio importante en la distribución de intensidad en ambos planos. Además, se analizó la relación entre el esparcimiento en el plano de la retina y en el plano de la pupila de salida, para los diferentes tamaños de partícula simulados. En todos los casos el esparcimiento en el plano de la pupila es mayor que en el plano de la retina. La diferencia entre el esparcimiento que se genera entre ambos planos es menor conforme aumenta el tamaño de las partículas esparcidoras.

El análisis del efecto de la longitud de onda para cada tamaño de partícula nos mostró que, en el plano de la retina, el valor de 400 nm presenta mayor efecto de esparcimiento en la región central de las imágenes que para las longitudes de onda de 550 nm y 700 nm. Conforme aumenta el tamaño de las partículas esparcidoras la región en la que esparce más la longitud de onda de 400 nm se hace más breve

y se presenta un punto de cruce entre las longitudes de onda. A partir de este momento, la longitud de onda de 700 nm es la que esparce más hacia los bordes de las imágenes. Cuando se observa la variación de la longitud de onda en el plano de la pupila, no se observa una diferencia clara entre el esparcimiento generado por cada longitud de onda hasta que el tamaño de las partículas esparcidoras es de  $3 \mu m$ , mientras que en el plano de la retina la diferencia se observa para todos los tamaños de partícula que se simularon. Además, en el plano de la pupila la región en la que llega a esparcir más la longitud de onda de 400 nm es muy estrecha, haciendo que en casi toda la imagen se observe que es con el valor de 700 nm con el que se presenta mayor esparcimiento de la luz.

En los análisis de las diferentes variables se observó que, de acuerdo con el modelo que se propuso, el efecto que tiene el esparcimiento debido a la retina en el doble paso esconde el efecto del esparcimiento originado por las partículas esparcidoras.

El análisis de los perfiles radiales del efecto de la longitud de onda en la distribución de la intensidad cuando se presenta esparcimiento, nos genera un resultado muy importante que se conecta con los resultados del modelo propuesto por van den Berg et al. [34] para simular el fenómeno conocido como corona ciliar, que está relacionado con el efecto del esparcimiento. De acuerdo a sus resultados, las regiones del final, de los segmentos de línea que forman los cilios, que están más cercanas al centro son azuladas y las regiones finales alejadas del centro son rojizas. Este mismo efecto se puede observar al comparar el efecto de la longitud de onda para nuestro modelo computacional. Además, si relacionamos el punto donde las distribuciones de intensidad debidas a dos longitudes de onda se cruzan con el tamaño y si esto se cumple en un modelo experimental que desarrollemos, podríamos obtener un método para determinar tamaños de partículas. En principio, la similitud que tienen los resultados de nuestro modelo con los del modelo de van den Berg se podrían estudiar para obtener nuevas conclusiones del efecto del esparcimiento en el proceso de formación de imágenes y, por lo tanto, en el proceso de visión humana. Por ejemplo, qué efectos tendría en la percepción del color, particularmente, ¿afectaría al fenómeno conocido como "permanencia de color"? Por otro lado, con los patrones de esparcimiento generados con dos fuentes de iluminación que atravesasen un medio inhomogéneo, ¿se podría determinar el tamaño o promedio de las partículas dentro del medio?. Para nosotros éstas son las dos líneas de investigación que nos proponemos continuar investigando. Además, planeamos realizar nuevas simulaciones con nuestro modelo computacional, que

incluyan partículas esféricas multilaminares y otro caso en el que las partículas no sean esféricas, junto con la idea de simular las poblaciones de partículas con diferentes distribuciones de probabilidad y observar si el patrón de esparcimiento cambia para cada distribución. Otra línea de investigación que se podría establecer es comparar el modelo de guías de onda y esparcimiento para la reflexión en la retina que se aplicó en la simulaciones, con el modelo que establece que la retina es un difusor rotatorio. Pérez et al. [86] investigaron el impacto que tienen la combinación de las aberraciones y el esparcimiento en el funcionamiento visual. Se sabe que ambos factores reducen la calidad de la imagen en la retina. Sin embargo, cuando se combinan bajo ciertas circunstancias, la sensibilidad al contraste mejora. Lo que hace suponer que podría presentarse un mecanismo de compensación que reduzca el impacto que los dos factores pueden tener por separado en la visión de contraste. Bajo esta idea se podrían plantear una serie de simulaciones con el modelo que propusimos y agregar el efecto de las aberraciones, de tal forma que, se analice lo que ocurre con el proceso de formación de imágenes en la retina cuando se combinan ambos efectos y estudiar la relación que se presenta con el contraste de las imágenes.

