

Exercice de rappel sur la cinématique et la statique des solides

Echelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle

Une E.P.A.S. est une Echelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle. Ce système conçu et commercialisé par la société CAMIVA est monté sur le châssis d'un camion de pompiers et permet de déplacer une plate-forme pouvant recevoir deux personnes et un brancard le plus rapidement possible et en toute sécurité.

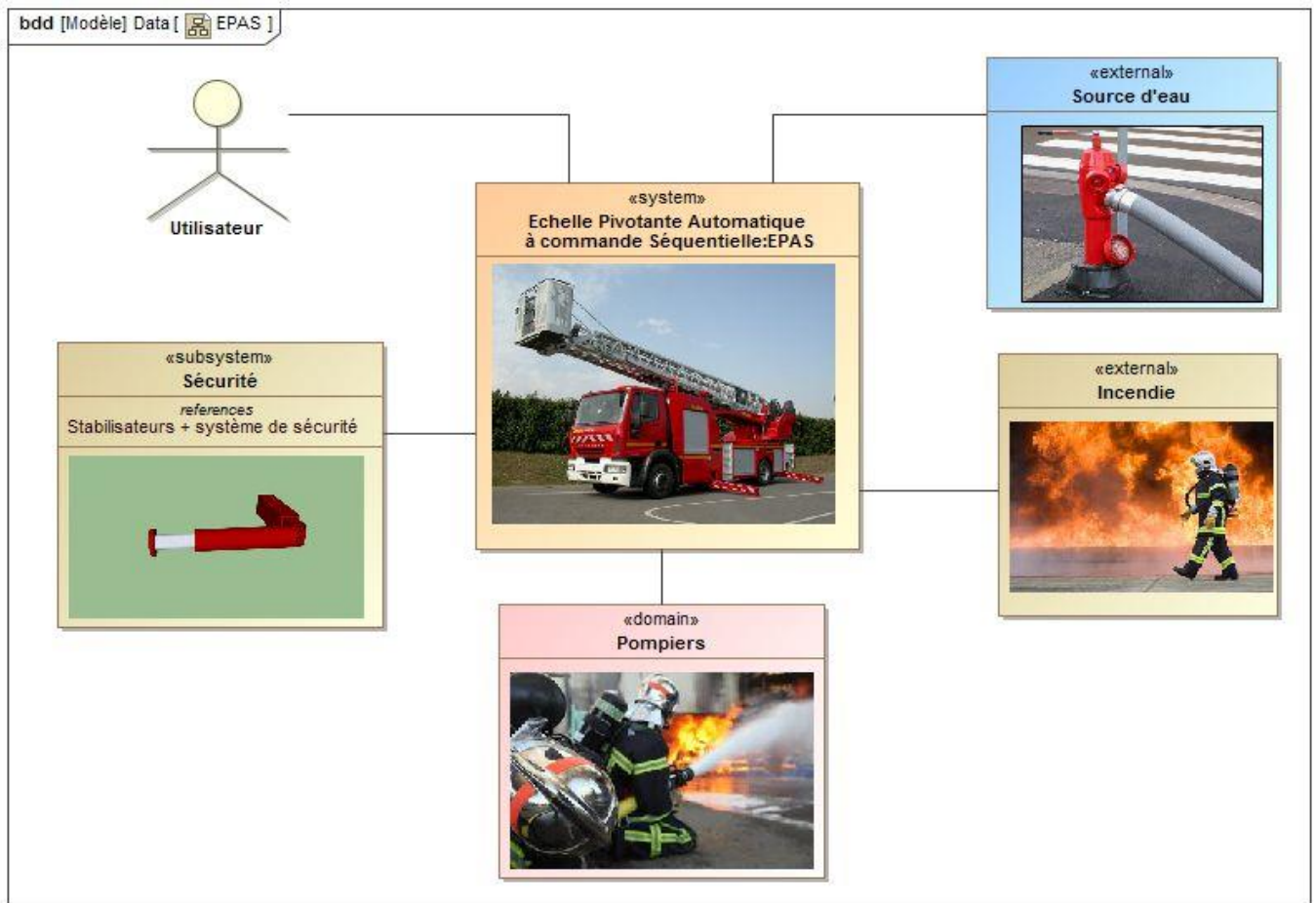


Figure 1 : Diagramme de contexte

Le déplacement de la plate-forme est réalisé suivant trois axes : voir figure 2

- Le déploiement du parc échelle (axe 1) : Chaque plan de l'échelle peut se translater par rapport aux autres ; seul le quatrième plan d'échelle est solidaire du berceau.
- Le pivotement autour de l'axe Y (axe 2) : La tourelle 1 peut pivoter par rapport au châssis autour d'un axe vertical.
- La rotation autour de l'axe Z (axe 3) : Le berceau peut tourner par rapport à la tourelle 2 autour d'un axe horizontal.

Un système de sécurité peut, à tout moment, stopper le déplacement de la plate-forme s'il y a un risque de basculement du camion porteur :

Des capteurs d'efforts placés sur le parc échelle permettent de tenir compte de la charge dans la plate-forme.

Des capteurs de position sur les trois axes permettent de définir la position de la plate-forme.

Des capteurs inductifs détectent la position de sortie des stabilisateurs.

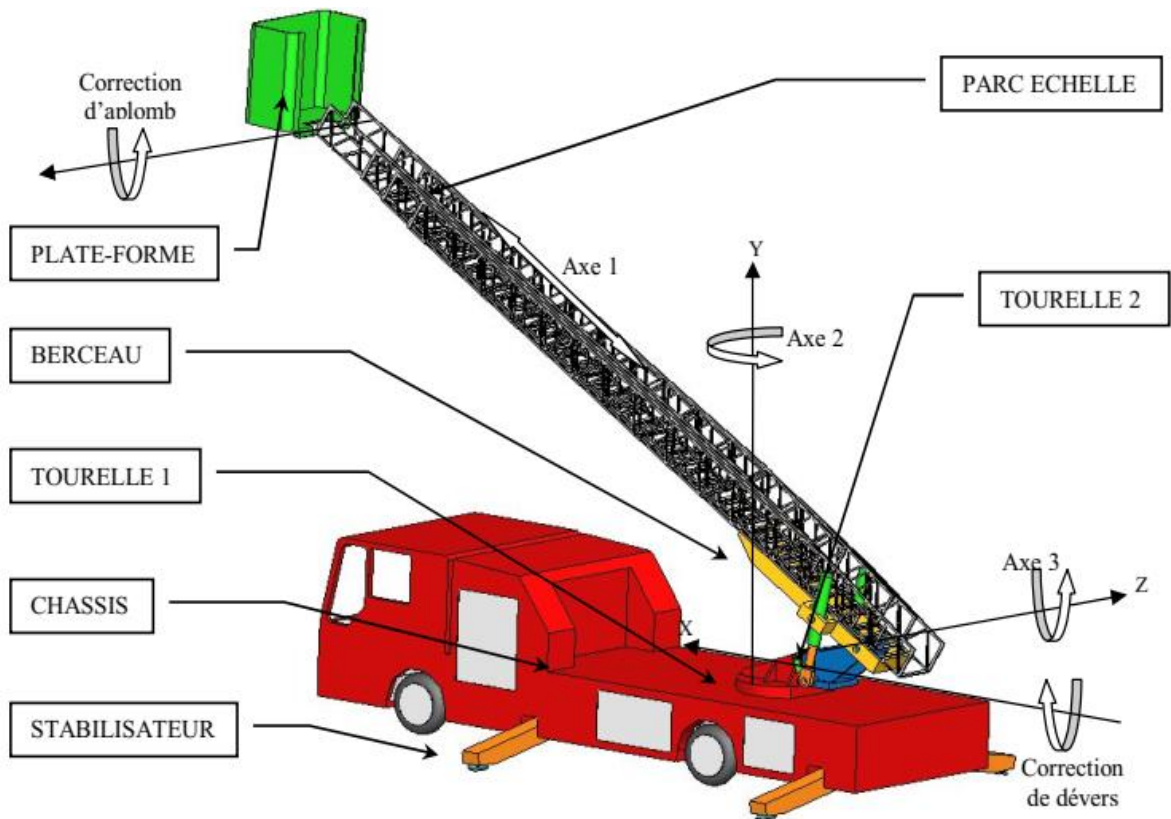


Figure 2

ETUDE DE L'AXE 3

Le système de dressage/abaissement réalise la rotation de la plate-forme autour d'un axe horizontal Z.

On propose le paramétrage sur le système de la figure 3 puis sur le schéma cinématique de la figure 4.

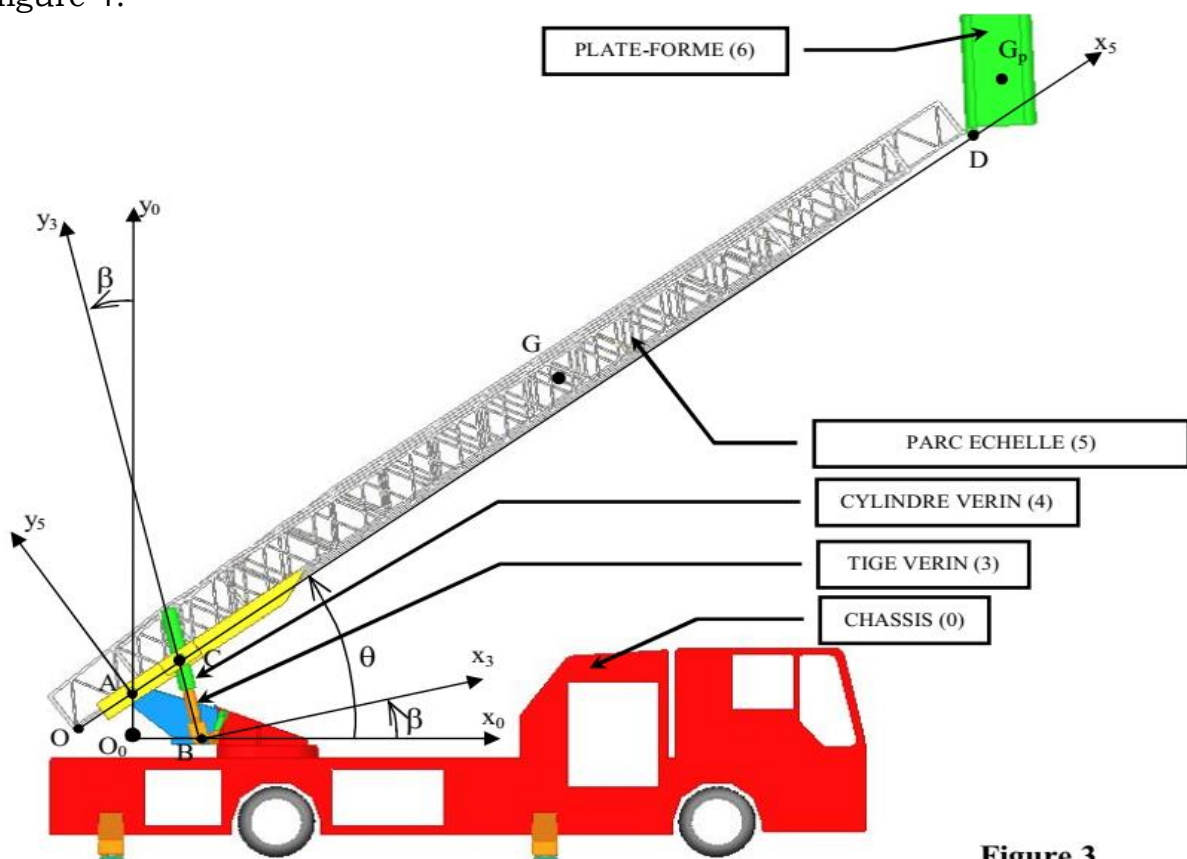


Figure 3

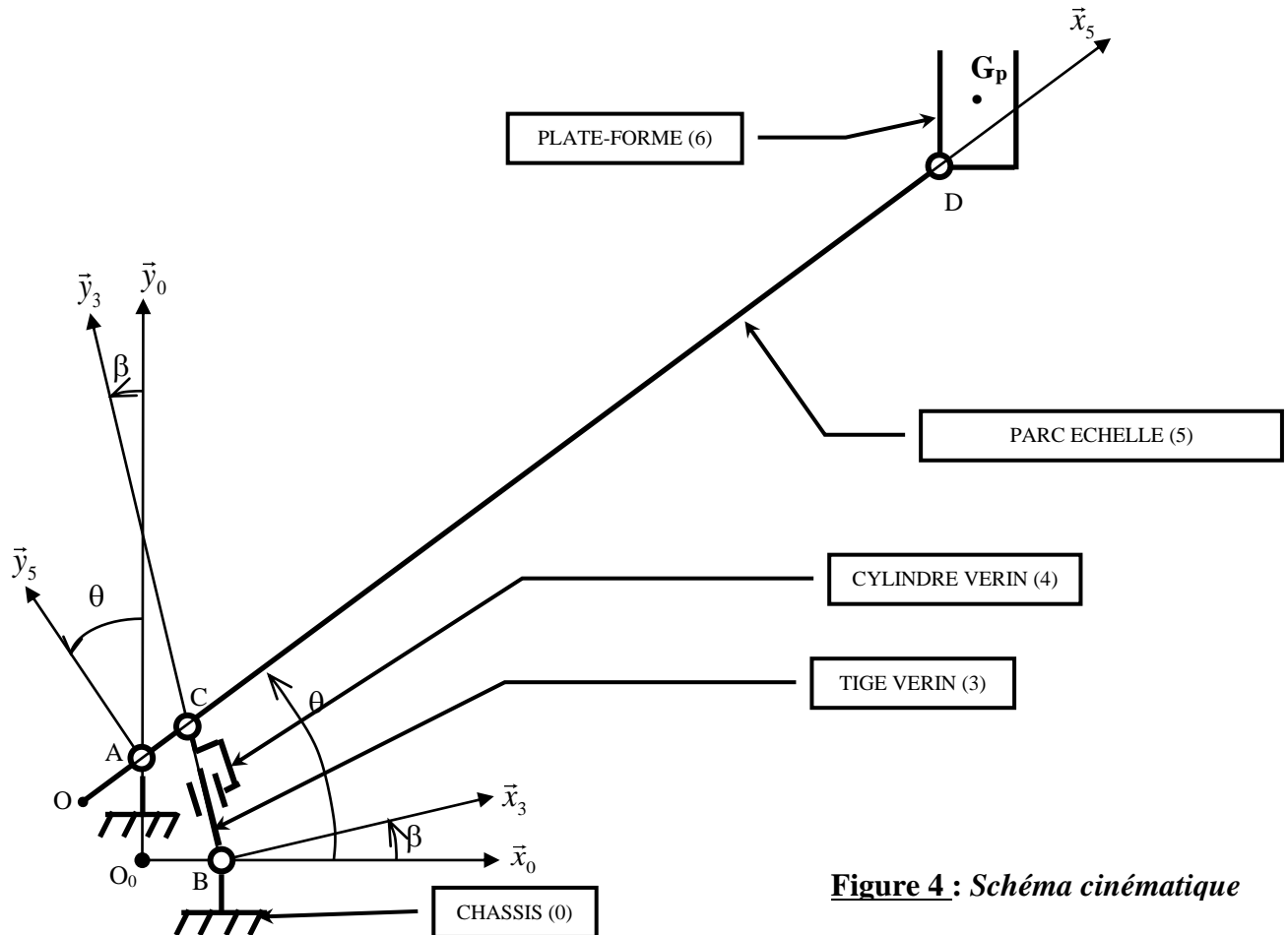


Figure 4 : Schéma cinématique

Paramétrage :

Le repère $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au châssis fixe (0), avec : $\vec{O_0A} = a \cdot \vec{y}_0$ et $\vec{O_0B} = b \cdot \vec{x}_0$.

