Exercices d'algèbre linéaire

L1 MIASHS

2019 - 2020

Révisions

<u>Exercice</u> 1. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y = 0 \\ 2x + 4y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 3z = -2 \\ 2x + 3y + 2z = 0 \\ x + 4y - z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + 3z = a \\ x + z = b \\ x + 4y - z = c \end{cases}$$

<u>Exercice</u> 2. Résoudre suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - \alpha y = \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha x + (1-\alpha)y = \alpha \\ \alpha x + \alpha y = \alpha \end{cases}$$

<u>Exercice</u> 3. Résoudre suivant les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + \alpha y = -3 \\ \alpha x + 4y = 6 \end{cases}$$

Quelle interprétation géométrique du résultat faites-vous ?

<u>Exercice</u> 4. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ le système d'équations suivant admet-il une solution unique ? Aucune solution ? Une infinité de solution ?

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + \alpha z = 3 \\ x + \alpha y + 3z = 2 \end{cases}$$

<u>Exercice</u> 5. Trouver un polynôme de degré 3 tel que

$$P(X+1) - P(X) = X^2$$

En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

<u>Exercice</u> 6. Représenter les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ x+y < 1\right\} \\ A_2 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ |x+y| < 1\right\} \\ A_3 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ |x| + |y| < 1\right\} \\ A_4 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ x+y > -1\right\} \\ A_5 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ |x-y| < 1\right\} \\ A_6 &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ,\ x^2+y^2 < 1\right\} \end{aligned}$$

EXERCICE 7. Dans $\mathbb{R}^2$ on donne les points $A = (3, 1)$, $B = (-2, 0)$. Donner l'équation de la médiatrice du segment $[A, B]$

EXERCICE 8. Soit $(ABDC)$ un parallélogramme . Donner les coordonnées de D dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

EXERCICE 9. On considère la famille des droites D_λ d'équation $\lambda x+(\lambda+2)y-2 = 0$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$, ainsi que les droites D' d'équation $3x+2y-5 = 0$ et D'' d'équation $-9x-6y+7 = 0$.

1) Vérifier que les droites D_λ passent toutes par un même point A dont on donnera les coordonnées.

2) Montrer que les droites D' et D'' sont parallèles.

3) Pour quelle(s) valeur(s) de λ les droites D_λ et D' sont-elles parallèles ?

4) Pour quelle(s) valeur(s) de λ les droites D_λ et D' sont-elles perpendiculaires ?

EXERCICE 10. Dans $\mathbb{R}^3$ on donne les plans $P : x + 2y + 3z = -3$ et $P' : 2x + 5y - z = -1$.

Montrer que l'intersection des deux plans P et P' est une droite, notée D. Déterminer un point et un vecteur directeur de D.

Matrices

EXERCICE 11. On considr̀e les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 5 \\ 9 & 3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -5 \\ -5 & 2 & 9 \\ 1 & -6 & 3 \end{pmatrix}, I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 3 & 1 & 10 \end{pmatrix} \text{ et } J = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}.$$

A partir de ces matrices, effectuer toutes les sommes de matrices et tous les produits de matrices possibles.

EXERCICE 12. On considère deux matrices A et B de $\mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ et on suppose que $AB = BA$. Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(A + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$

EXERCICE 13. On considèra la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer J^2 et J^3 et en déduire J^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

Indication : On pourra écrire A comme somme de deux matrices qui commutent et utiliser la formule démontrée à l'exercice précédent.

<u>Exercice</u> 14. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On pose $B = A - I_3$.

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire l'expression de A^n.

<u>Exercice</u> 15. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exprimer A^3 en fonction de A^2, A et la matrice identité. En déduire que A est inversible et trouver A^{-1}.

<u>Exercice</u> 16. On considère la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $A\,{}^t\!A$ et ${}^t\!A\,A$.

2) En déduire que A est inversible et donner l'expression de A^{-1}.

3) Mêmes questions avec la matrice

$$B = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice</u> 17. Pour $\alpha \neq 0$, calculer l'inverse de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & -2 \\ 1 & \alpha+1 & \alpha-2 \\ 2 & 2\alpha+1 & 2\alpha-4 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice</u> 18. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $A^2 - 3A + 2I_2$. En déduire que A est inversible et calculer son inverse.