# LISTA DE FIGURAS

2.1	Diagrama del ojo humano . . . . .	5
3.1	Distribución acumulada . . . . .	23
3.2	Traza de rayos exacto . . . . .	31
3.3	Proceso de puntos con el modelo de Strauss. . . . .	42
4.1	Diagrama del Arreglo Experimental . . . . .	48
4.2	Resultado (a) del Experimento para partículas de 3 micras . . . . .	52
4.3	Resultado (b) del Experimento para partículas de 3 micras . . . . .	53
4.4	Resultado (a) del Experimento para partículas de 2 micras . . . . .	54
4.5	Resultado (b) del Experimento para partículas de 3 micras . . . . .	55
4.6	Resultado (c) del Experimento para partículas de 3 micras . . . . .	56
4.7	Resultado (a) del Experimento para partículas de 1 micra . . . . .	57
4.8	Resultado (a) del Experimento para partículas de 0.5 micras . . . . .	58
4.9	Resultado (b) del Experimento para partículas de 0.5 micras . . . . .	59
5.1	Diagrama de Flujo del Modelo Computacional . . . . .	61
5.2	Modelo computacional del ojo humano . . . . .	62
5.3	Diagrama del lente cristalino . . . . .	63
5.4	Imagen de la distribución de partículas . . . . .	64
5.5	Comparación de la distribución de intensidad entre el plano de retina y el plano de pupila. . . . .	66
5.5	Continuación . . . . .	67
5.6	Comparación del efecto en la distribución de la luz en presencia y en ausencia de esparcimiento en la retina. . . . .	69
5.7	Análisis de la variación del diámetro de las partículas esparcidoras, conforme se incrementa el número de las mismas. . . . .	70
5.7	Continuación . . . . .	71
5.8	Relación entre el efecto del esparcimiento en el plano de la retina y en el plano de la pupila de salida variando la longitud de onda, para distribuciones de partículas de $1\mu m$ y $4\mu m$ . . . . .	73
5.9	Relación entre la variación de la longitud de onda y el tamaño de las partículas esparcidoras, en ambos planos. . . . .	75
5.9	Continuación . . . . .	76
5.10	Efecto de la variación del diámetro de las partículas esparcidoras en la formación de imágenes en el plano de la retina y en el de la pupila. . . . .	77

---

5.10 Continuación . . . . .	78
5.11 Efecto en la formación de imágenes de la variación de la longitud de onda, en el plano de la retina y en el de la pupila de salida . . .	79
5.11 Continuación . . . . .	80
5.12 Efecto del esparcimiento conforme se incrementa el número de partículas esparcidoras. . . . .	81
5.12 Continuación . . . . .	82
5.13 Comparación entre el modelo computacional y el experimental. El número de partículas aumenta en porciones relativamente grandes. .	83
5.13 Continuación . . . . .	84

# REFERENCIAS

- [1] J. Siegelman, S. L. Trokel, and A. Spector. Quantitative biomicroscopy of lens light back scatter changes in aging and opacification. *Archives of ophthalmology*, 92(5):437–442, November 1974.
- [2] M.A. Vivino, S. Chintalagiri, B. Trus, and M. Datiles. Development of a scheinpflug slit lamp camera system for quantitative densitometric analysis. *Eye (London, England)*, 7(6):791–798, 1993.
- [3] S. Marcos. Image quality of the human eye. *International Ophthalmology Clinics*, 43(2):43–62, 2003.
- [4] G. B. Benedek. Theory of transparency of the eye. *Applied Optics*, 10(3):459–473, 1971.
- [5] D. M. Maurice. The structure and transparency of the cornea. *J. Physiol.*, 136(2):263–286, April 1957.
- [6] D. Coster. *Cornea: Fundamentals of Clinical Ophthalmology Series*. BMJ Books, London, 2002.
- [7] J. Alvarado, C. Murphy, and R. Juster. Age-related changes in the basement membrane of the human corneal epithelium. *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.*, 24(8):1015–1028, August 1983.
- [8] N.S. Malik, S.J. Moss, N. Ahmed, A.J. Furth, R.S. Wall, and K.M. Meek. Ageing of the human corneal stroma: structural and biochemical changes. *Biochim. Biophys. Acta.*, 1138(3):222–228, 1992.
- [9] H. F. Edelhauser and J. L. Ubels. *The cornea and the sclera. In: Adler's Physiology of the Eye*. Mosby Year Book, St. Louis, 2002.
- [10] S. Krag and T.T. Andreassen. Mechanical properties of the human posterior lens capsule. *Prog. Retin. Eye Res.*, 22(6):749–767, 2003.