Le repère $R_5 = (A, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_0)$ est lié à l'ensemble parc échelle (5), avec : $(\vec{x}_0, \vec{x}_5) = (\vec{y}_0, \vec{y}_5) = \theta$;
 $\vec{OA} = d\vec{x}_5$; $\vec{AC} = c \cdot \vec{x}_5$; $\vec{AD} = H \cdot \vec{x}_5$.

Le repère $R_3 = (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ est lié à la tige du vérin (3), avec : $\vec{BC} = y(t) \cdot \vec{y}_3$; $(\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3) = \beta$.

Les liaisons aux points A, B et C sont des liaisons pivots d'axe \vec{z}_0 .

Le cylindre creux du vérin (4) est en liaison pivot glissant d'axe (C, \vec{y}_3) avec la tige (3).

La plate forme (6) de centre d'inertie G_p est en liaison pivot d'axe (D, \vec{z}_0) avec le parc-échelle (5) :

$$\vec{DG}_p = x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0$$

On tiendra compte dans cette partie du fait que la plate-forme reste toujours horizontale.

Partie I : Etude Cinématique

Notation préconisée : On utilisera l'écriture suivante pour les torseurs cinématiques du mouvement du solide j par rapport au solide i : $\{V(j/i)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{\Omega}(j/i) \\ \vec{V}(M \in j/i) \end{array} \right\}_M$

Questions :

Q1. Tracer les figures planes de calcul.

Q2. Ecrire au point A le torseur cinématique $\{g(5/0)\}_A$, puis déduire au point O le torseur cinématique : $\{g(5/0)\}_O$.

- Q3. Calculer le vecteur vitesse : $\vec{V}(D \in 5 / R_0)$.
- Q4. Quelle est la nature de mouvement de la plate forme (6) par rapport au châssis (0).
- Q5. En déduire le vecteur vitesse : $\vec{V}(G_p \in 6 / R_0)$.
- Q6. Calculer le vecteur vitesse : $\vec{V}(C \in 3 / R_0)$.
- Q7. Calculer le vecteur vitesse : $\vec{V}(C \in 4 / 3)$.
- Q8. En déduire le vecteur vitesse : $\vec{V}(C \in 4 / R_0)$.
- Q9. En faisant une fermeture géométrique, déterminez la position $y(t)$ en fonction de l'angle $\theta(t)$ et des paramètres géométriques.
- Q10. En faisant une fermeture de chaîne cinématique, déterminez la vitesse de sortie du vérin $\dot{y}(t)$ en fonction de la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ et des paramètres géométriques.

Partie II : Etude statique

L'objet de cette étude est de :

- Déterminer l'effort du vérin qui permet de maintenir l'équilibre de l'échelle et la charge.
- Déterminer le couple du moteur permettant de maintenir la plate forme horizontale.

Le problème sera considéré plan.

Toutes les **liaisons** seront considérées **parfaites** et sont listées comme suit :

- L(0/3) : liaison pivot d'axe (B, \vec{z}_0) ; L(5/6) : liaison pivot d'axe (D, \vec{z}_0)
- L(0/5) : liaison pivot d'axe (A, \vec{z}_0) ; L(3/4) : liaison pivot glissant de direction \vec{y}_3
- L(5/4) : liaison pivot d'axe (C, \vec{z}_0) .

Le problème étant plan, donc l'action mécanique dans une liaison entre deux solides (i) et (j) sera modélisée par le glisseur :

$$\{\tau(i \rightarrow j)\} = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}(i \rightarrow j) \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{M_{ij}} = \left\{ \begin{matrix} X_{ij} & - \\ Y_{ij} & - \\ - & N_{ij} \end{matrix} \right\}_{(M_{ij}, \vec{x}_i, \vec{y}_j, \vec{z}_0)}$$

avec $\vec{R}(i \rightarrow j)$ située dans le plan (\vec{x}_i, \vec{y}_i) .

On propose le paramétrage suivant :

- Le repère $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au châssis fixe (0), avec : $\vec{O_0A} = a \cdot \vec{y}_0$ et $\vec{O_0B} = b \cdot \vec{x}_0$.
- Le repère $R_5 = (A, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_0)$ est lié à l'ensemble parc échelle(5), avec : $(\vec{x}_0, \vec{x}_5) = (\vec{y}_0, \vec{y}_5) = \theta$; $\vec{OA} = d\vec{x}_5$; $\vec{AC} = c \cdot \vec{x}_5$; $\vec{AD} = H \cdot \vec{x}_5$.

Le parc-échelle (5) est de masse **m** et de centre de gravité G tel que : $\vec{OG} = \frac{L}{2} \cdot \vec{x}_5 + \frac{h}{3} \cdot \vec{y}_5$.

- Le repère $R_3 = (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ est lié à la tige du vérin hydraulique (3+4), avec: $\vec{BC} = y(t) \cdot \vec{y}_3$; $(\vec{x}_0, \vec{x}_3) = (\vec{y}_0, \vec{y}_3) = \beta$.La masse du vérin est négligée devant les autres masses.

L'huile sous pression du vérin hydraulique (3+4) devra exercer un effort, modélisé par un glisseur de résultante $\vec{F}_v = F_v \vec{y}_3$, permettant de garder l'ensemble (5) en équilibre :

$$\{\tau(Huile \rightarrow 4)\} = \left\{ \begin{matrix} F_v \vec{y}_3 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_c$$

- La plate forme chargée (6):
 Pendant le dressage ou l'abaissement, la plate-forme reste toujours horizontale.
 Sa masse une fois chargée sera notée \mathbf{M} et son centre de gravité est le point G_P tel que : $\overline{DG_p} = x_G \vec{x}_0 + y_G \vec{y}_0$.
 La plate forme (6) est maintenue horizontale grâce à un moteur exerçant un couple

$$\text{moteur} : \{\tau(\text{Moteur} \rightarrow 6)\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{0} \\ C_m \vec{z}_0 \end{array} \right\}_D$$

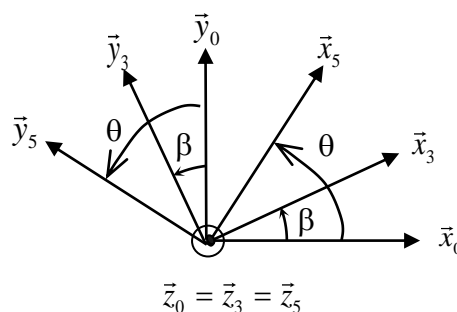
- L'accélération de la pesanteur : $\vec{g} = -g \vec{y}_0$

Questions :

- Q11.** Etablir le graphe d'analyse des actions mécaniques.
- Q12.** Ecrire l'expression du torseur d'action mécanique de la pesanteur sur le parc échelle (5) au point G : $\{\tau(\text{Pesanteur} \rightarrow 5)\}_G$
- Q13.** Ecrire la forme des torseurs d'actions mécaniques transmissibles dans les liaisons au point C dans l'espace et dans le plan (\vec{x}_i, \vec{y}_i) : $\{\tau(4 \rightarrow 5)\}_C$; $\{\tau(3 \rightarrow 4)\}_C$
- Q14.** Montrer que la résultante de l'action mécanique du cylindre (4) du vérin sur l'échelle (5) peut se mettre sous la forme : $\overline{R}(4 \rightarrow 5) = R_{45} \vec{y}_3$.
- Q15.** En appliquant le théorème de la résultante statique au cylindre (4) en projection sur \vec{y}_3 , exprimer R_{45} en fonction de F_v .
- Q16.** En isolant l'ensemble $(E) = \{5, 6\}$, et en appliquant le théorème de votre choix, déterminer l'effort F_v du vérin.
- Q17.** Déterminer le couple moteur C_m . Expliquez la démarche (l'isolement et le théorème appliqué).

Partie I : Corrigé

Q1. Tracer les figures planes de calcul.



Q2. Ecrire au point A le torseur cinématique $\{g(5/0)\}_A$, puis déduire au point O le torseur cinématique : $\{g(5/0)\}_O$.

$$\{g(5/0)\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(5/0) \\ \vec{V}(A \in 5/0) \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_A ; \{g(5/0)\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}(5/0) \\ \vec{V}(O \in 5/0) \end{array} \right\}_O$$

On a :

$$\vec{V}(O \in 5/0) = \left[\frac{d\overline{O_0O}}{dt} \right]_R = \left[\frac{d(\overline{O_0A} + \overline{AO})}{dt} \right]_R = \left[\frac{d(a \cdot \vec{y}_0 - d\vec{x}_5)}{dt} \right]_R = -d \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_5 \Rightarrow \{g(5/0)\}_O = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\theta} \cdot \vec{z}_0 \\ -d \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_5 \end{array} \right\}_O$$

Q3. Calculer le vecteur vitesse : $\vec{V}(D \in 5/R_0)$.

$$\vec{V}(D \in 5/R_0) = \left[\frac{d(\overline{O_0A} + \overline{AD})}{dt} \right]_R = \left[\frac{d(a \cdot \vec{y}_0 + H\vec{x}_5)}{dt} \right]_R = H \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_5.$$

Q4. Quelle est la nature de mouvement de la plate forme (6) par rapport au châssis (0).

Mouvement de la plate forme (6) par rapport au châssis (0) : Translation circulaire.

Q5. En déduire le vecteur vitesse : $\vec{V}(G_p \in 6/R_0)$.

$$\vec{V}(G_p \in 6/R_0) = \vec{V}(D \in 6/R_0) = \underbrace{\vec{V}(D \in 6/5)}_{\substack{= \vec{0} \\ \text{pivot}}} + \vec{V}(D \in 5/R_0)$$

$$\Rightarrow \vec{V}(G_p \in 6/R_0) = \vec{V}(D \in 5/R_0) = H \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_5.$$

Q6. Calculer le vecteur vitesse : $\vec{V}(C \in 3/R_0)$.

$$\vec{V}(C \in 3/R_0) = \underbrace{\vec{V}(B \in 3/R_0)}_{= \vec{0} : \text{pivot}} + \overline{CB} \wedge \vec{\Omega}(3/R_0) = -y(t) \cdot \vec{y}_3 \wedge \dot{\beta} \cdot \vec{z}_0 = -y(t) \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_3$$

Q7. Calculer le vecteur vitesse : $\vec{V}(C \in 4/3)$.

$$\vec{V}(C \in 4/3) = \left[\frac{d(\overline{BC})}{dt} \right]_{R_3} = \left[\frac{d(y(t) \cdot \vec{y}_3)}{dt} \right]_{R_3} = \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_3.$$

Q8. En déduire le vecteur vitesse : $\vec{V}(C \in 4/R_0)$.

$$\vec{V}(C \in 4/R_0) = \vec{V}(C \in 4/3) + \vec{V}(C \in 3/R_0) = \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_3 + -y(t) \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_3.$$

Q9. En faisant une fermeture géométrique, déterminez la position $y(t)$ en fonction de l'angle $\theta(t)$ et des paramètres géométriques.

Fermeture géométrique :

$$\overline{O_0B} + \overline{BC} + \overline{CA} + \overline{AO_0} = \vec{0}, \text{ ce qui s'exprime en fonction du paramétrage :}$$

$$b \vec{x}_0 + y(t) \vec{y}_3 - c \vec{x}_5 - a \vec{y}_0 = \vec{0}.$$

En projection respectivement sur \vec{x}_0 et sur \vec{y}_0 :

$$\begin{cases} \text{Proj}/\vec{x}_0 : b - y(t) \sin \beta - c \cos \theta = 0 \\ \text{Proj}/\vec{y}_0 : y(t) \cos \beta - c \sin \theta - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(t) \sin \beta = b - c \cos \theta \\ y(t) \cos \beta = c \sin \theta + a \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \sqrt{(b - c \cos \theta)^2 + (c \sin \theta + a)^2}}$$

Q10. En faisant une fermeture de chaîne cinématique, déterminez la vitesse de sortie du vérin $\dot{y}(t)$ en fonction de la vitesse angulaire $\dot{\theta}(t)$ et des paramètres géométriques.

$$\underbrace{\vec{V}(C \in 4/5)}_{= \vec{0}, \text{pivot}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{V}(C \in 4/3) + \vec{V}(C \in 3/R_0) - \vec{V}(C \in 5/R_0) = \vec{0}$$

$$\text{On a : } \vec{V}(C \in 5/R_0) = \left[\frac{d(\vec{O}_0\vec{A} + \vec{AC})}{dt} \right]_R = \left[\frac{d(a \cdot \vec{y}_0 + c \cdot \vec{x}_5)}{dt} \right]_R = c \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_5$$

$$\text{Donc : } \dot{y}(t) \cdot \vec{y}_3 - y(t) \cdot \dot{\beta} \cdot \vec{x}_3 - c \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_5 = \vec{0}$$

$$\text{Proj}/\vec{y}_3 \Rightarrow \dot{y}(t) = c \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{y}_5 \cdot \vec{y}_3 = c \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta - \beta) \quad (3)$$

$$\Rightarrow \dot{y}(t) = c \cdot \dot{\theta} \cdot (\cos \theta \cdot \cos \beta + \sin \theta \cdot \sin \beta)$$

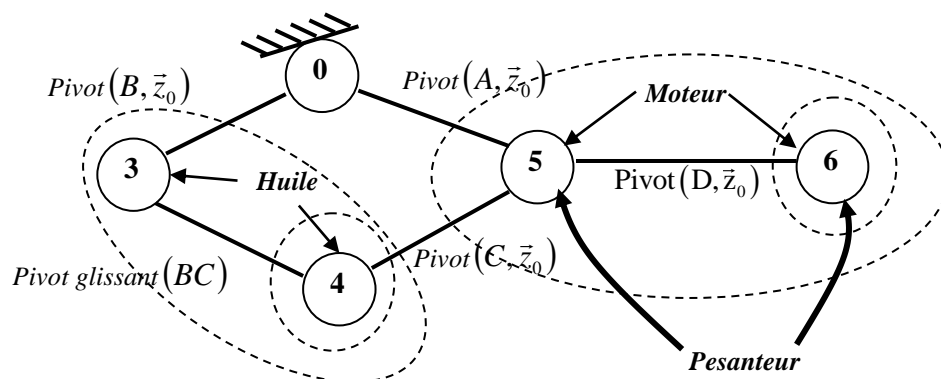
$$\text{D'après la question 9 : } \begin{cases} y(t) \sin \beta = b - c \cos \theta \\ y(t) \cos \beta = c \sin \theta + a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \beta = \frac{[b - c \cos \theta]}{y(t)} \\ \cos \beta = \frac{[c \sin \theta + a]}{y(t)} \end{cases}$$

$$\text{Ce qui donne : } \dot{y}(t) = \frac{c}{y(t)} \cdot \dot{\theta} \cdot ([c \sin \theta + a] \cos \theta + [b - c \cos \theta] \sin \theta)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{y}(t) = \frac{c}{y(t)} \cdot \dot{\theta} \cdot (a \cos \theta + b \sin \theta)}$$

Partie II : corrigé

Q11. Etablir le graphe d'analyse des actions mécaniques.