2) Pour $n \geq 2$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.

3) En déduire l'expression de la matrice A^n.

EXERCICE 19. On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Calculer P^{-1}.

2) Calculer $A' = P^{-1}AP$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PA'^nP^{-1}$.

3) On considère les suites données par $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + 2v_n \end{cases}$$

Calculer u_n et v_n en fonction de n.

Espaces vectoriels

EXERCICE 20. Soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel. On munit le produit cartésien $E \times E$ d'une loi de composition interne $+$ et d'une loi de composition externe définies comme suit :

$$\forall (x,y),(x',y') \in E \times E, \quad (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

$$\forall z = a + ib \in \mathbb{C}, \forall (x,y) \in E \times E, \quad z \star (x,y) = (ax - by, ay + bx).$$

Montrer que $(E \times E, +, \star)$ est un $\mathbb{C}$ - espace vectoriel.

EXERCICE 21. Soit $E = \mathbb{R}_+^*$ muni de la loi de composition interne définie par

$$\forall a, b \in E, \quad a \oplus b = ab$$

et de la loi de composition externe définie par

$$\forall a \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \otimes a = a^\lambda.$$

Montrer que $(E, \oplus, \otimes)$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel.

EXERCICE 22. Sur $E = \mathbb{R}^2$ on définit les deux lois suivantes :

$$\forall (x,y),(x',y') \in E, \quad (x,y) + (x',y') = (x+x', y+y')$$

$$\forall (x,y) \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \star (x,y) = (\lambda x, 0).$$

Est ce que $(\mathbb{R}^2, +, \star)$ est un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel ?

EXERCICE 23. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?

- ▷ $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y\}$
- ▷ $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\}$
- ▷ $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$
- ▷ $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\}$

EXERCICE 24. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

- $\triangleright$ $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \leq y\}$
- $\triangleright$ $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid xyz > 0\}$
- $\triangleright$ $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\}$
- $\triangleright$ $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y - 3z = 0\}$

<u>Exercice</u> 25. Soit E l'espace vectoriel de toutes les fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?

- $\triangleright$ $A = \{f \in E, 2f(0) = f(1)\}$
- $\triangleright$ $B = \{f \in E, f(1) = f(0) + 1\}$
- $\triangleright$ $C = \{f \in E, f \geq 0\}$
- $\triangleright$ $D = \left\{f \in E, \forall x \in [0, \frac{1}{2}],\ f(x) = 0\right\}$
- $\triangleright$ $H = \{f \in E, f \text{ est à valeurs dans } \{0,1\}\}$

<u>Exercice</u> 26. Parmi les sous-ensembles de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

- $\triangleright$ les matrices symétriques
- $\triangleright$ les matrices inversibles
- $\triangleright$ les matrices triangulaires
- $\triangleright$ les matrices triangulaires supérieures
- $\triangleright$ les matrices qui commutent avec une matrice donnée A
- $\triangleright$ les matrices M telle que $M^2 = M$
- $\triangleright$ les matrices de trace nulle

<u>Exercice</u> 27. On considère $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Les parties suivantes sont-elles des sous-espaces vectoriels de E ?

- $\triangleright$ $A = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\right\}$
- $\triangleright$ $B = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ monotone}\right\}$
- $\triangleright$ $C = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ convergente}\right\}$
- $\triangleright$ $D = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ nulle à partir d'un certain rang}\right\}$
- $\triangleright$ $D = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ constante à partir d'un certain rang}\right\}$

<u>Exercice</u> 28. Parmi les sous-ensembles $\mathbb{R}[X]$ suivants, lesquels sont des sous-espaces vectoriels :

- $\triangleright$ les polynômes de degré exactement 4
- $\triangleright$ les polynômes de degré inférieur ou égal à 4
- $\triangleright$ les multiples de $(X - 4)$
- $\triangleright$ les polynômes comportant seulement des monômes de degré pair
- $\triangleright$ les polynômes à coefficients positifs ou nuls

Exercice 29. Soit α un réel. On considère le sous-ensemble suivant de $\mathbb{R}^3$:

$$F_\alpha = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - z = \alpha\right\}.$$

Montrer que F_α est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\alpha = 0$.