- 
- [11] M.J. Stafford. The histology and biology of the lens. *Optom Today*, 41:23–29, 2001.
- [12] N.A. Brown and A.J. Bron. An estimate of the human lens epithelial cell size in vivo. *Exp. Eye Res.*, 44(6):899–906, June 1987.
- [13] W.G. Jr. Robison, N. Houlder, and J.H. Kinoshita. The role of lens epithelium in sugar cataract formation. *Exp. Eye Res.*, 50(6):641–646, June 1990.
- [14] W.C. Li and A. Spector. Lens epithelial cell apoptosis is an early event in the development of uvb-induced cataract. *Free Radic. Biol. Med.*, 20(3):301–311, 1996.
- [15] V.L. Taylor, K.J. al Ghoul, C.W. Lane, V.A. Davis, J.R. Kuszak, and M.J. Costello. Morphology of the normal human lens. *Invest Ophthalmol Vis Sci*, 37(7):1396–1410, June 1996.
- [16] F. A. Bettelheim. *Physical basis of lens transparency. In The Ocular Lens, Structure, Function and Pathology.* Marcel Dekker, New York, 1985.
- [17] S. L. Trokel. The physical basis for transparency of the crystalline lens. *Invest. Ophthalmol.*, 1(4):493–501, August 1962.
- [18] J. Mellero. Light absorption and scatter in the human lens. *Vision Res.*, 11: 129–141, 1971.
- [19] J.S. Zigler. *Lens Proteins. In Principles and practice of ophthalmology: basic sciences.* W.B. Saunders Co., Philadelphia, 1994.
- [20] A. Spector. The search for a solution to senile cataracts. proctor lecture. *Invest Ophthalmol Vis Sci*, 25(2):130–146, February 1984.
- [21] R.J.W. Truscott. Age-related nuclear cataract: A lens transport problem. *Ophthalmic Res.*, 32(5):185–194, 2000.
- [22] C. Delcourt, J.P. Cristol, F. Tessier, C.L. Léger, F. Michel, and L. Papoz. Risk factors for cortical, nuclear, and posterior subcapsular cataracts: the pola study. *Am. J. Epidemiol.*, 151(5):497–504, March 2000.
- [23] N. Rowe, P. Mitchell, R.G. Cumming, and J.J. Wang. Diabetes, fasting blood glucose and age-related cataract: the blue mountains eye study. *Ophthalmic Epidemiol.*, 7(2):103–114, 2000.

- [24] C. van de Pol. *Basis anatomy and physiology of the human visual system*. In *Helmet-Mounted Displays: Sensation, Perception and Cognition Issues*. U.S. Army Aeromedical Research Laboratory, 2000.
- [25] J.A. Jedziniak, J.H. Kinoshita, E.M. Yates, and G.B. Benedek. The concentration and localization of heavy molecular weight aggregates in aging normal and cataractous human lenses. *Exp. Eye Res.*, 20(4):367–369, April 1975.
- [26] J.A. Jedziniak, D.F. Nicoli, H. Baram, and G.B. Benedek. Quantitative verification of the existence of high molecular weight protein aggregates in the intact normal human lens by light-scattering spectroscopy. *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.*, 17(1):51–57, January 1978.
- [27] K.O. Gilliland, C.D. Freel, S. Johnsen, W.C. Fowler, and M.J. Costello. Distribution, spherical structure and predicted mie scattering of multilamellar bodies in human age-related nuclear cataracts. *Exp. Eye Res.*, 79(4):563–576, October 2004.
- [28] K.O. Gilliland, C.D. Freel, C.W. Lane, W.C. Fowler, and M.J. Costello. Multilamellar bodies as potential scattering particles in human age-related nuclear cataracts. *Mol. Vis.*, 22(7):120–130, June 2001.
- [29] C.F. Bohren and D.R. Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles*. Wiley, New York, 1983.
- [30] M. Kerker. *The scattering of light and other electromagnetic radiation*. Academic Press, New York, 1969.
- [31] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [32] H. C. van de Hulst. *Light Scattering by Small Particles*. Dover Publications Inc, New York, 1981.
- [33] Julius Adams Stratton. *Electromagnetic Theory*. Wiley-IEEE Press, New Jersey, 2007.
- [34] T. J. van den Berg, M. P. Hagenouw, and J. E. Coppens. The ciliary corona: physical model and simulation of the fine needles radiating from point light sources. *Invest Ophthalmol Vis Sci*, 46(7):2627 – 2632, July 2005.