Q12. Ecrire l'expression du torseur d'action mécanique de la pesanteur sur le parc échelle (5) au point G : $\{\tau(\text{Pesanteur} \rightarrow 5)\}_G$

$$\{\tau(\text{Pesanteur} \rightarrow 5)\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -mg & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{(G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)}$$

Q13. Ecrire la forme des torseurs des actions mécaniques transmissibles dans les liaisons au point C dans l'espace et dans le plan (\vec{x}_i, \vec{y}_i) : $\{\tau(4 \rightarrow 5)\}_C$; $\{\tau(3 \rightarrow 4)\}_C$

Liaisons	Torseurs des actions mécaniques transmissibles dans l'espace	Torseurs des actions mécaniques transmissibles dans le plan (\vec{x}_i, \vec{y}_i)
L_{4-5}	$\{\tau(4 \rightarrow 5)\} = \begin{pmatrix} X_{45} & L_{45} \\ Y_{45} & M_{45} \\ Z_{45} & 0 \end{pmatrix}_{(C, \vec{x}_i, \vec{y}_j, \vec{z}_0)}$	$\{\tau(4 \rightarrow 5)\} = \begin{pmatrix} X_{45} & - \\ Y_{45} & - \\ - & 0 \end{pmatrix}_{(C, \vec{x}_i, \vec{y}_j, \vec{z}_0)}$
L_{4-5}	$\{\tau(3 \rightarrow 4)\} = \begin{pmatrix} X_{34} & L_{34} \\ 0 & 0 \\ Z_{34} & N_{34} \end{pmatrix}_{(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)}$	$\{\tau(3 \rightarrow 4)\} = \begin{pmatrix} X_{34} & - \\ 0 & - \\ - & N_{34} \end{pmatrix}_{(C, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)}$

Q14. Montrer que la résultante de l'action mécanique du cylindre (4) du vérin sur l'échelle (5) peut se mettre sous la forme : $\vec{R}(4 \rightarrow 5) = R_{45} \vec{y}_3$.

On applique le théorème du moment statique au point B sur le vérin (3+4) :

$$\vec{M}_B(5 \rightarrow 4) + \underbrace{\vec{M}_C(0 \rightarrow 3)}_{=\vec{0} : \text{pivot dans le plan}} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\vec{M}_C(5 \rightarrow 4)}_{=\vec{0} : \text{pivot dans le plan}} + \vec{BC} \wedge \vec{R}(5 \rightarrow 4) = \vec{0}$$

\Rightarrow la résultante $\vec{R}(5 \rightarrow 4)$ est portée par la droite $(BC) = (C, \vec{y}_3)$.

Donc $\vec{R}(5 \rightarrow 4) = R_{54} \vec{y}_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{R}(4 \rightarrow 5) = R_{45} \vec{y}_3}$

Q15. En appliquant le théorème de la résultante statique au cylindre (4) en projection sur \vec{y}_3 , exprimer R_{45} en fonction de F_v .

Théorème de la résultante statique au cylindre (4) en projection sur \vec{y}_3 :

$$\vec{R}(5 \rightarrow 4) \cdot \vec{y}_3 + \underbrace{\vec{R}(3 \rightarrow 4) \cdot \vec{y}_3}_{= 0 : \text{pivot glissant d'axe } \vec{y}_3} + \vec{R}(\text{Huile} \rightarrow 4) \cdot \vec{y}_3 = 0$$

$$R_{54} + F_v = 0 \quad \Rightarrow \quad R_{54} = -F_v \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{45} = F_v}$$

Q16. En isolant l'ensemble $(E) = \{5,6\}$, et en appliquant le théorème de votre choix, déterminer l'effort F_v du vérin.

Théorème du moment statique appliqué au point A sur l'ensemble $(E) = \{5,6\}$:

$$\vec{M}_A(4 \rightarrow 5) + \underbrace{\vec{M}_A(0 \rightarrow 5)}_{= \vec{0} : \text{pivot}} + \vec{M}_A(\text{pesanteur} \rightarrow 5) + \vec{M}_A(\text{pesanteur} \rightarrow 6) = \vec{0}$$

$$\vec{M}_A(4 \rightarrow 5) = \vec{M}_C(4 \rightarrow 5) + \overrightarrow{AC} \wedge \vec{R}(4 \rightarrow 5) = c.\vec{x}_5 \wedge R_{45}.\vec{y}_3 = c.R_{45} \cos(\theta - \beta).\vec{z}_0$$

$$\vec{M}_A(\text{pesanteur} \rightarrow 5) = \underbrace{\vec{M}_G(\vec{g} \rightarrow 5)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AG} \wedge -mg \vec{y}_0 = \left[\left(\frac{L}{2} - d \right) \vec{x}_5 + \frac{h}{3} \vec{y}_5 \right] \wedge -mg \vec{y}_0$$

$$\Rightarrow \vec{M}_A(\text{Pesanteur} \rightarrow 5) = -mg \left[\left(\frac{L}{2} - d \right) \cos \theta - \frac{h}{3} \sin \theta \right] \vec{z}_0$$

$$\vec{M}_A(\text{pesanteur} \rightarrow 6) = \underbrace{\vec{M}_{G_p}(\vec{g} \rightarrow 6)}_{\vec{0}} + \overrightarrow{AG_p} \wedge -Mg \vec{y}_0 = \left[H.\vec{x}_5 + x_G.\vec{x}_0 + \cancel{y_G.\vec{y}_0} \right] \wedge -Mg \vec{y}_0$$

$$\Rightarrow \vec{M}_A(\text{pesanteur} \rightarrow 6) = -Mg [H.\cos \theta + x_G] \vec{z}_0$$

On peut écrire :

$$c.R_{45} \cos(\theta - \beta).\vec{z}_0 - mg \left[\left(\frac{L}{2} - d \right) \cos \theta - \frac{h}{3} \sin \theta \right] \vec{z}_0 - Mg [H.\cos \theta + x_G] \vec{z}_0 = \vec{0}$$

On a : $R_{45} = F_v$, la relation (3) : $c.\dot{\theta}.\cos(\theta - \beta) = \dot{y}(t)$, $\dot{y}(t) = \frac{c}{y(t)}.\dot{\theta}.(a \cos \theta + b \sin \theta)$ et

$$y(t) = \sqrt{(b - c \cos \theta)^2 + (c \sin \theta + a)^2} \Rightarrow \frac{1}{c.\cos(\theta - \beta)} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{y}(t)} = \frac{\sqrt{(b - c \cos \theta)^2 + (c \sin \theta + a)^2}}{c(a \cos \theta + b \sin \theta)}$$

Donc :

$$F_v = \frac{\sqrt{(b - c \cos \theta)^2 + (c \sin \theta + a)^2}}{c(a \cos \theta + b \sin \theta)} \left(mg \left[\left(\frac{L}{2} - d \right) \cos \theta - \frac{h}{3} \sin \theta \right] + Mg [H.\cos \theta + x_G] \right)$$

Q17. Déterminer le couple moteur C_m . Expliquez la démarche (l'isolement et le théorème appliqué).

Théorème du moment statique appliqué au point D sur (6) :

$$\underbrace{\vec{M}_D(\text{Moteur} \rightarrow 6)}_{= C_m \vec{z}_0} + \underbrace{\vec{M}_D(5 \rightarrow 6)}_{= \vec{0} : \text{pivot}} + \underbrace{\vec{M}_D(\text{pesanteur} \rightarrow 6)}_{= \overrightarrow{DG_p} \wedge -Mg \vec{y}_0} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow C_m.\vec{z}_0 + (x_G.\vec{x}_0 + \cancel{y_G.\vec{y}_0}) \wedge -Mg \vec{y}_0 = \vec{0} \Rightarrow C_m.\vec{z}_0 - Mg x_G.\vec{z}_0 = \vec{0} \Rightarrow C_m = Mg x_G$$

Cinétique des systèmes matériels

1. Masse et inertie

La cinétique est l'étude des caractéristiques d'inertie.

1.1 Notions d'inertie

La masse ne suffit pour caractériser l'inertie que dans le cas d'un mouvement de translation. Pour un mouvement de rotation ou un mouvement quelconque, il faut prendre en compte la répartition de cette masse sur le solide.

L'inertie caractérise la résistance qu'oppose un corps par sa nature propre à une variation de mouvement. La masse suffit pour caractériser l'inertie que dans le cas d'un mouvement de translation, mais pour un mouvement de rotation ou un mouvement quelconque, il faut prendre en considération la répartition de cette masse sur le solide.

1.2 Principe de conservation de la masse

Un ensemble matériel (E) vérifie le principe de conservation de la masse, si tout sous ensemble matériel (e) de l'ensemble (E) a une masse m(e) constante au cours du temps, soit : $\forall (e) \subset (E), \forall t: m(e) = \text{constante}$.

☞ **Conséquence :**

Pour un système matériel considéré comme un ensemble de points P, chacun de masse élémentaire dm , et sur lequel on a défini une fonction vectorielle $\vec{f}(p, t)$, on peut alors démontrer que pour tout repère R : $\frac{d}{dt} \int_E \vec{f}(p, t) dm = \int_E \frac{d}{dt} [\vec{f}(p, t)] dm$.

1.3 Centre d'inertie d'un solide

1.3.1 Définition

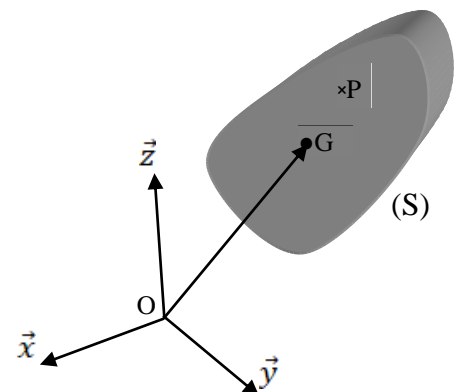
Pour un solide S de masse m, on appelle **centre d'inertie**

le point G défini par : $\int_S \vec{GP} \cdot dm = \vec{0}$

$$\Rightarrow \int_S (\vec{GO} + \vec{OP}) dm = \vec{0} \Rightarrow \int_S \vec{GO} dm + \int_S \vec{OP} dm = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{GO} \int_S dm + \int_S \vec{OP} dm = \vec{0} \Rightarrow \vec{GO} \cdot m + \int_S \vec{OP} dm = \vec{0}$$

Ce qui donne : $\vec{OG} = \frac{1}{m} \int_S \vec{OP} \cdot dm$



Forme du solide	Expression de dm	Centre d'inertie
Volume	$\rho = \frac{m}{v} = \frac{dm}{dv} \rightarrow dm = \rho \cdot dv$	$\vec{OG} = \frac{1}{V} \int \vec{OP} \cdot dv$
Surface	$\sigma = \frac{m}{s} = \frac{dm}{ds} \rightarrow dm = \rho \cdot ds$	$\vec{OG} = \frac{1}{S} \int \vec{OP} \cdot ds$
Ligne	$\lambda = \frac{m}{L} = \frac{dm}{d\ell} \rightarrow dm = \lambda \cdot d\ell$	$\vec{OG} = \frac{1}{L} \int \vec{OP} \cdot d\ell$

NB : Le centre d'inertie appartient à la symétrie caractérisant les solides.