Exercice 30. Soient $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b), a, b \in \mathbb{R}\}$.

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

2) Déterminer $F \cap G$.

Exercice 31. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et A et B deux sous-ensembles de E. Montrer que :

- ▷ Si $A \subset B$ alors $\mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(B)$
- ▷ $\mathrm{Vect}(A) \cup \mathrm{Vect}(B) \subset \mathrm{Vect}(A \cup B)$
- ▷ $\mathrm{Vect}(A \cap B) \subset \mathrm{Vect}(A) \cap \mathrm{Vect}(B)$
- ▷ $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}(\mathrm{Vect}(A))$

Exercice 32. Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1) Montrer que $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou bien $G \subset F$.

2) Montrer que $\mathrm{Vect}(F \cup G) = F + G$.

Exercice 33.

1) Deux droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$ sont-elles toujours supplémentaires ?

2) Deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ?

3) A quelle condition un plan vectoriel et une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sont-ils supplémentaires ? (On pourra répondre à cette question avec des considérations géométriques.)

Exercice 34. Dire dans chacun des cas si les sous-espaces vectoriels F et G de E sont en somme directe ? supplémentaire ?

1) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = z\}$ et $G = \{(\alpha, \beta, 0),\ \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$.

2) $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(2\alpha + \beta, \alpha + 2\beta, \alpha + \beta),\ \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(\alpha + \beta, \alpha + \beta, 2\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}\}$.

3) $E = \mathbb{R}^\mathbb{R}$, $F = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(1) = 0\}$, G est l'ensemble des fonctions constantes.

Exercice 35. On considère dans $\mathbb{R}^n$, le vecteur $e = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ et le sous-ensemble

$$H = \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\right\}$$

Montrer que H et $\mathrm{Vect}(e)$ sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 36. On considère $E = \mathbb{R}^\mathbb{R}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soient $F = \{f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = f(x)\}$ le sous-ensemble des fonctions paires et $G = \{f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R},\ f(-x) = -f(x)\}$ le sous-ensemble des fonctions impaires.

1) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.

2) Montrer que F et G sont supplémentaires.

<u>Exercice</u> 37. On considère E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont indéfiniment dérivables. On considère les sous-ensembles de E suivants :

- ▷ $F = \{f \in E \mid f(0) = f'(0) = 0\}$;
- ▷ $G = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = ax + b\}$ le sous-ensembles des fonctions affines ;
- ▷ $H = \mathrm{Vect}(\sin, \cos)$.

1) Montrer que F, G et H sont des sous-espaces vectoriels de E.

2) Montrer que F et H sont supplémentaires.

3) Montrer que F et G sont supplémentaires.

4) A-t-on $G = H$? Que peut on conclure ?

Bases

<u>Exercice</u> 38. On considère le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$ et $u_1 = (0, 0, 1)$, $u_2 = (0, 1, 1)$, $u_3 = (1, 1, 1)$ et $u_4 = (1, 2, 1)$.

1) $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ est-il un système libre ? générateur ?

2) $\{u_3, 2u_3 - u_4, u_4\}$ est-il un système libre ? générateur ?

3) $\{u_1, u_2, u_3\}$ est-il un système libre ? générateur ?

4) $\{u_1, u_2, u_4\}$ est-il un système libre ? générateur ?

5) $\{u_1, u_4\}$ est-il un système libre ? générateur ?

<u>Exercice</u> 39. Soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel et (e_1, e_2, e_3, e_4) une famille de de 4 vecteurs linéairement indépendants. Les familles suivantes sont-elles libres ?

- ▷ $(e_1, 2e_2, e_3)$
- ▷ (e_1, e_3)
- ▷ $(e_1, 2e_1 + e_4, e_4)$
- ▷ $(3e_1 + e_3, e_3, e_2 + e_3)$
- ▷ $(2e_1 + e_2, e_1 - 3e_2, e_4, e_2 - e_1)$

<u>Exercice</u> 40. Soient dans $\mathbb{R}^4$ les vecteurs $u = (1, 2, 3, 4)$, $v = (1, -2, 3, -4)$, $u' = (1, 0, 3, 0)$ et $v' = (0, 1, 0, 2)$.