- [35] T. J. van den Berg. Analysis of intraocular straylight, especially in relation to age analysis of intraocular straylight, especially in relation to age analysis of intraocular straylight, especially in relation to age. *Optom Vis Sci*, 72(2):52–59, February 1995.
- [36] T. Olsen. Light scattering from the human cornea. *Invest Ophthalmol Vis Sci*, 23(1):81–86, July 1982.
- [37] J.K. IJspeert, P.W. de Waard, T. J. van den Berg, and P.T. de Jong. The intraocular straylight function in 129 healthy volunteers; dependence on angle, age and pigmentation. *Vision Res.*, 30(5):699–707, 1990.
- [38] T Moller-Pedersen, H.D. Cavanagh, W.M. Petroll, and J.V. Jester. Stromal wound healing explains refractive instability and haze development after photorefractive keratectomy: a 1-year confocal microscopic study. *Ophthalmology*, 107(7):1235–1245, July 2000.
- [39] Anders Ivarsen, Tinne Laurberg, and Torben Møller-Pedersen. Role of keratocyte loss on corneal wound repair after lasik. *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.*, 45(10):3499–3506, 2004.
- [40] D.G. Dawson, H.F. Edelhauser, and H.E. Grossniklaus. Long-term histopathologic findings in human corneal wounds after refractive surgical procedures. *Am. J. Ophthalmol.*, 139(1):168–178, January 2005.
- [41] Pablo Artal and Rafael Navarro. Monochromatic modulation transfer function of the human eye for different pupil diameters: an analytical expression. *J. Opt. Soc Am. A Opt. Image Sci. Vis.*, 11(1):246–249, January 1994.
- [42] G. Walsh and W. N. Charman. The effect of pupil centration and diameter on ocular performance. *Vision Res.*, 28(5):659–665, 1988.
- [43] Robert W. Hart and Richard A. Farrell. Light scattering in the cornea. *J. Opt. Soc. Am.*, 59(6):766–773, 1969.
- [44] J.V. Jester, T. Moller-Pedersen, J. Huang, C.M. Sax, W.T. Kays, H.D. Cavanagh, W.M. Petroll, and J. Piatigorsky. The cellular basis of corneal transparency: evidence for 'corneal crystallins'. *J. Cell Sci.*, 112(5):613–622, March 1999.

- [45] M.L. Hennelly, J.L. Barbur, D.F. Edgar, and E.G. Woodward. The effect of age on the light scattering characteristics of the eye. *Ophthalmic Physiol. Opt.*, 18(2):197–203, March 1998.
- [46] Kurt O. Gilliland, Sonke Johnsen, Sangeetha Metlapally, M. Joseph Costello, Balasubramanya Ramamurthy, Pravin V. Krishna, and Dorairajan Balasubramanian. Mie light scattering calculations for an indian age-related nuclear cataract with a high density of multilamellar bodies. *Mol. Vis.*, 24(14):572–582, March 2008.
- [47] J. H. Halton. A retrospective and prospective survey of the monte carlo method. *SIAM Review*, 12(1):1–63, 1970.
- [48] J. M. Hammersley and D. C. Handscomb. *Monte Carlo Methods*. Methuen, London, 1975.
- [49] G. S. Fishman. *Monte Carlo: Concepts, Algorithms, and Applications*. Springer, New York, 1996.
- [50] W. J. Yang, H. Taniguchi, and K. Kudo. *Advances in Heat Transfer: Radiative Heat Transfer by the Monte Carlo Method*. Academic Press, San Diego, 1995.
- [51] P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, New York, 2003.
- [52] J. S. Liu. *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing*. Springer, New York, 2001.
- [53] B. D. Ripley. *Stochastic Simulation*. Wiley, New York, 1987.
- [54] D.P. Bertsekas and J.N. Tsitsiklis. *Introduction to Probability*. Athena Scientific, Cambridge, Massachusetts, 2000.
- [55] S. A. Ross. *A first course in probability*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1998.
- [56] M.S. Paoletta. *Fundamental Probability: A Computational Approach*. John Wiley and Sons, Chichester, 2006.
- [57] G. Arfken. *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, Orlando, FL, 1985.