☞ **Applications :**

1. Détermination du centre de gravité d'un demi-fil homogène de rayon **R**

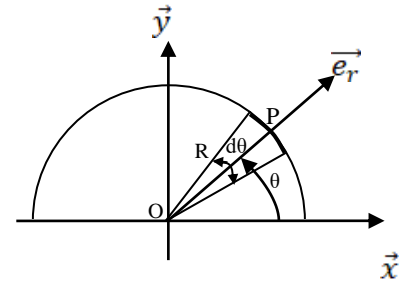
G appartient à l'axe de symétrie (O, \vec{y}) , donc $y_G \in (O, \vec{y})$.

$$y_G = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{y} = \frac{1}{L} \int \overrightarrow{OP} \cdot \vec{y} \cdot d\ell$$

On a : $\overrightarrow{OP} = R \cdot \vec{e}_r$; $L = \pi R$ et $d\ell = R d\theta$

$$\rightarrow y_G = \frac{1}{\pi R} \int R \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{y} \cdot R d\theta = \frac{R}{\pi} \int_0^\pi \sin \theta d\theta$$

$$y_G = \frac{2R}{\pi}$$



2. Détermination du centre de gravité d'un demi-disque homogène de rayon R

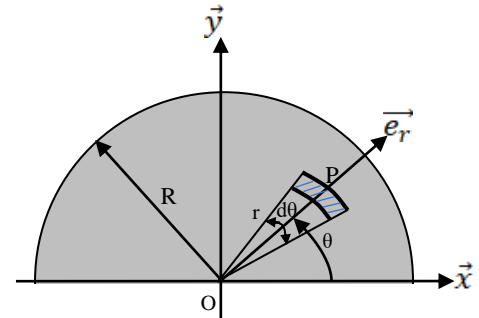
G appartient à l'axe de symétrie (O, \vec{y}) , donc $y_G \in (O, \vec{y})$.

$$y_G = \overrightarrow{OG} \cdot \vec{y} = \frac{1}{S} \int \overrightarrow{OP} \cdot \vec{y} \cdot d\ell$$

On a : $\overrightarrow{OP} = r \cdot \vec{e}_r$; $S = \frac{\pi R^2}{2}$ et $ds = r d\theta \cdot dr$

$$\rightarrow y_G = \frac{2}{\pi R^2} \int r \cdot \vec{e}_r \cdot \vec{y} \cdot r d\theta \cdot dr = \frac{2}{\pi R^2} \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta$$

$$y_G = \frac{4R}{3\pi}$$



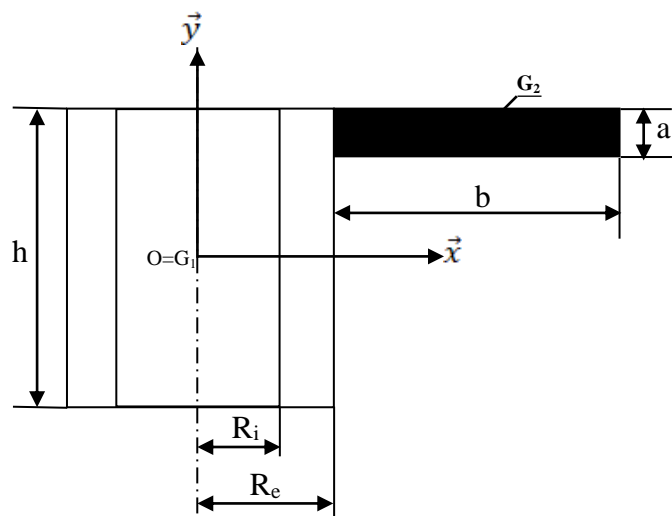
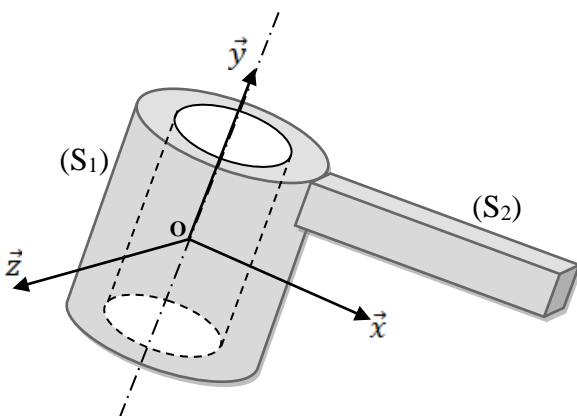
1.3.2 Centre d'inertie d'un ensemble matériel

Soit un ensemble matériel E constitué de n solides S_i : $E = \cup_{i=1}^n S_i$ et $m(E) = \sum_{i=1}^n m(S_i) = \sum_{i=1}^n m_i$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m(E)} \int_E \overrightarrow{OP} dm = \frac{\sum_{i=1}^n [\int_{S_i} \overrightarrow{OP} dm]}{\sum_{i=1}^n m_i} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OG}_i}{\sum_{i=1}^n m_i}}$$

Exemple :

Déterminer le centre d'inertie du solide (S) composé d'un cylindre creux (S_1) et d'un parallélépipède (S_2).



On note :
 m_i : masse et G_i : centre d'inertie du solide (S_i).

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OG}_1 + m_2 \vec{OG}_2}{m_1 + m_2}; \text{ avec } \vec{OG}_1 = \vec{0} \text{ et } \vec{OG}_2 = \left(R_e + \frac{b}{2}\right) \vec{x} + \left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2}\right) \vec{y}$$

On aura donc : $\vec{OG} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \left\{ \left(R_e + \frac{b}{2}\right) \vec{x} + \left(\frac{h-a}{2}\right) \vec{y} \right\}$

1.3.3 Théorèmes de Guldin

L'utilisation de théorème de Guldin permet de simplifier le calcul de la position du centre d'inertie pour les solides ayant un axe de révolution.

a) Premier théorème de Guldin :

L'aire de la surface engendrée par une courbe plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égale au produit de la longueur de la courbe par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité :

$$S = L \cdot 2\pi \cdot r_G$$

Démonstration :

On considère une courbe (C) de longueur L de centre d'inertie G ;

Soit un point courant P de la courbe, tel que : $\vec{OP} = r \cdot \vec{e}_r$.

$$\vec{OG} = \frac{1}{L} \int \vec{OP} \cdot d\ell \rightarrow L \cdot \vec{OG} = \int \vec{OP} \cdot d\ell$$

En projection sur un axe (O, \vec{e}_r) contenu dans le plan contenant la courbe et la droite (Δ) .

On a : $\vec{OP} = r \cdot \vec{e}_r$ et $\vec{OG} = r_G \cdot \vec{e}_r$, donc : $L \cdot r_G = \int r \cdot d\ell$ (1)

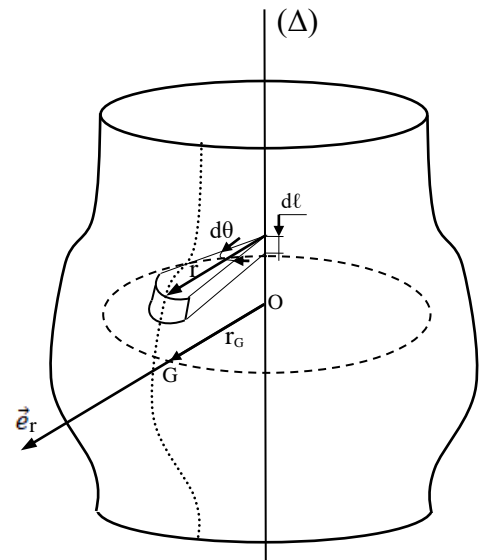
Soit un élément de surface $ds = r d\theta \cdot d\ell$

La surface engendrée par la rotation de la courbe :

$$S = \int ds = \int r d\theta \cdot d\ell = \int_0^{2\pi} d\theta \int r \cdot d\ell = 2\pi \int r \cdot d\ell,$$

d'où la relation : $\frac{S}{2\pi} = \int r \cdot d\ell$ (2)

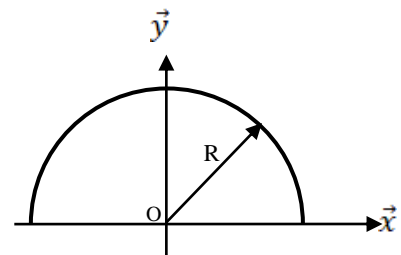
$$(1)=(2) \rightarrow S = L \cdot 2\pi \cdot r_G$$



Exemple :

Détermination du centre de gravité d'un demi-fil homogène de rayon R

La rotation du demi fil de longueur (L) autour de l'axe (O, \vec{x}) engendre une sphère creuse de surface (S).
 1^{er} théorème de Guldin : $S = L \cdot 2\pi \cdot y_G$
 On a : $S = 4\pi R^2 ; L = \pi R \rightarrow y_G = \frac{S}{2\pi L} = \frac{4\pi R^2}{2\pi \cdot \pi R}$
 On aura donc : $y_G = \frac{2R}{\pi}$



b) Deuxième théorème de Guldin :

Le volume engendré par une surface plane tournant autour d'un axe de son plan, ne la traversant pas, est égal au produit de l'aire de la surface par le périmètre du cercle décrit par son centre de gravité : $V = S \cdot 2\pi \cdot r_G$

Démonstration :

On considère une surface hachurée (S) d'aire S de centre d'inertie G ;

Soit un point courant P de la surface, tel que : $\vec{OP} = r \cdot \vec{e}_r$.

$$\vec{OG} = \frac{1}{S} \int \vec{OP} \cdot ds \rightarrow S \cdot \vec{OG} = \int \vec{OP} \cdot ds$$

En projection sur un axe (O, \vec{e}_r) appartenant au plan contenant La surface et la droite (Δ).

On a : $\vec{OP} = r \cdot \vec{e}_r$ et $\vec{OG} = r_G \cdot \vec{e}_r$, donc : $S \cdot r_G = \int r \cdot ds$ (1)

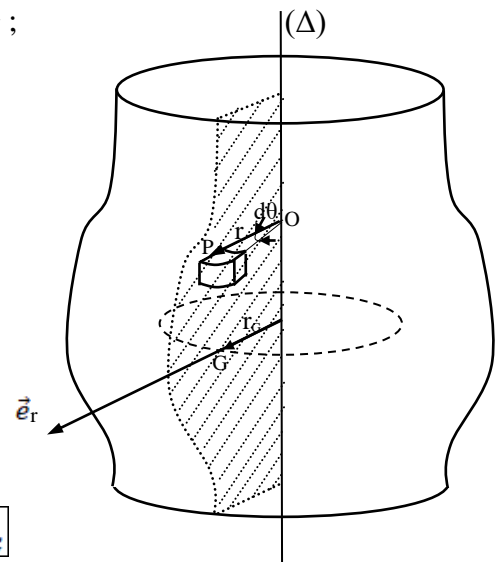
Soit un élément de volume $dv = ds \cdot r \cdot d\theta$

Le volume engendré par la rotation de la courbe :

$$V = \int dv = \int r \cdot d\theta \cdot ds = \int_0^{2\pi} d\theta \int r \cdot ds = 2\pi \int r \cdot ds,$$

d'où la relation : $\frac{V}{2\pi} = \int r \cdot ds$ (2)

(1)=(2) \rightarrow $V = S \cdot 2\pi \cdot r_G$



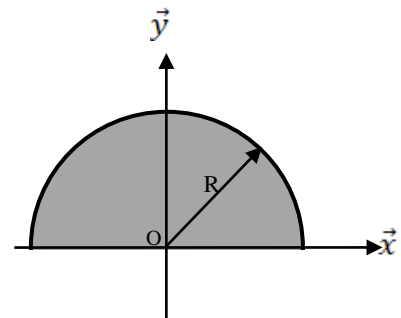
Exemple :

Détermination du centre de gravité d'un demi-fil homogène de rayon R.

La rotation du demi disque de surface (S) autour de l'axe (O, \vec{x}) engendre une sphère pleine de volume (S=V).
 2^{ème} théorème de Guldin : $V = S \cdot 2\pi \cdot y_G$

On a : $S = \frac{4}{3} \pi R^3$; $S = \frac{\pi R^2}{2} \rightarrow y_G = \frac{V}{2\pi S} = \frac{\frac{4}{3} \pi R^3}{2\pi \cdot \frac{\pi R^2}{2}}$

On aura donc : $y_G = \frac{4R}{3\pi}$

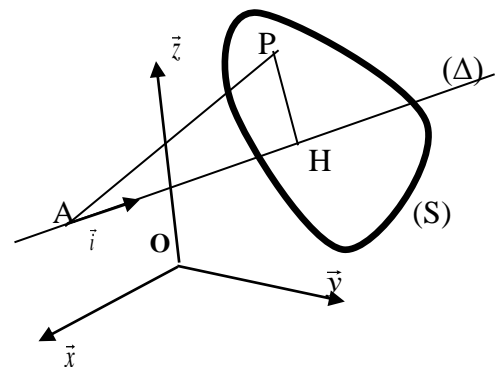


2. Moments et produits d'inertie

Les moments et produits d'inertie caractérisent la répartition de la masse sur un solide.

2.1 Moment d'inertie par rapport à un point

On appelle moment d'inertie du solide (S) par rapport à un point A la quantité positive : $I_A(S) = \int_{p \in S} \overline{AP}^2 dm$.



2.2 Moment d'inertie par rapport à une droite

On appelle moment d'inertie du solide (S) par rapport à une droite $\Delta(A, \vec{i})$ la quantité positive :

$$I_\Delta(S) = \int_{p \in S} (\vec{i} \wedge \overline{AP})^2 dm.$$

En faisant intervenir le point H, projection du point P sur la droite (Δ) :

$$I_\Delta(S) = \int_{p \in S} (\vec{i} \wedge \overline{AP})^2 dm = \int_{p \in S} (\|\vec{i}\| \cdot \|\overline{AP}\| \cdot \sin(\overline{AP}, \overline{AH}))^2 dm = \int_{p \in S} (\|\overline{AP}\| \cdot \frac{\overline{PH}}{\overline{AP}})^2 dm = \int_{p \in S} \overline{PH}^2 dm.$$

on déduit donc : $I_\Delta(S) = \int_{p \in S} \overline{PH}^2 dm$.

2.3 Moments d'inertie Dans un repère cartésien

Soit un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, et P un point quelconque de (S). Posons : $\vec{OP} = x\vec{x} + y\vec{y} + z\vec{z}$:

- Moment d'inertie du solide (S) par rapport au point O : $I_O(S) = \int_{p \in S} \overline{OP}^2 dm = \int_{p \in S} (x^2 + y^2 + z^2) dm$

- Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe (O, \vec{x}) :

$$I_{(O, \vec{x})}(S) = \int_{p \in S} (\vec{x} \wedge \overrightarrow{OP})^2 dm = \int_{p \in S} (\vec{x} \wedge (x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{y} + z \cdot \vec{z}))^2 dm \Rightarrow I_{(O, \vec{x})}(S) = \int_{p \in S} (y^2 + z^2) dm.$$

Donc on peut écrire :

$$I_{(O, \vec{x})}(S) = \int_{p \in S} (y^2 + z^2) dm : \text{Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe } (O, \vec{x}) ;$$

$$I_{(O, \vec{y})}(S) = \int_{p \in S} (z^2 + x^2) dm : \text{Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe } (O, \vec{y}) ;$$

$$I_{(O, \vec{z})}(S) = \int_{p \in S} (x^2 + y^2) dm : \text{Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe } (O, \vec{z}) ;$$

Relation entre les moments d'inertie : $I_O = \frac{1}{2} [I_{(O, \vec{x})} + I_{(O, \vec{y})} + I_{(O, \vec{z})}]$

2.4 Produits d'inertie

Les produits d'inertie caractérisent l'absence de la symétrie dans la répartition de la masse. La détermination des produits d'inertie sera déduite du calcul de l'opérateur d'inertie.