1) Existe-t-il α et β tels que $(\alpha, 1, \beta, 1) \in \mathrm{Vect}(u, v)$? Qu'en est-il de $(\alpha, 1, 1, \beta)$?

2) Donner une équation de $\mathrm{Vect}(u, v)$.

3) Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(u', v')$.

Exercice 41. A quelle condition sur les paramètres $a, b \in \mathbb{R}$ les familles de vecteurs suivantes sont-elles des bases de $\mathbb{R}^3$?

▷ $(1,1,1), (0,a,1)$ et $(0,0,b)$.

▷ $(a,a,b), (a,b,a)$ et (b,a,a).

Exercice 42. On considère $E = \mathbb{R}^4$ et

$$F = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in E \mid x_1 + x_3 = 0, x_2 - x_4 = 0, x_2 + x_1 = 0\}.$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Déterminer une base de F.

3) Montrer que F admet un supplémentaire et en proposer un.

Exercice 43. Dans $E = \mathbb{R}^3$ on considère les sous espaces vectoriels $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et $G = \text{Vect}\{e_1, e_2, e_3\}$ où $e_1 = (1,-1,2)$, $e_2 = (1,1,-1)$ et $e_3 = (-1,-5,-7)$.

1) Donner une base de F.

2) Donner une base de G.

3) Donner une base de $F \cap G$.

Exercice 44. Soient a_1, a_2, a_3 trois réels distincts deux à deux. On définit les polynômes suivant dans $\mathbb{R}^2[X]$:

$$\phi_1(X) = \frac{(X-a_2)(X-a_3)}{(a_1-a_2)(a_1-a_3)},\ \phi_2(X) = \frac{(X-a_1)(X-a_3)}{(a_2-a_1)(a_2-a_3)},\ \phi_3(X) = \frac{(X-a_1)(X-a_2)}{(a_3-a_1)(a_3-a_2)}$$

1) Calculer $\phi_i(a_j)$ pour $i, j \in [\![1,3]\!]$.

2) Montrer que la famille (ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3) est génératrice. Pourquoi est-ce une base de $\mathbb{R}^2[X]$?

3) Calculer les coordonnées de $1, X$ et X^2 dans cette base.

Exercice 45. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et a, b deux réels tel que $a \neq b$.

1) Montrer que la famille $\mathscr{B} = \Big((X-a)^k\Big)_{0 \leq k \leq 2n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Déterminer les coordonnées de $(X-b)^n$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 46. Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la famille $\{x \mapsto \sin(kx),\ k = 1, \ldots, n\}$ est libre.

Exercice 47. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ avec $n \geq 2$. Soit F l'ensemble des polynômes P de E tels que $P(1) = P'(1) = 0$.

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Montrer que $P \in F$ si et seulement si $(X-1)^2$ divise P.

3) Donner une base de F et déterminer sa dimension.

<u>Exercice</u> 48. On considère E le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des suites réelles. Soit

$$F = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 3u_{n+1} + 2u_n = 0\}.$$

1) Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.

2) Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - 2u_{n-1}$.

a) Exprimer pour tout $n \geq 1$, v_n en fonction de n, u_0 et u_1.

b) Montrer à l'aide de la question précédente qu'il existe deux suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de F telle que

$$\forall u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F, \quad \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ telle que } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha a_n + \beta b_n.$$

3) Montrer que $\{a, b\}$ est une famille linéairement indépendante.

4) Déduire la dimension de F.

Applications linéaires

<u>Exercice</u> 49. Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

- ▷ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x + y)$
- ▷ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x - y, x^2 - y^2)$
- ▷ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (y, x, 0)$
- ▷ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y) = (y, x, 1)$
- ▷ $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = x + y + 2z$
- ▷ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + |y|$
- ▷ $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites réelles, $f : E \to \mathbb{R}^2$ définie par $f((u_n)_n) = (u_0, u_1 + u_2)$
- ▷ $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $f(P) = P'(0)$.

Pour celles qui sont linéaires, donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$. En déduire $\operatorname{rg} f$ et dire si f est injective, surjective ou bijective.