- [58] V. E. Cachorro and L. L. Salcedo. New improvements for mie scattering calculations. *J. Electromagn. Waves Appl.*, 5(9):913–926, 1991.
- [59] W. J. Wiscombe. Improved mie scattering algorithms. *Appl. Opt.*, 19(9):1505, 1509 1980.
- [60] R. G. Grainger, J. Lucas, G. E. Thomas, and G. B. L. Ewen. Calculation of mie derivatives. *Appl. Opt.*, 43(28):5386–5393, 2004.
- [61] J. Shen and X. Cai. Algorithm of numerical calculation on lorentz mie theory. *PIERS Online*, 1(6):691–694, 2005.
- [62] H. Du. Mie-scattering calculation. *Appl. Opt.*, 43(9):1951–1956, 2004.
- [63] Kattawar G. W. and G. N. Plass. Electromagnetic scattering from absorbing spheres. *Appl. Opt.*, 6(8):1377–1382, 1967.
- [64] J. Deirmendjian. *Electromagnetic Scattering on Spherical Polydispersions*. American Elsevier, New York, 1969.
- [65] W. J. Wiscombe. Mie scattering calculations: Advances in technique and fast, vector-speed computer codes. Technical report, National Center for Atmospheric Research, Boulder, Colo., 1979.
- [66] W. T. Welford. *Aberrations of optical systems*. Adam Hilger, Bristol, 1986.
- [67] D. A. Atchison and G. Smith. *Optics of the human eye*. Elsevier Science, Edinburgh, 2002.
- [68] Jay M. Enoch. Optical properties of the retinal receptors. *Journal of the Optical Society of America A*, 53(1):71–85, 1963.
- [69] Austin Roorda and David R. Williams. Optical fiber properties of individual human cones. *Journal of Vision*, 2:404–412, September 2002. URL <http://www.journalofvision.org/content/2/5/4.full>.
- [70] S. A. Burns, S. Wu, F. C. Delori, and A. E. Elsner. Direct measurement of human-cone-photoreceptor alignment. *Journal of the Optical Society of America A*, 12:2329–2338, 1995.
- [71] S. Marcos, S. A. Burns, and J. C. He. Model for cone directionality reflectometric measurements based on scattering. *Journal of the Optical Society of America A*, 15(8):2012–2022, 1998.

- [72] S. Marcos and S. A. Burns. Cone spacing and waveguide properties from cone directionality measurements. *Journal of the Optical Society of America A*, 16 (995–1004), 1999.
- [73] J. C. He, S. Marcos, and S. A. Burns. Comparison of cone directionality determined by psychophysical and reflectometric techniques. *Journal of the Optical Society of America A*, 16(10), June 1999.
- [74] S. A. Burns, A. E. Elsner, J. M. Gorrard, M. R. Kreitz, and F. C. Delori. Comparison of reflectometric and psychophysical measures of cone orientation. *Digest of Topical Meeting on Noninvasive Assessment of the Visual System. Optical Society of America, Washington DC*, 5(160–163), 1992.
- [75] T. C. Bailey and A. C. Gatrell. *Interactive Spatial Data Analysis*. Prentice Hall, Essex, 1995.
- [76] W. L. Martinez and A. R. Martinez. *Computational statistics handbook with matlab*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.
- [77] J. Illian, A. Penttinen, H. Stoyan, and D. Stoyan. *Statistical analysis and modelling of spatial point patterns*. John Wiley and Sons, Chichester, 2008.
- [78] P. J. Diggle. *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns*. A Hodder Arnold, London, 2003.
- [79] W. L. Martinez and A. R. Martinez. *Exploratory Data Analysis with Matlab*. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2004.
- [80] S. M. Ross. *Simulation*. Elsevier Academic Press, Burlington, MA, 2006.
- [81] B. D. Ripley. *Spatial Statistics*. John Wiley and Sons, Hoboken, NJ, 2004.
- [82] D. Stoyan, W. S. Kendall, and J. Mecke. *Stochastic Geometry and its Applications*. John Wiley and Sons, Chichester, 1995.
- [83] J. Antoch and G. Dohnal, editors. *Markov point process: 3D Voronoi tessellations generated by Strauss process.*, Prague, 2001. JCMF Press.
- [84] P. Artal, S. Marcos, R. Navarro, and D. R. Williams. Odd aberrations and double-pass measurements of retinal image quality. *J. Opt. Soc. Am. A*, 12 (2):195–201, 1995.

- 
- [85] F. W. Campbell and R. W. Gubisch. Optical quality of the human eye. *J. Physiol.*, 186(3):558 – 578, October 1966.
- [86] G.M. Pérez, Manzanera S., and P. Artal. Impact of scattering and spherical aberration in contrast sensitivity impact of scattering and spherical aberration in contrast sensitivity. *Journal of Vision*, 9(3):1–10, 2009.