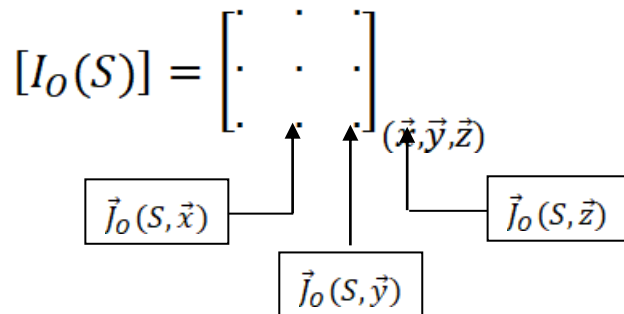
3. Opérateur d'inertie d'un solide

3.1. Définition

L'opérateur d'inertie d'un solide (S) en un point O, est l'opérateur qui à tout vecteur \vec{u} fait correspondre le vecteur : $\vec{J}_O(S, \vec{u}) = \int_{p \in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{u} \wedge \overrightarrow{OP}) dm$, cet opérateur est linéaire, donc représentable par une matrice.

3.2. Matrice d'inertie

La matrice d'inertie du solide (S) au point O relativement à la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ s'obtient en disposant en colonne les composantes des vecteurs transformés des vecteurs de base par l'opérateur d'inertie :



Et on peut aussi déduire l'opérateur d'inertie à partir de la matrice d'inertie : $\vec{J}_O(S, \vec{u}) = [I_O(S)].\vec{u}$

↪ Déterminons les colonnes de la matrice d'inertie :

$$\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{x} \wedge \overrightarrow{OP}) = \begin{vmatrix} x & 1 & x \\ y & 0 & y \\ z & 0 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 0 \\ y & -z \\ z & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y^2 + z^2 \\ -xy \\ -zx \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{J}_O(S, \vec{x}) = \int_{p \in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{x} \wedge \overrightarrow{OP}) dm = \begin{vmatrix} \int_{p \in S} (y^2 + z^2) \cdot dm \\ - \int_{p \in S} xy \cdot dm \\ - \int_{p \in S} zx \cdot dm \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{y} \wedge \overrightarrow{OP}) = \begin{vmatrix} x & 0 & x \\ y & 1 & y \\ z & 0 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & z \\ y & 0 \\ z & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -xy \\ z^2 + x^2 \\ -yz \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{J}_O(S, \vec{y}) = \int_{p \in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{y} \wedge \overrightarrow{OP}) dm = \begin{vmatrix} - \int_{p \in S} xy \cdot dm \\ \int_{p \in S} (z^2 + x^2) \cdot dm \\ - \int_{p \in S} yz \cdot dm \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{OP} \wedge (\vec{z} \wedge \overrightarrow{OP}) = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ -y & x & 0 \\ 0 & x^2 + y^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{J}_O(S, \vec{z}) = \int_{p \in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{z} \wedge \overrightarrow{OP}) dm = \begin{vmatrix} - \int_{p \in S} zx \cdot dm \\ - \int_{p \in S} yz \cdot dm \\ \int_{p \in S} (x^2 + y^2) \cdot dm \end{vmatrix}$$

On note :

$A = I_{(O, \vec{x})}(S) = \int_{p \in S} (y^2 + z^2) dm$: Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe (O, \vec{x}) ;

$B = I_{(O, \vec{y})}(S) = \int_{p \in S} (z^2 + x^2) dm$: Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe (O, \vec{y}) ;

$C = I_{(O, \vec{z})}(S) = \int_{p \in S} (x^2 + y^2) dm$: Moment d'inertie du solide (S) par rapport à l'axe (O, \vec{z}) ;

Par convention on pose :

$D = \int_{p \in S} yz dm$: Produit d'inertie de (S) par rapport aux axes (O, \vec{y}) et (O, \vec{z})

$E = \int_{p \in S} zx dm$: Produit d'inertie de (S) par rapport aux axes (O, \vec{z}) et (O, \vec{x})

$F = \int_{p \in S} xy dm$: Produit d'inertie de (S) par rapport aux axes (O, \vec{x}) et (O, \vec{y})

$$\Rightarrow [\vec{I}_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Une matrice d'inertie dépend de la base et du point de calcul, il est donc important de préciser ces données.

3.3. Détermination du moment d'inertie par rapport à un axe quelconque

On cherche à déterminer une relation entre le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque passant par O l'origine du repère $\Delta(O, \vec{i})$ et la matrice d'inertie $[\vec{I}_O(S)]$.

$$I_{\Delta}(S) = \int_{p \in S} (\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP})^2 dm = \int_{p \in S} (\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP}) \cdot (\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP}) dm = \int_{p \in S} \vec{i} \wedge \overrightarrow{OP} \cdot (\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP})$$

$$= \int_{p \in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{i} dm = \vec{i} \cdot \int_{p \in S} \overrightarrow{OP} \wedge (\vec{i} \wedge \overrightarrow{OP}) dm \Rightarrow I_{\Delta}(S) = \vec{i} \cdot \vec{J}_O(S, \vec{i})$$

On sait que : $\vec{J}_O(S, \vec{i}) = [\vec{I}_O(S)] \cdot \vec{i}$

Donc, le moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe $\Delta(O, \vec{i})$: $I_{\Delta}(S) = \vec{i} \cdot ([\vec{I}_O(S)] \cdot \vec{i})$

4. Propriétés de la matrice d'inertie

4.1. Matrice et base principale d'inertie

La matrice d'inertie étant symétrique \rightarrow diagonalisable. Il existe donc, pour tout solide de forme quelconque, une base principale d'inertie dans laquelle la matrice d'inertie prend la forme simplifiée

suivante : $[\bar{I}_O(S)] = \begin{bmatrix} A_P & 0 & 0 \\ 0 & B_P & 0 \\ 0 & 0 & C_P \end{bmatrix}_{(\vec{x}_P, \vec{y}_P, \vec{z}_P)}$. Les vecteurs unitaires de cette base sont les vecteurs propres

de la matrice d'inertie et les termes diagonaux sont les valeurs propres correspondantes.

- Les axes $(O, \vec{x}_P), (O, \vec{y}_P), (O, \vec{z}_P)$ sont appelés **axes principaux d'inertie** du solide S au point O.
- Les moments d'inertie A_P, B_P, C_P sont appelés **moments principaux d'inertie** du solide S au point O.

4.2. Influence des symétries sur la forme de la matrice d'inertie

a) Un plan de symétrie :

Un plan de symétrie permet d'annuler deux produits d'inertie comportant la normale à ce plan.

Exemple :

Le plan (G, \vec{x}, \vec{y}) est plan de symétrie :

On décompose le solide (S) en deux demi solides symétriques

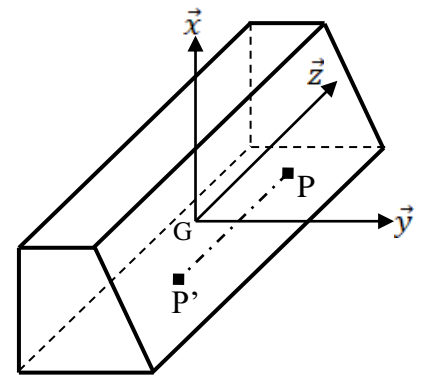
(S_1) et (S_2) , donc à chaque point $P(x,y,z) \in S_1$ correspond symétriquement un point $P'(x,y,-z) \in S_2$.

$D = \int_S y \cdot z \cdot dm = \int_{S_1} y \cdot z \cdot dm + \int_{S_2} y \cdot z \cdot dm$. On effectue un changement de variable $z \rightarrow -z$ pour calculer la deuxième intégrale d'où :

$$\int_{S_2} y \cdot z \cdot dm = - \int_{S_1} y \cdot z \cdot dm \Rightarrow D=0$$

On démontre de même $E=0$.

Donc : $[\bar{I}_O(S)] = \begin{bmatrix} A & -F & 0 \\ -F & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$



L'axe (O, \vec{z}) perpendiculaire au plan de symétrie est **un axe principal d'inertie**.

b) Deux plans de symétrie :

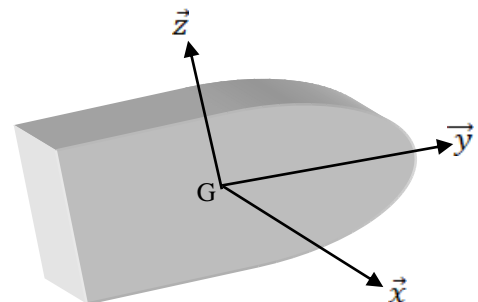
Si un solide possède deux plans de symétrie, en choisissant d'écrire la matrice d'inertie en un point O de la droite d'intersection des deux plans et dans une base respectant cette symétrie, alors les trois produits d'inertie sont nuls :

La matrice est donc diagonale : $[\bar{I}_O(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

Exemple :

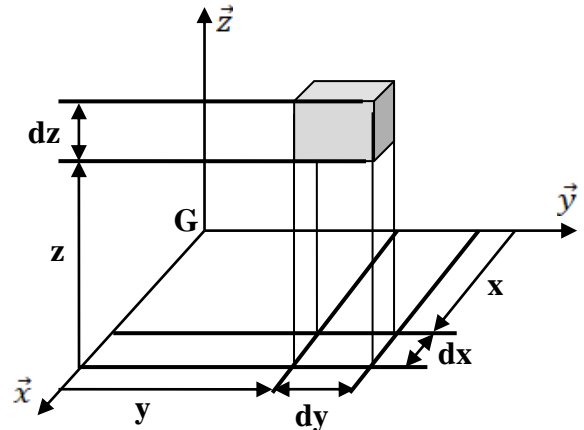
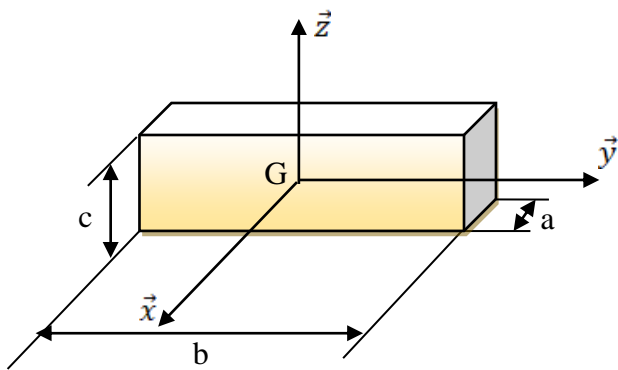
(G, \vec{x}, \vec{y}) et (G, \vec{y}, \vec{z}) sont les deux plans de symétrie :

- plan $(G, \vec{x}, \vec{y}) \rightarrow D=0$ et $E=0$ (effets des z de signes opposés)
- plan $(G, \vec{y}, \vec{z}) \rightarrow E=0$ et $F=0$ (effets des x de signes opposés)



Application :

Détermination de la matrice d'inertie d'un parallélépipède rectangle au centre d'inertie G.



On a trois plans de symétrie qui sont : (G, \vec{x}, \vec{y}) , (G, \vec{x}, \vec{z}) et (G, \vec{y}, \vec{z}) ce qui permet d'annuler les trois produits d'inertie : $[I_G(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$.

On a : $dm = \rho dv = \frac{m}{v} dv$, avec: $dv = dx.dy.dz$

$$A = \int_v (y^2 + z^2) dm = \frac{m}{v} \int_v (y^2 + z^2) dv = \frac{m}{v} \iiint (y^2 + z^2) dx. dy. dz$$

$$= \frac{m}{a.b.c} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \left(\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y^2 dy \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} dz + \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} z^2 dz \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} dy \right)$$

$$= \frac{m}{a.b.c} a. \left(\frac{b^3.c}{12} + \frac{c^3.b}{12} \right) = \frac{m}{12} (b^2 + c^2)$$

De même, on démontre : $B = \frac{m}{12} (c^2 + a^2)$ et $C = \frac{m}{12} (a^2 + b^2)$.

⇒ **Matrice d'inertie d'un parallélépipède en G :** $[I_G(S)] = \begin{bmatrix} \frac{m}{12} (b^2 + c^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m}{12} (c^2 + a^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{m}{12} (a^2 + b^2) \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$

c) Axe de révolution :

Tout plan passant par l'axe de révolution est un plan de symétrie ; La matrice est donc diagonale dans toute base contenant l'axe de révolution et en tout point de cet axe.

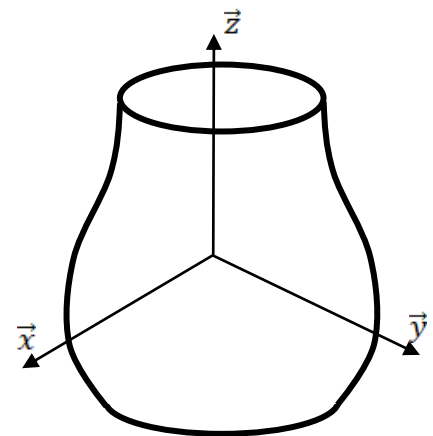
Pour l'exemple ci-contre l'axe \vec{z} est l'axe de révolution.

Les axes x et y sont interchangeables sans modification de la disposition de la matière, donc les moments d'inertie par rapport aux axes (O, \vec{x}) et (O, \vec{y}) sont égaux.

$$A = \int_S (y^2 + z^2) dm = \int_S (x^2 + z^2) dm = B$$

$$C = \int_S (x^2 + y^2) dm = 2.A - 2. \int_S z^2 dm \Rightarrow A = \frac{C}{2} + \int_S z^2 dm$$

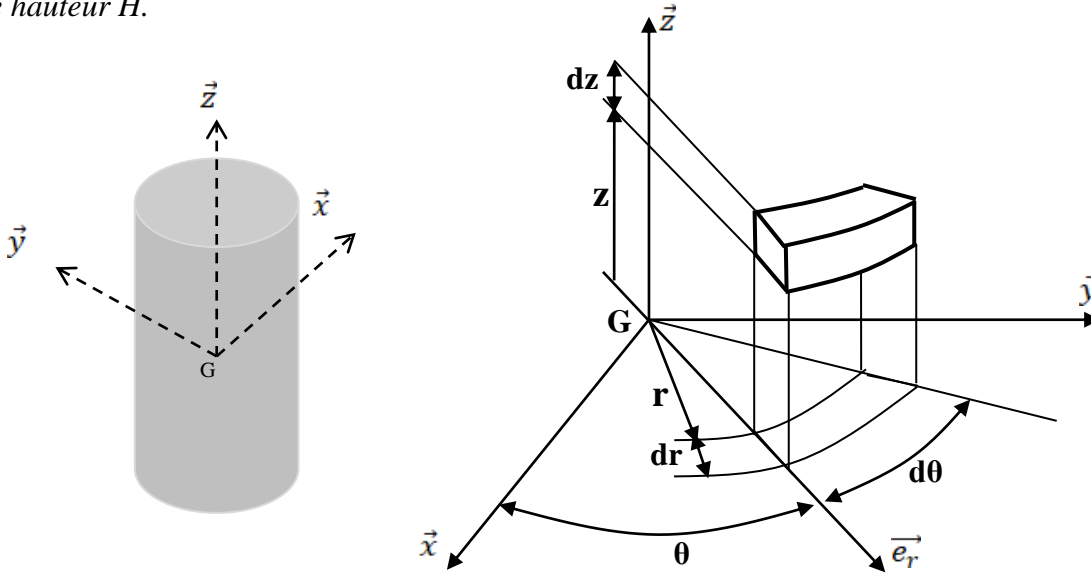
Le solide a donc une matrice d'inertie de la forme : $[I_C(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(-, -, \vec{z}_P)}$



La notation $(-, -, \vec{z}_s)$ indique que la matrice d'inertie reste la même dans toute base orthonormée admettant l'axe \vec{z}_s comme troisième vecteur.