<u>Exercice</u> 50. Soient $n \geq 2$ et $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ qui à P associe

$$f(P) = P(1)X + P(0)(X^2 - 4).$$

Montrer que f est linéaire et trouver les dimensions de $\operatorname{Ker} f$ et de $\operatorname{Im} f$.

<u>Exercice</u> 51. Soient $E = \mathbb{R}^3$ et $f \in \mathscr{L}(E)$ définie par $\forall (x, y, z) \in E$, $f(x, y, z) = (z, y, z)$.

1) Calculer $f \circ f$.

2) Trouver une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

3) Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

<u>Exercice</u> 52. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f \circ f = f$ et $\operatorname{Ker} f \neq \{0_E\}$.On dit que f est le *projecteur* sur $\operatorname{Im} f$ parallèlement à $\operatorname{Ker} f$.

1) Montrer que $\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f = E$.

2) Soit $g = \operatorname{Id}_E - f$. Déterminer $\operatorname{Im} g$ et $\operatorname{Ker} g$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}^n$ muni d'une base $(e_1, \ldots, e_n)$. On note H le sous-espace vectoriel de E donné par

$$H = \{x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in E \mid x_1 + \ldots + x_n = 0\}.$$

On note $u = e_1 + \ldots + e_n$ et $D = \operatorname{Vect}\{u\}$. On rappelle que $E = H \oplus D$.

a) Soit $x \in E$. Donner la décomposition de x dans $H \oplus D$.

b) Donner la projection p sur H parallèlement à D et la projection q sur D parallèlement à H.

<u>Exercice</u> 53. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant $f \circ f = \operatorname{Id}_E$. On dit que f est une *symétrie* de E.

1) Montrer que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$ et $\operatorname{Im} f = E$.

2) Montrer que $F = \{x \in E \mid f(x) = x\} = \operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ et $G = \{x \in E \mid f(x) = -x\} = \operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}_E)$ sont supplémentaires dans E.

3) On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x, y, z) = (z, -y, x)$.

a) Montrer que f est une symétrie de $\mathbb{R}^3$.

b) Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(f - \operatorname{Id}_E)$ et une base de $\operatorname{Ker}(f + \operatorname{Id}_E)$.

<u>Exercice</u> 54. On considère l'application trace

$$\begin{aligned} Tr : M_n(\mathbb{R}) &\to \mathbb{R} \\ A = (a_{ij}) &\mapsto \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \end{aligned}$$

Déterminer les dimensions de $\operatorname{Im} Tr$ et $\operatorname{Ker} Tr$. Pour $n = 2$, donner une base de $\operatorname{Ker} Tr$.

<u>Exercice</u> 55. Soient f et g deux endomorphismes d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E.

1) Comparer $\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Ker}(g)$ et $\operatorname{Ker}(f + g)$.

2) Comparer $\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Im}(g)$ et $\operatorname{Im}(f + g)$.

3) Comparer $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Ker}(f^2)$.

4) Comparer $\operatorname{Im}(f)$ et $\operatorname{Im}(f^2)$.

<u>Exercice</u> 56. Soient E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels. On considère $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, E)$ telle que $f \circ g = \operatorname{Id}_F$.

1) Montrer que $\operatorname{Ker} g = \{0_F\}$ et $\operatorname{Im} f = F$.

2) Montrer que $g \circ f$ est un projecteur de E.

3) Montrer que $\mathrm{Im}(g \circ f) = \mathrm{Im}\, g$.

4) Montrer que $\mathrm{Ker}(g \circ f) = \mathrm{Ker}\, f$.

5) Dans quel cas peut on dire que f est inversible ?

<u>Exercice</u> 57. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Soient deux applications ϕ et ψ de E dans E définies par $\phi(P) = P'$ et $\psi(P) = XP$, pour tout $P \in E$.

1) Montrer que ϕ et ψ sont des endomorphismes de E.

2) Les applications ϕ et ψ sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

<u>Exercice</u> 58. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et soient f et g deux formes linéaires sur E. Montrer que

$$\mathrm{Ker}\, f = \mathrm{Ker}\, g \Longleftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, \text{ tel que } g = \lambda f.$$

<u>Exercice</u> 59. Soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension finie. On considère $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant :

$$\forall x \in E, \exists \lambda \in \mathbb{R}, f(x) = \lambda x.$$

Montrer que f est une homothétie, c'est à dire, $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ telle que $f = \lambda\, \mathrm{Id}$.