Application :

Détermination de la matrice d'inertie au centre d'inertie G d'un cylindre de révolution plein de rayon R et de hauteur H.



L'axe (G, \vec{z}) est un axe de révolution \rightarrow Forme de la matrice d'inertie : $[I_G(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$.

On utilise les coordonnées cylindriques : $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$, avec : $\begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq R \\ -\frac{h}{2} \leq z \leq \frac{h}{2} \end{cases}$. On a : $\begin{cases} dm = \rho dv = \frac{m}{v} dv \\ dv = r d\theta \cdot dr \cdot dz \end{cases}$.

$$C = \int_v (x^2 + y^2) dm = \frac{m}{v} \int_v r^2 dv = \frac{m}{v} \iiint r^2 r d\theta \cdot dr \cdot dz = \frac{m}{v} \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} dz$$

$$= \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi \cdot h = m \frac{R^2}{2}$$

$$A = \frac{C}{2} + \int_v z^2 dm = \frac{C}{2} + \frac{m}{v} \int_v z^2 dv = \frac{C}{2} + \frac{m}{v} \iiint z^2 r d\theta \cdot dr \cdot dz = \frac{C}{2} + \frac{m}{v} \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} z^2 dz$$

$$= m \frac{R^2}{4} + \frac{m}{\pi R^2 h} \cdot \frac{R^2}{2} \cdot 2\pi \cdot \frac{h^3}{12} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right)$$

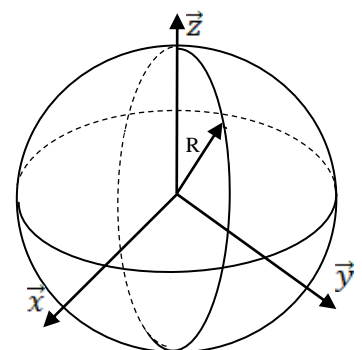
\Rightarrow **Matrice d'inertie d'un cylindre plein en G :** $[I_G(S)] = \begin{bmatrix} m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) & 0 & 0 \\ 0 & m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) & 0 \\ 0 & 0 & m \frac{R^2}{2} \end{bmatrix}_{(-,-,\vec{z})}$

d) Centre de symétrie :

Le centre de symétrie est l'intersection d'une infinité d'axes de révolution que possède le solide.

Les produits d'inertie sont nuls et les moments d'inertie sont égaux, donc la matrice est exprimée au centre de symétrie et dans toute base s'écrit

sous la forme suivante : $[I_G(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{(G,-,-,-)}$.



Exemple : Sphère creuse de rayon R de centre G.

On sait que: $I_O = \int_{p \in S} [\overline{OP}]^2 dm = \frac{I_{(O,\vec{x})} + I_{(O,\vec{y})} + I_{(O,\vec{z})}}{2} = \frac{A+B+C}{2}$, avec O origine du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Soit $O=G$: $I_G = I_O = \int_{p \in S} [\overline{OP}]^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int dm = mR^2$.

On a : $I_O = \frac{3}{2} A \Rightarrow A = \frac{2}{3} I_O \Rightarrow A = \frac{2}{3} mR^2$.

\Rightarrow **Matrice d'inertie d'une sphère creuse en G :** $[I_G(S)] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}mR^2 \end{bmatrix}_{(G,-,-,-)}$

Application :

Détermination de la matrice d'inertie d'une **sphère pleine** de rayon R au centre d'inertie G.

La forme de la matrice d'inertie : $[I_G(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & A \end{bmatrix}_{(G,-,-,-)}$

On utilise les coordonnées sphériques :

$$\begin{cases} x = r \cdot \sin \phi \cdot \cos \theta \\ y = r \cdot \sin \phi \cdot \sin \theta \\ z = r \cdot \cos \phi \end{cases} \text{ avec : } \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq R \end{cases}$$

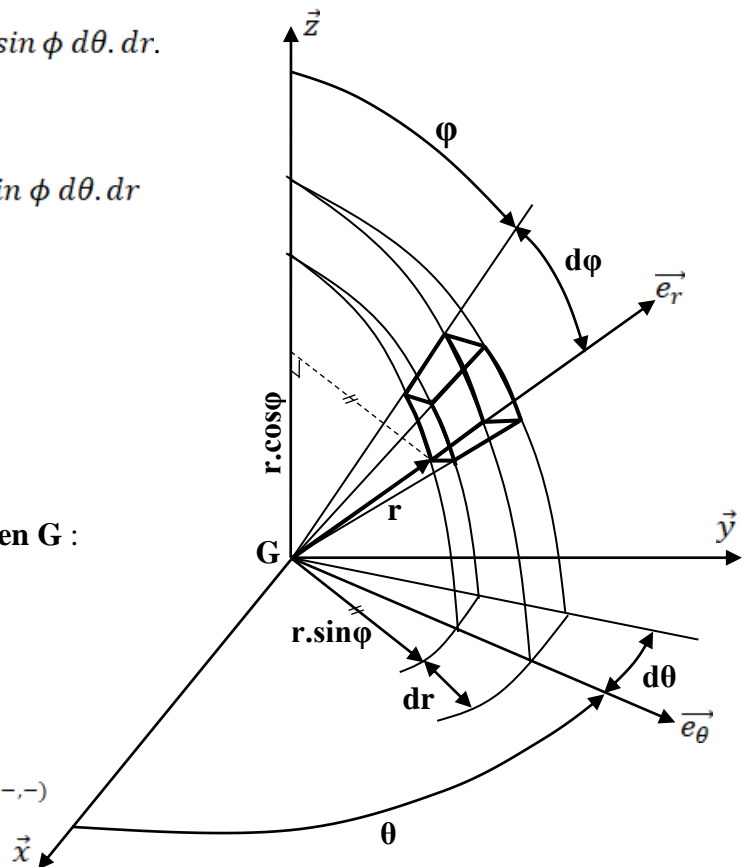
On a : $dm = \rho dv = \frac{m}{v} dv$, avec: $dv = r d\phi \cdot r \sin \phi d\theta \cdot dr$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } O=G : I_G = I_O &= \int_{p \in S} [\overline{OP}]^2 dm \\ &= \int r^2 dm = \frac{m}{v} \int r^2 dv = \frac{m}{v} \iiint r^2 \cdot r d\phi \cdot r \sin \phi d\theta \cdot dr \\ &= \frac{m}{v} \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \phi d\phi \\ &= \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cdot \frac{R^5}{5} \cdot 2\pi \cdot 2 = \frac{8\pi m R^2}{15} \end{aligned}$$

On a : $I_O = \frac{3}{2} A \Rightarrow A = \frac{2}{3} I_O \Rightarrow A = \frac{2}{5} mR^2$.

\Rightarrow **Matrice d'inertie d'une sphère pleine en G :**

$$[I_G(S)] = \begin{bmatrix} \frac{2}{5}mR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5}mR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{5}mR^2 \end{bmatrix}_{(G,-,-,-)}$$



5. Changement de point. Théorème de Huygens généralisé

Le théorème de Huygens permet la recherche de la matrice d'inertie en un point quelconque A à partir de la matrice d'inertie au point G (centre de gravité du solide):

Soit un solide (S) de masse m et de centre de gravité G, avec $\vec{AG} = x_G \vec{x} + y_G \vec{y} + z_G \vec{z}$.

$$\forall P \in S; \vec{J}_A(S, \vec{u}) = \int_{p \in S} \vec{AP} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AP}) dm = \int_{p \in S} (\vec{AG} + \vec{GP}) \wedge [\vec{u} \wedge (\vec{AG} + \vec{GP})] dm$$

$$\vec{J}_A(S, \vec{u}) = \int_{p \in S} \vec{AG} \wedge [\vec{u} \wedge \vec{AG}] dm + \int_{p \in S} \vec{AG} \wedge [\vec{u} \wedge \vec{GP}] dm + \int_{p \in S} \vec{GP} \wedge [\vec{u} \wedge \vec{AG}] dm + \int_{p \in S} \vec{GP} \wedge [\vec{u} \wedge \vec{GP}] dm$$

$$= \vec{AG} \wedge [\vec{u} \wedge \vec{AG}] \cdot \int_{p \in S} dm + \vec{AG} \wedge \left[\vec{u} \wedge \underbrace{\int_{p \in S} \vec{GP} \cdot dm}_{=0} \right] + \underbrace{\int_{p \in S} \vec{GP} \cdot dm}_{=0} \wedge [\vec{u} \wedge \vec{AG}] + \vec{J}_G(S, \vec{u})$$

$$\Rightarrow \vec{J}_A(S, \vec{u}) = [\vec{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AG})] \cdot m + \vec{J}_G(S, \vec{u})$$

On note : $\vec{J}_A(G(m), \vec{u}) = [\vec{AG} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{AG})] \cdot m$

$$\text{Donc, } \vec{J}_A(S, \vec{u}) = \vec{J}_G(S, \vec{u}) + \vec{J}_A(G(m), \vec{u}) \Rightarrow [I_A(S)] \cdot \vec{u} = [I_G(S)] \cdot \vec{u} + [I_A(G(m))]. \vec{u}$$

$$\Rightarrow [I_A(S)] = [I_G(S)] + [I_A(G(m))]$$

Avec $[I_A(G(m))]$: matrice d'inertie au point A du point matériel G de masse m(S).

$$\text{On a : } \vec{J}_A(G(m), \vec{x}) = \vec{AG} \wedge [\vec{x} \wedge \vec{AG}] m = m(y_G^2 + z_G^2) \cdot \vec{x} - mx_G y_G \cdot \vec{y} - mz_G x_G \cdot \vec{z}$$

$$\text{De même : } \vec{J}_A(G(m), \vec{y}) = \vec{AG} \wedge [\vec{y} \wedge \vec{AG}] m = -mx_G y_G \cdot \vec{x} + m(z_G^2 + x_G^2) \cdot \vec{y} - my_G z_G \cdot \vec{z}$$

$$\text{et } \vec{J}_A(G(m), \vec{z}) = \vec{AG} \wedge [\vec{z} \wedge \vec{AG}] m = -mz_G x_G \cdot \vec{x} - my_G z_G \cdot \vec{y} + m(x_G^2 + y_G^2) \cdot \vec{z}$$

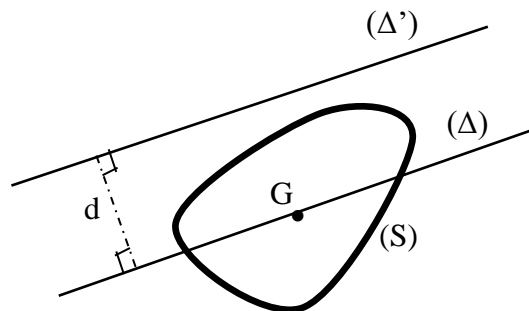
$$\vec{I}_A(G(m)) = m \begin{bmatrix} y_G^2 + z_G^2 & -x_G y_G & -z_G x_G \\ -x_G y_G & z_G^2 + x_G^2 & -y_G z_G \\ -z_G x_G & -y_G z_G & x_G^2 + y_G^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_A = A_G + m(y_G^2 + z_G^2) \\ B_A = B_G + m(z_G^2 + x_G^2) \\ C_A = C_G + m(x_G^2 + y_G^2) \end{cases} ; \begin{cases} D_A = D_G + my_G z_G \\ E_A = E_G + mz_G x_G \\ F_A = F_G + mx_G y_G \end{cases}$$

Remarque : Le calcul reste le même si on remplace \vec{AG} par \vec{GA} .

5.1 Théorème d'HYGHENS particulier :

$$I_{\Delta'} = I_{\Delta} + m \cdot d^2$$



6. Associativité des matrices d'inertie

Il peut être intéressant dans certains cas de faire une partition d'un solide en plusieurs solides élémentaires dont les matrices sont simples à calculer.

Pour un ensemble de solides $\Sigma = (S_1, \dots, S_n)$ on a : $[I_O(\Sigma)] = \sum_{i=1}^n [I_O(S_i)]$.

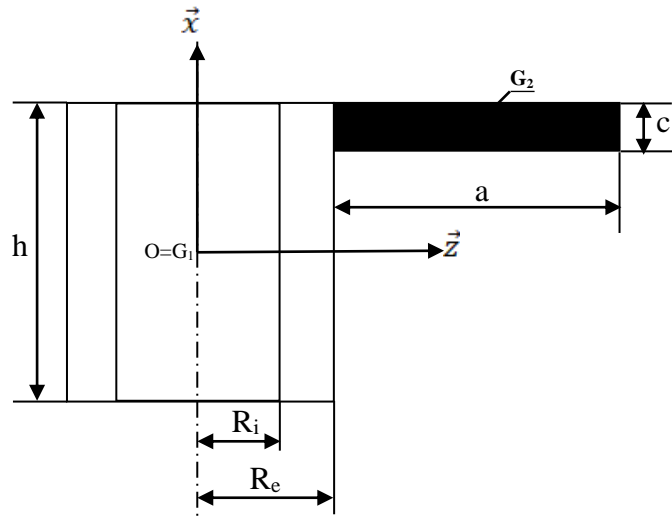
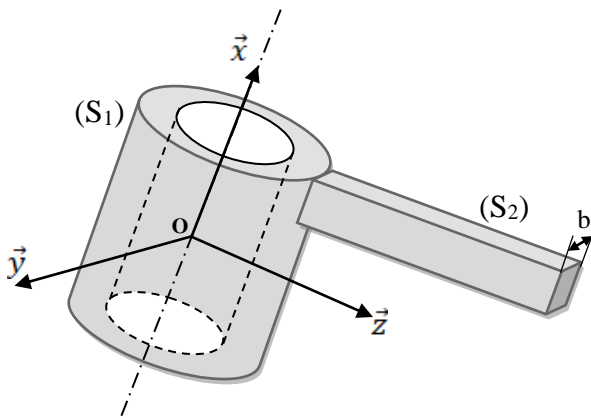
Application :

Le solide (S) de masse m est composé de :

- Cylindre creux (S₁) de masse **m₁**, de hauteur **h**, de rayon extérieur **R_e** et de rayon intérieur **R_i**.
- Parallélépipède (S₂) de masse **m₂**, de longueur **a**, de largeur **b** et de hauteur **c**.

Questions :

1. Donner la forme simplifiée de la matrice d'inertie du solide (S) au point O et dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
2. Connaissant la matrice d'inertie d'un cylindre plein, déduire la matrice d'inertie du cylindre creux (S₁) au point O et dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
3. Connaissant la matrice d'inertie d'un parallélépipède, déduire la matrice d'inertie du solide (S₂) au point O et dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$
4. Déduire la matrice d'inertie du solide (S) au point O et dans la base $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$



Réponses :

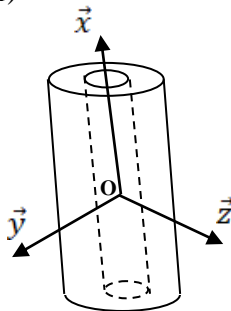
Q1.

Le solide (S) admet un plan de symétrie (O, \vec{z}, \vec{x}) , la forme de la matrice d'inertie s'écrit donc :

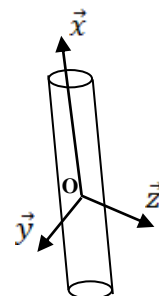
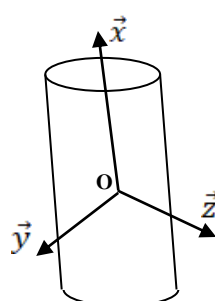
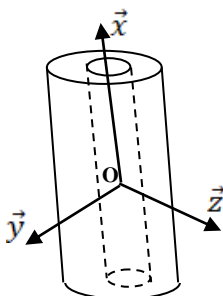
$$[\bar{I}_O(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

Q2.

Le solide (S₁) admet un axe de révolution (G_1, \vec{x}) , avec G₁=O.



$$[I_O(S_1)] = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, -, -)}$$



Solide : S₁
 Masse : $m_1 = m_{11} - m_{12}$
 Volume : $V_1 = V_{11} - V_{12}$
 Masse volumique : $\rho = \frac{m_1}{V_1}$

Solide : S₁₁ (cylindre plein de rayon R_e et de hauteur h)
 Masse volumique : ρ
 Volume : V₁₁
 Masse : $m_{11} = \rho \cdot V_{11} = \frac{m_1}{V_1} V_{11}$

Solide : S₁₂ (cylindre plein de rayon R_i et de hauteur h)
 Masse volumique : ρ
 Volume : V₁₂
 Masse : $m_{12} = \rho \cdot V_{12} = \frac{m_1}{V_1} V_{12}$

$$[I_O(S_1)] = [I_O(S_{11})] - [I_O(S_{12})] \Rightarrow \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, -, -)}$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 \\ 0 & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{11} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, -, -)} - \begin{pmatrix} A_{12} & 0 & 0 \\ 0 & B_{12} & 0 \\ 0 & 0 & B_{12} \end{pmatrix}_{(\vec{x}, -, -)}$$

$$A_1 = A_{11} - A_{12} = m_{11} \frac{R_e^2}{2} - m_{12} \frac{R_i^2}{2} = m_1 \cdot \frac{V_{11} R_e^2}{V_1} - m_1 \cdot \frac{V_{12} R_i^2}{V_1}$$

$$= m_1 \cdot \frac{\pi h}{2 \cdot \pi (R_e^2 - R_i^2) h} (R_e^4 - R_i^4) \Rightarrow \boxed{A_1 = m_1 \frac{(R_e^2 + R_i^2)}{2}}$$

$$B_1 = B_{11} - B_{12} = m_{11} \left(\frac{R_e^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) - m_{12} \left(\frac{R_i^2}{4} + \frac{h^2}{12} \right) = \frac{h^2}{12} \underbrace{(m_{11} - m_{12})}_{m_1} + \frac{1}{2} \underbrace{\left(m_{11} \frac{R_e^2}{2} - m_{12} \frac{R_i^2}{2} \right)}_{A_1}$$

$$= m \frac{h^2}{12} + \frac{A_1}{2} \Rightarrow \boxed{B_1 = m_1 \left(\frac{(R_e^2 + R_i^2)}{4} + \frac{h^2}{12} \right)}$$

On aura donc : $[I_O(S_1)] = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, -, -)}$, avec : $\begin{cases} A_1 = m_1 \frac{(R_e^2 + R_i^2)}{2} \\ B_1 = m_1 \left(\frac{(R_e^2 + R_i^2)}{4} + \frac{h^2}{12} \right) \end{cases}$

Q3.

On applique le théorème de Huygens : $[I_O(S_2)] = [I_{G_2}(S_2)] + [I_O(G_2(m_2))]$

On a : $[I_{G_2}(S_2)] = \begin{pmatrix} A'_2 & 0 & 0 \\ 0 & B'_2 & 0 \\ 0 & 0 & C'_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$, avec $\begin{cases} A'_2 = m_2 \frac{(b^2 + a^2)}{12} \\ B'_2 = m_2 \frac{(a^2 + c^2)}{12} \\ C'_2 = m_2 \frac{(c^2 + b^2)}{12} \end{cases}$

On a : $\overrightarrow{OG_2} = \frac{h-c}{2} \vec{x} + (R_e + \frac{b}{2}) \vec{z}$; Ce qui donne :

$$[I_O(G_2(m_2))] = \begin{pmatrix} m_2(R_e + \frac{b}{2})^2 & 0 & -m_2(R_e + \frac{b}{2})(\frac{h-c}{2}) \\ 0 & m_2 \left\{ (R_e + \frac{b}{2})^2 + (\frac{h-c}{2})^2 \right\} & 0 \\ -m_2(R_e + \frac{b}{2})(\frac{h-c}{2}) & 0 & m_2(\frac{h-c}{2})^2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$$

On note : $[I_O(S_2)] = \begin{pmatrix} A_2 & 0 & -E_2 \\ 0 & B_2 & 0 \\ -E_2 & 0 & C_2 \end{pmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})}$, tel que $\begin{cases} A_2 = m_2 \left\{ \frac{(b^2 + a^2)}{12} + (R_e + \frac{b}{2})^2 \right\} \\ B_2 = m_2 \left\{ \frac{(a^2 + c^2)}{12} + (R_e + \frac{b}{2})^2 + (\frac{h-c}{2})^2 \right\} \\ C_2 = m_2 \left\{ \frac{(c^2 + b^2)}{12} + (\frac{h-c}{2})^2 \right\} \\ E_2 = m_2(R_e + \frac{b}{2})(\frac{h-c}{2}) \end{cases}$

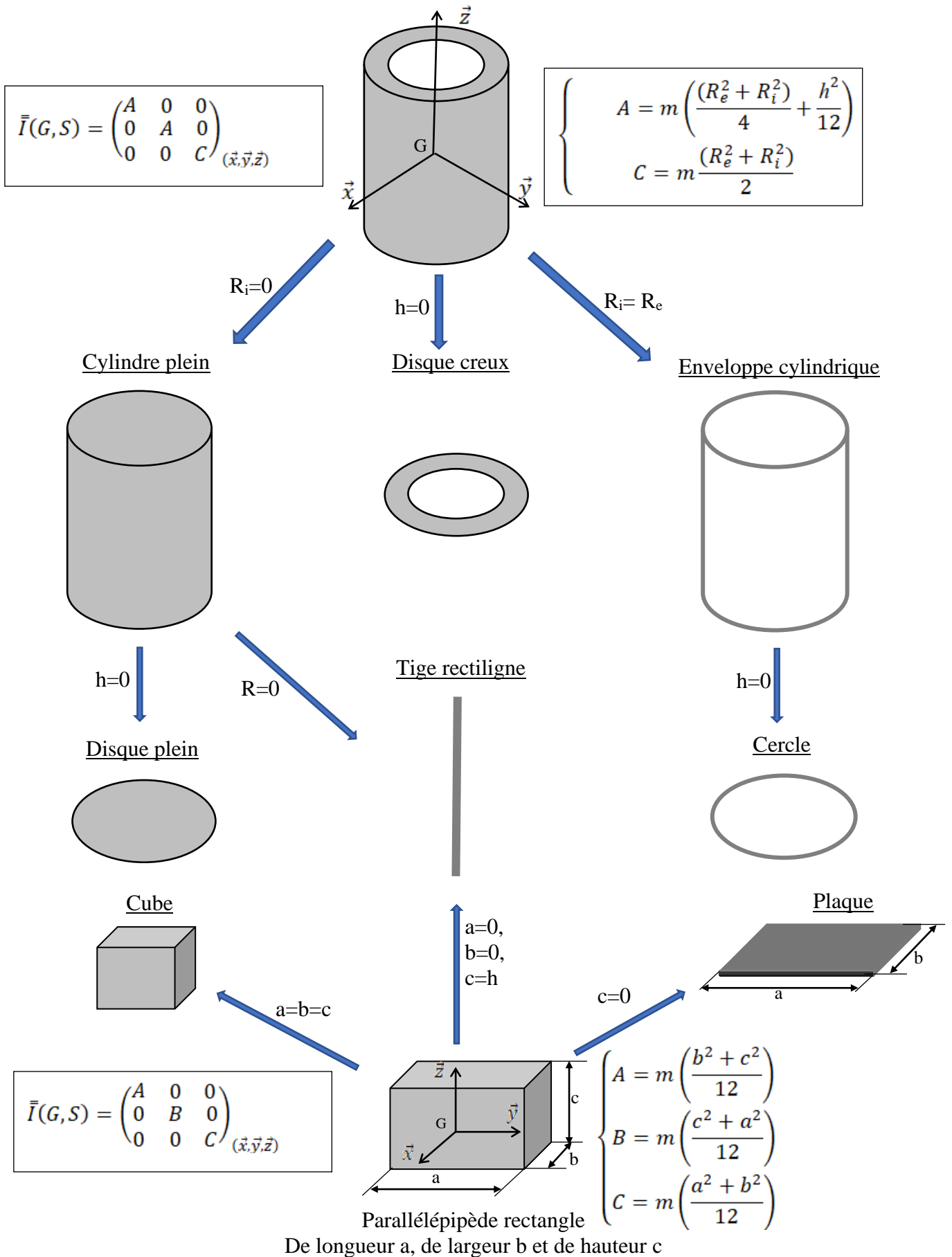
Q4.

$$[\bar{I}_O(S)] = \begin{bmatrix} A & 0 & -E \\ 0 & B & 0 \\ -E & 0 & C \end{bmatrix}_{(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})} = [\bar{I}_O(S_1)] + [\bar{I}_O(S_2)] \quad , \quad \text{tel que} : \begin{cases} A = A_1 + A_2 \\ B = B_1 + B_2 \\ C = C_1 + C_2 \\ E = E_2 \end{cases}$$

7.

Matrices d'inertie des solides usuels

Cylindre creux d'axe de révolution (G, \vec{z}) ,
de rayon extérieur R_e , de rayon intérieur R_i et de hauteur h



8. Torseur cinétique

8.1- Définition

Le torseur cinétique de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport à un repère R est, en tout point A quelconque, le torseur suivant :

$$\{C(E/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{p \in E} \vec{V}(P/R) dm \\ \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm \end{array} \right\}_A ; \quad \begin{array}{l} \int_{p \in E} \vec{V}(P/R) dm : \text{Résultante cinétique } (\vec{R}_c(E/R)) \\ \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R) dm : \text{Moment cinétique } \vec{\sigma}_A(E/R) \end{array}$$

Soit O l'origine du repère R et G le centre d'inertie de l'ensemble matériel (E) : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{p \in E} \overrightarrow{OP} dm$,

On a : $m \left[\frac{d\overrightarrow{OG}}{dt} \right]_R = \frac{d}{dt} \left(\int_{p \in E} \overrightarrow{OP} dm \right) = \int_E \frac{d}{dt} \overrightarrow{OP} dm = \int_{p \in E} \vec{V}(P/R) dm$

$\Rightarrow m \vec{V}(G/R) = \int_{p \in E} \vec{V}(P/R) dm$

$$\{C(E/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} m \vec{V}(G/R) \\ \vec{\sigma}_A(E/R) \end{array} \right\}_A$$

8.2- Relation de changement de point du moment cinétique

Soit B un point de (E) ; cherchons la relation entre $\vec{\sigma}_B(E/R)$ et $\vec{\sigma}_A(E/R)$:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_B \left(\frac{E}{R} \right) &= \int_{p \in E} \overrightarrow{BP} \wedge \vec{V} \left(\frac{P}{R} \right) \cdot dm = \int_{p \in E} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AP}) \wedge \vec{V} \left(\frac{P}{R} \right) \cdot dm \\ &= \overrightarrow{BA} \wedge \int_{p \in E} \vec{V}(P/R) \cdot dm + \int_{p \in E} \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P/R) \cdot dm = \overrightarrow{BA} \wedge m \cdot \vec{V}(G/R) + \vec{\sigma}_A(E/R) \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_B(E/R) = \vec{\sigma}_A(E/R) + \overrightarrow{BA} \wedge m \vec{V}(G/R)} \end{aligned}$$

8.3- Cas du solide indéformable

Soit un solide (S) de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Soit A un point lié au solide (S). On peut écrire : $\vec{V}(P \in S/R) = \vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}$;

On a $\vec{\sigma}_A(S/R) = \int \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R) \cdot dm = \int \overrightarrow{AP} \wedge \vec{V}(A \in S/R) \cdot dm + \int \overrightarrow{AP} \wedge (\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overrightarrow{AP}) \cdot dm$

$$= \left(\int \overrightarrow{AP} \cdot dm \right) \wedge \vec{V}(A \in S/R) + \vec{J}_A(S, \vec{\Omega}(S/R)) = m \cdot \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R) + \vec{I}_A(S) \cdot \vec{\Omega}(S/R)$$

$\Rightarrow \boxed{\vec{\sigma}_A(S/R) = [\vec{I}_A(S)] \cdot \vec{\Omega}(S/R) + m \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R)}$

$[\vec{I}_A(S)] \cdot \vec{\Omega}(S/R)$ est un vecteur obtenu par multiplication de la matrice d'inertie du solide S en A et du vecteur rotation → Ces deux grandeurs doivent donc être exprimées dans la **même base**.