<u>Exercice</u> 60. On considère $\mathbb{R}_n[X]$ le $\mathbb{R}$ - espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Soit l'application Δ qui à tout élément $P \in \mathbb{R}_n[X]$ associe le polynôme $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2) Trouver $\mathrm{Ker}\, \Delta$ et $\mathrm{Im}\, \Delta$.

3) Montrer que Δ est nilpotent, c'est à dire qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ telle que $\Delta^k = 0$.

4) Déterminer des réels $\alpha_0, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ non nuls telle que :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \sum_{i=0}^{n+1} \alpha_i P(X+i) = 0.$$

<u>Exercice</u> 61. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectotiel E et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^3 = \mathrm{Id}$. Montrer que :

$$\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Im}(f - \mathrm{Id}) = E.$$

<u>Exercice</u> 62. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $f : E \to E$ un endomorphisme tel que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$. Montrer qu'alors, pour tout $x \in E$ tel que $f^{n-1}(x) \neq 0$, la famille

$$\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$$

est une base de E.

<u>Exercice</u> 63. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit f un endomorphisme de E. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$
2. $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$
3. $\operatorname{Im} f = \operatorname{Im} f^2$
4. $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$
5. $\operatorname{Ker} f = \operatorname{Ker} f^2$
6. $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0_E\}$

<u>Exercice</u> 64. Soient f et $g \in L(E)$ tels que $f \circ g = g \circ f$. Montrer que $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.

Représentation matricielle des applications linéaires

<u>Exercice</u> 65. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (2x + y, 3x - 2y)$.

1) Donner la matrice de f dans la base canonique $\mathscr{B}_0$ de $\mathbb{R}^2$.

2) Soit $v = (3, -4) \in \mathbb{R}^2$. Donner les coordonnées de $f(v)$ dans la base canonique.

3) On considère la famille $\mathscr{B}_1 = ((3, 2), (2, 2))$. Justifier que c'est une base, et donner la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ à $\mathscr{B}_1$.

4) En déduire les coordonnées de v et $f(v)$ dans $\mathscr{B}_1$.

5) Donner la matrice de f dans $\mathscr{B}_1$.

<u>Exercice</u> 66. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y - x \\ x - z \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que f est une application linéaire.

2) Exprimer la matrice de f dans la base suivante de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathscr{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

3) Ecrire la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4) Donner la matrice de f exprimée dans la base canonique.

<u>Exercice</u> 67. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer le rang de A. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de l'application linéaire associée f_A.

Mêmes questions pour la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 7 \\ 4 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \\ 3 & 3 & -2 & 11 \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice</u> 68. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer A^2. Que peut on déduire pour f ?

2) Déterminer une base de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$. Montrer que la réunion $\mathscr{B}'$ de ces deux bases est une base de E.

3) Quelle est la matrice de f dans $\mathscr{B}'$?

<u>Exercice</u> 69. Soit $\mathscr{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$et montrer qu'ils sont sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

2) Donner une base de $\operatorname{Ker} f$ et une base de $\operatorname{Im} f$. Soit $\mathscr{B}'$ la réunion de ces deux bases. Ecrire la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.

3) Décrire f géométriquement.

<u>Exercice</u> 70. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ représenté dans la base canonique $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Soit $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ avec $u = (1, 0, 1)$, $v = (-1, 1, 0)$ et $w = (1, 1, 1)$. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base.

2) Déterminer la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.

3) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice de f^n dans $\mathscr{B}$.

<u>Exercice</u> 71. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni d'une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ la famille définie par $u = e_1 + e_2 - e_3$, $v = e_1 - e_3$ et $w = e_1 - e_2$.

1) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E et donner la matrice M de f dans $\mathscr{B}'$.

2) Exprimer la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ et calculer P^{-1}.

3) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice</u> 72. Soit E un $\mathbb{R}$ - espace vectoriel de dimension 3 et $f \in \mathscr{L}(E)$ telle que $f^2 \neq 0$ et $f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle la matrice de f est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

<u>Exercice</u> 73. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que A et B ne sont pas semblables.

2) Montrer que A et C sont semblables.

<u>Exercice</u> 74. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Les matrices A et B sont-elles semblables ? (On pourra calculer A^2)

<u>Exercice</u> 75. On considère, dans $M_n(\mathbb{R})$, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

1) Donner l'expression de l'application linéaire $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ dont A est la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

2) En déduire A^p pour $p \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice</u> 76. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 et soit $\mathscr{B} = (u, v, w)$ une base de E. Montrer que $\mathscr{B}' = (x = v + w, y = w + u, z = u + v)$ est encore une base de E. Donner la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

<u>Exercice</u> 77. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$. On note $\mathscr{B}' = \{P_k, k = 0, 1, \dots, n\}$ où $P_k = X^k(1 - X)^{n-k}$.

1) Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de E.

2) Ecrire les matrices de passages de la base canonique vers $\mathscr{B}'$ et de $\mathscr{B}'$ vers la base canonique. (On pourra remarquer que $1 = X + (1 - X)$.)

<u>Exercice</u> 78. On considère $\mathbb{R}^3[X]$ muni de la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$.

1) Donner la matrice de l'endomorphisme $d : P \mapsto P'$ dans la base $\mathscr{B}$.

2) Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'application

$$\begin{aligned} T_a : \mathbb{R}^3[X] &\to \mathbb{R}^3[X] \\ P &\mapsto P(X+a) \end{aligned}$$

est linéaire. Donner la matrice M_a de T_a dans la base $\mathscr{B}$.

3) Déterminer $T_a \circ T_b$. En déduire $M_a M_b$.

4) Montrer de deux manières différentes que $d \circ T_a = T_a \circ d$.

Déterminant

<u>Exercice</u> 79. Calculer les déterminants des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -11 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & -2 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

<u>Exercice</u> 80. Pour a, b, c dans $\mathbb{R}$, cacluler le déterminant de

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$$

<u>Exercice</u> 81. Les famiels suivantes sont-elles libres ?

- ▷ $u = (1,2,3), v = (4,5,6), w = (2,1,0)$
- ▷ $u = (1,1,-1), v = (1,2,0), w = (-1,3,2)$

<u>Exercice</u> 82. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des réels. Montrer que

$$\det \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \dots & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_2^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

On appelle ce déterminant le *déterminant de Vandermonde.*

<u>Exercice</u> 83. On considère le déterminant

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Montrer, par des opérations sur les lignes et colonnes, que $D_n = D_{n-2}$.

2) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = \frac{1}{2}(1 + (-1)^n)$.

<u>EXERCICE</u> 84. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Montrer que s'il existe un endormorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}$, alors f est de dimension paire.

<u>EXERCICE</u> 85. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3 $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. On considère l'endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, montrer que $\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = (4 - \lambda)(1 - \lambda)(2 - \lambda)$.

2) Justifier qu'il existe trois vecteurs v_1, v_2 et v_3 non nuls tels que $f(v_1) = 4v_1$, $f(v_2) = 2v_2$ et $f(v_3) = v_3$. Trouver de tels vecteurs.

3) Montrer que $\mathscr{B}' = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de E et donner la matrice de f dans $\mathscr{B}'$.

<u>EXERCICE</u> 86. Soient a, b, c, d quatre réels tels que a, b, c sont deux à deux distincts. En utilisant la formule de Cramer, résoudre

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

<u>EXERCICE</u> 87. On considère $E = M_2(\mathbb{R})$. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de E et $\mathscr{B}$ la base canonique de E :

$$\mathscr{B} = \left(E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

1) Montrer que l'application $f_A : E \to E$ définie par $f_A(M) = AM$ est linéaire.

2) Donner la matrice de f_A dans la base $\mathscr{B}$.

3) Calculer le détemrinant de f_A. En déduire une condition à laquelle f_A est un isomorphisme. Donner, dans ce cas, l'expression de f_A^{-1}.

4) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que f_A est un isomorphisme et donner la matrice de f_A^{-1} dans la base $\mathscr{B}$.