• **Remarques importantes :**

- Si le point A est fixe dans le solide (S), le calcul de la vitesse $\vec{V}(A \in S/R)$ peut se faire par dérivation ou par changement de point.
- Si le point A n'appartient pas matériellement au solide, le calcul de la vitesse **doit** être fait par changement de point.

• **Cas particuliers :**

- Si le point A est confondu avec G : $\vec{\sigma}_G(S/R) = [\vec{I}_G(S)] \cdot \vec{\Omega}(S/R)$
- Si le point A est fixe (A ∈ matériellement à (S)) : $\vec{\sigma}_A(S/R) = [\vec{I}_A(S)] \cdot \vec{\Omega}(S/R)$
- Si le mouvement du solide (S) est une translation : $\vec{\sigma}_A(S/R) = m \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(A \in S/R)$

• **Relation de changement de point :** (Passant par G)

$$\vec{\sigma}_A(S/R) = \vec{\sigma}_G(S/R) + m \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G \in S/R) \quad \Rightarrow \quad \vec{\sigma}_A(S/R) = [\vec{I}_G(S)] \cdot \vec{\Omega}(S/R) + m \overrightarrow{AG} \wedge \vec{V}(G \in S/R)$$

9. Torseur dynamique

Le torseur dynamique de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport à un repère R est, en tout point A quelconque, le torseur suivant :

$$\{D(E/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} \int_{p \in E} \vec{\Gamma}(P/R) dm \\ \int_{p \in E} \overline{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R) dm \end{array} \right\}_A \Rightarrow \boxed{\{D(E/R)\} = \left\{ \begin{array}{l} m\vec{\Gamma}(G/R) \\ \vec{\delta}_A(E/R) \end{array} \right\}_A}$$

• **Relation de changement de point :**

$$\boxed{\vec{\delta}_B(E/R) = \vec{\delta}_A(E/R) + m\vec{\Gamma}(G/R) \wedge \overline{AB}}$$

10. Relation entre le moment cinétique et le moment dynamique

Il est souvent plus simple de déduire le moment dynamique du moment cinétique :

$$\vec{\delta}_{A(E/R)} = \int_{p \in E} \overline{AP} \wedge \vec{\Gamma}(P/R) dm = \int_{p \in E} \overline{AP} \wedge \left[\frac{d(\vec{V}(P/R))}{dt} \right]_R dm = \int_{p \in E} \left[\frac{d(\overline{AP} \wedge (\vec{V}(P/R)))}{dt} \right]_R dm - \int_{p \in E} \left[\frac{d(\overline{AP})}{dt} \right]_R \wedge \vec{V}(P/R) dm$$

$$\Rightarrow \vec{\delta}_{A(E/R)} = \left[\frac{d}{dt} \int_{p \in E} (\overline{AP} \wedge \vec{V}(P/R)) dm \right]_R - \int_{p \in E} \left[\frac{d(\overline{AO} + \overline{OP})}{dt} \right]_R \wedge \vec{V}(P/R) dm$$

$$\vec{\delta}_{A(E/R)} = \left[\frac{d(\vec{\sigma}_{A(E/R)})}{dt} \right]_R - \int_{p \in E} (-\vec{V}(A/R) + \vec{V}(P/R)) \wedge \vec{V}(P/R) dm$$

$$\Rightarrow = \left[\frac{d(\vec{\sigma}_{A(E/R)})}{dt} \right]_R + \int_{p \in E} \vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(P/R) dm$$

$$\Rightarrow \vec{\delta}_{A(E/R)} = \left[\frac{d(\vec{\sigma}_{A(E/R)})}{dt} \right]_R + \vec{V}(A/R) \wedge \int_{p \in E} \vec{V}(P/R) dm = \left[\frac{d(\vec{\sigma}_{A(E/R)})}{dt} \right]_R + \vec{V}(A/R) \wedge m\vec{V}(G/R)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{\delta}_{A(E/R)} = \left[\frac{d(\vec{\sigma}_{A(E/R)})}{dt} \right]_R + m\vec{V}(A/R) \wedge \vec{V}(G/R)}$$

• **Remarque importante :**

- Le point A n'est pas nécessairement fixe dans l'ensemble (E), donc le calcul de la vitesse $\vec{V}(A/R)$

doit être fait par dérivation : $\vec{V}(A/R) = \left[\frac{d(\overline{OA})}{dt} \right]_R$.

- Si le point A est fixe dans le solide (S), le calcul de la vitesse $\vec{V}(A/R)$ peut se faire par dérivation ou par changement de point, dans ce cas : $\vec{V}(A/R) = \vec{V}(A \in S/R)$.

↳ **Cas particuliers**

□ Le point A est fixe dans R : $\vec{\delta}_{A(E/R)} = \left[\frac{d(\vec{\sigma}_{A(E/R)})}{dt} \right]_R$

□ Le point A est confondu avec G : $\vec{\delta}_{G(E/R)} = \left[\frac{d(\vec{\sigma}_{G(E/R)})}{dt} \right]_R$.

11. Energie cinétique : L'énergie cinétique de l'ensemble matériel (E) dans son mouvement par rapport

à R est le scalaire suivant : $T(E/R) = \frac{1}{2} \int_{p \in E} [\vec{V}(P/R)]^2 dm.$

11.1- Cas du solide indéformable

Soit un solide (S) de masse m, de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Soit A un point lié au solide (S). Par définition on a :

$$\begin{aligned} T(S/R) &= \frac{1}{2} \int [\vec{V}(P \in S/R)]^2 . dm = \frac{1}{2} \int \vec{V}(P \in S/R) . [\vec{V}(A \in S/R) + \vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP}] . dm \\ &= \frac{1}{2} \left(\int \vec{V}(P \in S/R) . dm \right) . \vec{V}(A \in S/R) + \frac{1}{2} \int \vec{V}(P \in S/R) . [\vec{\Omega}(S/R) \wedge \overline{AP}] . dm \\ &= \frac{1}{2} m . \vec{V}(G/R) . \vec{V}(A \in S/R) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R) . \int [\overline{AP} \wedge \vec{V}(P \in S/R)] . dm \\ &= \frac{1}{2} m . \vec{V}(G/R) . \vec{V}(A \in S/R) + \frac{1}{2} \vec{\Omega}(S/R) . \vec{\sigma}_A(S/R) . dm \\ \Rightarrow T(S/R) &= \frac{1}{2} \left\{ m \vec{V}(G/R) \right\} \otimes \left\{ \begin{matrix} \vec{\Omega}(S/R) \\ \vec{V}(A \in S/R) \end{matrix} \right\} \Rightarrow T(S/R) = \frac{1}{2} \{C(S/R)\} \otimes \{\theta(S/R)\} \end{aligned}$$

L'énergie cinétique est le **comoment** entre le **torseur cinétique** et le **torseur cinématique**.

L'énergie cinétique ne dépend pas du point de calcul du comoment, il est donc préférable d'appliquer cette relation dans des points particuliers :

- En G, centre d'inertie : $T(S/R) = \frac{1}{2} \{ [I_G(S)] . \vec{\Omega}(S/R) \} . \vec{\Omega}(S/R) + \frac{1}{2} m \overline{V(G \in S/R)}^2$
- Pour un mouvement de rotation autour d'un point fixe O : $T(S/R) = \frac{1}{2} \{ [I_O(S)] . \vec{\Omega}(S/R) \} . \vec{\Omega}(S/R)$
- Pour un mouvement de rotation autour d'un axe fixe (O, u) : $T(S/R) = \frac{1}{2} . I_u . w_u^2$, avec I_u : moment d'inertie du solide (S) / à l'axe (O, u) et w_u : vitesse de rotation du solide (S) / à l'axe (O, u).
- Pour un mouvement de translation : $T(S/R) = \frac{1}{2} m \overline{V(G \in S/R)}^2$.

12. Eléments cinétiques d'un ensemble de solides

Soit (E) un système de n solides (S_i) en mouvement par rapport au repère R : $T(E/R) = \sum_{i=1}^n T(S_i/R)$

$$\begin{aligned} \{C(E/R)\} &= \sum_{i=1}^n \{C(S_i/R)\} = \left\{ \begin{matrix} m_E . \vec{V}(G_E/R) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}(G_i/R) \\ \vec{\sigma}_A(E/R) = \sum_{i=1}^n \vec{\sigma}_A(S_i/R) \end{matrix} \right\}; \\ \{D(E/R)\} &= \sum_{i=1}^n \{D(S_i/R)\} = \left\{ \begin{matrix} m_E \vec{\Gamma}(G_E/R) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{\Gamma}(G_i/R) \\ \vec{\delta}_A(E/R) = \sum_{i=1}^n \vec{\delta}_A(S_i/R) \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

13. Inertie équivalente ramenée à un axe

13.1 Définition

Dans le cas d'un système comportant plusieurs pièces en rotation à des vitesses de rotation différentes (et éventuellement certaines en translation), on appelle inertie équivalente ramenée à un axe Δ, l'inertie I_{éqΔ} que devrait avoir cet axe en rotation pour que l'énergie cinétique totale du système de pièces en rotation soit égale à : $E_{C\text{système}} = \frac{1}{2} I_{éq\Delta} w_{\Delta}^2$ où w_{Δ} représente la vitesse de rotation de l'axe Δ.

L'inertie équivalente ramenée à l'axe moteur permet d'estimer rapidement le dimensionnement d'un actionneur.

Méthode :

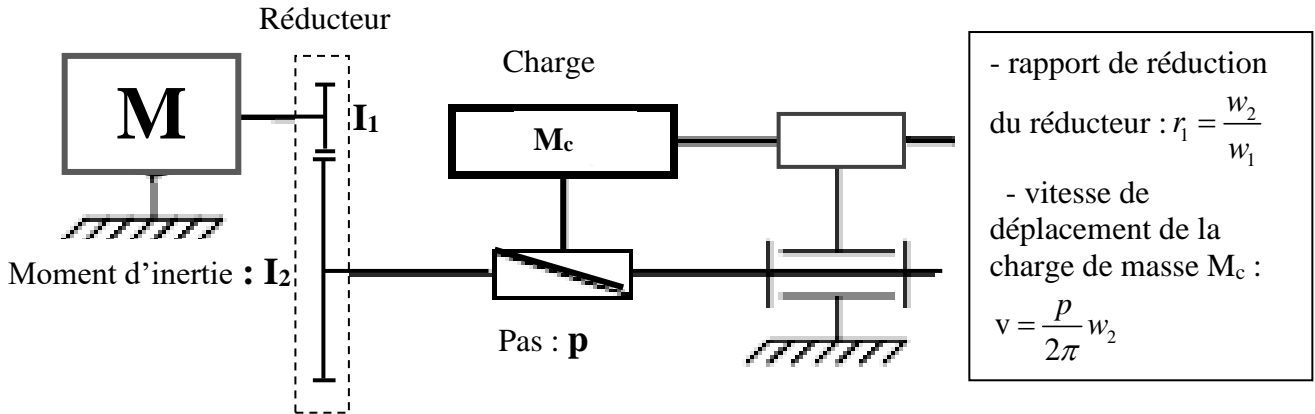
- Ecriture de l'énergie cinétique de chaque sous-ensemble cinématique.
- Ecriture des relations liant les paramètres cinématiques des sous-ensembles.
- Ecriture de l'énergie cinétique totale en fonction de la vitesse de l'actionneur.

Remarque : On peut aussi définir la masse équivalente ramenée sur un axe, en utilisant le même principe.

13.2 Exemple 1

On considère un système de transformation de mouvement composé de :

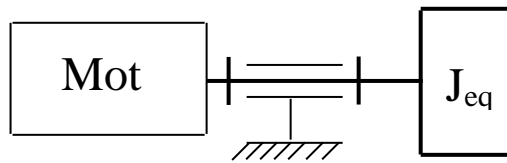
Moteur + réducteur + système vis-écrou + charge



L'énergie cinétique de l'ensemble en mouvement par rapport au référentiel galiléen R_0 lié au bâti :

$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} (I_1 \cdot w_1^2 + I_2 \cdot w_2^2 + M_c \cdot v^2) = \frac{1}{2} (I_1 + I_2 \cdot r_1^2 + M_c \cdot r_1^2 \cdot (\frac{p}{2\pi})^2) w_1^2$$

Schéma équivalent : $T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} J_{eq} \cdot w_1^2$



\Rightarrow L'inertie équivalente ramenée à l'arbre moteur est : $J_{eq} = I_1 + I_2 \cdot r_1^2 + M_c \cdot r_1^2 \cdot (\frac{p}{2\pi})^2$

13.3 Exemple 2 : Vérin + pignon-crémaillère

Loi entrée sortie cinématique : $w = \frac{v}{R}$

$$T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} (M_1 \cdot v^2 + I_2 \cdot w^2) = \frac{1}{2} (M_1 + \frac{I_2}{R^2}) v^2$$

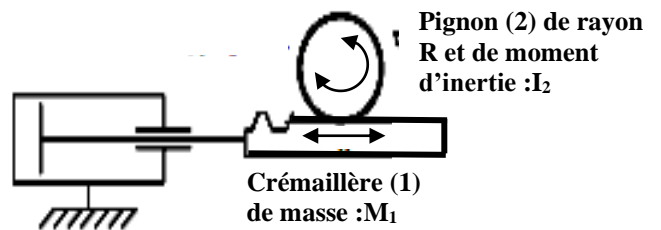
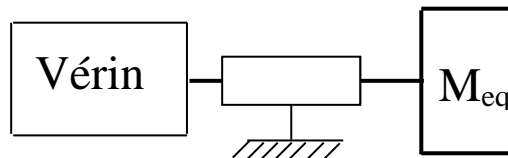


Schéma équivalent : $T(\Sigma/R_0) = \frac{1}{2} M_{eq} \cdot v^2$



\Rightarrow La masse équivalente ramenée sur l'axe du vérin est : $M_{eq} = M_1 + \frac{I_2}{R^2}$